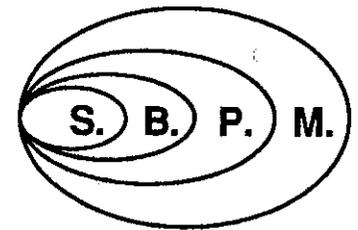


Mathématiques et sports

Société Belge des Professeurs de
Mathématique d'expression française

Jacques BAIR
Université de Liège



Mathématiques
et sports

Société Belge des Professeurs de
Mathématique d'expression française

1992

Publications de la Société Belge des Professeurs
de Mathématique d'expression française

Belgique Étranger

Série **RENOVER**

Les brochures de cette série traitent des programmes de l'enseignement secondaire, vus du point de vue du professeur.

— Série 1 : Première année (photocopies)	150 FB	200 FB
— Série 2 : Deuxième année	260 FB	330 FB
— Série 3 : Troisième année	250 FB	290 FB

Olympiades Mathématiques Belges

Recueil des questions (et réponses)

— Tome 1 : 1976-1981	120 FB	145 FB
— Tome 2 : 1982-1987	200 FB	225 FB

Les nombres transcendants

par C. RADOUX

120 FB	165 FB
--------	--------

Applications économiques au service de la mathématique

par J. BAIR, D. JUSTENS et R. HINNION

Membres et étudiants	450 FB	500 FB
	250 FB	300 FB

Outils pour le professeur de mathématiques de l'enseignement professionnel

par M. PELTIER

Membres et étudiants	800 FB	900 FB
	600 FB	700 FB

Enseigner la mathématique ?

Livre blanc de la SBPMef sur l'enseignement des mathématiques en Communauté Française de Belgique

Membres et étudiants	350 FB	450 FB
	50 FB	150 FB

Mathématiques et sports

par J. BAIR

Membres et étudiants	450 FB	480 FB
	200 FB	230 FB

CCP 000-0728014-29 de la SBPMef, Rue de Trazegnies, 87
6230 Pont-à-Celles

©SBPMef 1992

AVANT-PROPOS

Autant l'avouer d'emblée, j'ai toujours été très passionné par le sport, en particulier par le tennis, et par les mathématiques. C'était dès lors tentant pour moi de vouloir combiner ces deux centres d'intérêt en écrivant un livre traitant conjointement de la mathématique et du sport.

Mais, au-delà du plaisir personnel que j'ai éprouvé en rédigeant ce texte, je crois sincèrement que ce travail n'est pas inutile. Il permet en effet de montrer que les mathématiques sont présentes dans tous les domaines de notre vie, et notamment dans les sports. A une époque où le professeur de mathématique cherche souvent à prouver l'utilité de sa discipline en exhibant des applications variées, il n'est pas inintéressant de mettre en évidence le fait que les mathématiques jouent un rôle non négligeable dans les sports. Cette affirmation, qui est peut-être une révélation pour certains, ne laissera pas insensible les jeunes qui pratiquent presque tous au moins une discipline athlétique et qui connaissent par les media toute l'actualité sportive. En montrant l'importance de la mathématique dans le sport, le professeur pourrait ainsi amener certains élèves, plus attirés par les efforts physiques qu'intellectuels, à revoir leur position sur les études, et spécialement sur les mathématiques. Je suis donc intimement convaincu que le traitement de quelques problèmes mathématico-sportifs permettrait au professeur d'illustrer ses cours de façon inhabituelle, mais souvent attractive et motivante.

Comme il n'existe pas, à ma connaissance, de livres en langue française sur le sujet, j'ai voulu combler en partie cette lacune. Je ne suis toutefois pas le premier à prétendre introduire le sport dans l'enseignement de la mathématique : certains mathématiciens modernes, surtout anglo-saxons, ont publié de nombreux travaux sur la question. Mon travail a consisté principalement à rassembler de tels articles, à les trier, puis à les rédiger selon mon propre style et dans un même moule (en indiquant toujours les références des originaux au sein du

texte et dans la bibliographie située en fin de volume). J'y ai ajouté quelques paragraphes plus originaux qui sont les fruits de mon expérience personnelle.

Tout cela fournit une série (d'une vingtaine) de courtes "notes", assez faciles à lire, fort variées et, le plus souvent, indépendantes les unes des autres. Elles sont réparties dans cinq grands chapitres selon qu'elles se réfèrent principalement à des applications de combinatoire, du calcul des probabilités et de statistique, d'analyse, de géométrie ou d'algèbre linéaire, cette classification n'étant évidemment pas irréprochable car une même situation concrète fait quelquefois appel à plusieurs branches des mathématiques. Chaque chapitre est présenté par une introduction spécifique où est décrit le contenu des différents paragraphes.

Varié par les disciplines sportives abordées ainsi que par les théories mathématiques exploitées, les différents paragraphes peuvent aussi avoir des objectifs distincts. Il peut s'agir de travaux de recherches pures (comme l'étude des structures algébriques dans les scores en volley-ball ou en tennis), ou encore d'applications directes de théories mathématiques à des données issues du monde sportif (comme par exemple des applications statistiques relatives à des résultats de football ou des exercices variés d'analyse combinatoire), ou enfin de l'exploitation de concepts sportifs pour mieux illustrer certaines notions mathématiques (telles que la continuité ou la dérivation).

Je souhaite que ce livre puisse aider quelque peu le professeur de mathématique dans l'accomplissement de son travail enthousiasmant.

Je tiens à remercier la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française qui s'est intéressée à mon manuscrit et a décidé de le publier. J'exprime également toute ma reconnaissance à mes collègues P. Dassé, J.M. Willems et J. Wilmet qui ont relu mon texte et ont émis quelques suggestions pertinentes qui m'ont permis d'améliorer la version originale.

CHAPITRE I. COMBINATOIRE

I.0 Introduction

La combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie les dénombrements ou les configurations d'ensembles finis.

Une partie de cette théorie, à savoir l'analyse combinatoire qui rebute bien des élèves notamment en raison de ses subtilités, peut être présentée agréablement par l'intermédiaire de problèmes sportifs illustrant toutes les notions et formules couramment enseignées; en guise d'exemples, nous avons sélectionné quelques exercices variés pouvant servir à cet effet.

Ensuite, nous montrons que la notion de dérangement, qui est une permutation particulière, se rencontre naturellement dans certains sports; bien plus, pour calculer le nombre total de dérangements, nous raisonnons en faisant explicitement référence au problème soulevé par une compétition de cricket.

Enfin, nous terminons ce chapitre par un condensé de plusieurs articles originaux où sont étudiés certains systèmes de scores, notamment en volley-ball et en tennis; nous montrons qu'il s'agit à chaque reprise d'une même structure algébrique, à savoir celle de treillis avec ou sans clôture conditionnelle; nous expliquons également comment cette façon de compter peut engendrer des situations paradoxales.

I.1. L'analyse combinatoire et divers problèmes sportifs

Les principales notions et formules de l'analyse combinatoire peuvent être utilement illustrées par de nombreux problèmes rencontrés dans l'univers sportif. Nous nous proposons d'en donner un petit aperçu [3].

• Sachant qu'il y a 18 équipes de football en première division, calculer le nombre de matches que l'on y dispute par année.

On peut raisonner laborieusement comme suit. Le championnat comprend 34 journées car chaque équipe doit rencontrer les 17 autres à domicile et à l'extérieur. Or, une "journée" (parfois étalée sur plusieurs jours) comporte 9 matches. Au total, il y a, en vertu du principe fondamental de l'analyse combinatoire, $34 \cdot 9 = 306$ matches.

Mais il est plus direct de constater qu'un match est en fait un "groupement" (de deux équipes), sans répétition (car une équipe ne joue pas contre elle-même), l'ordre des équipes au sein du groupement étant important (puisque jouer à domicile est généralement plus avantageux que se déplacer à l'extérieur): la réponse est donc donnée par le nombre d'arrangements simples des 18 équipes prises 2 à 2, soit $A_{18}^2 = 18 \cdot 17 = 306$.

• Un entraîneur de basket-ball possède un noyau de 10 joueurs (qui ont tous les mêmes qualités athlétiques).

a) De combien de manières peut-il former une équipe (composée de 5 joueurs)?

b) Même question si un joueur déterminé doit toujours faire partie de l'équipe.

c) Même question si un joueur (par exemple, blessé) ne peut jamais faire partie de l'équipe.

d) En utilisant tous ses hommes, combien de matches d'entraînement différents le coach peut-il réaliser?

e) Trouver des liaisons entre les différents résultats obtenus.

Une équipe est un "groupement" (de 5 joueurs), évidemment sans répétition, l'ordre des joueurs au sein du groupement n'ayant aucune importance (puisque les athlètes sont supposés polyvalents).

a) Une équipe est une combinaison simple de 10 joueurs pris 5 à 5; il y en a donc $C_{10}^5 = 252$.

b) Un joueur étant d'office membre de l'équipe, il reste à choisir 4 hommes parmi 9; le nombre de possibilités est $C_9^4 = 126$.

c) Si un joueur est exclu du team, il faut choisir 5 basketteurs parmi les 9 sélectionnables; cela peut être réalisé de $C_9^5 = 126$ manières.

d) Si l'entraîneur désigne 5 hommes pour former une équipe A, il pourra opposer cette dernière à l'équipe B composée des 5 autres joueurs; mais il est clair que s'il avait au départ formé l'équipe B, il aurait obtenu le même match entre A et B. En conséquence, le nombre de matches d'entraînement vaut la moitié du nombre des équipes possibles, soit $\frac{252}{2} = 126$.

e) Visiblement, $C_9^4 = C_9^5$, ce qui est une conséquence de la

formule générale $C_n^p = C_n^{n-p}$; concrètement, il revient au

même de compter le nombre d'équipes à former et le nombre de possibilités de former le "banc" des réservistes.

On a de plus $C_9^4 + C_9^5 = C_{10}^5$ et $2 \cdot C_9^4 = C_{10}^5$; c'est un cas

particulier des formules générales:

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \text{ et } C_{2n}^n = 2 \cdot C_{2n-1}^n.$$

Remarquons que l'entraîneur peut former les 252 équipes possibles soit en sélectionnant le protégé du président (et il

y a 126 possibilités), soit en l'excluant (lui ou un autre joueur, peu importe) du noyau (et il y a encore 126 possibilités), d'où l'on retrouve concrètement l'égalité déjà rencontrée $C_{10}^5 = C_9^4 + C_9^5$.

• Cinq tennismen et quatre tennismen se retrouvent dans un club. Déterminer le nombre de matches distincts qu'ils peuvent organiser entre eux:

- en "simples messieurs";
- en "simples dames";
- en "doubles messieurs";
- en "doubles dames";
- en "doubles mixtes".

En tennis, un match de simple est un groupement (de deux athlètes), forcément sans répétition, l'ordre des joueurs n'intervenant nullement.

a) En simples messieurs, le nombre de matches est égal au nombre de combinaisons simples de 5 joueurs pris 2 à 2, soit $C_5^2 = 10$.

b) De même, il existe $C_4^2 = 6$ possibilités de former un simple dames.

Un match de double regroupe 4 personnes distinctes jouant 2 contre 2. Le problème du dénombrement des matches possibles est ici plus délicat car l'ordre des deux membres au sein d'une même équipe n'a évidemment aucune influence sur le déroulement de la partie, au contraire de la composition des équipes. Il est plus facile de raisonner d'abord sur les doubles dames.

d) Chaque tennismen peut faire équipe avec chacune des trois autres, contre forcément les deux restantes. Il y a donc 3 doubles dames possibles. En fait, il s'agit de la moitié du nombre de simples dames (d'après le même raisonnement que celui formulé pour le point d) de l'exercice précédent).

c) Pour les doubles messieurs, il convient de désigner dans un premier temps les quatre participants au match : il y a 5

possibilités (qui correspondent évidemment aux façons de choisir le joueur qui va rester sur la touche). Avec les quatre joueurs désignés, on peut former 3 matches (ainsi qu'il vient d'être vu pour les doubles dames). Au total, d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire, il y aura $3 \cdot 5 = 15$ matches possibles.

e) Un raisonnement similaire peut être tenu pour les doubles mixtes, cas pour lequel une dame et un homme rencontre une autre équipe composée également d'une dame et un homme. Les deux joueuses peuvent être désignées de $C_4^2 = 6$ manières possibles, le problème étant identique à celui traité au point b); de même, les deux hommes peuvent être choisis de $C_5^2 = 10$ façons différentes.

Avec ces deux joueuses et ces deux joueurs, on peut former deux doubles mixtes, car chaque dame peut jouer avec chacun des deux hommes. Au total, le nombre de doubles mixtes possibles est égal à $6 \cdot 10 \cdot 2 = 120$.

• Sachant qu'un pronostic porte sur 12 matches et que, pour chacun d'eux, trois mentions distinctes (à savoir, 1, 2 ou X) sont possibles, calculer la chance de gagner le gros lot (qui correspond au maximum de bonnes réponses) en jouant une seule grille et en se fiant uniquement au hasard.

Combien de grilles distinctes peuvent être formées? Comme chacun des 12 matches peut recevoir 3 mentions différentes, le nombre de possibilités est égal à

$$3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{12} = 531441.$$

Il s'agit du nombre d'arrangements avec répétitions des 3 signes (1, 2 ou X) pris 12 à 12, puisqu'une grille est en fait un groupement, forcément avec répétitions, de 12 symboles, l'ordre des signes sur la grille étant bien sûr à prendre en considération.

En pronostiquant au hasard, chaque grille a autant de chances qu'une autre de gagner. La probabilité d'emporter le gros lot est donc égale à $\frac{1}{531441} = 0,0000018817$.

• Combien de combinaisons différentes peut-on

réaliser en prenant 4 lettres choisies parmi les lettres composant le mot "TENNIS"?

Il existe une seule combinaison ne comprenant pas la lettre N. On peut construire 4 combinaisons comprenant une seule lettre N et $C_4^2 = 6$ combinaisons comprenant deux fois la lettre N. Au total, la réponse est égale à $1 + 4 + 6 = 11$.

• Douze équipes de volley-ball doivent être réparties dans 3 poules (A, B ou C) comprenant chacune 4 équipes. De combien de manières peut-on procéder?

