Congrès de la SBPMef
Dinant 24-25-26 août 2010

Compte rendu de la conférence de Colette PENAO et Francis REYNÈS

Le langage mathématique, pourquoi, comment ?...

Comment "penser mathématiquement" sans avoir une idée de la **nature** des "objets mathématiques", sans connaître les **mots** fondamentaux du langage mathématique puisque, comme l'a si bien dit Hegel, « C'est dans le mot que nous pensons. » ? Il faut savoir **de quoi** on parle et **comment** on en parle. Il ne nous a pas fallu beaucoup d'années pour pressentir que l'enseignement des mathématiques en France mettait trop souvent, comme on dit, "la charrue avant les bœufs". Il nous en a fallu davantage pour pointer l'origine de diverses incompréhensions et erreurs récurrentes. Les réformes qui ont défilé n'ont guère apporté d'amélioration sensible, loin s'en faut. Notre exposé ne sera donc influencé par aucune "ligne officielle" mais seulement par les constats que nous avons pu établir ainsi que les réflexions et tentatives que nous avons pu mener.

Nous présenterons des fiches-élèves accompagnées d'une courte présentation et/ou de commentaires sur leur utilisation et les réactions des élèves. Leur choix s'étale *a priori* sur les trois premières années du collège, mais on peut parfois extrapoler, si le besoin s'en manifeste...

Nous parlerons relativement peu, et seulement sur des exemples “élémentaires”, du symbolisme mathématique et de la rupture qu'il opère avec le langage habituel[1] : ce serait l'objet d'une tout autre conférence ; notre choix a été précisément de nous situer en amont de son usage systématique, pour pouvoir tenter de construire une approche du “monde mathématique” qui ne paraisse pas trop “rébarbative”, qui soit aussi simple et éclairante que possible, qui amène peu à peu l'élève à une certaine familiarité avec son “paysage” si particulier et qui puisse servir de fondation aux développements futurs.

[1] Contrairement à certaines apparences, le symbole a pour fonction essentielle de rendre inséparables la forme et le sens. C'est par là qu'il se distingue du mot, puisque l'essence du mot ou en général du discours consiste à rendre séparables la forme et le sens.

Il est vrai que le symbolisme mathématique tend à dégager les structures formelles de tout contenu matériel, de toute intuition empirique. Mais, ce faisant, il tend à ramener toute la question du sens à une question de syntaxe, d'expression bien formée, de telle sorte qu'au simple examen d'une formule on puisse juger de sa validité. Il n'en est pas du tout ainsi dans le langage courant : on peut très bien respecter la grammaire et raisonner de façon incohérente, confuse, équivoque ; les règles de la grammaire et les règles de la logique représentent deux juridictions différentes. Les règles de l'expression symbolique au contraire constituent directement une grammaire logique, une syntaxe logique. Il n'y a plus qu'une seule juridiction.

(Edmond ORTIGUES : Le discours et le symbole).

I) La photocopie ci-dessus est celle d'une reproduction d'un tableau du peintre René MAGRITTE.
Il a intitulé ce tableau : *"**La trahison des images**"*.

1°) Que penses-tu de ce tableau ?

2°) Pourquoi, à ton avis, le peintre a-t-il choisi ce titre ?

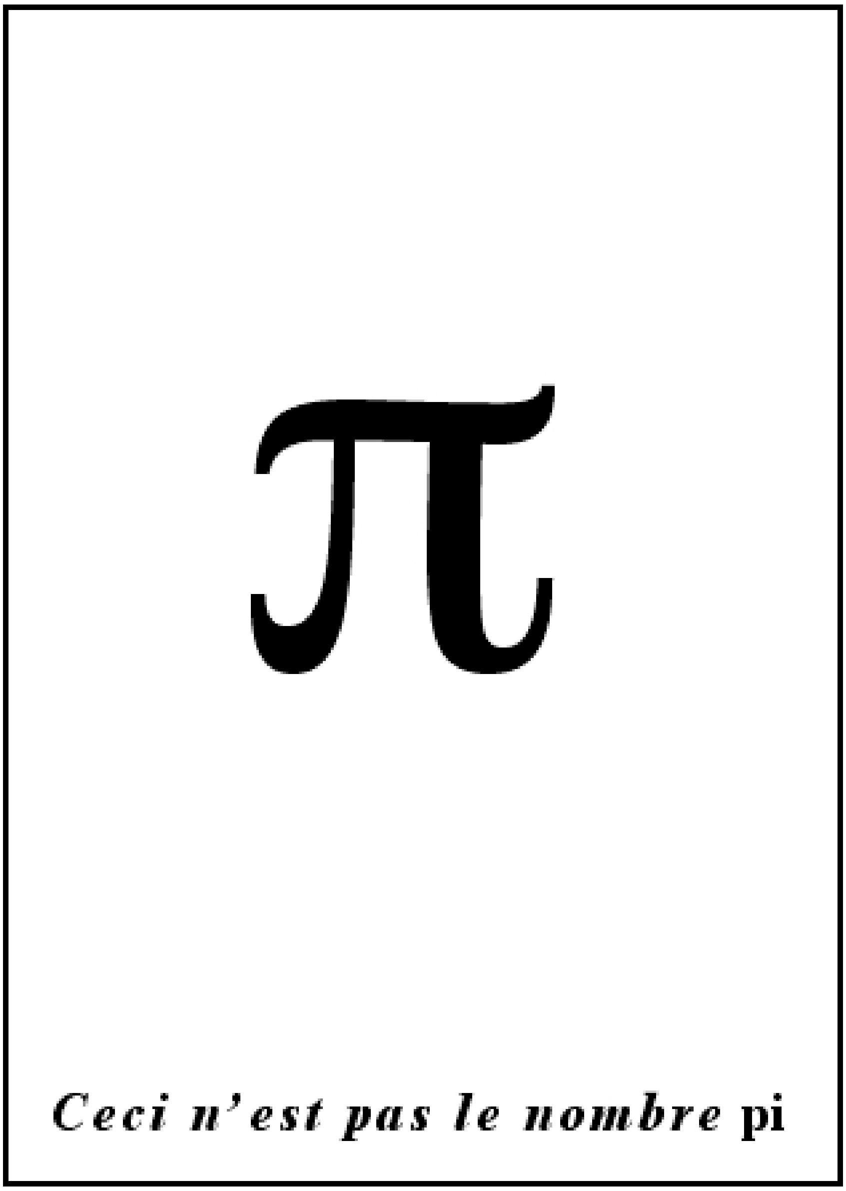
COMMENTAIRE : Il ne faut pas une longue discussion pour se mettre d'accord : l'image d'une pipe n'est pas une "vraie" pipe (on ne peut pas fumer avec !), et les élèves sont capables de fournir plusieurs synonymes du mot "trahison" employé ici. Demandez-leur ensuite de trouver d'autres exemples de "trahisons des images" et ils vous citeront la télévision !

Conclusion à retenir : **une image d'un objet n'est pas cet objet.**

II) Et que penses-tu du “tableau” ci-dessous ?
Pourrait-on aussi l’intituler “La Trahison des images” ?
Pourquoi ?

