



Lundi 18 juillet 2011

**Problème 1.** Pour tout ensemble  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  de quatre entiers strictement positifs deux à deux distincts, on note  $s_A$  la somme  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  et on note  $n_A$  le nombre de couples  $(i, j)$ , avec  $1 \leq i < j \leq 4$ , tels que  $a_i + a_j$  divise  $s_A$ .

Déterminer les ensembles  $A$  pour lesquels  $n_A$  est maximal.

**Problème 2.** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. On suppose que trois points quelconques de  $\mathcal{S}$  ne sont pas alignés.

On appelle *moulin à vent* le processus suivant : le processus commence avec une droite  $\ell$  contenant un unique point  $P$  de  $\mathcal{S}$  ; la droite  $\ell$  tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point  $P$ , appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de  $\mathcal{S}$  ; ce point,  $Q$ , devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de  $Q$ , jusqu'à rencontrer un nouveau point de  $\mathcal{S}$  ; ce processus continue indéfiniment.

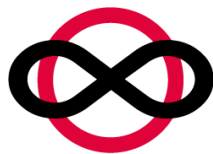
Montrer qu'on peut choisir un point  $P$  de  $\mathcal{S}$  et une droite  $\ell$  contenant  $P$ , de façon que le moulin à vent commençant par  $\ell$  utilise chaque point de  $\mathcal{S}$  comme pivot une infinité de fois.

**Problème 3.** On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tous réels  $x, y$ ,

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Montrer que  $f(x) = 0$  pour tout réel  $x \leq 0$ .



*Mardi 19 juillet 2011*

**Problème 4.** Soit  $n$  un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de  $n$  poids, de masses respectives  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ .

On doit placer, l'un après l'autre, chacun des  $n$  poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche; dans ce but, à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.

Déterminer le nombre de façons de procéder.

**Problème 5.** On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers et  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers strictement positifs.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}^*$ . On suppose que, quels que soient les entiers  $m, n$ , la différence  $f(m) - f(n)$  est divisible par  $f(m - n)$ .

Quels que soient les entiers  $m, n$  vérifiant  $f(m) \leq f(n)$ , montrer que  $f(n)$  est divisible par  $f(m)$ .

**Problème 6.** Soit  $ABC$  un triangle dont les angles sont aigus et soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit. Soit  $\ell$  une droite tangente à  $\Gamma$ . Soit  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  les droites symétriques de  $\ell$  par rapport respectivement aux droites  $(BC), (CA), (AB)$ .

Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  est tangent à  $\Gamma$ .