Il existe C_{12}^4 possibilités d'envoyer 4 équipes dans la poule A. Celle-ci étant complète, on peut former la poule B de C_8^4 manières possibles. Enfin, les 4 équipes non encore retenues iront forcément en poule C. Au total, le nombre de possibilités est égal à

$$C_{12}^4 * C_8^4 = \frac{12! * 8!}{4! * 8! * 4! * 4!} = 34650.$$

Il s'agit en fait du nombre de permutations avec répétitions des 12 équipes: celles-ci peuvent en effet être assimilées à la lettre (A, B ou C) de leur poule. Tout se passe alors comme si l'on permutait 12 lettres parmi lesquelles figurent 4 lettres A, 4 lettres B et 4 lettres C; cela peut effectivement être réalisé de $\frac{12!}{4! * 4! * 4!}$ manières distinctes.

I.2 Le cricket et la notion de dérangement

Le cricket est un sport collectif qui se joue avec une balle et des battes de bois; il est assez proche du base-ball et se pratique surtout en Grande-Bretagne et en Australie. Chaque match met en présence deux équipes composées de onze athlètes.

Une épreuve célèbre en Angleterre est la *Benson and Hedges Cup*. Elle comprend tout d'abord des championnats locaux éliminatoires, ou zones, au nombre de 4. Les deux premières équipes au classement final de chacune de ces zones sont sélectionnées pour participer aux quarts de finale de la Cup; les vainqueurs de chaque éliminatoire ont le privilège de jouer à domicile contre une équipe classée deuxième dans son championnat de zone. De plus, le règlement interdit à deux formations de la même zone de se rencontrer au stade des quarts de finale. Le tirage au sort entre les huit équipes retenues se réalise en extrayant des petites balles hors de deux urnes: la première contient des balles sur lesquelles sont inscrits les noms des équipes ayant le droit de jouer à domicile, tandis que la seconde renferme des balles avec les noms des équipes devant jouer à l'extérieur. On tire successivement une balle de chaque urne pour former les différentes rencontres. Si, pour un même match, on extrait successivement deux balles correspondant à des équipes de la même zone, on recommence le tirage, et ceci jusqu'à ce que le règlement soit respecté.

La question est de savoir quels sont les tirages au sort acceptables et, subsidiairement, quelle est la probabilité d'en obtenir un [15].

Pour résoudre ce problème, désignons par E_i et e_i respectivement le vainqueur et la deuxième équipe de la zone i (pour $i = 1, 2, 3, 4$): chaque E_i va jouer à domicile contre une équipe e_k , avec nécessairement k distinct de i . On peut construire tous les tirages au sort acceptables en écrivant les 24 permutations des nombres 1, 2, 3 et 4, et en ne retenant parmi elles que celles pour lesquelles chaque nombre i n'occupe pas la i -ème place (pour $i = 1, 2, 3, 4$).

Les 24 permutations en question sont les suivantes :

<u>1</u> 234	1243	1324	1342	1423	1432
2 <u>3</u> 41	2431	<u>2</u> 413	2134	2314	<u>2</u> 143
341 <u>2</u>	3124	3241	<u>3</u> 421	<u>3</u> 142	3214
412 <u>3</u>	<u>4</u> 312	4132	4213	4231	<u>4</u> 321

Parmi ces groupements, sont à exclure ceux qui contiennent un chiffre souligné, ce qui laisse 9 possibilités, à savoir les 9 permutations encadrées qui correspondent aux 9 tirages au sort acceptables suivants :

E ₁ - e ₂	E ₂ - e ₃	E ₃ - e ₄	E ₄ - e ₁
E ₁ - e ₃	E ₂ - e ₄	E ₃ - e ₁	E ₄ - e ₂
E ₁ - e ₄	E ₂ - e ₁	E ₃ - e ₂	E ₄ - e ₃
E ₁ - e ₄	E ₂ - e ₃	E ₃ - e ₁	E ₄ - e ₂
E ₁ - e ₂	E ₂ - e ₄	E ₃ - e ₁	E ₄ - e ₃
E ₁ - e ₃	E ₂ - e ₄	E ₃ - e ₂	E ₄ - e ₁
E ₁ - e ₃	E ₂ - e ₁	E ₃ - e ₄	E ₄ - e ₂
E ₁ - e ₂	E ₂ - e ₁	E ₃ - e ₄	E ₄ - e ₃
E ₁ - e ₄	E ₂ - e ₃	E ₃ - e ₂	E ₄ - e ₁

La probabilité d'effectuer un "bon" tirage au sort est donc égale à $\frac{9}{24} = 0,375$.

Généralisons le problème en considérant n couples (E_i, e_j) pour $i = 1, 2, \dots, n$, où chaque E_i (resp. e_j) représente une équipe oeuvrant à domicile (resp. à l'extérieur). En pratique, n doit être une puissance de 2, mais le raisonnement qui va suivre est valable pour tout entier n au moins égal à 2 (d'ailleurs, dans la suite, n représentera toujours un entier supérieur à 2, convention qui ne sera plus rappelée).

Un match est en réalité une "association" de deux équipes et peut s'écrire sous la forme $E_i - e_k$. Si le règlement permettait à deux équipes de même indice de se rencontrer, il y aurait évidemment $n!$ tirages possibles: ils correspondraient en effet à toutes les permutations de n équipes visiteuses. Mais, pour tout indice i compris entre 1 et n , E_i ne peut pas rencontrer e_i . Il convient donc de

construire la liste ordonnée des équipes e_k (pour $k = 1, 2, \dots, n$), de telle manière que e_j ne soit pas le i -ième élément de la liste, pour tout indice i ; il s'agit en fait de former ce que l'on appelle les *dérangements*, c'est-à-dire les permutations sans "points fixes" des n indices $1, 2, \dots, n$.

Désignons par D_n le nombre de dérangements lorsqu'il y a n couples (E_i, e_j) pour $i = 1, 2, \dots, n$. De façon concrète, D_n représente le nombre de tirages au sort acceptables quand n compétitions locales éliminatoires sont organisées, tandis que la probabilité pour qu'un tirage au sort soit valable est égale à $P_n = \frac{D_n}{n!}$. Le problème traité à propos de la Benson and Hedges Cup était relatif au cas particulier $n = 4$: on a trouvé $D_4 = 9$ et $P_4 = 0,375$.

Il existe plusieurs formules générales exprimant D_n et P_n en fonction de n . Voici une version intéressante dont la preuve peut être donnée par référence au problème sportif évoqué ci-dessus [15].

Nous allons montrer que

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2});$$

sachant que $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on pourra dès lors connaître par récurrence les nombres D_n pour tout entier n .

Nous admettrons que E_1 joue contre e_k , avec bien sûr $k \neq 1$. Pour chacun des $n-1$ choix de l'indice k , à savoir $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, le problème sera identique : former les matches $E_i - e_m$ pour $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ et $m \in \{2, 3, \dots, n\} \setminus \{k\}$ et $i \neq m$.

Pour fixer les idées, nous allons prendre $k = 2$. Il résulte de ce qui précède que

$$D_n = (n-1)D_n^*$$

où D_n^* désigne le nombre de tirages au sort de matches du type $E_i - e_m$, avec $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $m \in \{1, 3, \dots, n\}$ et $i \neq m$.

Supposons tout d'abord que E_2 rencontre e_1 . Il reste alors à former les matches $E_i - e_m$, avec $i, m \in \{3, 4, \dots, n\}$ et $i \neq m$: avec nos notations, il y a D_{n-2} tirages possibles.

Il reste à envisager le cas où E_2 ne joue pas contre e_1 . Dans ces conditions, il convient de construire les matches $E_i - e_m$, avec $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ et $m \in \{1, 3, \dots, n\}$, l'adversaire de E_2 n'étant pas e_1 et l'adversaire de E_r n'étant pas e_r pour tout $r \in \{3, 4, \dots, n\}$. En remplaçant mentalement E_2 par E_1 , on voit que le problème équivaut à former les matches $E_i - e_k$ avec $i, k \in \{1, 3, \dots, n\}$ et $i \neq k$: il y a donc D_{n-1} tirages de ce type possibles.

En regroupant les deux éventualités, on obtient donc

$$D_n^* = D_{n-1} + D_{n-2},$$

d'où

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Cette formule en appelle d'autres. Ainsi, on peut démontrer par récurrence que :

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

De fait, cette égalité est vraie pour $n = 2$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$. Cette hypothèse de récurrence permet d'affirmer que

$$D_{n-1} = (n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1},$$

ou

$$(n-1)D_{n-2} - D_{n-1} = (-1)^n;$$

la première formule, qui peut s'écrire sous la forme

$$D_n = nD_{n-1} + (n-1)D_{n-2} - D_{n-1},$$

livre alors

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Une nouvelle démonstration par récurrence permet de prouver cette autre égalité :

$$D_n = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

En effet, la propriété est vraie pour $n = 2$; supposons-la vraie pour $n-1$. De l'égalité

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n,$$

on obtient, via l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} D_n &= n \cdot (n-1)! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] + (-1)^n \\ &= n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

En corrolaire, on en déduit immédiatement que

$$P_n = \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

A partir de ces différentes formules, on peut calculer de proche en proche les différentes valeurs de D_n et P_n ; voici les premiers résultats auxquels on aboutit [15] :

n	D_n	P_n
1	0	0
2	1	0,5
3	2	0,3333
4	9	0,375
5	44	0,3667
6	265	0,3681
7	1854	0,3679
8	14833	0,3679

I.3. Système de scores et structure de treillis

A la suite de Parlebas [23,24,25], nous allons présenter une modélisation du système des scores dans certaines compétitions sportives mettant en présence deux adversaires (ou équipes) A et B. Nous ne traiterons point les sports qui s'achèvent "au temps", c'est-à-dire après un laps de temps bien précis dont la durée est connue dès le départ, ce qui est le cas pour de nombreux sports collectifs comme le football, le basket, le rugby, le handball,... Au contraire, nous examinerons exclusivement certaines disciplines qui désignent comme vainqueur le compétiteur qui atteint le premier un score déterminé selon des règles strictes, les ex aequo étant exclus: à titre d'exemples, signalons le volley-ball ainsi que les sports dérivés du jeu de paume (tennis, tennis de table, squash, badminton,...).

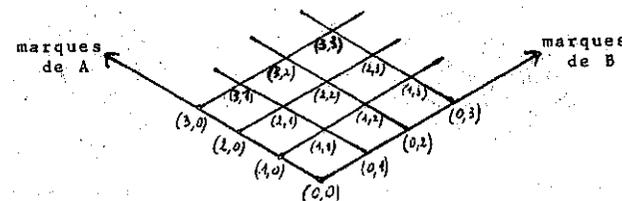
On appelle *marque* de A (resp. de B) au moment considéré le nombre a (resp. b) de points attribués à A (resp. à B) à cet instant; le couple (a,b) de ces deux marques est le *score* correspondant.

Au départ, le score *initial* est de (0,0). Toute marque ne régresse jamais: elle peut soit demeurer inchangée (par exemple, en volley, si l'échange est gagné par l'équipe qui n'est pas au service, le score reste le même), soit progresser par *pas* uniforme, souvent d'une unité (sauf, par exemple, en tennis, où les points d'un jeu valent 15, 30, 40,....., mais pourraient évidemment être remplacés par 1, 2, 3,....), avec un *score-limite* qui, une fois atteint, met un terme à la rencontre (gain du match) ou à une partie de la rencontre (gain d'un set ou d'un jeu). Le plus petit nombre parmi les maxima des marques d'un score-limite est naturellement appelé la *marque-limite*; par exemple, un set de tennis se termine par un des scores 6-0, 6-1, 6-2, 6-3 6-4, 7-5, 8-6,.... : les maxima des marques constituant les scores-limites sont donc 6, 7, 8,... et leur plus petit représentant, à savoir 6, est donc bien la *marque-limite*. Dans certains cas, le score-limite doit être atteint sous certaines conditions, généralement avec deux points d'avance, sinon la rencontre est prolongée jusqu'à ce que cette clause soit respectée: on parlera alors de *clôture*

conditionnelle du match (ou du set ou du jeu). Nous appellerons *ligne des scores* toute séquence de scores possibles, ayant pour origine le score initial et pour extrémité un score-limite. Nous désignerons par S l'ensemble de tous les scores possibles: il s'agit visiblement d'un sous-ensemble de l'ensemble-produit

$$N^2 = \{(a,b): a = 0,1,2,\dots \text{ et } b = 0,1,2,\dots\}$$

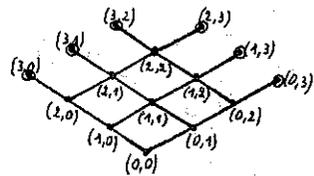
Sur S, nous allons définir une *relation* binaire: un score s_1 sera déclaré *antérieur* à s_2 (ou, de façon équivalente, s_2 sera dit *postérieur* à s_1), ce qui sera noté $s_1 R s_2$, si et seulement si s_1 est égal à s_2 ou peut chronologiquement précéder s_2 dans une même ligne des scores. Cette relation binaire R est (trivialement) réflexive, antisymétrique et transitive: elle définit donc un ordre partiel sur S; R n'est toutefois pas un ordre total sur S, car deux scores ne sont pas toujours comparables: par exemple, en tennis, aucun des scores (3,1) et (2,3) ne peut être antérieur à l'autre. De plus, pour deux scores non comparables, il existe toujours un ou plusieurs scores antérieurs et, parmi ceux-ci, il en est un qui est postérieur à tous les autres; par exemple, les scores de tennis (3,1) et (2,3) déjà considérés sont simultanément postérieurs à (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2) et (2,1), ce dernier étant postérieur aux autres. En termes mathématiques, cette propriété se traduit par l'existence d'un infimum (ou borne inférieure) pour tout couple de scores dans S, ce qui équivaut à dire que l'ordre R érige l'ensemble S en un inf-demi-treillis, qui peut dès lors être représenté par un "diagramme de Hasse" résultant en fait du produit des deux ordres naturels sur N.



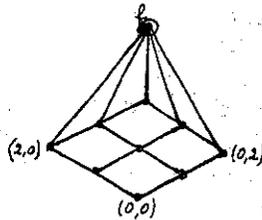
De même, deux scores non comparables peuvent être simultanément antérieurs à plusieurs autres, et même à une infinité d'autres; pour l'exemple de tennis ci-dessus, $s_1 = (3,1)$ et $s_2 = (2,3)$ sont antérieurs à $(3,3)$ et, bien entendu, à tous les scores postérieurs à $(3,3)$, à savoir $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(4,5)$,...; il y en a une infinité si la règle des deux points d'avance est imposée, mais $(3,3)$ est le plus antérieur des scores postérieurs à s_1 et s_2 : $(3,3)$ est le supremum ou borne supérieure de s_1 et s_2 .