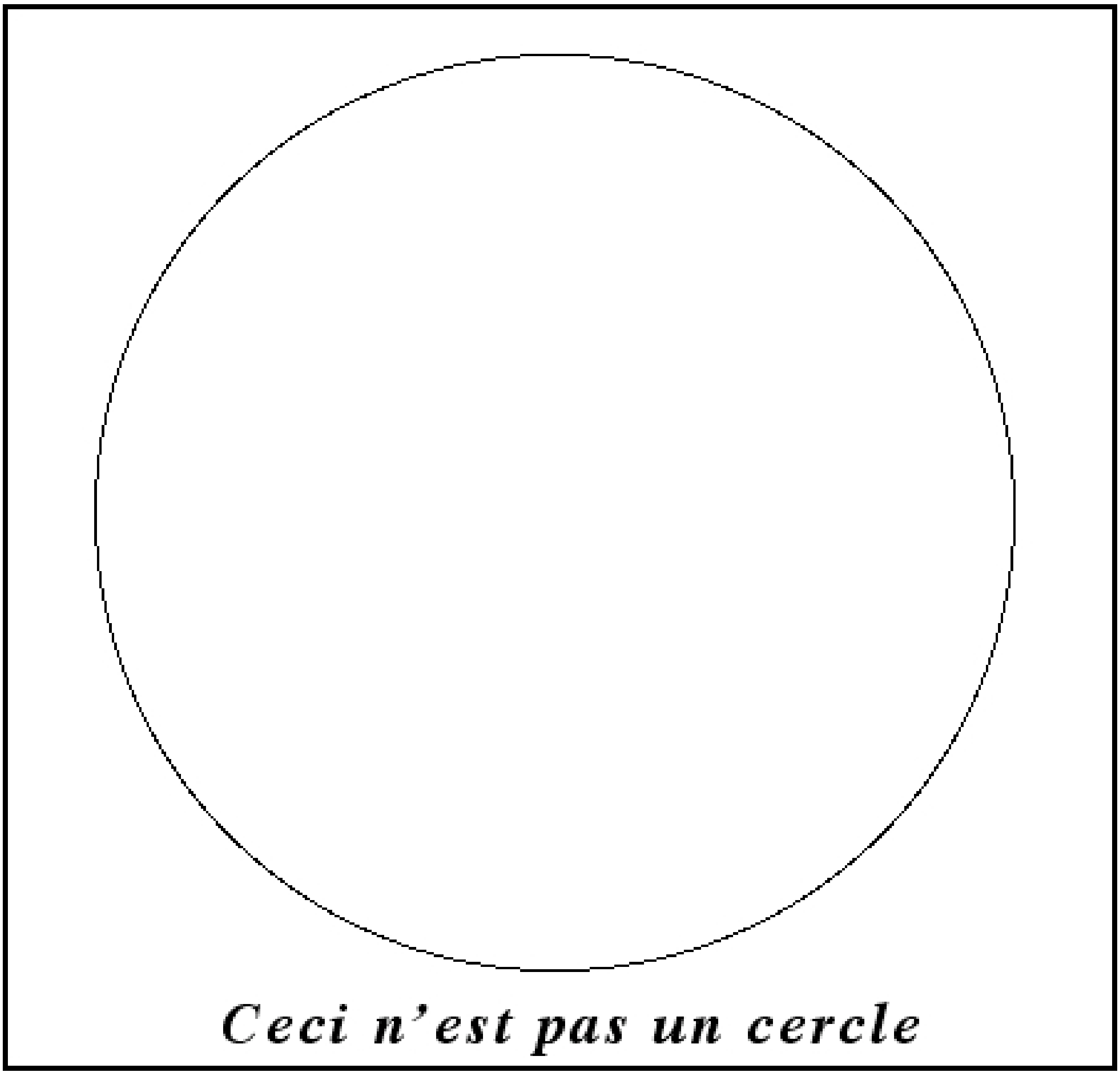
COMMENTAIRE : Contrairement au cas précédent, il n’existe “réellement” aucun objet correspondant à cette image. L’“***objet***” est ici fictif, imaginaire, **imaginé**... A l’époque des «images virtuelles» cela n’étonne plus personne et l’exemple des œuvres de fiction (film, BD, vidéo ...) est vite trouvé. De même la création d’un nouvel objet (avion, automobile ...) débute par une phase de conception où l’on représente par des plans, des dessins (de plus en plus sur ordinateur) un objet qui n’existe pas encore. On a donc ici un premier pas vers l’abstraction : **on peut représenter des “idées”.**

III) Et que penses-tu du tableau ci-dessous ?
Pourrait-on aussi l'intituler "La Trahison des images" ?
Pourquoi ?



COMMENTAIRE : on aborde à présent le domaine mathématique, ce qui permet de faire la synthèse des deux cas précédents. Un nombre n'est pas un objet matériel mais un "objet imaginaire", une idée : un nombre se pense (cf. le "calcul mental") et aussi se représente, s'écrit ; et, bien sûr, une écriture d'un nombre **n'est pas** ce nombre**…**

IV) Et que penses-tu du tableau ci-dessous ?
Pourrait-on aussi l'intituler "La Trahison des images" ?
Pourquoi ?



COMMENTAIRE : Un nombre non négligeable d'élèves affirme, d'un air presque soulagé : "Ah, cette fois-ci, non : ça, c'**est** un cercle ! " (ce qui lance tout de suite le débat). Pour eux, il n'y a pas ici "trahison des images". Ce qui signifie que, **pour eux, un cercle n'est pas autre chose qu'une image de cercle**, autrement dit qu'un cercle, et plus généralement tout autre "objet géométrique", n'est pas un "objet idéel" mais un **objet physique** !

Lorsqu'on connaît la prégnance du dessin en géométrie ("on voit sur la figure"...) on ne s'en étonne guère. Un cercle n'est pas un "rond" mais un "objet imaginé" et, une fois de plus, une image d'un cercle n'est pas un cercle.

Il ne faudra donc pas craindre de rappeler, si besoin est, cette petite séquence de "trahison des images"...

APPROCHE COMPLEMENTAIRE
PREAMBULE AU CONCEPT D'EGALITE

On écrit au tableau :

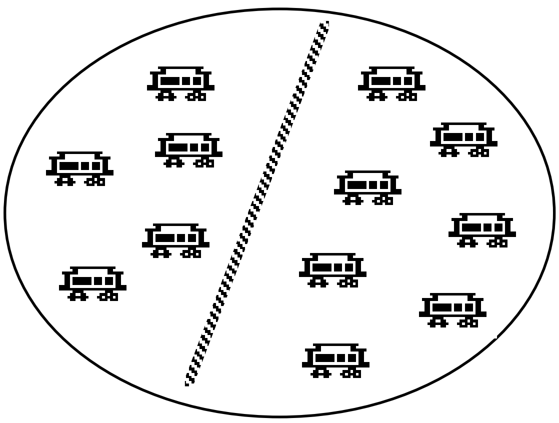
12

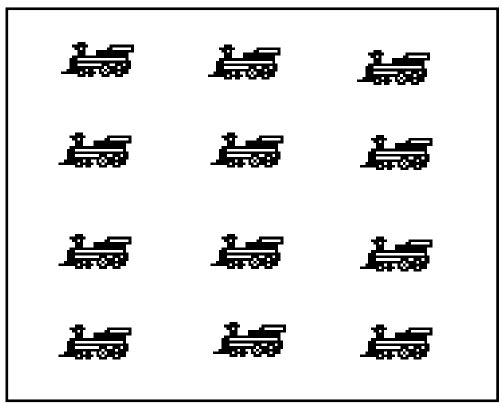
et l'on demande — une fois encore — qu'est-ce que c'est ?

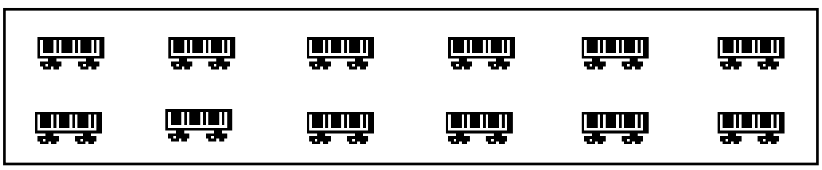
Les réponses sont diverses : douze - le chiffre douze - le nombre douze.
Les deux dernières réponses sont l'occasion de préciser et différencier l'emploi des deux mots, trop souvent confondus.

