



Lundi 18 juillet 2011

Problème 1. Pour tout ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatre entiers strictement positifs deux à deux distincts, on note s_A la somme $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ et on note n_A le nombre de couples (i, j) , avec $1 \leq i < j \leq 4$, tels que $a_i + a_j$ divise s_A .

Déterminer les ensembles A pour lesquels n_A est maximal.

Problème 2. Soit \mathcal{S} un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. On suppose que trois points quelconques de \mathcal{S} ne sont pas alignés.

On appelle *moulin à vent* le processus suivant : le processus commence avec une droite ℓ contenant un unique point P de \mathcal{S} ; la droite ℓ tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point P , appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de \mathcal{S} ; ce point, Q , devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Q , jusqu'à rencontrer un nouveau point de \mathcal{S} ; ce processus continue indéfiniment.

Montrer qu'on peut choisir un point P de \mathcal{S} et une droite ℓ contenant P , de façon que le moulin à vent commençant par ℓ utilise chaque point de \mathcal{S} comme pivot une infinité de fois.

Problème 3. On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tous réels x, y ,

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Montrer que $f(x) = 0$ pour tout réel $x \leq 0$.



Mardi 19 juillet 2011

Problème 4. Soit n un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de n poids, de masses respectives $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$.

On doit placer, l'un après l'autre, chacun des n poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche ; dans ce but, à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.

Déterminer le nombre de façons de procéder.

Problème 5. On note \mathbb{Z} l'ensemble des entiers et \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit f une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{N}^* . On suppose que, quels que soient les entiers m, n , la différence $f(m) - f(n)$ est divisible par $f(m - n)$.

Quels que soient les entiers m, n vérifiant $f(m) \leq f(n)$, montrer que $f(n)$ est divisible par $f(m)$.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite tangente à Γ . Soit ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c les droites symétriques de ℓ par rapport respectivement aux droites $(BC), (CA), (AB)$.

Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c est tangent à Γ .