Observons que si l'ensemble S possède un minimum universel, c'est-à-dire un score antérieur à tous les autres, à savoir le score initial $(0,0)$, il contient plusieurs éléments maximaux non comparables, à savoir tous les scores-limites. De la sorte, S n'est pas à proprement parler un treillis, bien qu'il n'en soit évidemment pas fort éloigné. A ce propos, il y a lieu de distinguer deux cas correspondant à la manière dont se termine la partie engagée.

Lorsque les scores sont limités par une règle de clôture non conditionnelle, le réseau des scores peut se représenter par un graphe obtenu en effectuant le produit-direct des deux ordres totaux naturels sur N , avec des sommets "pendants" correspondant aux différents scores-limites possibles; ces derniers peuvent d'ailleurs être "identifiés" en un seul sommet f (pour "fin") postérieur à tout sommet de S et jouant alors le rôle de supremum universel: le graphe ainsi construit est celui d'un treillis, baptisé le *treillis des scores*. En guise d'illustration, voici le cas d'un match de tennis en trois sets gagnants.



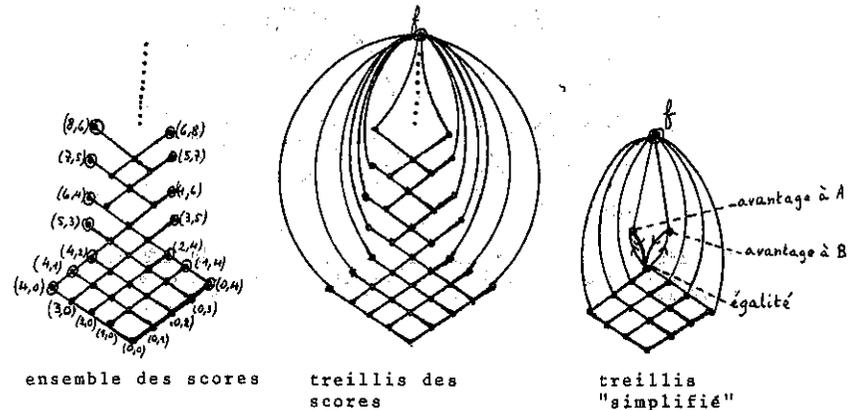
ensemble des scores



treillis des scores

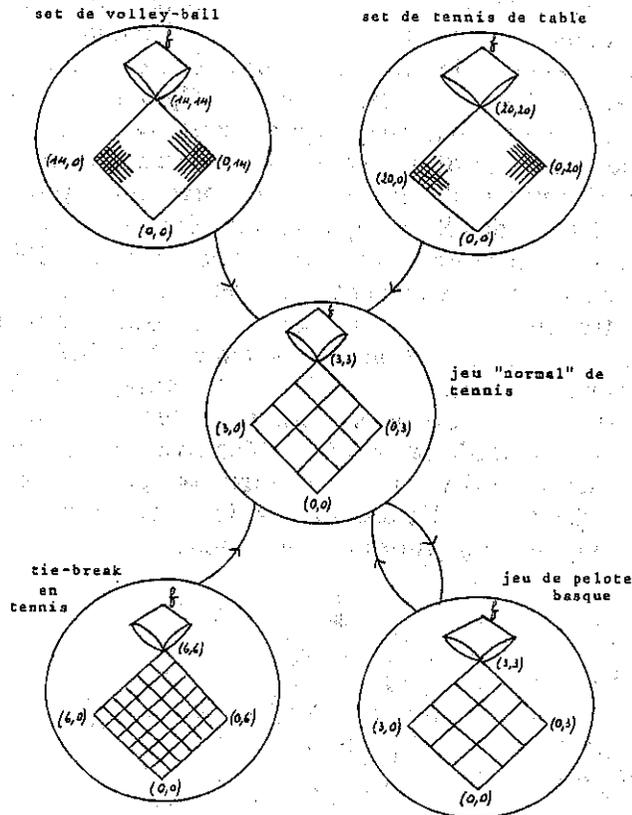
Lorsque la clôture est conditionnelle, à savoir une

supériorité de deux points à la marque, le champ des scores peut encore se représenter par un réseau construit à partir de l'ordre naturel sur N , avec des sommets "pendants" correspondant à certains scores-limites (par exemple, $(4,0)$, $(4,1)$ et $(4,2)$ dans un jeu de tennis); mais ici le graphe est "coiffé" par une sorte de "cheminée illimitée" décrivant l'évolution du score lorsque le jeu est prolongé en raison de la règle des deux points d'écart, avec, à chaque "étage", des sommets "pendants" qui sont également des scores-limites (par exemple, $(5,3)$, $(6,4)$,... dans un jeu de tennis). Tous les scores-limites peuvent encore être "identifiés" en un seul sommet f postérieur à tout autre élément de S , ce qui fournit également un *treillis des scores* qui contient cette fois une infinité d'éléments. Pour visualiser plus aisément ce treillis, la règle d'arrêt peut être traduite par la présence de deux circuits (de longueur 2) articulés autour du sommet "égalité" vers les deux sommets "avantage à A" et "avantage à B" : la présence de ces circuits montre la possibilité de "prolonger à l'infini" la partie, l'épreuve ne se terminant que si le score quitte un des circuits pour atteindre le sommet f . A titre d'exemple, voici les représentations possibles pour un jeu (normal) de tennis.



De nombreux sports ont une structure des scores "identique", la correspondance entre les différents treillis étant obtenue par épimorphisme ou même isomorphisme

[24]; en voici quelques exemples (où, pour plus de clarté des figures, le sommet f ainsi que les arcs qui y aboutissent n'ont pas été tracés).



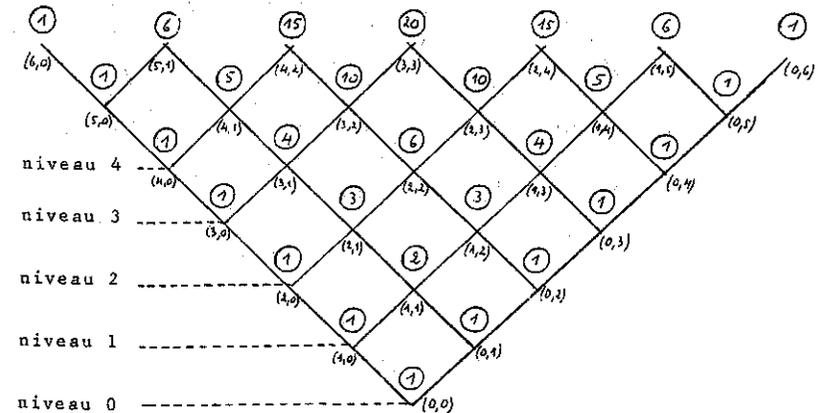
Morphismes entre les systèmes de scores de certains jeux de paume (les arcs reliant le sommet f et les flèches sur les arcs des "avantages" ayant été omis pour la clarté des figures)

La connaissance de la structure des scores permet de mieux saisir la diversité des situations qui peuvent se rencontrer, ce que le résultat final ne laisse pas toujours imaginer.

Penchons-nous à nouveau sur le cas d'un sport où le score évolue par pas uniforme d'une unité. Dans le champ des scores, considérons un sommet quelconque $s = (a,b)$. Le nombre de possibilités distinctes d'atteindre s peut être obtenu en regardant le graphe du treillis des scores: il est en effet égal au nombre, noté n_s , de lignes de scores différentes partant du sommet $(0,0)$ et passant par s . Il s'agit du nombre de manières de choisir, parmi les $a+b$ points joués, les a points gagnés par A (ou, de façon équivalente, les b points remportés par B); n_s vaut donc le nombre de combinaisons simples de $a+b$ objets pris a à a (ou, de façon équivalente, pris b à b), soit:

$$n_s = C_{a+b}^a = \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

La figure ci-dessous représente la partie inférieure du champ des scores, chaque sommet s étant affecté du nombre correspondant n_s . Remarquons qu'à chaque niveau p du treillis, la séquence des nombres n_s coïncide avec la liste des coefficients binomiaux relatifs au développement de $(a+b)^p$; le réseau des scores est donc isomorphe au triangle de Pascal.

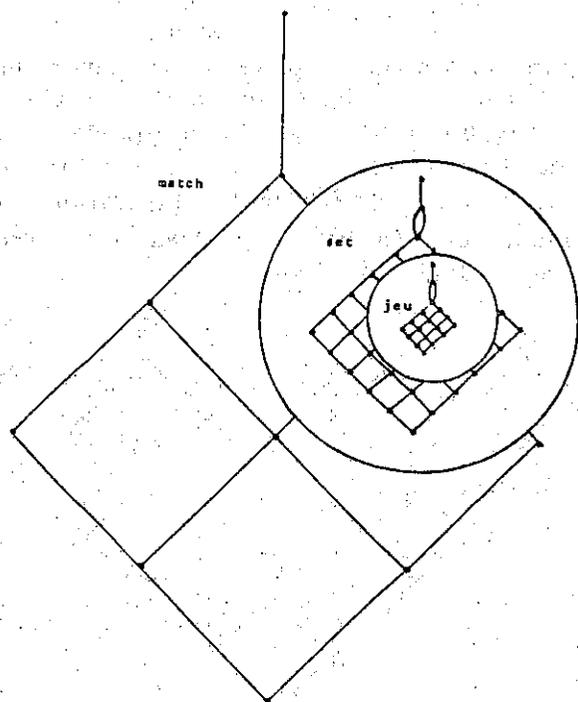


Dénombrement des lignes de scores

Ainsi, en tennis, il y a une seule possibilité de voir un set se terminer sur le score "blanc" de $(6,0)$ en faveur de A,

mais la marque de (6,6) peut être obtenue de $C_{12}^6 = 924$ façons différentes. Comme autre exemple, signalons que, dans un set de volley, il existe plus de 40 millions de possibilités d'atteindre l'égalité à 14 partout!

Attardons-nous sur le cas du tennis. Un match apparaît comme un treillis à clôture non conditionnelle, la marque limite étant fixée à 2 unités (dans la majorité des cas) ou à 3 unités (pour les grandes compétitions masculines professionnelles): on parle alors de match en 2 ou en 3 sets gagnants respectivement.



La structure des scores d'un match de tennis est un treillis de treillis

Ce *treillis-match* est lui-même constitué de treillis, à savoir les sets. Dans chaque *treillis-set*, la marque-limite est de 6 unités (ou jeux), avec un écart minimum de deux unités, à moins que ne soit respectée la règle du tie-break qui, à 6 partout, livre le vainqueur du set à l'issue d'un seul jeu décisif (appelé précisément le tie-break). Enfin, chaque set est lui-même constitué de treillis, à savoir les *treillis-jeux*. En dehors du tie-break, chaque jeu est un treillis à clôture conditionnelle avec pour marque-limite 4 et la règle des 2 points d'écart; le tie-break est, quant à lui, un treillis à clôture conditionnelle dont la marque-limite est 7 avec toujours la restriction des 2 points d'avance.

En résumé, les scores dans un match de tennis forment un treillis de treillis (les sets) de treillis (les jeux). Cette superposition de trois structures de treillis est à l'origine de situations paradoxales assez fréquentes. En effet, le vaincu d'un set peut avoir gagné plus de points que le vainqueur. A titre d'exemple, dans un set sans prolongation et avec des jeux sans avantage, le perdant a remporté de 0 point (sur 6 jeux) à 28 points (sur 10 jeux), tandis que le gagnant a remporté un minimum de 24 points (sur 6 jeux) et un maximum de 32 points (sur 10 jeux). Ce phénomène est évidemment valable pour chaque set et est bien sûr amplifié par la structure même du match en 2 ou 3 sets gagnants. Le perdant du match peut ainsi remporter beaucoup plus de points que son heureux adversaire; par exemple, pour un match en 3 sets gagnants, le vaincu peut avoir gagné jusqu'à 78 points de plus que le vainqueur: cette différence paraît énorme si l'on pense que 72 points suffisent parfois pour gagner un tel match [24]! Bien entendu, cette brève analyse ne tient compte que du score, sans aucune nuance; elle ne fait pas intervenir, par exemple, le fait qu'un sportif "rusé" peut avoir intérêt à faire l'impasse sur un set mal engagé suivant un set gagnant: du point de vue physique, il peut ainsi se reposer tandis que l'adversaire se fatigue, tandis que du point de vue psychologique, cette manoeuvre peut engendrer chez l'adversaire une confiance présomptueuse.

CHAPITRE II. CALCUL DES PROBABILITES ET STATISTIQUE

II.0. Introduction

Nous commençons ce chapitre par nous demander quel est le meilleur choix stratégique à opérer en squash lorsque les deux joueurs atteignent le score d'égalité à 8 partout dans une manche. Il s'agit là d'un intéressant problème qui fait apparaître, de façon fort surprenante, le fameux nombre d'or : en fait, l'intérêt du joueur (qui doit se prononcer sur la prolongation éventuelle du set) est de retenir l'option des 9 points si et seulement si son adversaire gagne chaque point avec une probabilité constante supérieure à l'inverse du nombre d'or!

Dans le même ordre d'idées, nous exposons un modèle probabiliste simple qui étudie la question de savoir si l'intérêt d'un tennisman est de servir ses deux balles en force ou bien, comme c'est souvent le cas, de livrer d'abord un balle puissante suivie, en cas d'échec pour cette dernière, d'une balle plus faible (et plus sécurisante).

Ensuite, nous montrons que les lois théoriques classiques de la statistique s'adaptent parfaitement à des situations rencontrées dans le domaine sportif. La loi binomiale intervient dans l'étude de la prolongation d'un match de football par une série de penalties. La loi de Poisson décrit assez fidèlement le nombre de buts marqués par match. La loi multinomiale s'avère utile dans l'analyse d'un match-play en golf.

Ces études théoriques particulières seront le plus souvent illustrées par des données réellement observées dans les sports considérés.

II.1. Un choix stratégique en squash et le nombre d'or

En squash, les points sont uniquement attribués au joueur qui est au service; si ce dernier commet une faute, il cède le service à son adversaire et le score reste inchangé. Une partie se déroule normalement en trois sets gagnants. Chaque set est remporté par le joueur qui obtient le premier neuf points; toutefois, si le score est de 8 partout, le joueur qui n'a pas le service peut demander que la manche se termine à 10 points.

Ce règlement soulève inévitablement la question suivante: quel est le meilleur choix à opérer lorsque les deux adversaires atteignent le score fatidique de 8-8?