Par analogie avec ce qui a été fait précédemment, certains disent, peut-être pour nous faire plaisir sans pour autant en être vraiment convaincus :
« c'est “le” dessin de douze » ou « c'est “la” représentation de douze » ou encore « c'est “l”image de douze » mais aucun ne dit « “**une écriture**” de douze » : manifestement ni l'usage de ce nom ni celui de l'article indéfini ne sont encore intégrés, naturels.

Pour “enfoncer le clou” et tenter de faire comprendre plus profondément que douze est un “objet abstrait”, une idée que l'on dans la tête — et donc à laquelle on peut penser — on présente alors le dessin suivant, autre moyen de comprendre qu'une certaine vision, une certaine lecture, une certaine appropriation d'une situation concrète peut engendrer de l'abstrait si elle permet de créer des relations.







On demande simplement aux élèves de dire ce qu'ils remarquent, ce à quoi ce dessin les fait penser, et on en discute avec eux.

Observer ces trois groupes conduit finalement les élèves à dire : « il y a **le même nombre d'objets** dans chaque cadre**, on peut faire douze petits trains ». Le fait de prononcer "douze" sans le lire aide à concevoir et comprendre la nature abstraite de ce nombre : on ne le lit pas, on ne le voit pas, mais, en comparant le contenu des trois cadres, on en a l'idée.**

L'étape suivante consiste à mettre en évidence les dispositions particulières à chaque cadre et à les **traduire par les "écritures" 5 + 7 (ou 7 + 5), 4 x 3 (ou 3 x 4) et 2 x 6 (ou 6 x 2), qui sont toutes des représentations du nombre douze.**

On peut alors, et dès la classe de sixième, commencer le travail sur le langage mathématique en prenant les écritures deux par deux et en utilisant des formulations synonymes :

5 + 7 et 4 x 3 représentent le même nombre.
5 + 7 et 4 x 3 désignent le même nombre.
5 + 7 représente le même nombre que 4 x 3.
5 + 7 désigne le même nombre que 4 x 3.
Et en langage mathématique on dira : 5 + 7 est égal à 4 x 3.

La formulation "est égal à" est de loin préférable à "égale" car cette dernière se confond trop facilement avec l'adjectif "égal", or il faut un verbe pour faire une phrase décrivant cette situation.
On peut alors formaliser le langage en remplaçant l'écriture "est égal à" par le signe " = ", et il faut bien insister sur le fait que ce signe fait office de groupe verbal.

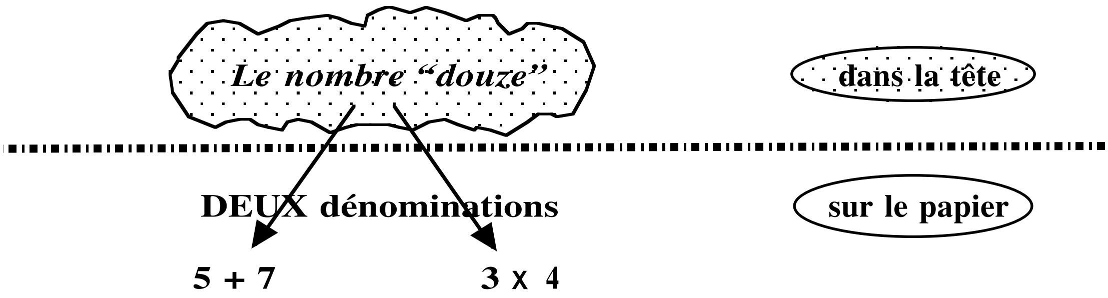
On a ainsi un premier exemple d'écriture mathématique avec une phrase construite sur un modèle qui sera très couramment utilisé :

un groupe sujet au singulier - un groupe verbal au présent - un groupe complément ou attribut au singulier.

Tout ce travail est nécessaire pour "dépasser" de précédentes habitudes opératoires liées au "faire" : par exemple une écriture telle que 5 + 7 est interprétée comme une opération à effectuer et non comme un "nom de nombre", le signe " = " est l'annonce d'un "résultat", etc.

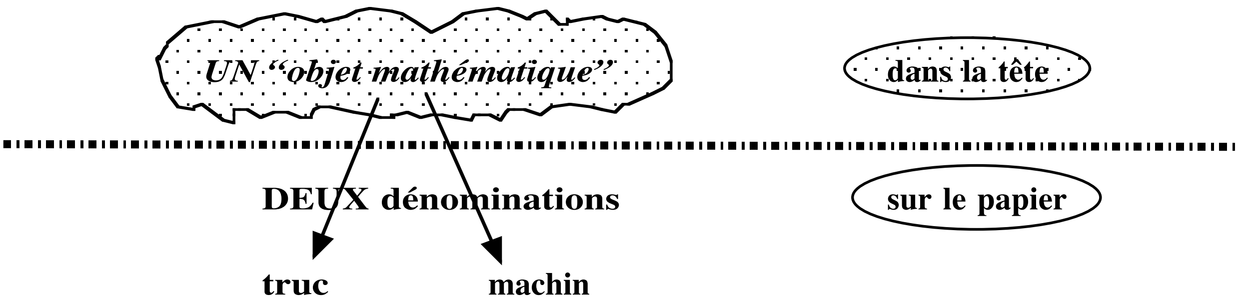
On peut alors distribuer la fiche suivante et la lire ensemble en la commentant, par exemple en faisant remarquer les différents mots synonymes dénomination, désignation, nom, ... et au final demander aux élèves d'inventer quelques exemples de substitution.

DENOMINATIONS EGALES



Les deux dénominations "5 + 7" et "3 x4" désignent <u>LE même</u> nombre :

on dit qu'elles sont <u>égales et on traduit</u> : 5 + 7 = 3 x 4.



La phrase "truc = machin" <u>se lit</u> : ***truc est égal à machin***   **<u>et signifie</u> :** ***les deux dénominations*** **truc** ***et*** **machin** ***désignent***   ***<u>un seul</u> et même objet.***

Le signe "=" signifie : "**désigne le même objet que*****".***

<u>Mode d'emploi : propriété de substitution</u>

Puisque deux dénominations égales désignent <u>LE même</u> objet :

On peut toujours remplacer une dénomination par une dénomination égale.

<u>Exemples</u> : 3 x4 = 12 , donc 3 x4 + 57 = 12 + 57

741/13 = 57 , donc 741/13 — 28 = 57 — 28

11 = 10 + 1 , donc 26 x 11 = 26x(10 + 1) Attention aux parenthèses !

9 = 10 — 1 , donc 78 x 9 = 78x(10 — 1) (commode pour le calcul mental !)

LANGAGE MATHEMATIQUE

Toute science a besoin d'un langage pour pouvoir exprimer ses idées. Le langage mathématique a pour base la langue habituelle, mais il a des particularités **:**

– **certains mots ont un sens différent du sens commun** (point, droite, différence, terme, produit, facteur, milieu, centre, angle, égalité ...)**.**

– **certains mots sont "techniques"** et rarement utilisés en dehors du domaine mathématique (numérateur, médiatrice, factorisation, ...)**.**

– il utilise des ***codages*** avec des ***conventions d'écriture*** et des ***signes*** spéciaux dont il faut connaître le sens et l'usage. Par exemple **:**

[A B] ***désigne*** **le segment d'extrémités A et B.**

A B ***désigne*** **la distance entre le point A et le point B.**

(L F) ***désigne*** **la droite passant par les points L et F.**

+ ***désigne*** **l'opération d'addition.**

/ ***désigne*** **l'opération de division.**

Le langage mathématique est un langage fait pour être écrit.