Dans une première approche [2], il est raisonnable de supposer que la probabilité de gagner un échange quelconque est toujours égale à 0,5; en effet, les deux joueurs, ayant atteint le score d'égalité à 8, sont certainement très proches l'un de l'autre, tandis que le fait d'être au service ne constitue pas un avantage (ou un inconvénient) majeur, tout au moins à un certain niveau de jeu.

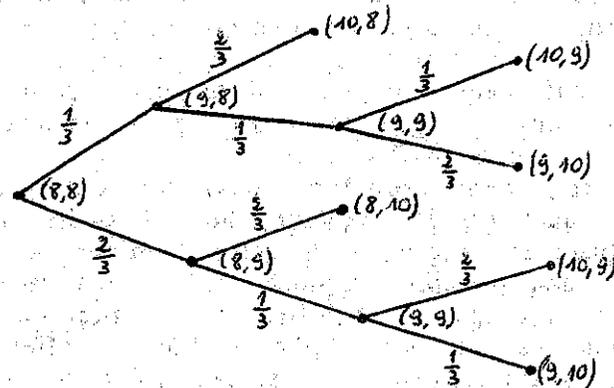
Nous appellerons A et B les deux sportifs en présence et admettrons que le score de 8 partout est atteint lorsque A est au service, de sorte que B doit choisir une fin de set en 9 points ou en 10 points. Bien entendu, B va chercher à maximiser sa probabilité de gagner la manche. Or, A gagnera le point suivant dans ces différents cas:

- A gagne le premier échange (ce qui sera noté A);
- B gagne le premier échange et A les deux suivants (ce qui sera noté BAA);
- B gagne les premier et troisième échanges, tandis que A remporte les deuxième, quatrième et cinquième (ce qui sera noté BABAA);
- et ainsi de suite, avec BABABAA, ou BABABABAA, ou ...

Dans ces conditions, la probabilité pour que A gagne le premier point après 8-8 est égale à la valeur de la série géométrique dont le premier terme est 0,5 et la raison est 0,25: elle vaut donc

$$0,5 + 0,5^3 + 0,5^5 + \dots = 0,5 * \frac{1}{1-0,25} = \frac{2}{3}$$

En conséquence, si B opte pour la fin de set en 9 points, sa probabilité de gagner la manche sera de 33,3%. Par contre, si B choisit la solution des 10 points, les situations possibles peuvent être découvertes à la lecture de ce diagramme en arbre



Ainsi, la probabilité pour que B gagne le set en 10 points vaut:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{11}{27} \approx 41\%$$

En conclusion, B a tout intérêt à prolonger le set en 10 points, puisque ce choix augmente sa probabilité de gagner la manche de plus de 7%.

W.J. Brooks et L.P. Hughston [5] ont proposé un modèle plus élaboré pour choisir rationnellement l'option la meilleure concernant la prolongation ou non d'un set.

Nous appellerons à nouveau A et B les deux joueurs et supposerons cette fois que tout échange a la même probabilité p (resp. $q = 1-p$) d'être gagné par A (resp. par B), et ceci quel que soit le serveur. Cette dernière hypothèse, plus réaliste que celle émise par Avery [2], est néanmoins fort simplificatrice (elle peut être partiellement levée, avec un raisonnement fort semblable

à ce qui va suivre, en supposant seulement que A gagne un échange avec une probabilité constante p lorsqu'il sert, et avec une probabilité constante m lorsque B sert [5]). Nous admettrons encore que le score de 8 partout est atteint lorsque A sert, de sorte que le choix de la fin de set doit être effectué par B. Evidemment, B va retenir la solution qui minimise la probabilité selon laquelle A gagne la manche. Pour faciliter les écritures, nous désignerons simplement par $P(X|Y)$ la probabilité conditionnelle que X gagne le point étant donné que Y est au service. Il est clair que l'on dispose des égalités suivantes:

$$P(A|A) + P(B|A) = 1 \text{ et } P(A|B) + P(B|B) = 1.$$

Lorsque A est au service, il marquera le point si le premier échange est gagné par A, ou si les échanges suivants sont successivement remportés par BAA, ou BABAA, ou BABABAA,.... De la sorte,

$$P(A|A) = p + (qp)p + (qp)^2p + (qp)^3p + \dots = \frac{p}{1-pq}$$

d'où

$$P(B|A) = 1 - \frac{p}{1-pq} = \frac{q^2}{1-pq}$$

De la même manière, on peut trouver :

$$P(B|B) = \frac{q}{1-pq}$$

puis

$$P(A|B) = 1 - \frac{q}{1-pq} = \frac{p^2}{1-pq}$$

La probabilité pour que A atteigne le premier la marque de 9 points vaut donc $\frac{p}{1-pq}$; il s'agit de la probabilité $P_9(A)$ pour que A gagne le set lorsque le choix de 9 points est retenu.

Lorsque B choisit l'option des 10 points, A gagnera le set dans les cas suivants :

- A gagne consécutivement deux points;

- B gagne le premier point, puis A gagne les deux suivants;
- A gagne le premier point, B gagne le point suivant, puis A gagne le dernier.

La probabilité $P_{10}(A)$ pour que A gagne le set en 10 points vaut dès lors :

$$\begin{aligned}
 & [P(A|A)]^2 + P(B|A) \cdot P(A|B) \cdot P(A|A) + P(A|A) \cdot P(B|A) \cdot P(A|B) \\
 &= \frac{p^2}{(1-pq)^2} + \frac{q^2}{1-pq} \frac{p^2}{1-pq} \frac{p}{1-pq} + \frac{p}{1-pq} \frac{q^2}{1-pq} \frac{p^2}{1-pq} \\
 &= \frac{p^2[1+pq(2q-1)]}{(1-pq)^3}
 \end{aligned}$$

Le joueur B a donc intérêt à choisir la solution des 9 points lorsque $P_{10}(A) > P_9(A)$, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{p^2[1+pq(2q-1)]}{(1-pq)^3} > \frac{p}{1-pq},$$

ce qui équivaut, après quelques calculs élémentaires, à la condition suivante :

$$p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 = (p-1)^2 (p+\phi)(p-\phi^{-1}) > 0$$

où ϕ désigne le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Comme l'expression $(p-1)^2(p+\phi)$ est positive (puisque $0 < p < 1$ et $\phi > 0$), $P_{10}(A) > P_9(A)$ si $p > \phi^{-1} \approx 0,618$.

En conclusion, B aura intérêt de choisir l'option des 9 points lorsqu'il estime que A lui est nettement supérieur ($p > 0,618$); dans tous les autres cas, en particulier lorsque p et q coïncident avec 0,5, il lui sera préférable d'opter pour la solution des 10 points.

II.2. Un modèle probabiliste pour déterminer le meilleur choix du service en tennis

En tennis, un serveur possède deux chances d'effectuer un service valable; en effet, s'il rate sa première balle, il a droit à un second essai; si ce deuxième service ne retombe pas dans les limites prescrites, le serveur perd alors le point (on parle dans ce cas d'une *double faute*).

Il résulte de cette règle que tout joueur (ou joueuse) met généralement au point deux "services" différents, à savoir ce que l'on nomme quelquefois la *première balle*, qui est généralement très puissante mais peu sûre, et la *seconde balle* que l'on utilise uniquement lorsque la première balle est mauvaise; bien entendu, cette seconde balle donne une plus faible probabilité de gagner le point, mais a par contre une forte probabilité d'être bonne. L'efficacité de ces deux services peut varier fortement d'un joueur à l'autre et nous allons exposer un modèle probabiliste simple qui donnera une idée sur les meilleurs services à choisir en première ou deuxième balle [19].

Nous allons supposer que le serveur considéré dispose de deux types distincts de services, appelés dans la suite le *service fort* et le *service faible*, chacun ayant une probabilité fixée et constante de gagner le point. Nous considérerons les événements suivants :

- S_1 : un service fort tombe dans les limites;
- S_2 : un service faible est exécuté et tombe dans les limites;
- G : le serveur gagne le point.

Nous noterons $P(G|S_i)$ la probabilité pour que le serveur gagne le point sachant qu'il a exécuté un service du type S_i (pour $i = 1, 2$).

Le joueur peut choisir entre quatre stratégies reprises dans le tableau suivant :

Stratégie n°	première balle	deuxième balle
1	S ₁	S ₂
2	S ₁	S ₁
3	S ₂	S ₂
4	S ₂	S ₁

Le choix le plus courant est sans conteste la première stratégie (n° 1); la probabilité de gagner le point en servant une première balle forte et une seconde faible est donnée par :

$$p_1 = P(G|S_1)P(S_1) + P(G|S_2)P(S_2)[1-P(S_1)];$$

or, pour $i = 1, 2$, on sait que $P(G|S_i) = \frac{P(GS_i)}{P(S_i)}$, où $P(GS_i)$ désigne la probabilité d'effectuer un bon service du type S_i et de gagner le point; dans ces conditions, on peut encore écrire :

$$p_1 = P(GS_1) + P(GS_2)[1-P(S_1)].$$

En utilisant la stratégie n° 2, la probabilité de gagner le point est donnée par :

$$p_2 = P(G|S_1)P(S_1) + P(G|S_1)P(S_1)[1-P(S_1)] \\ = P(GS_1)[2-P(S_1)].$$

Pour la stratégie n° 3, la probabilité de gagner le point vaut :

$$p_3 = P(G|S_2)P(S_2) + P(G|S_2)P(S_2)[1-P(S_2)] \\ = P(GS_2)[2-P(S_2)].$$

Enfin, pour la stratégie n° 4, la probabilité de gagner le point est égale à :

$$p_4 = P(G|S_2)P(S_2) + P(G|S_1)P(S_1)[1-P(S_2)] \\ = P(GS_2) + P(GS_1)[1-P(S_2)].$$

Il est somme toute naturel, au vu des définitions des différents services, d'admettre ces hypothèses :

$$P(G|S_1) \geq P(G|S_2) \text{ et } P(S_2) \geq P(S_1).$$

Dans ces conditions, on voit de suite que $p_4 \leq p_1$, car

$$p_4 - p_1 = P(S_1)P(S_2)[P(G|S_2) - P(G|S_1)] \leq 0;$$

en conséquence, la quatrième stratégie ne sera jamais utilisée.

Comparons à présent les deuxième et troisième stratégies à la première, qui est la plus courante.

Comme

$$p_2 - p_1 = [1-P(S_1)] [P(GS_1) - P(GS_2)],$$

$$p_2 \leq p_1 \text{ si et seulement si } Z = \frac{P(GS_2)}{P(GS_1)} \geq 1.$$

De même,

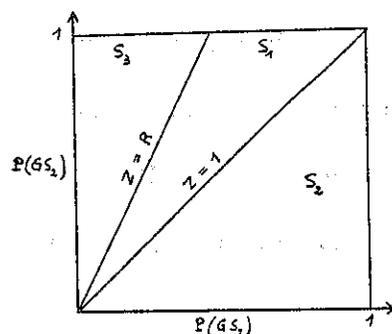
$$p_3 - p_1 = P(GS_2)[1-P(S_2)+P(S_1)] - P(GS_1) \\ = P(GS_1)\{Z [1+P(S_1)-P(S_2)] - 1\}$$

$$\text{entraîne } p_3 \leq p_1 \text{ si et seulement si } Z \leq R = \frac{1}{1+P(S_1)-P(S_2)}$$

Voici le résumé de ce qui précède, en supposant $P(S_1)$ et $P(S_2)$ connus :

Le serveur choisira sa stratégie	si et seulement si
1	$1 \leq Z \leq R$
2	$Z < 1$
3	$Z > R$

Ces conclusions peuvent être visualisées dans un plan, en plaçant les valeurs de $P(GS_1)$ sur l'axe horizontal et celles de $P(GS_2)$ sur l'axe vertical :



Comme on le voit sur cette figure, la zone réservée à la stratégie n° 1 n'est pas la plus étendue. On peut dès lors se demander pourquoi cette option est si souvent adoptée. Voici quelques éléments de réponse à cette question, étant entendu que les hypothèses du modèle sont très contraignantes et fort simplificatrices.

Généralement, Z est supérieur ou égal à 1, mais R est très grand puisque $P(S_2)$ est proche de 1, tandis que $P(S_1)$ est généralement très faible; en conséquence, on a très souvent $1 \leq Z \leq R$, ce qui requiert effectivement le choix de la première stratégie. Toutefois, dans la pratique, on constate que Z est quelquefois inférieur à l'unité [19], ce qui devrait amener le choix de la deuxième stratégie; même dans ce cas, les joueurs préfèrent encore la première option car, pour des raisons psychologiques prépondérantes, ils veulent à tout prix éviter la double-faute. Enfin, oserait-on formuler cette conjecture : les tennismen choisissent presque toujours la stratégie n° 1 tout simplement parce qu'ils ne connaissent pas suffisamment bien le calcul des probabilités ?

II.3. La prolongation d'un match de football par des penalties et la loi binomiale

Dans de nombreuses compétitions de football, par exemple dans les Coupes d'Europe, on a recours à des penalties lorsque les deux équipes en présence ne sont pas arrivées à se départager après le temps réglementaire; elles tirent alors l'une après l'autre et alternativement 5 penalties; si elles sont encore à égalité après ces 10 tirs, elles continuent "au finish" jusqu'à ce qu'une équipe marque tandis que l'autre rate: le vainqueur est alors enfin connu!

Nous nous proposons d'analyser le bien-fondé de cette réglementation; de façon plus précise, nous allons calculer combien de tirs chaque équipe doit théoriquement botter avant que le vainqueur ne soit connu.

A la suite de Colwell, Gillett et Jones [11], nous admettrons les hypothèses suivantes:

- les deux équipes, notées respectivement A et B, doivent tirer à tour de rôle au but; 5 séries (de 2 tirs, à savoir un tir par équipe) sont d'abord prévues; si A et B sont encore ex aequo après ces 10 tirs, des séries supplémentaires sont organisées selon la règle de *fin immédiate* (en anglais *sudden-death*) en ce sens que la rencontre est terminée à l'issue de la première de ces séries pour laquelle une équipe marque alors que son adversaire rate;
- les équipes convertissent un penalty indépendamment l'une de l'autre;
- A (resp. B) a la probabilité constante p (resp. q) de marquer à chaque shoot; on a de plus $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

Occupons-nous en premier lieu des n premières séries de deux tirs, avec $0 \leq n \leq 5$. Désignons par X (resp. Y) le nombre de buts marqués par A (resp. par B) lorsque chaque équipe a tiré n fois; ces variables aléatoires X et Y suivent des lois binomiales, à savoir $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n, q)$ respectivement, d'où

$$P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

et

$$P(Y=y) = C_n^y q^y (1-q)^{n-y}.$$

Si, après les n premières séries (avec, toujours, $0 \leq n \leq 5$), une des deux équipes a marqué au moins $(5-n+1)$ goals de plus que l'autre, il est clair que cette équipe est déjà certaine de gagner à l'issue de ces n premières séries; cette situation ne peut se produire que lorsque n vaut 3 (resp. 4; 5), auquel cas le score est de 3-0 (resp. 2-0, 3-0, 3-1, 4-0, 4-1 ou 4-2; 1-0, 2-0, 2-1, 3-0, 3-1, 3-2, 4-0, 4-1, 4-2, 4-3, 5-0, 5-1, 5-2, 5-3 ou 5-4) en faveur de l'équipe gagnante.