Il y a deux grandes catégories d'écritures à savoir distinguer :

1°) les dénominations (les noms) d'objets mathématiques.

Exemples : 12 ; 17 + 9 ; 51/3 ; – 27,349 ; 3x(m – 5) ; π ; (A B) ; le triangle TSF ; la parallèle à la droite D passant par le point E ; le cercle de centre K et de rayon 7,75 cm **;** la distance du point F au point L.

2°) les phrases (appelées aussi *propositions* ou *énoncés*).

Beaucoup de phrases mathématiques sont construites suivant le modèle simple **:**

groupe sujet – ***groupe verbal*** **– attribut ou complément.**

Exemples : (E L) ***est la médiatrice de*** [K F] **.** T ***appartient à*** la droite (R S)**.**

Le **groupe verbal** est parfois ***codé*** par un ***signe*** **spécial. Exemples :**

$5 + 7 = 36/3$; $19 < 21$; $T \in (R\,S)$; $(B\,C) /\!/ (F\,T)$; $(E\,L) \perp (K\,F)$.

En langage mathématique :

1) Une phrase est soit vraie, soit fausse : une troisième éventualité est exclue.

Par conséquent : si une phrase n'est pas vraie, alors c'est qu'elle est fausse,

et si une phrase n'est pas fausse, alors c'est qu'elle est vraie.

2) Il n'y a pas de sous-entendu, d'implicite : tout doit être dit clairement.

Il faut faire très attention à ne pas faire dire à une phrase plus que ce qu'elle dit !

Par exemple la phrase "A B C désigne un triangle quelconque" ne dit pas que ce triangle est isocèle : donc on considèrera qu'il ne l'est pas !

De même la phrase "M A T H désigne un parallélogramme" ne dit pas que ce parallélogramme est un rectangle : donc on considèrera qu'il ne l'est pas !

TRADUCTIONS

Quelques exercices du niveau 6è-5è où l'on voit comment le verbe **être** utilisé en français peut se traduire par **être égal à**, autrement écrit "**=**" en langage mathématique.

1°) Traduis en langage mathématique "le double de quinze" : ....

Quel est le résultat de la multiplication de 15 par 2 ? .... Le nombre appelé "trente" est-il le même que celui appelé "le double de quinze" ? ....

En français on dit : trente **est** le double de quinze.

En mathématique on traduit cela par : ....

2°) Traduis en langage mathématique "le tiers de trente-six" : ....

Quel est le résultat de la division de 36 par 3 ? .... Le nombre appelé "douze" est-il le même que celui appelé "le tiers de trente-six" ? ....

En français on dit :

En mathématique on traduit cela par :

3°) Traduis en langage mathématique "la somme de treize et de quinze" :..............

Quel est le résultat de l'addition de 15 à 13 ? .... Le nombre appelé "vingt-huit" est-il le même que celui appelé "la somme de treize et de quinze" ? ....

En français on dit :

En mathématique on traduit cela par :

4°) Traduis en langage mathématique "la différence de trente et de quatorze" : .... Quel est le résultat de la soustraction de 14 à 30 ? ....

Le nombre appelé "seize" est-il le même que celui appelé "la différence de trente et de quatorze" ?

En français on dit :

En mathématique on traduit cela par :

5°) Traduis directement en langage mathématique :

vingt-cinq est le quart de cent

soixante est le quadruple de quinze :

quarante est la somme de vingt-sept et de treize :

douze est la différence de vingt et de huit :

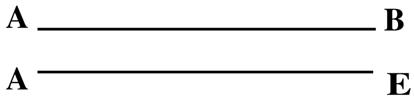
6°) Invente quelques exemples du même genre :

ÉGALITÉ   TROIS EXEMPLES GÉOMÉTRIQUES

Trois énoncés avec les commentaires

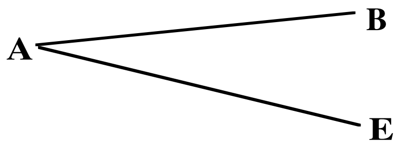
Exercice 1 : faire un dessin qui traduise l’information : [AB] = [AE]

Certains élèves dessinent ceci :



Alors question : de combien de points l’énoncé parle-t-il ?

On arrive alors au dessin suivant, que certains élèves ont produit d’emblée :



Dans presque tous les cas les deux segments ont la même longueur. Parfois ils sont perpendiculaires...

Demander alors : de combien de segment(s) parle-t-on dans l’énoncé ?

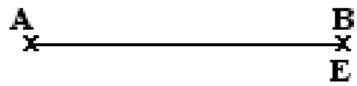
Une égalité parle d’un seul objet... On arrive à se mettre d’accord là-dessus.

Certains élèves dessinent alors ceci :

Il faut alors faire compter le nombre de segments représentés.

Et il faut faire traduire l’information et faire écrire : [AB] = [AE] ***signifie*** **le segment nommé [AB] est le même que le segment nommé [A E].**

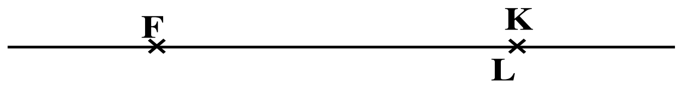
On doit donc dessiner un unique segment



On peut ensuite faire trouver la **conséquence : B = E.**

Exercice 2 : faire un dessin qui traduise l’information : (FK) = (KL)

Par analogie avec ce qui précède, on voit souvent ceci :



Bonne occasion de revenir sur la distinction entre droite et segment.

Et faire traduire l’information en écrivant : (FK) = (KL) ***signifie*** **la droite nommée (FK) est la même que la droite nommée (KL).**

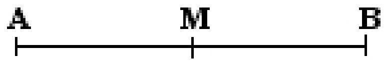
Demander enfin : si la droite passant par F et K est la même que celle qui passe par K et L, est-ce que cela oblige K et L à désigner le même point ?

Traduction à connaître : F, K et L sont alignés.

Faire trouver les deux autres égalités équivalentes.

Exercice 3 : faire un dessin qui traduise l’information : MA = MB

On constate très souvent l’“attraction du milieu” :



Demander dans ce cas de représenter trois ou quatre points vérifiant la même condition (amorce ou révision de la médiatrice, suivant le niveau).

SUBSTITUTION PAR EGALITE

Si truc = machin, alors truc + k =
Si truc = machin, alors truc – k =
Si truc = machin, alors truc x k =
Si truc = machin, alors truc / k =

Quelques exemples d'"entraînement"au niveau de la classe de 4è.
Avant il faut des exemples purement numériques du type
3x17 = 51 donc 3x17 – 24 = ... , ou 13 = 20 – 7 donc 5x13 = ...