La probabilité pour que l'équipe A (resp. B) puisse être déclarée victorieuse après n séries complètes de deux tirs (avec $3 \leq n \leq 5$), quels que soient les résultats ultérieurs, est notée $P_A(n)$ (resp. $P_B(n)$) et vaut

$$P_A(n) = \sum_{x=5-n+1}^n \sum_{y=0}^{x-(5-n+1)} P(X=x) P(Y=y)$$

et

$$P_B(n) = \sum_{y=5-n+1}^n \sum_{x=0}^{y-(5-n+1)} P(X=x) P(Y=y),$$

d'où

$$P_A(n) = P_B(n).$$

Dès lors, la probabilité pour que le vainqueur soit connu à l'issue de la n -ème série (pour $0 \leq n \leq 5$) est égale à

$$P(n) = \begin{cases} P_A(n) + P_B(n) = 2 \cdot P_A(n) & \text{pour } 3 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq n \leq 2. \end{cases}$$

Comme le nombre $P(5)$ donne la probabilité pour que le vainqueur soit connu à l'issue des 5 premières séries de tirs, la probabilité pour en arriver à des séries supplémentaires selon la règle de *fin immédiate* est évidemment égale à $1-P(5)$.

Considérons à présent les séries au-delà de la cinquième. Une de ces séries sera la dernière lorsque l'une des équipes marquera et que l'autre ratera son shoot;

posons

$$\begin{aligned} \lambda &= P(\text{A marque}) \cdot P(\text{B rate}) + P(\text{A rate}) \cdot P(\text{B marque}) \\ &= p \cdot (1-q) + q \cdot (1-p) = p + q - 2pq; \end{aligned}$$

on a bien sûr $0 < \lambda < 1$.

La $(5+n)$ -ème série (avec $n \geq 1$) désignera le vainqueur avec la probabilité de:

$$[1-P(5)] \cdot (1-\lambda)^{n-1} \lambda.$$

Désignons par S la variable aléatoire donnant le nombre de séries complètes de 2 penalties à tirer pour connaître le vainqueur. L'espérance mathématique de S est donnée par

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{n=3}^5 n P(S=n) + \sum_{n=6}^{\infty} n P(S=n) \\ &= \sum_{n=3}^5 [n P(n) - n P(n-1)] + [1-P(5)] \sum_{n=1}^{\infty} (5+n) (1-\lambda)^{n-1} \lambda \\ &= 5P(5) - P(3) - P(4) + \lambda [1-P(5)] \left[5 \sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n (1-\lambda)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Or, comme $0 < \lambda < 1$, des résultats classiques sur les séries géométriques livrent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n = \frac{1}{1-(1-\lambda)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (1-\lambda)^{n-1} = -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Partant,

$$E(S) = 5 - P(3) - P(4) + \frac{1-P(5)}{p+q-2pq}.$$

Remarquons que la valeur de $E(S)$ n'est pas modifiée

lorsque les rôles de p et q sont échangés, ni lorsque les nombres p et q sont remplacés respectivement par $1-p$ et $1-q$. Différentes valeurs de $E(S)$ sont données dans la table ci-dessous [11] :

p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,05	11,721					
0,1	8,698	7,493				
0,2	6,320	6,164	5,820			
0,3	5,332	5,421	5,468	5,388		
0,4	4,779	4,924	5,128	5,223	5,219	
0,5	4,404	4,549	4,808	5,005	5,130	5,172
0,6	4,112	4,245	4,510	4,757	4,970	
0,7	3,860	3,981	4,234	4,496		
0,8	3,626	3,740	3,979			
0,9	3,393	3,508				
0,95	3,271					

A la lecture de ce tableau, on peut constater que le nombre moyen de séries de 2 pénalités à tirer avant de connaître l'équipe gagnante est généralement faible, souvent même inférieur à 5. Il ne dépasse sensiblement 5 que lorsque les probabilités p et q sont toutes deux très faibles (par exemple, égales à 0,05) ou, au contraire, toutes deux fort élevées (par exemple, égales à 0,95).

II.4. Les buts marqués et la loi de Poisson

Dans de nombreux sports collectifs (tels que le football, le hockey,...), chaque équipe s'efforce de marquer un maximum de buts. Mais la tâche est généralement ardue, notamment parce que l'adversaire s'y oppose évidemment de toutes ses forces, de sorte qu'une rencontre se solde souvent par un score assez étreint.

Marquer un but apparaît donc comme étant un événement bien sûr instantané dans le temps et d'occurrence rare. Il est de plus tout à fait raisonnable de supposer que la probabilité de marquer un but pendant un intervalle de temps assez petit, de grandeur Δt , est proportionnelle à Δt , que cette probabilité est indépendante du nombre de buts inscrits antérieurement et reste plus ou moins constante au cours de la période d'observation (ce qui n'est peut-être guère raisonnable sur une saison complète, notamment parce que les conditions climatiques changent), et enfin que la probabilité de marquer au moins deux fois pendant Δt est négligeable. Dans ces conditions, la variable aléatoire, notée x , indiquant le nombre de buts marqués obéit à une loi de Poisson.

Nous prendrons la durée normale d'un match (sans prolongation) comme unité de temps et désignerons par λ le nombre moyen de buts marqués par rencontre. La probabilité de marquer n buts (pour $n = 0, 1, 2, \dots$) au cours d'une rencontre est dès lors donnée par

$$P(x=n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

A titre d'exemple, Avery et ses élèves [2] ont relevé la répartition des buts marqués en première division de la ligue anglaise pendant une saison (1986-1987); ils ont obtenu ces observations:

nombres de buts marqués	0	1	2	3	4	5	6	7	8
nombres observés de matches	42	87	109	84	82	33	14	7	4

Au total, 1215 buts ont été marqués lors des 462 rencontres, ce qui donne, en moyenne, 2,63 buts par match.

La distribution théorique résultant d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,63$ est la suivante:

nombres de buts marqués	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
nombres théoriques de matches	33,3	87,6	115,2	101	66,4	34,9	15,3	5,7	2,6

On peut utiliser un test du khi-carré pour vérifier l'hypothèse nulle selon laquelle la variable aléatoire x suit une loi de Poisson de paramètre 2,63. Pour avoir des fréquences théoriques suffisamment grandes, rassemblons les cas pour lesquels plus de 6 buts ont été marqués et comparons les distributions observée et théorique en calculant le χ^2 correspondant; on trouve:

nombres de buts marqués	fréquences observées	fréquences théoriques	$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
i	o_i	e_i	
0	42	33,3	2,273
1	87	87,6	0,004
2	109	115,2	0,333
3	84	101	2,861
4	82	66,4	3,665
5	33	34,9	0,103
6 et plus	25	23,6	0,083

d'où

$$\chi^2 = 2,273 + 0,004 + 0,333 + 2,861 + 3,665 + 0,103 + 0,083 = 9,322.$$

Pour 5 degrés de liberté (car 7 classes ont été retenues et le paramètre λ a été estimé à partir des observations) et un seuil $\alpha = 0,05$ (resp. 0,01), la valeur théorique du khi-carré est égale à 11,07 (resp. 15,09) et dépasse largement la grandeur observée. En conclusion, l'hypothèse nulle proposée ne peut pas être rejetée au niveau de signification 0,05 (resp. 0,01).

Il convient de noter que la loi de Poisson, même si elle est souvent d'application, peut être mise en défaut dans certains cas. Cela provient principalement de ce que la probabilité de marquer un but lors d'une rencontre n'est pas nécessairement constante: elle dépend notamment du fait de jouer à domicile ou à l'extérieur, de rencontrer un adversaire fort ou faible, de la tactique préconisée par l'entraîneur,... C'est pourquoi certains auteurs, tels Pollard [26], Reep et Benjamin [28], remplacent la loi de Poisson par une distribution binomiale négative.

Nous n'entrerons pas dans ces considérations, mais reprendrons l'exemple donné par Colwell et Gillett [8] à propos des 100 premiers matches de football entre les équipes nationales d'Angleterre et d'Ecosse. Les nombres de buts inscrits par ces deux pays lors de leurs confrontations sont repris dans le tableau suivant:

nombres de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Angleterre	17	39	22	6	7	7	0	1	0	1
Ecosse	20	32	27	13	3	3	1	1	0	0

Sur les 100 rencontres ont été enregistrés 22 matches nuls et 39 victoires pour chacune des deux équipes; par ailleurs, l'Angleterre (resp. l'Ecosse) a marqué, en moyenne, 1,8 (resp. 1,65) fois par match. En ajustant ces données à une distribution théorique donnée par une loi de

Poisson de paramètre 1,8 pour l'Angleterre et 1,65 pour l'Ecosse, on obtient les résultats suivants:

buts marqués i	Angleterre (λ=1,8)			Ecosse (λ=1,65)		
	o_i	e_i	$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	o_i	e_i	$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
0	17	16,53	0,013	20	19,2	0,033
1	39	29,75	2,876	32	31,69	0,003
2	22	26,78	0,085	27	26,14	0,028
3	6	16,07	6,31	13	14,38	0,132
4...	16	10,87	2,421	8	8,59	0,04
totaux	100	100	11,75	100	100	0,236

Si l'on teste l'hypothèse nulle selon laquelle les distributions observées et théoriques coïncident, des conclusions différentes sont obtenues : pour l'Ecosse, la loi de Poisson ajuste fort bien les données observées, ce qui n'est pas du tout le cas pour l'Angleterre (ainsi que le montrent les valeurs calculées du khi-carré).

Notons à présent x_1 (resp. x_2) la variable aléatoire donnant le nombre de buts marqués par l'Angleterre (resp. l'Ecosse), en moyenne par match. A la suite de Colwell et Gillett [8], admettons que x_1 et x_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi de Poisson de paramètre 1,8 et 1,65 respectivement (cette hypothèse n'étant pas conforme à la réalité en ce qui concerne l'Angleterre, ainsi que nous l'avons montré ci-dessus). On peut calculer la probabilité théorique pour que les deux équipes réalisent un match nul, que l'Angleterre l'emporte ou que l'Ecosse gagne. On trouve successivement:

$$P(x_1=x_2) = \sum_{i=0}^9 P(x_1=i)P(x_2=i) = 0,2303$$

$$P(x_1 > x_2) = \sum_{i=0}^9 P(x_1=i)P(x_2 < i) = 0,419$$

$$P(x_1 < x_2) = 1 - [P(x_1=x_2) + P(x_1 > x_2)] = 0,3507.$$

Ainsi, sur 100 matches, on devrait théoriquement enregistrer (environ) 42 victoires de l'Angleterre, 35 victoires de l'Ecosse et 23 matches nuls, ce qui est assez éloigné de la réalité. Néanmoins, Colwell et Gillett (qui sont anglais!) concluent (avec humour) que si la loi de Poisson n'est pas toujours applicable pour traduire le nombre de buts effectivement inscrits, elle décrit mieux que la réalité les possibilités footballistiques des deux pays concernés [8; p. 117] !

II.5. Le golf et la loi multinomiale

En golf, il existe de nombreuses formules parmi lesquelles les deux plus importantes sont le *medal play* et le *match play*. La première, le *medal play*, consiste à additionner les nombres de coups joués pour parvenir à boucler le parcours complet. La seconde, le *match play*, oppose deux joueurs ou deux équipes de deux joueurs; chaque trou compte séparément et l'emporte le joueur ou l'équipe qui gagne le plus grand nombre de trous sur un parcours. Une épreuve organisée selon cette seconde formule est la fameuse *Ryder Cup* qui opposait jadis une équipe américaine à une équipe des îles britanniques et qui, depuis 1977, met en présence une équipe américaine et une équipe européenne.

D. Colwell, J. Gillett et B. Jones [10] ont élaboré un modèle probabiliste simple relatif à une compétition golfique selon la formule *match play* sur un parcours classique de 18 trous, puis ont confronté leur théorie avec les résultats enregistrés à la *Ryder Cup* entre les années 1961-1977.

Deux joueurs (ou équipes) A et B s'affrontent. Il est supposé que la probabilité pour que A (resp. B) gagne un trou contre B (resp. A) est égale à p (resp. q), quel que soit le trou considéré; dès lors, la probabilité pour que les deux joueurs ne puissent pas se départager pour un trou est constante et égale à $r = 1 - p - q$.

Dans la suite, nous admettrons que les n premiers trous ont été joués (avec $0 \leq n \leq 18$).

La probabilité pour que A (resp. B) en ait gagné x (resp. y), auquel cas il y a eu forcément $n - x - y$ trous se terminant par un *ex aequo*, est donnée par la loi multinomiale, à savoir

$$\frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} p^x q^y r^{n-x-y}$$

Nous allons tout d'abord étudier le problème suivant: quelle est la probabilité pour que A, par exemple, puisse être déclaré vainqueur quelles que soient les issues des

(18- n) trous ultérieurs? Ceci équivaut évidemment à rechercher la probabilité pour que le nombre de trous gagnés par A soit strictement supérieur à la somme du nombre de trous gagnés par B et du nombre (18- n) de trous non encore joués (qui pourraient donc tous être gagnés par B si la partie se poursuivait jusqu'à la fin, c'est-à-dire jusqu'au 18-ème trou inclus); nous noterons $P_A(n)$ cette probabilité.

Il est clair que l'issue du match demeure incertaine lorsque n est inférieur à 10. Nous allons donc considérer les entiers n tels que $10 \leq n \leq 18$.

Pour $n = 10$, A sera certain de sa victoire lorsqu'il aura gagné tous les 10 trous, ou lorsqu'il en aura gagné 9 avec un trou *ex aequo*. En vertu de la loi binomiale, on a dès lors

$$P_A(10) = p^{10} + 10p^9r$$

De même, pour $n = 11$, A pourra être déclaré vainqueur s'il a gagné au moins 8 trous de plus que B; en d'autres termes, B peut avoir gagné 0 ou 1 trou: dans la première éventualité, A aura gagné 11 trous, ou 10 trous plus un nul, ou 9 trous plus 2 nuls, ou 8 trous plus 3 nuls; dans la seconde éventualité, A aura remporté 10 trous, ou 9 trous plus un nul. Partant,

$$P_A(11) = p^{11} + \frac{11!}{10!1!} p^{10}(q+r) + p^9 \left(\frac{11!}{9!2!} r^2 + \frac{11!}{9!1!1!} q r \right) +$$

$$\frac{11!}{8!3!} p^8 r^3 = \sum_{y=0}^1 \sum_{x=8+y}^{11-y} \frac{11!}{x!y!(11-x-y)!} p^x q^y r^{11-x-y}$$

En général, pour n quelconque (avec, bien entendu, $10 \leq n \leq 18$), A sera assuré de gagner la partie s'il a remporté x trous, tandis que B en a gagné y , pour autant que

$$x + y \leq n \text{ et } x - y \geq 19 - n;$$

en effet, le nombre total de trous gagnés par A et B doit évidemment être inférieur ou égal au nombre n de trous joués, tandis que la différence entre les nombres de trous gagnés par A et par B doit être strictement supérieure au nombre de trous qui doivent encore être joués (c'est-à-dire à 18- n), les nombres x , y et n étant bien sûr des entiers.

Les deux inégalités précédentes entraînent visiblement

19 + y = n ≤ x ≤ n - y et 0 ≤ y ≤ n - 10.
 En conséquence, pour 10 ≤ n ≤ 18, on a

$$P_A(n) = \sum_{y=0}^{n-10} \sum_{x=19+y-n}^{n-y} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y r^{n-x-y}$$

En particulier, la probabilité pour que A gagne la partie vaut:

$$P_A(18) = \sum_{y=0}^8 \sum_{x=y+1}^{18-y} \frac{18!}{x!y!(18-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{18-x-y} \quad (*)$$

De la même manière, on peut évidemment montrer que la probabilité pour que B puisse être déjà déclaré vainqueur lorsque les n premiers trous sont joués (toujours avec 10 ≤ n ≤ 18) est égale à

$$P_B(18) = \sum_{x=0}^{n-10} \sum_{y=19+x-n}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y r^{n-x-y}$$

Dès lors, la probabilité pour que le match puisse livrer à coup sûr un vainqueur à l'issue du n-ème trou vaut:

$$P(n) = P_A(n) + P_B(n)$$

$$= \sum_{y=0}^{n-10} \sum_{x=19+y-n}^{n-y} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} r^{n-x-y} (p^x q^y + p^y q^x)$$

On peut alors calculer aisément la probabilité, notée p(n), pour que l'issue d'un match soit connue exactement au n-ème trou. De fait,

$$p(n) = P(n) - P(n-1) \text{ pour } 11 \leq n \leq 17, \\ p(10) = P(10) \text{ et } p(18) = 1 - P(17).$$

Ainsi, le nombre minimum de trous à jouer pour connaître le résultat du match est donné par l'espérance mathématique suivante

$$E = \sum_{n=10}^{18} np(n)$$

$$= 10p(10) + \sum_{n=11}^{17} n[P(n) - P(n-1)] + 18[1 - P(17)] \\ = 18 - \sum_{n=10}^{17} P(n) \quad (**)$$

Les formules (*) et (**) ont été exploitées pour construire les différentes valeurs de P_A(18) et de E relatives à quelques valeurs courantes de p et q; cela livre le tableau suivant au sein duquel les valeurs de E sont inscrites sous les valeurs de P_A(18) [10; p. 4].

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
q											
0	0	0,85	0,98	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	18,0	17,2	15,9	14,8	13,8	12,9	12,1	11,4	10,8	10,2	10,0
0,2	0	0,39	0,71	0,89	0,96	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	
0,3	17,2	17,4	16,8	15,8	14,8	13,8	12,9	12,1	11,5	11,1	
0,4	0	0,15	0,42	0,67	0,83	0,92	0,97	0,99	0,99		
0,5	15,5	16,7	16,9	16,4	15,6	14,7	13,8	12,9	12,5		
0,6	0	0,05	0,21	0,44	0,64	0,79	0,89	0,94			
0,7	14,8	15,8	16,4	16,5	16,1	15,4	14,6	14,1			
0,8	0	0,01	0,10	0,25	0,45	0,63	0,73				
0,9	13,8	14,8	15,6	16,1	16,2	15,9	15,6				
1	0	0,00	0,04	0,13	0,28	0,40					
	12,9	13,8	14,7	15,4	15,9	16,3					
	0	0,00	0,01	0,06	0,13						
	12,1	12,9	13,8	14,6	15,6						
	0	0,00	0,00	0,02							
	11,4	12,1	12,9	14,1							
	0	0,00	0,00								
	10,8	11,4	12,5								
	0	0,00									
	10,2	11,1									
	0										
	10,0										

Les auteurs précités ont comparé ces valeurs théoriques aux résultats effectivement enregistrés lors des dernières éditions de l'ancienne version de la Ryder Cup (de 1961 à 1977). Les Etats-Unis (notés A) rencontraient les

flés britanniques (notées B). Sur 138 matches, l'équipe A en a remporté 71, de sorte que la probabilité observée pour que A gagne est égale à

$$\overline{P}_A(18) = \frac{71}{138}$$

Par ailleurs, il y eut 21 matches se terminant par un ex aequo, 33 (resp. 36; 20; 14; 9; 3; 2; 0; 0) matches livrant le vainqueur exactement au 18-ème (resp. 17-ème; 16-ème; 15-ème; 14-ème; 13-ème; 12-ème; 11-ème; 10-ème) trou, ce qui donnait comme nombre moyen de trous à jouer pour connaître le vainqueur :

$$\overline{E} = \frac{21 \cdot 18 + 33 \cdot 18 + 36 \cdot 17 + 20 \cdot 16 + 14 \cdot 15 + 9 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 12}{138} = 16,688$$

En consultant la table ci-dessus, ces données empiriques correspondent à des valeurs de p et de q comprises entre 0,2 et 0,3; des calculs plus fins montrent que les observations correspondent aux estimations \overline{p} et \overline{q} de p et q respectivement égales à :

$$\overline{p} = 0,26 \text{ et } \overline{q} = 0,227$$

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n; p, q)$ conduit à la distribution théorique décrite par le tableau suivant (où est reprise la distribution observée)

numéro du trou auquel le match se termine	effectifs observés O_i	effectifs théoriques e_i	$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$
18 (par ex aequo)	21	18,1	0,465
18 (avec un vainqueur)	33	35,8	0,219
17	36	31,8	0,555
16	20	24,5	0,827
15	14	15,7	0,184
14	9	8,1	0,100
13	3	3,1	} 0,250
12	2	0,8	
11	0	0,1	
10	0	0	

Les distributions observées (2-ème colonne) et théorique (3-ème colonne) peuvent être comparées à l'aide d'un test du khi-carré, les quatre dernières observations ayant été regroupées pour avoir des classes assez grandes. On obtient une valeur observée du khi-carré égale à

$$\chi_{\text{obs}}^2 = 0,465 + 0,219 + 0,555 + 0,827 + 0,184 + 0,1 + 0,25 = 2,6$$

Or, le khi-carré théorique à 4 degrés de liberté (car les 2 paramètres p et q ont été estimés à partir des observations, alors que 7 classes seulement ont été retenues) pour le seuil $\alpha = 0,05$ vaut

$$\chi_{0,95}^2(4) = 9,488,$$

ce qui montre que le modèle théorique décrit bien la réalité observée.

CHAPITRE III. ANALYSE

III.0. Introduction

L'analyse mathématique repose sur certaines notions fondamentales qui paraissent peut-être "évidentes" aux yeux des mathématiciens professionnels, mais qui sont parfois difficilement assimilées par des débutants.

Ainsi, la notion de limite (et de série) a fait l'objet de nombreuses études scientifiques depuis l'Antiquité; il est tout compte fait assez normal que nos élèves éprouvent de la gêne en abordant ce sujet. Pour éclaircir les idées, il n'est pas mauvais d'expliquer le célèbre paradoxe de Zénon, ce qui peut être réalisé notamment à l'aide de l'exemple d'un coureur en athlétisme.

Chose plus surprenante, le concept délicat de continuité peut être présenté par référence à l'action d'un basketteur qui tente un tir au panier; l'idée de voisinage apparaît de la sorte tout naturellement.

La notion de dérivée (pour une fonction d'une seule variable) reçoit une interprétation physique bien connue qui peut être perçue par le biais du problème posé concrètement à un coureur cycliste ou à un automobiliste. De même, le gradient (pour les fonctions de plusieurs variables) admet une signification réelle souvent exploitée par les alpinistes.

L'idée de fonction composée (ou de fonction de fonction) n'est pas toujours bien assimilée par les élèves. On peut en donner un exemple concret (assez complexe) en calculant la probabilité de gagner un match de tennis en supposant constante la probabilité de gagner chaque point; corrélativement, cette étude explique comment le décompte des points favorise toujours (et nettement) le meilleur des

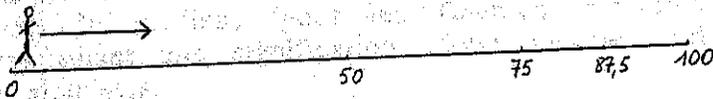
deux joueurs.

Enfin, différents types d'équations interviennent dans le domaine sportif. Ainsi, des équations différentielles simples permettent de décrire la trajectoire (parabolique) d'un ballon de football dégagé par un gardien de but (ou d'une balle de tennis frappée "à plat",...). Par ailleurs, des problèmes de gestion sportive font intervenir des équations récurrentes ou des équations algébriques qui ne peuvent être résolues que par des méthodes d'approximation numérique (ce sera le cas pour calculer le taux réel d'un emprunt remboursé par une série de versements équidistants et constants, ainsi que pour trouver le taux de rentabilité interne modifié d'un projet d'investissement).

III.1. Athlétisme, paradoxe de Zénon et notion de série

Zénon, illustre philosophe grec qui vécut entre 490 et 485 jusqu'en 430 avant Jésus-Christ, fut le principal porte-parole de l'école d'Elée; il s'intéressa beaucoup à la notion d'infini et formula quelques paradoxes fameux, comme cette énigme célèbre: *comment un point en mouvement peut-il occuper successivement un nombre fini de positions en un laps de temps fini?*

Nous allons analyser une "version sportive" du problème soulevé par Zénon. Il s'agit d'expliquer rigoureusement cette proposition évidemment contredite par la réalité: *un athlète prenant le départ d'une course de 100 mètres ne franchira jamais la ligne d'arrivée.* La "justification" de cette affirmation est la suivante: lorsque le sportif aura couru pendant 50 mètres, il lui restera encore la moitié du trajet à parcourir; quand la moitié de ces 50 mètres sera couverte, il lui restera encore le dernier quart de la distance totale, soit 25 mètres, à franchir; quand la moitié de ces 25 derniers mètres sera parcourue, il lui restera encore un huitième de 100 mètres, soit 12,5 mètres, à parcourir, et ainsi de suite "jusqu'à l'infini": il lui restera donc toujours une certaine distance à parcourir et, de ce fait, il n'atteindra jamais le terme de la course.



G. Cantor, au 19-ème siècle, a étudié les ensembles infinis, ce qui permet de mieux comprendre ce paradoxe. En effet, cet illustre mathématicien a montré qu'il n'existe aucune bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des points d'un segment de droite. Il est dès lors impossible de "compter" les points d'un intervalle.

Concrètement, le coureur de Zénon ne peut pas dénombrer les bornes placées sur son parcours (de mi-parcours, des $\frac{3}{4}$ du trajet,...) ... et il finit par franchir la ligne d'arrivée.

Voici une façon simple de formaliser ce problème.

Nous allons nous placer dans le cas (peu réaliste, mais simplificateur) où l'athlète se déplace à vitesse constante v (exprimée en mètres par seconde). Le coureur parcourt les 50 premiers mètres dans le temps $t = \frac{100}{v}$ secondes. Pour

franchir les 25 mètres suivants, il lui faudra $\frac{t}{2}$ secondes,

puis $\frac{t}{4}$ secondes pour parcourir les 12,5 mètres suivants, et

ainsi de suite. D'une manière générale, pour franchir $\frac{100}{2^{n+1}}$

mètres de la course, il mettra $\frac{t}{2^n}$ secondes, pour tout $n = 0,$

1, 2,....; de la sorte, les $100 - \frac{100}{2^{n+1}}$ premiers mètres de la course seront couverts dans le temps suivant (exprimé en secondes) :

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \frac{t}{2^3} + \dots + \frac{t}{2^n}$$

Le problème soulevé consiste donc à donner un sens à la "somme infinie" ou *série* suivante :

$$s = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \frac{t}{2^3} + \dots + \frac{t}{2^n} + \dots$$

Posons $s_n = \sum_{i=0}^n \frac{t}{2^i}$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$. Une formule

relative à la somme des termes d'une progression géométrique (de raison 0,5) livre, après avoir mis t en évidence :

$$s_n = t \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = t \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = t \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Si n s'éloigne vers l'infini, $\frac{1}{2^n}$ se rapproche visiblement de 0; cela se traduit mathématiquement de la manière suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = 2t$$

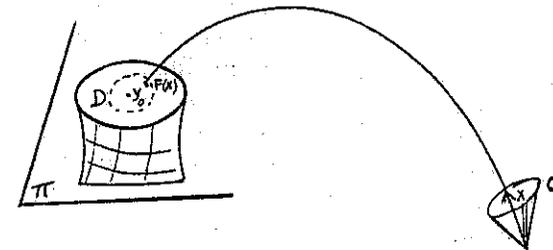
Nous avons ainsi obtenu une confirmation scientifique de ce que tout athlète connaît par intuition: s'il se déplace à vitesse constante et met t secondes pour parcourir la première moitié de la course, il franchira la ligne d'arrivée après $2t$ secondes!

III.2. Le tir à un panier de basket et la notion de continuité

Bien que facile à percevoir intuitivement pour des fonctions d'une variable réelle, la notion de continuité est assez délicate à présenter d'une manière à la fois rigoureuse et générale.

P. Duchet [1] introduit ce concept de façon originale... et fort suggestive en analysant un tir à un panier de basket-ball. Voici, en substance, comment il présente les choses.