Si m = y + 7, alors m – 12 =

alors 12 – m =

alors 3 x m =

Si u = 13 – u, alors 17 – u =

alors u – 21 =

alors u / 2 =

Si t = z – 5, alors t + 13 =

alors 13 – t =

alors t / 5 =

Si f + 19 = 42, alors f + 19 + (–19)= , donc f =

Si h + 27 = 13, alors h + 27 + = , donc h =

Si k + 41 = 26, alors k + , donc k =

Si m + (–8) = 15, alors , donc m =

Si p + (–17) = 9, alors , donc p =

Si s + 16 = –18, alors , donc s =

Si t + (–8) = –15, alors , donc t =

Si u + 31 = 17, alors , donc u =

Si z + 18 = –13, alors , donc z =

SAVOIR DISCRIMINER LES ECRITURES

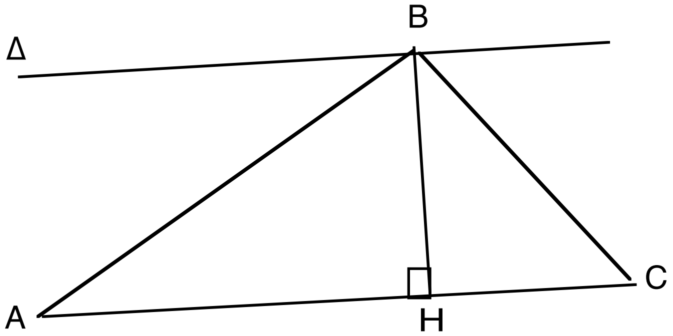
Complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient :

	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
Le double de seize				
2x16				
32 est le double de 16				
32 = 2x16				
Le triple de quinze				
3x15				
3x(8 + 7)				
3x(8 + 7) = 3x8 + 7				
3 x (8 + 3 x 7				
La moitié de treize				
13 / 2				
13 / 2 = 6				
La somme de douze et de trente				
12 + 30 = 42				
23 + – 17				
La somme de 17 + 23				
Le tiers de trente-six				
36 / 3				
36 / 3 = 12				
Douze n'est pas le tiers de trente-six				
2x12 = 24				
12 est le milieu de 24				
π				
$\pi \neq 3{,}1416$				
$\pi = 3{,}14159265358979323846264 33$				

Savoir discriminer les écritures

Lis les informations, regarde le dessin ci-dessous. Complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient :

ABC désigne un triangle quelconque.
H désigne le pied de la hauteur issue de B.
Δ désigne la parallèle à (AC) passant par B.



	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
H				
$[A\ C]$				
$(A\ H) \neq (H\ C)$				
$[A\ H] + [H\ C]$				
AC				
$H \in [AC]$				
$AH + HC = AC$				
$AB + BC = AC$				
La parallèle à (AC)				
La parallèle à (AC) passant par B				
$(AH) = (AC)$				
$AH = AC$				
$(AH) = (HC)$				
La perpendiculaire à (A C)				
La perpendiculaire à (A C) passant par H				
$\Delta \parallel (A\ C)$				
$(BH) \perp (A\ C)$				
$(BH) \perp (A\ C)$ et $(A\ C) \parallel \Delta$, donc $(BH) \perp \Delta$				
$H \perp (A\ C)$				

Commentaires sur les deux pages précédentes

Ces deux QCM réservent quelques surprises, et pas seulement en Collège...

QCM numérique

En classe de 5è on trouve que “le double de seize” ou “le triple de quinze” est inepte (le mot a évidemment été expliqué).

Pour savoir si l’égalité **3x(8 + 7) = 3x8 + 7** est vraie ou fausse bien des élèves ne pensent pas à faire les calculs...

La somme de 17 + 23 est presque toujours considérée comme une écriture correcte. Or ou bien il faut dire “la somme de 17 **et de** 23”, ou bien l’écriture est incomplète car on attend alors “La somme de 17 + 23 **et de ???**”.

La phrase **Douze n’est pas le tiers de trente-six** pose problème car elle est sur le mode négatif... Elle est fausse, bien sûr...

Situation semblable pour **$\pi \neq$ 3,1416. Mais cette fois, c’est vrai...**

La dernière ligne requiert d’expliquer que la suite des décimales de π ne s’arrête jamais et que, dans la pratique, on ne peut donc utiliser que des valeurs approchées.

QCM géométrique

On a encore plus de surprises... Quelques exemples :

[A K] + [K B] : le plus souvent désigne un objet ; il faut demander avec quoi fonctionne l’addition pour faire réaliser qu’un segment n’est pas un nombre.

La parallèle à (AC) : le plus souvent désigne un objet ; il faut faire remarquer l’article utilisé et demander si une droite n’a qu’une seule parallèle.

La parallèle à (AC) passant par B : jusque dans la première année de lycée, on a trouvé une croix dans la deuxième colonne ! Une telle erreur révèle de sérieuses lacunes en langue française...

Résultats semblables avec “**La perpendiculaire...**”.

Il est facile de fabriquer de tels QCM et chacun peut les composer comme bon lui semble en les adaptant au niveau souhaité. Il ne faut pas craindre d’en proposer dès la première année de Collège et de “répéter l’expérience” de temps en temps.
Il ne faut pas s’interdire non plus d’en soumettre quelques-uns aux lycéens...

* * *

Nous n’avons jamais eu peur d’“appeler un chat, un chat”... La fiche suivante était étudiée en classe de 4è. Et pourtant les “c’est-à-dire” ou “autrement dit” sont couramment employés bien avant !

PROPOSITIONS EQUIVALENTES

"douze est plus petit que quinze" — **dans la tête**

DEUX traductions — **sur le papier**

$15 - 12 > 0$ $\qquad$ $12 < 15$

Les deux propositions "$15 - 12 > 0$" et "$12 < 15$" décrivent <u>LA même</u> situation : on dit qu'elles sont équivalentes .

" 15 est l'opposé de –15" — **dans la tête**

DEUX traductions — **sur le papier**

$15 + (-15) = 0$ $\qquad$ $15 = -(-15)$

Les deux propositions "$15 + (-15) = 0$" et "$15 = -(-15)$" décrivent <u>LA même</u> situation : on dit qu'<u>elles sont équivalentes</u>.

UNE "situation" — **dans la tête**

DEUX traductions — **sur le papier**

proposition un $\qquad$ proposition deux

On dit que *deux propositions sont équivalentes* lorsqu'elles *expriment la même idée, décrivent la même situation, traduisent la même information.*

<u>Mode d'emploi : propriété de substitution</u>

Puisque deux propositions équivalentes expriment LA même idée

On peut toujours remplacer une proposition par une proposition équivalente.

<u>Exemples</u> : **D // Δ** *équivaut à* **ou bien D et Δ sont disjointes , ou bien D = Δ**

MATH est un parallélogramme *équivaut à* **[M T] et [A H] ont le même milieu**

$2 \times m = 9$ *équivaut à* **$m = 9/2$.** $\qquad$ **$2 \times m + 3 = 12$** *équivaut à* **$2 \times m = 12 - 3$**

Les points A, B, E sont alignés *équivaut à* **(AB) = (BE).**

MA = 13 cm *équivaut à* **M est un point du cercle de centre A et de rayon 13 cm**

TK = TF *équivaut à* **T est un point de la médiatrice du segment [KF]**

REMARQUE : "*équivaut à*" peut aussi être traduit par "*ou encore*" ou "*c'est-à-dire*" ou "*autrement dit*" ou "*ce qui revient à*".

Commentaires sur la page suivante

I) On a ici un exemple typique de la façon dont fonctionne le langage algébrique.

1) On "définit" un nouvel objet (ici la différence de deux nombres) en expliquant comment on le "fabrique", comment il "fonctionne".

2) On donne une écriture mathématique, une "notation", pour le désigner.

3) On traduit son fonctionnement par un schéma et une égalité.

4) On donne un nouveau nom à cet objet (celui qu'on veut !) et, en faisant fonctionner la définition avec ce nouveau nom, on trouve une nouvelle égalité équivalente à cette trouvée au 3), ainsi qu'un nouveau schéma.

La "**reformulation**" est fondamentale. L'expérience prouve à satiété que la plupart des "blocages" de la pensée proviennent d'une incapacité à changer de point de vue, à modifier la forme de l'expression sans altérer son contenu, à traduire une information dans un langage adapté au contexte et à la question posée, bref à remplacer une proposition par une proposition équivalente. Il n'est certes pas innocent que les textes abondent en locutions du genre "c'est-à-dire", "ou encore", "en d'autres termes", "autrement dit". Un entraînement à la reformulation nous semble donc indispensable pour acquérir cette mobilité d'esprit sans laquelle on se sent désarmé devant un problème à résoudre — et cela reste valable bien au–delà du champ mathématique ! — ne sachant pas "par quel bout le prendre". Prendre conscience du fait que la "simple" reformulation d'une question peut suffire à apporter l'éclairage adéquat à sa réponse nous paraît constituer un objectif majeur, non seulement pour la réussite en mathématique, mais plus largement pour une bonne structuration de la pensée : ne pas (se) poser les bonnes questions est effectivement le plus sûr moyen d'échouer, que ce soit dans la résolution d'un problème de maths ou … dans la "vie de tous les jours".