Quand un joueur de basket tire au panier, il envoie la balle dans une certaine direction, avec une certaine force; en fait, l'envoi est caractérisé par un *vecteur* défini par une direction de l'espace et une grandeur liée à la force utilisée: ce vecteur est la *donnée* ou *point de départ*. Le *résultat* ou *objet d'arrivée*, qui est fonction du vecteur initial, traduit la réussite ou l'échec du tir. Pour traduire quantitativement le phénomène, on peut dire que l'essai sera réussi lorsque le centre du ballon traversera le plan horizontal π du panier en un point "assez proche" du centre Y_0 de l'anneau: à titre indicatif, si le ballon possède un diamètre de 20 centimètres, il passera sans toucher l'anneau pour autant que son centre se trouve à moins de 10 centimètres de Y_0 . Bref, à tout vecteur X caractérisant le lancer est associé un point $F(X)$ de π .



Il est à noter que la trajectoire de vol de la balle ne joue pratiquement aucun rôle dans ce problème: par exemple, peu importe si la balle monte fort haut ou si elle est déviée par le vent,...; seul compte le point d'arrivée $F(X)$ dans π .

Aussi adroit que soit le tireur, le vecteur X n'est pas défini avec une précision absolue; sa direction et sa grandeur ne sont pas connues avec exactitude: on peut déterminer en réalité un petit cône C au sein duquel va se trouver le vecteur définissant le shoot.

Par ailleurs, le résultat ne doit (heureusement!) pas être unique: pour réussir un tir, on peut se contenter d'avoir un point $F(X)$ situé dans un petit disque D centré sur Y_0 .

Ainsi, le même phénomène apparaît aussi bien au départ de la phase qu'à son terme: le vecteur X doit se loger dans un cône entourant le lancer parfait (caractérisé par un vecteur X_0), tandis que le point $F(X)$ doit appartenir à un disque entourant le point idéal Y_0 . Ces deux notions de cône et de disque sont en réalité des cas particuliers d'un seul et même concept: celui de *voisinage*. Le cône C est un voisinage de X_0 et le disque D est un voisinage de Y_0 .

Le problème du tir au panier est, intuitivement, un phénomène "continu": cela signifie concrètement qu'il a toujours une solution. En effet, quel que soit le résultat souhaité (ici, il s'agit du point Y_0) et quel que soit le voisinage de ce résultat (ici, c'est le disque D d'incertitude autour du point X_0), on peut trouver une valeur idéale (notée ci-dessus Y_0) et un voisinage de cette dernière (à savoir le cône C contenant X_0) tels que tout lancer caractérisé par un vecteur appartenant à ce voisinage (C) donne pour résultat un tir réussi, c'est-à-dire un point situé dans le voisinage (D) du point idéal.

On peut à présent se débarrasser du contexte sportif et donner cette définition formelle. Une fonction f qui, à un élément x d'un ensemble X , associe un élément $y = f(x)$ d'un ensemble Y est continue, par définition, si, quel que soit le résultat y_0 souhaité et quel que soit le voisinage V de ce résultat, il existe une valeur idéale x_0 (avec $y_0 = f(x_0)$) et un voisinage W de x_0 tels que l'élément $y = f(x)$ soit bien situé dans le voisinage V dès que x est dans W .

Pour terminer ce paragraphe, citons P. Duchet [1; p. 23] qui s'adressait à des lycéens français.

«Voilà comment d'une formulation en français au départ, on arrive à une *formulation scientifique* qui ne contient aucune ambiguïté (... à condition que j'aie défini ce qu'était un voisinage), mais qui évidemment, pour le profane, est du latin, ... ou du chinois ... Vous allez juste "faire" le voisinage d'un nombre réel sur une droite. Et le voisinage de l'infini pour les nombres réels. Le voisinage d'un nombre, ce sera tout simplement n'importe quel intervalle qui contient ce nombre. Un voisinage de "plus l'infini", ce sera tout ce qui est "à droite" d'un nombre ... etc. Une fonction continue, c'est une fonction qui vérifie la propriété que l'on vient d'énoncer ... c'est tout!!...»

III.3. Cyclisme, automobilisme et notion de dérivée

La notion de dérivée, capitale en analyse mathématique, peut être expliquée concrètement et de façon fort "réaliste" à partir d'exemples sportifs.

Voici tout d'abord ce qu'écrivait, dans son habituel style très riche, humoristique et inimitable, F. Jongmans [21; P. IV.3] dans un syllabus de cours malheureusement épuisé à l'heure actuelle. L'auteur se proposait d'illustrer le concept de dérivée d'une fonction réelle f d'une variable réelle x , après avoir donné, de façon tout à fait classique, une définition rigoureuse et son interprétation graphique; il évoquait à ce propos le souvenir de deux anciens sportifs belges de renommée mondiale, à savoir le cycliste Eddy Merckx et l'automobiliste Jacky Ickx.

« Quant à la valeur de la dérivée $f'(x_0)$, elle mesure en somme le *taux de variation* de la fonction f en x_0 . Par exemple, si f est l'altitude des points d'un parcours routier exprimée en fonction de la projection de la distance sur un plan horizontal, la dérivée n'est autre que le *pourcentage local* du profil de la route, affecté du signe + ou - suivant qu'il s'agit d'une montée ou d'une descente. A ces mots, Merckxeddix s'éveille de sa léthargie où l'avaient plongé les incantations de Soporifix¹; bondissant d'enthousiasme

¹L'auteur avait déjà parlé de Soporifix dans l'extrait suivant. « Imaginons un Eden dans lequel douze professeurs de mathématiques seulement exercent leurs ravages. Leur univers Extremum Dupolynum, noté E, est malheureusement fort divisé. Le clan Sinistrorsum, noté S, comprend le général Bourbakix, Papix (alias Idéfix) et son inséparable Frédérix, Brenix, Soporifix et Maximus Constipatus et préconise l'introduction franche et cordiale de la mathématique moderne au jardin d'enfants; en face, le parti "nuancé" Dextrorsum, noté D, est composé de Garnirius, Terminus Dlautobus, Plusparmoindonnplus, Cosinusix et Bombatomix; un peu à l'écart se dresse enfin le

et sur sa bécane, il s'en va par monts et vaux assimiler corporellement la dérivée: là où elle est positive, il poussera d'autant plus ferme qu'elle sera plus grande, en d'autres termes que la montée est plus raide; quand elle devient négative, il mettra ses jambes au repos et jouera des bras pour freiner d'autant plus sec que la dérivée est plus négative.

On conçoit aisément le rôle que jouera la dérivée dans toutes les sciences exactes. A son tour, Ickxjackix est ébloui à la nouvelle que la dérivée du chemin S parcouru par un bolide lorsque le temps t est pris comme variable indépendante est la vitesse à l'instant considéré; en effet, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ est visiblement la vitesse moyenne durant le laps de temps Δt , et la limite de cette vitesse moyenne sur une durée Δt qui tend vers 0 définit tout naturellement la vitesse "instantanée"; à son tour, la dérivée de la vitesse est l'accélération, notion aussi cruciale pour Ickxjackix que la vitesse.»

Les fonctions de plusieurs variables peuvent admettre, quant à elles, des dérivées partielles. L'interprétation de ce nouveau concept n'est pas toujours aisée, mais peut être réalisée pour des fonctions de deux variables (car le graphique est alors, généralement, une surface de l'espace à trois dimensions, ce qui permet de visualiser les choses). Voici à ce propos des extraits d'un autre syllabus de cours rédigé par F. Jongmans [21; pp. XI.11-13], cet ouvrage étant également épuisé.

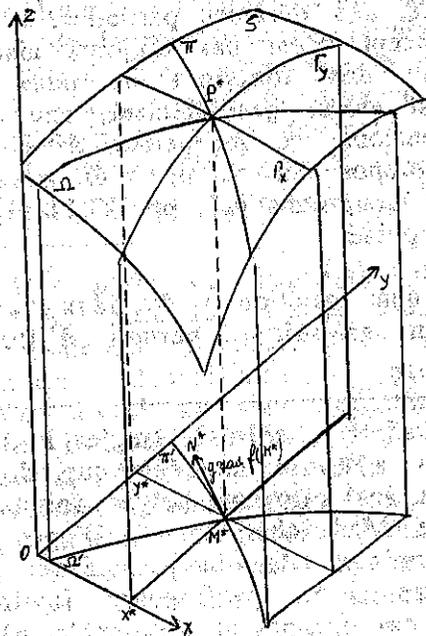
« Pour une fonction f de deux variables x et y , la représentation graphique permet d'illustrer les notions

camp Plantigrad = {Ecolrus}, singlet P dont la position est ferme : niet à toute mathématique du jardin d'enfants. Ajoutons que les citoyens belges forment dans E l'altier sous-ensemble Madeinbelgium = {Papix, Frédérix, Brenix, Garnirius, Terminus Dlautobus}, noté M; en revanche, E ne comprend que deux professeurs féminins, Frédérix et Bombatomix, qui composent l'ensemble Abalezum, noté A.»

précédentes et d'ouvrir la voie à d'autres notions.

Sur la surface S représentative de f , soit P^* le point de coordonnées x^* , y^* et $z^* = f(x^*, y^*)$; soit aussi $M^* = (x^*, y^*)$ la projection horizontale de P^* (c'est-à-dire la projection sur le plan horizontal Oxy).

Fixons y en y^* et laissons varier x ; l'intersection Γ_x de S avec le plan vertical Y^* d'équation $y = y^*$ fournit une représentation graphique dans Y^* de la fonction $g: x \rightarrow f(x, y^*)$. La dérivée de celle-ci en x^* , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(M^*)$, est la pente de la tangente à Γ_x en P^* . De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(M^*)$ est la pente de la tangente en P^* à la section Γ_y de S par le plan vertical X^* d'équation $x = x^*$. Géométriquement, la dérivabilité de f en M^* traduit donc l'existence de tangentes (non verticales) aux sections verticales Γ_x , Γ_y en P^* (voir figure ci-dessous).



Il est tentant de regarder les deux dérivées partielles premières de f en M^* comme les composantes d'un vecteur d'ordre 2, appelé *gradient de f en M^** et noté $\text{grad } f(M^*)$. On a coutume, pour mieux faire image, de "lier" ce vecteur au point M^* , c'est-à-dire de le représenter par le segment qui relie M^* au point $N^* = M^* + \text{grad } f(M^*)$; ce segment est orienté de M^* vers N^* par une flèche placée en N^* , comme l'indique la figure ci-dessus. Le gradient de f en M^* apparaît comme un indicateur commode de la dérivée de f dans chaque direction issue de M^* . La direction même de $\text{grad } f(M^*)$ est celle dans laquelle f croît le plus intensément, c'est-à-dire possède la plus forte dérivée directionnelle; la direction opposée est celle dans laquelle f décroît le plus intensément.

On peut encore dire que la direction de $\text{grad } f(M^*)$ parle au coeur de tout alpiniste convaincu: elle indique sur la carte la voie qui mène vers les cimes, elle montre le chemin de la "ligne de plus grande pente" π de P^* . »

III.4. La probabilité de gagner au tennis et la notion de fonction composée

Dans de nombreuses compétitions sportives sort vainqueur d'un match (ou d'une partie de match) celui des deux adversaires qui atteint le premier un score prédéterminé, avec parfois des conditions supplémentaires lorsque le score est serré.

Le cas le plus simple est celui pour lequel l'écart entre les deux joueurs (ou équipes) est suffisamment grand. Le nombre de possibilités pour qu'un joueur gagne (sans prolongation) par le score de n à k est égal à C_{n+k-1}^k : en effet, le concurrent malheureux gagne k points parmi les $n+k-1$ premiers, le dernier point étant évidemment remporté par le vainqueur.

Dans certaines circonstances, à un score donné d'égalité, on impose un (ou plusieurs) point(s) particulier(s). Le nombre de possibilités d'atteindre (toujours sans prolongation) l'égalité à y partout vaut, par un raisonnement semblable, C_{2y}^y ; par exemple, il y a deux manières d'atteindre le score de 1 à 1: soit 1-0 puis 1-1, soit 0-1 puis 1-1. Lorsqu'il y a égalité à y partout, il faut parfois deux points d'écart pour l'emporter; le nombre de possibilités de gagner alors par le score de $y+r$ à $y+r+2$ (avec $r \geq 2$) est égal à $2^{r-2} C_{2y}^y$, les deux derniers points étant gagnés par le vainqueur.

Appliquons ces résultats pour calculer la probabilité de gagner un match de tennis. Nous traiterons le cas des compétitions importantes en *simples messieurs*, les parties se déroulant en 3 sets gagnants avec tie-break dans chaque manche, sauf dans l'éventuel cinquième set. Un set est normalement gagné par le premier qui gagne 6 jeux, avec toutefois deux jeux d'écart; toutefois, lorsque les deux joueurs atteignent le score de 6 partout en un set autre que

l'éventuel cinquième, cette manche se clôture par un seul jeu particulier, appelé précisément le *tie-break*. Un jeu normal est gagné par celui qui emporte le premier 4 points, avec deux points d'avance au moins; un tie-break se termine lorsqu'un des adversaires atteint le premier le score de 7 points, toujours avec deux points d'avance au moins.

Nous supposons que chaque point est gagné par un joueur avec une probabilité constante. Nous désignerons par p (resp. m ; s ; s' ; j ; t) la probabilité qu'a le vainqueur de gagner un point (resp. le match; un set avec tie-break; un set sans tie-break; un jeu normal; un jeu de tie-break).

La probabilité de gagner le match est donnée par

$$m = s^3 + 3s^3(1-s) + 3s^2(1-s^2)s'$$

Les probabilités de gagner un set avec ou sans tie-break valent respectivement

$$s = j^6 + 6j^6(1-j) + 21j^6(1-j)^2 + 56j^6(1-j)^3 + 126j^6(1-j)^4 + 252j^7(1-j)^5 + 504j^6(1-j)^6t$$

$$s' = j^6 + 6j^6(1-j) + 21j^6(1-j)^2 + 56j^6(1-j)^3 + \frac{126j^6(1-j)^4}{1-2j(1-j)}$$

car la série géométrique de raison $2j(1-j)$ converge vers $\frac{1}{1-2j(1-j)}$.