III) La définition 3 donne un exemple simple du caractère opératoire d'une définition : pour savoir si deux nombres sont opposés, il faut calculer leur somme, et cela suffit.

Enfin la "convention d'écriture" de l'opposé doit être décrite comme un consensus de la communauté des mathématiciens. Elle est commode ... à condition qu'on la maîtrise.

* * *

Commentaires sur les fiches "Traductions"

Ces fiches constituent une sorte de synthèse sur les questions de traduction d'égalité entre langage mathématique et langue française. Afin de faire circuler le sens entre un maximum de cadres, on utilise aussi des schémas dont l'aspect dynamique apporte un avantage.

Le principe est le suivant : on part d'une phrase simple en français faisant intervenir une relation entre trois nombres dont un seul est numériquement connu ; on donne un nom (une simple lettre) aux deux autres et on traduit alors la phrase par une simple égalité ; puis, à l'aide de schémas, on trouve les deux égalités équivalentes, enfin on traduit en français ces deux nouvelles égalités.

C'est la circulation d'une même information entre ses diverses traductions qui permet et affermit la construction de la signification.

Une dernière métaphore : un crayon mis sur sa pointe tombe. Un compas mis sur ses deux pointes tombe. Mais un trépied reste stable. De même il faut disposer d'au moins trois formulations équivalentes pour pouvoir commencer à comprendre une idée, une situation et être capable de l'utiliser.

DIFFÉRENCE – SOUSTRACTION – OPPOSÉS

I) DEFINITION 1

> u et m désignant des nombres quelconques,
> **la différence de u et de m**
> est le nombre qu'il faut additionner à m (second cité)
> pour égaler u (premier cité).
> Notation : ce nombre est désigné par l'écriture u — m.

Schéma : $\xrightarrow{+\ m} u$ Traduction : (u – m) + =

REdénomination : j'appelle “d” la différence de u et de m.

Traduction : d =

D'après la définition ci-dessus, d est donc le nombre qu'il faut additionner à m pour égaler u, autrement dit + = .

CONCLUSION :

> d = — *équivaut à* =
>
> Schéma : $d \underset{-m}{\overset{+\ m}{\rightleftarrows}} u$

II) DEFINITION 2

> La soustraction est l'opération qui, à deux nombres u et m, pris dans cet ordre, fait correspondre le nombre u – m.

III) En particulier, lorsque la somme de deux nombres a et b est nulle :

$a \underset{-b}{\overset{+\ b}{\rightleftarrows}} 0$

a + b = 0 *équivaut à* a = –

On dit alors que “**a est l'opposé de b**”.

On a évidemment aussi : b + = 0 *équivaut à* b =

et on dit de même que “ **est l'opposé de** ”.

DEFINITION

> Deux nombres sont opposés lorsque leur somme est égale à zéro.

CONVENTION D'ECRITURE

> Etant donné un nombre quelconque m,
> le nombre 0 – m est noté simplement –m, ce qui se lit : “ moins m”
> **L'écriture “–m” signifie donc “l'opposé de m”.**

Un peu d'entraînement...

ADDITION ET SOUSTRACTION

Complète les schémas et les égalités :

$7 \underset{-5}{\overset{+5}{\rightleftarrows}} 12$	7 + 5 = 12 – =	$5 \underset{-}{\overset{+7}{\rightleftarrows}} 12$	5 + = 12 – =
$9 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}} 15$	9 + = 15 – =	$6 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}} 15$	6 + = 15 – =
$13 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	13 + 8 = – =	$8 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$\underset{-}{\overset{+9}{\rightleftarrows}} 26$	+ = – =	$9 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$8 \underset{-m}{\overset{+m}{\rightleftarrows}} 14$	+ = – =	$m \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$k \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	k + 7 = 11 – =	$7 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$\underset{-}{\overset{+27}{\rightleftarrows}}$	9 + 27 = t – =	$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$a \underset{-}{\overset{+5}{\rightleftarrows}} b$	+ = – =	$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =
$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	r + d = s – =	$d \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = – =

Invente à ton tour trois exemples semblables :

* * *

REMARQUE : On peut (on doit...) effectuer un travail analogue aux deux fiches précédentes avec QUOTIENT - DIVISION - INVERSE en utilisant les correspondances + - x, somme - produit, terme - facteur, différence - quotient, soustraction - division, — - /, zéro - un, opposé - inverse, etc.

TRADUCTIONS ET CALCULS

Un peu d'entraînement à la reconnaissance des formes et aux modes de calcul correspondants

DESIGNATION	FORMULE et CALCUL
	7x12 + 56 = ... + ... = ...
Le produit de 7 et de 12 + 56	
La différence de 37 et de 72/4	
	25 – (40 – 19) = =
La somme de 7x9 et de 56/8	
	12x13 – 7 =
Le produit de 12 et de 13 – 7	
Le quotient de 192 par 24 – 8	
La différence de 192/24 et de 8	
	(49 + 77)/18 =
Le quotient de 108 par 17 + 19	
	63 + 36/9 =
	(63 + 36)/9 =
Le quotient de 234 par 4x9	
	(234/4)/9 =
La différence de 7x8 et de 27 + 18	
	7x13 – 273/13 =
La somme de 11x7 et de 11x8	
	11x(7 + 8) =
La somme de 156/12 et de 4	
	156/(12 + 4) =
	8x13 + 8x17 =
	8x(13 + 17) =
Le quotient de 36 + 72 par 12	
	36/12 + 72/12 =
	36/(12 + 72/12) =

TRADUCTIONS

Pour chacune des phrases suivantes :

1°) Donne un nom (une lettre) aux nombres inconnus indiqués par le texte.
2°) Traduis la phrase donnée par une égalité.
3°) Représente les deux schémas qui traduisent la situation.
4°) Ecris les deux égalités équivalentes à celle écrite au 2°).
5°) Traduis chacune de ces deux dernières égalités par une phrase en Français.

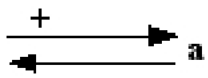
ATTENTION : pour t'aider à bien comprendre ce qu'il faut faire, les deux premiers exercices ont été partiellement résolus : complète-les.

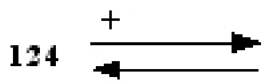
I) La hauteur de l'Empire State Building est supérieure de 124 mètres à celle de la tour Eiffel.

1°) J'appelle "a" la hauteur en mètres de l'Empire State Building et "b" celle de la tour Eiffel.

2°) a = +

3°)





4°) b =

= 124

5°) La hauteur de la tour Eiffel est inférieure de mètres à celle de

La différence de hauteur entre et est de

II) Un concorde vole deux fois et demie plus vite qu'un airbus.

1°) J'appelle "c" la vitesse d'un concorde et "r" celle d'un airbus (mesurées avec la même unité, par exemple en km/h).

2°) c =

3°)

4°) r =

= 2,5

5°) Un airbus vole

Le (on dit aussi **"le ")**
entre la vitesse d'un et
celle d'un est de

TRADUCTIONS correction...

Pour chacune des phrases suivantes :

1°) Donne un nom (une lettre) aux nombres inconnus indiqués par le texte.
2°) Traduis la phrase donnée par une égalité.
3°) Représente les deux schémas qui traduisent la situation.
4°) Ecris les deux égalités équivalentes à celle écrite au 2°).
5°) Traduis chacune de ces deux dernières égalités par une phrase en Français.

ATTENTION : pour t'aider à bien comprendre ce qu'il faut faire, les deux premiers exercices ont été partiellement résolus : complète-les.

I) La hauteur de l'Empire State Building est supérieure de 124 mètres à celle de la tour Eiffel.

1°) J'appelle "a" la hauteur en mètres de l'Empire State Building et "b" celle de la tour Eiffel.

2°) $a = b + 124$

3°)

$$b \; \underset{-\,124}{\overset{+\,124}{\rightleftarrows}} \; a \qquad\qquad 124 \; \underset{-\,b}{\overset{+\,b}{\rightleftarrows}} \; a$$

4°) $b = a - 124$ $\qquad\qquad$ $a - b = 124$

5°) La hauteur de la tour Eiffel est inférieure de 124 mètres à celle de l'Empire State Building.

La différence de hauteur entre l'Empire State Building et la tour Eiffel est de 124 mètres.

II) Un concorde vole deux fois et demie plus vite qu'un airbus.

1°) J'appelle "c" la vitesse d'un concorde et "r" celle d'un airbus (mesurées avec la même unité, par exemple en km/h).

2°) $c = 2{,}5 \times r$

3°)

$$r \; \underset{/\,2{,}5}{\overset{\times\,2{,}5}{\rightleftarrows}} \; c \qquad\qquad 2{,}5 \; \underset{/\,r}{\overset{\times\,r}{\rightleftarrows}} \; c$$

4°) $r = c / 2{,}5$ $\qquad\qquad$ $c / r = 2{,}5$

5°) Un airbus vole deux fois et demie moins vite qu'un concorde.

Le quotient (on dit aussi rapport) entre la vitesse d'un concorde et celle d'un airbus est de 2,5.

A TOI DE FAIRE SEUL LES EXERCICES SUIVANTS :

III) Le diamètre de Vénus mesure 655 km de moins que celui de la Terre.

1°)

2°)

3°)

4°)

5°)

IV) Le poids d'un objet sur la Lune est le sixième de son poids sur Terre.

1°)

2°)

3°)

4°)

5°)

UNE DERNIERE "MISE AU POINT"

A PROPOS DE ... DROITES

Le thème du congrès est "Maths et mots", alors, maintenant que nous avons clarifié le statut des objets mathématiques, celui de l'égalité, celui de l'équivalence, je vous propose de réfléchir à ce que désigne, en Géométrie, le mot "**point**".

Je me rappelle un début d'année en classe de 4è où j'avais demandé : "quand deux droites se coupent, combien ont-elles de point(s) commun(s) ?". On m'avait vite répondu, dans un bel élan : "un !" Et lorsque j'avais ajouté "oui, mais **pourquoi** ?" on m'avait répondu tout aussi résolument : "parce quelles sont sécantes !"... On a ici un exemple révélateur d'une confusion logique qui n'est hélas pas rare — et pas réservée aux élèves de 4è... — où un qualificatif fait office de preuve. J'avais alors compris qu'il fallait tout reprendre à la base, faire réfléchir à la notion de **point** et de **droite** pour pouvoir élucider la situation de l'intersection de deux droites.

Je me suis rendu compte que les élèves n'avaient qu'une très vague idée de la "notion" de point et n'y avaient jamais vraiment réfléchi. On avait dû leur parler des classiques images du trou d'aiguille ou de la trace laissée sur le papier par un crayon bien taillé... Cela ne suffisait manifestement pas.

On ne peut malheureusement pas donner une définition d'un point. C'est un "concept premier" en géométrie : on ne peut pas construire quelque chose à partir de rien... Et il faut des "règles du jeu" qui relient les "objets". La première, à savoir « par deux points il passe une droite et une seule » ou une formulation équivalente, est, à notre avis, beaucoup trop vite énoncée et présentée : sa signification, son usage et son utilité en sont du coup notablement minorés.

Les tentatives d'explicitation verbale de l'idée ou "notion" de "point" sont obligatoirement vagues ou confuses, voire contradictoires. En voici un exemple tiré de l'encyclopédie Wikipedia :

« *En géométrie, un point est le plus petit élément constitutif de l'espace géométrique, c'est-à-dire un lieu au sein duquel on ne peut distinguer aucun autre lieu que lui-même.*

En géométrie euclidienne élémentaire

Le point, selon Euclide, est "ce qui n'a aucune partie". *On peut aussi dire plus simplement qu'un point ne désigne pas un objet mais un emplacement. Il n'a donc aucune dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire. Sa seule caractéristique est sa position. On dit parfois qu'il est « infiniment petit ». Toutes les figures du plan et de l'espace sont constituées d'ensemble de points.* »

Elément, lieu, emplacement... autant de métaphores...

Et ce qui semble être une contradiction *: « un point ne désigne pas un objet mais un emplacement »*, pourtant une "figure géométrique" — ne serait-ce qu'un segment — est considérée comme un objet alors qu'elle n'est constituée que de points !...

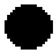
Il faut donc d'abord essayer d'**imaginer pour pouvoir ensuite utiliser** cette "notion". Voici une petite séquence élaborée pour **faire travailler l'imagination puis la réflexion** en s'appuyant d'abord sur la perception et la **représentation** puis sur le fait qu'**il n'y a pas de jeu sans règle.**

POINTS ET DROITES
DES IMAGES POUR IMAGINER

Un tout petit rond noir | **Une représentation d'un point**

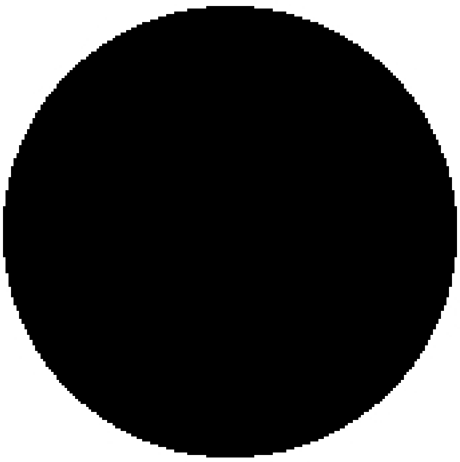
On agrandit 10 fois :

Le tout petit rond noir | **La représentation du point**



On agrandit encore 10 fois :

Le tout petit rond noir | **La représentation du point**



Il y a 2 300 ans, Euclide disait : "*Un point est ce qui n'a pas de partie.*"
De nos jours on dit : "*Un point n'a pas de dimension.*"

Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer lorsqu'on dit cela ?

COMMENTAIRE : Rien n'est plus petit qu'un point, autrement dit un point est plus petit que n'importe quoi. Un point est le seul objet géométrique qui ne puisse pas être agrandi. D'ailleurs on dit aussi parfois qu'un point a une dimension nulle : cela est cohérent puisque cent (et n'importe quel nombre) fois zéro est égal à zéro.

Un objet physique : un trait rectiligne

Une représentation d'un segment de droite

On agrandit 5 fois :

Le trait rectiligne 5 fois plus grand

La représentation d'un segment 5 fois plus grand

Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer lorsqu'on dit :
"***Un segment n'a pas d'épaisseur***" ?

COMMENTAIRE : il a l'épaisseur d'un point...

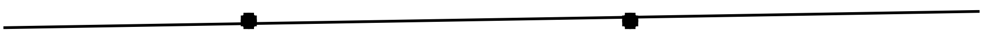
En Mathématique, on décide d'imaginer et de concevoir que :
1) Un segment est constitué d'une quantité innombrable de points. Entre deux points il y en a toujours un autre. C'est pourquoi, bien que constitué de points de dimension nulle, un segment a pourtant une longueur.

2) Une droite est comme un segment indéfiniment allongé : contrairement à un segment, une droite n'a donc pas d'extrémités.

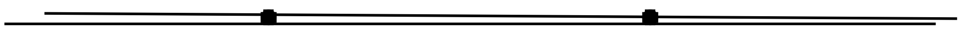
***

Deux petits ronds : 

Un trait rectiligne passant par deux petits ronds :



Deux traits rectilignes passant par deux petits ronds :



Pourquoi est-il commode de décider, de choisir que par deux points il passe une droite et une seule ?

COMMENTAIRE : Tout bonnement parce que c'est ce qu'il y a de plus simple !

Il n'y a pas de jeu sans règles.

Ce choix sera notre première "règle du jeu géométrique". Elle est particulièrement simple et très efficace : dès qu'on connaît deux points, on connaît l'unique droite qui passe par ces deux points.

RECAPITULATION

Par deux points il passe une droite et une seule. ***autrement dit*** **Une droite est définie par la donnée de deux de ses points.**

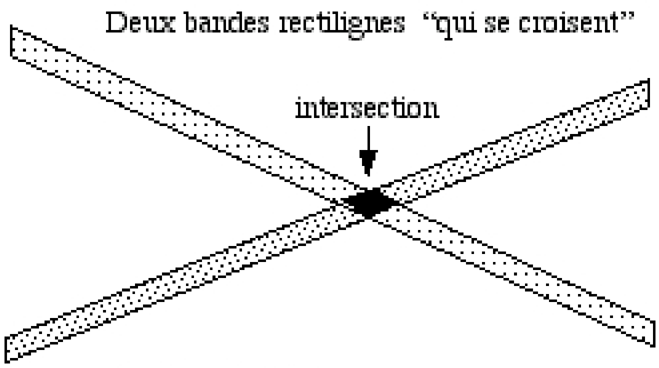
Deux points, appelés A et B, étant donnés, LA droite passant par ces deux points est désignée par la notation "(AB)". **"(AB)" se lit : " la droite A, B ".**

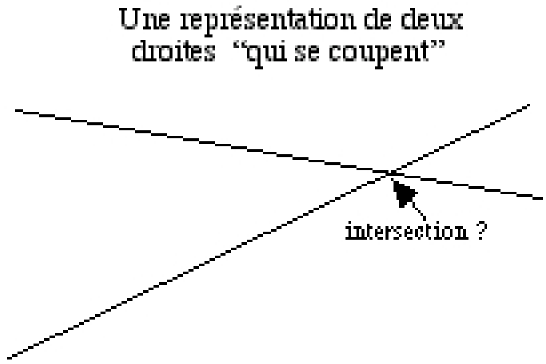
On a décidé d'adopter cette propriété car elle permet

1°) de relier l'idée de point à l'idée de droite,

2°) de dépasser la "trahison des images" et de réfléchir, de raisonner.

Première utilisation : l'intersection de deux droites.





QUESTION :

Lorsque deux droites se coupent, combien y a-t-il de point(s) commun(s) ?

1°) Un dessin peut-il fournir la réponse et la certitude ? .... Pourquoi ?

COMMENTAIRE : vu ce qui a été fait sur la "non dimension" d'un point, certains élèves disent qu'il peut y avoir dix ou cent ou des milliers de "points communs" puisque, de toutes façons, la dimension ne changera pas. Cette réaction est formidablement intéressante et prometteuse et il faut essayer de l'induire si aucun élève ne la propose (ou n'ose pas la proposer...).

2°) Alors que faut-il faire ? ....

On sait qu'il y a **au moins** .... point commun, alors quelles sont les différentes possibilités ?

COMMENTAIRE : Démonstration "simple" mais attention aux expressions mal maîtrisées telles que "au moins un".

Disjonction des cas (règle du "tiers exclu" implicite) : **ou bien** un (**seul !**), **ou bien** plus d'un, ***autrement dit*** au moins deux.

Au moins deux ***autrement dit*** **ou bien** deux **ou bien** plus de deux. On commence par deux : SI **deux** droites ont **deux** points communs ***cela veut dire que*** par ces deux points il passe deux droites : cela est exclu par notre "règle du jeu"!
Et comprendre enfin que, puisque ça ne marche pas pour deux, ça ne peut pas marcher pour plus de deux...

On ne demandera pas d'être capable de refaire cette démonstration mais de se souvenir qu'elle existe, c'est-à-dire de **savoir que la propriété « deux droites non disjointes ont un seul et unique point commun » peut se prouver.**

Ceci n’est pas une conclusion

Si l’on réduit la science à n’être qu’un ensemble de recettes qui marchent, on n’est pas intellectuellement dans une situation supérieure à celle du rat qui sait que, lorsqu’il appuie sur un levier, la nourriture va tomber dans son écuelle.
René THOM (Médaille Fields 1958)

Critiquer les mathématiques pour leur abstraction, c’est passer complètement à côté. L’abstraction, c’est ce qui fait marcher les mathématiques.

Ian STEWART

Le langage représente la forme la plus haute d’une faculté qui est inhérente à la condition humaine : la faculté de symboliser.

La pensée n’est rien d’autre que ce pouvoir de construire des représentations des choses et d’opérer sur ces représentations.

E. BENVENISTE

Travailler de façon approfondie sur les objets et les situations élémentaires (...) et tisser de façon explicite des liens entre eux, constitue une ligne de conduite pour tout enseignant.

Pour faire de la géométrie efficacement, il ne suffit pas d’avoir de la connaissance en vrac : l’accumulation de théorèmes, plus ou moins connus et compris, est insuffisante pour démontrer. C’est un des obstacles majeurs sur lequel butent les enseignants aujourd’hui : beaucoup d’élèves se contentent de “grumeaux” de savoirs épars, et s’étonnent de ne pas progresser. Ils découvrent de plus que ces savoirs sont volatils. (...) Une connaissance non structurée s’étoffe difficilement.

Seule une tête bien faite peut se remplir utilement .

Force est de constater que sur bien des plans, l’école s’attache à la réussite immédiate, aux dépens de la compréhension en profondeur.

Gérard KUNTZ - Repères n° 18

Quant à l’algèbre, l’idée même de cet art est qu’elle présente des formules que l’on peut manipuler et que par observation des effets de cette manipulation on découvre des propriétés qu’on n’aurait pas discernées autrement. Dans cette manipulation, on est guidé par les découvertes antérieures qui sont incorporées dans des formules générales. Ce sont des schémas que nous avons le droit d’imiter dans notre façon de procéder et qui sont par excellence les icônes de l’algèbre. (...) Les x,y,z, etc., d’une formule générale, telle que $(x + y)z = xz + yz$, sont des blancs à remplir (...). Une formule de ce genre pourrait être, il est vrai, remplacée par une règle formulée abstraitement (ici que la multiplication est distributive) ; mais aucune application de cet énoncé abstrait ne serait possible si l’on ne le traduisait pas en une image sensible.

C. S. PEIRCE (Ecrits sur le signe)

On dit souvent que le symbolisme logico-mathématique n’a pas de sens. La formule est équivoque. Elle ne veut pas dire que tout se réduit à quelque bruitage insignifiant accompagné d’usure de salive et de craie. Mais elle veut dire deux choses : d’une part qu’il n’y a pas de signification matérielle ou d’intuition empirique mais seulement une signification formelle ou conceptuelle qui réside dans la cohérence des rapports ; d’autre part, elle veut dire que l’on opère directement sur les symboles en vertu des valeurs syntaxiques qui leur ont été conférées par définition au départ, symboles qui constituent comme de nouveaux objets maniables suivant certaines règles opératoires.

(Edmond ORTIGUES : Le discours et le symbole)