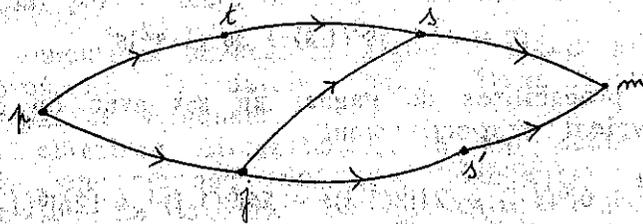
Les probabilités de gagner un jeu sans tie-break et un jeu de tie-break sont respectivement égales à

$$j = p^4 + 4p^4(1-p) + \frac{10p^4(1-p)^2}{1-2p(1-p)}$$

$$t = p^7 + 7p^7(1-p) + 28p^7(1-p)^2 + 84p^7(1-p)^3 + 210p^7(1-p)^4 + \frac{462p^7(1-p)^5}{-2p(1-p)}$$

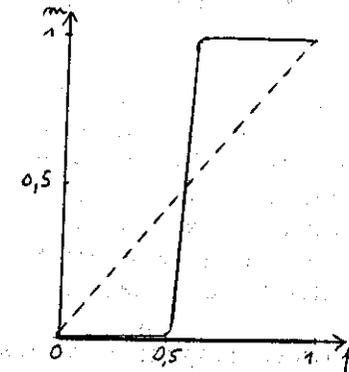
car la série géométrique de raison $2p(1-p)$ converge vers $\frac{1}{1-2p(1-p)}$

En résumé, la probabilité de gagner le match est une fonction composée (assez complexe) de p , puisque m dépend de s et de s' , que s dépend de j et de t , que s' dépend de j et que j et t dépendent de p . Entre les différentes grandeurs, on a donc le graphe d'influence suivant (une flèche existe lorsque l'origine de l'arc intervient directement dans la formule décrivant l'arrivée de l'arc).



On peut dès lors calculer les valeurs de m en fonction de p exclusivement, ce qui donne les résultats et le graphe suivants [33]

Probabilité de gagner	
Point	Match
0	0
0,1	0
0,2	10^{-22}
0,3	$4,5 \cdot 10^{-11}$
0,4	$4,4 \cdot 10^{-4}$
0,5	0,5
0,6	0,9995
0,7	0,9999
0,8	0,9999
0,9	1
1	1



Il ressort clairement de cette étude que le décompte des points en tennis favorise nettement le meilleur des deux joueurs dans la mesure où il amplifie fortement les différences entre les deux adversaires: en effet, dès que la probabilité de gagner chaque point est supérieure (resp. inférieure), même très légèrement, à 0,5, la probabilité de gagner (resp. de perdre) le match devient fort proche de 1.

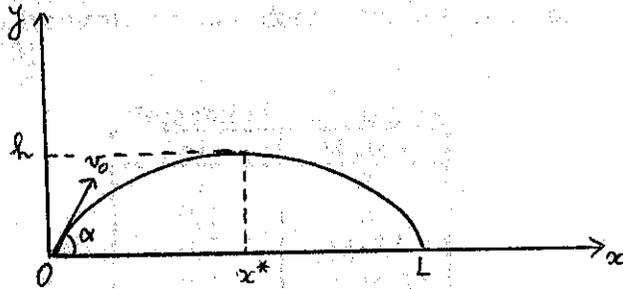
III.5. Dégagement en football et équations différentielles

En football, quand un gardien de but s'apprête à dégager le ballon qui était sorti hors des limites de jeu, il place le cuir à un endroit précis (dans le petit rectangle devant sa cage), prend de l'élan, puis shoote dans le ballon.

Nous allons étudier le cas où la courbe décrite par la balle ainsi frappée est plane, négligeant de ce fait les tirs avec de l'effet ou encore les envois déviés par le vent.

Nous travaillerons dans le plan vertical Π de la trajectoire de vol. Nous adopterons comme origine du plan l'endroit d'où part le tir, comme axe des ordonnées la droite verticale passant par cette origine, et comme axe des abscisses la droite horizontale située à l'intersection du plan Π et du sol (supposé parfaitement plat et horizontal).

Nous allons répondre à ces questions : quelle est la forme de la courbe décrite par le (centre de gravité du) ballon, quelle est la hauteur maximale h de l'envoi, quelle est la longueur L du dégagement?



Le ballon est dégagé avec une vitesse initiale v_0 (dépendant de la force de frappe et du "timing" du gardien) dans la direction faisant un angle α avec l'horizontale. A tout instant t , le cuir (ou plus exactement son centre de gravité) peut être repéré par ses

coordonnées qui dépendent du temps et qui seront dès lors notées respectivement $x(t)$ pour l'abscisse et $y(t)$ pour l'ordonnée.

Le mouvement est régi par la seconde loi de Newton, qui est la relation fondamentale de la dynamique et qui affirme que la force subie par le projectile est égale au produit de la masse par l'accélération. Or, en négligeant la résistance de l'air, l'effet du vent, ..., aucune force autre que la pesanteur n'agit sur le ballon après le shoot; la composante horizontale de la force est donc nulle, tandis que sa composante verticale est constante et négative (car la force est dirigée vers le sol): elle est égale à $-mg$, où m désigne la masse de la balle et g la valeur de l'accélération due à la pesanteur (et vaut environ $9,81 \text{ m/sec}^2$). Quant à l'accélération, il s'agit en fait de la dérivée de la vitesse, cette dernière étant elle-même la dérivée du déplacement; les composantes de l'accélération sont donc, à l'instant t , $\frac{d^2x}{dt^2}$ selon l'axe horizontal et $\frac{d^2y}{dt^2}$ selon l'axe vertical.

On dispose des équations différentielles suivantes :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

La solution de ce système livre :

$$x(t) = C_1 t + C_2 \quad \text{et} \quad y(t) = -0,5gt^2 + C_3 t + C_4,$$

où C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont des constantes qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales. En effet, à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire au moment précis du shoot), on a bien sûr $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, d'où $C_2 = C_4 = 0$; de plus, on a

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 \cdot \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \cdot \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad C_1 = v_0 \cdot \cos \alpha \quad \text{et} \quad C_3 = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Au total, on obtient

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

et

$$y(t) = -0,5gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t.$$

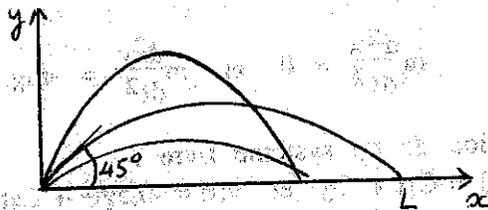
En éliminant la variable temporelle t de la deuxième égalité et en la remplaçant par $\frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, valeur résultant de la première égalité, on trouve:

$$y = \frac{-g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$$

ce qui est l'équation d'une parabole dans le plan Oxy. Cette courbe passe par l'origine (car $x = 0$ entraîne $y = 0$). Le maximum de cette fonction est atteint lorsque $y' = \frac{dy}{dx} = 0$,

soit en $x^* = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ et la hauteur maximum

est alors donnée par $h = y(x^*) = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$



Quant à la longueur L du dégagement, elle peut être calculée en recherchant le point d'intersection (autre que l'origine) de la parabole avec l'axe horizontal. Il s'agit en fait de résoudre l'équation algébrique

$$x^* \left(\frac{-g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} \right) + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

et d'en conserver la solution non nulle, à savoir

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

De cette formule, on déduit aisément que le dégagement est le plus long (pour une même force de frappe) lorsque $\sin 2\alpha$ est égal à l'unité, c'est-à-dire lorsque $\alpha = 45^\circ$: la longueur maximum vaut dans ce cas

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

III.6. Problèmes de gestion sportive et résolution d'équations

Le sport devient de plus en plus une gigantesque affaire commerciale, ce qui nécessite une gestion toujours plus rigoureuse exploitant notamment certaines théories mathématiques.

Avant de traiter trois problèmes concrets (et fort simples) de gestion sportive, rappelons quelques résultats classiques d'algèbre financière [3].

La valeur acquise par un franc placé à intérêts composés pendant n années au taux annuel constant i est donnée par l'expression bien connue $(1+i)^n$; plus généralement, la valeur acquise $V(n)$, dans les mêmes conditions, par un placement de A francs vaut

$$V(n) = A * (1+i)^n.$$

A présent, supposons qu'une recette nette R soit disponible dans n années: le capital C dont le versement immédiat est "équivalent" au versement de la somme R à l'instant n (en ce sens que C francs placés aujourd'hui à intérêts composés, au taux annuel i , donnera après n ans une valeur acquise égale précisément à R) vérifie donc l'égalité $R = C * (1+i)^n$, d'où $C = R * (1+i)^{-n}$; la somme C est appelée la *valeur actualisée* (à la date $t = 0$) du capital R au taux d'actualisation i .

Quand interviennent des sommes échéant à des époques différentes, il y a lieu de tenir compte du taux de l'intérêt ainsi que de l'époque du placement: pour ce faire, on compare uniquement les valeurs actualisées de ces sommes.

• *Le trésorier d'un club doit emprunter une somme de 100000 francs pour acheter du nouveau matériel pour ses athlètes. Dans son contrat, il est stipulé qu'il devra rembourser 3 fois 40000 francs au terme respectivement des première, deuxième et troisième années suivant son achat. Quel est le taux réel de cet emprunt?*

En égalant le montant $C = 100000$ francs à la somme des valeurs actualisées des 3 versements de $a = 40000$ francs, on

trouve

$$C = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \frac{a}{(1+i)^3} = a \left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i} \right] \quad (*)$$

ou

$$i = \frac{a}{C} [1-(1+i)^{-3}]$$

En posant $x = 1+i$, on obtient cette équation du quatrième degré:

$$Cx^4 - (C+a)x^3 + a = 0$$

ou

$$100000x^4 - 140000x^3 + 40000 = 0.$$

La dérivée de la fonction $f(x) = 10000*(10x^4 - 14x^3 + 4)$ vaut $f'(x) = 10000*(40x^3 - 42x^2)$ et s'annule (en dehors de 0) en $x^* = \frac{42}{40}$. Comme $f(1) = 0$, l'étude du signe de f' montre que $f(x) < 0$ pour $1 < x \leq x^*$, tandis que $f(x)$ croît pour $x > x^*$; il existe donc un réel x supérieur à 1 tel que $f(x) = 0$. En conséquence, il est possible de trouver un réel positif \bar{i} tel que $\bar{i} = g(\bar{i})$ pour $g(i) = \frac{a}{C} [1-(1+i)^{-3}]$: cette valeur \bar{i} est le taux annuel recherché. Partant d'un réel positif quelconque i_0 , on construit la suite récurrente définie par $i_n = g(i_{n-1})$ pour tout entier positif n ; cette suite converge vers la solution désirée.

Une autre façon de raisonner consiste à réduire au même dénominateur les deux membres de l'équation (*), puis à poser à nouveau $x = 1+i$, ce qui conduit cette fois à cette équation du troisième degré

$$100000x^3 - 40000*(x^2+x+1) = 0$$

La méthode de Newton-Raphson, par exemple, donne pour $x_0 = 1$ et après 3 itérations seulement, $x = 1,097$, d'où $\bar{i} = 9,7\%$.

• Un homme d'affaires décide de financer un club sportif durant 5 ans. Pour ce faire, il peut trouver de l'argent au taux de 14 % et l'argent que lui rapporte l'activité du club peut être réinvesti ailleurs au taux de 12 %. La première année, il emprunte 100000 francs pour financer le club. Les deuxième et troisième année, le club rapporte respectivement 40000 et 60000 francs que le financier réinvestit aussitôt. La quatrième année est moins favorable et le gestionnaire se voit obligé d'emprunter 30000 francs. Enfin, la cinquième année, l'activité sportive rapporte 80000 francs. Comment peut-on juger la rentabilité de cette gestion?

La valeur actualisée, en début de première année, des emprunts que le financier a dû réaliser au taux de 14 % est de :

$$100000 + 30000 \cdot (1+0,14)^{-1} = 120249 \text{ francs.}$$

Cette somme représente la valeur des moyens financiers à mettre théoriquement en oeuvre au moment initial pour réaliser le projet d'investissement.

Par ailleurs, les bénéfices réalisés pendant les 5 ans ont pour valeur actualisée au début de la dernière année et au taux annuel de 12 % :

$$40000 \cdot (1+0,12)^3 + 60000 \cdot (1+0,12)^2 + 80000 = 211461 \text{ francs;}$$

ce montant représente le bénéfice total dégagé par le club en fin de compte.

Le bilan global montre que l'activité du club a permis de faire croître un capital de 120249 francs jusqu'à une somme de 211461 francs sur une période de 4 ans. Le taux d'intérêt qui fait précisément progresser un capital de 120249 à 211461 en 4 ans est appelé le *taux de rentabilité interne modifié* et est noté i ; dans ce cas, il est tel que

$$120249 \cdot (1+i)^4 = 211461$$

d'où l'on tire $i = 0,1516$, le taux cherché est donc de 15,16 %

• Un mécène décide de verser une somme de 50000 francs à un club sportif en demandant de décerner (en son honneur) 10 fois un prix annuel à un membre méritant. Le trésorier du club fait remarquer que le capital disponible bien que diminuant chaque année, allait produire des

intérêts si on le plaçait (au taux annuel de 5 %), de sorte que l'on pourrait attribuer des prix supérieurs à 5000 francs. Sachant que le premier prix est accordé dès le versement de la somme par le donateur et que le capital sera complètement utilisé par les 10 prix, calculer le montant de chacun des 10 prix (supposés égaux).

Voici toute d'abord une belle résolution qui utilise des moyens fort élémentaires [34].

Désignons par C le capital disponible au moment où est distribué le prix x la première fois, par i le taux auquel est placé C et par n le nombre de fois que le prix x a été décerné. Le capital disponible va donc varier de C à x par la composée de $n-1$ fois la fonction qui est définie par "retirer x puis ajouter l'intérêt annuel produit par le capital restant"

La première application donne, en posant $1+i = I$:

$$C \rightarrow C - x + (C-x) \cdot i = (C-x) \cdot I.$$

La deuxième application livre:

$$(C-x) \cdot I \rightarrow ((C-x) \cdot I - x) \cdot I.$$

La troisième application permet d'écrire:

$$(((C-x) \cdot I - x) \cdot I - x) \cdot I \rightarrow (((C-x) \cdot I - x) \cdot I - x) \cdot I,$$

cette dernière expression pouvant se mettre simplement sous la forme: $(C-x) \cdot I - x) \cdot I - x) \cdot I$, en laissant tomber les premières parenthèses.

Après $n-1$ applications et la distribution du n -ème prix, il n'y a plus lieu de calculer l'intérêt, d'où, en utilisant $n-1$ parenthèses:

$$(C-x) \cdot I - x) \cdot I - x) \cdot I - x) \cdot I = 0;$$

signalons que le polynôme en I du premier membre est de degré $n-1$ et que cette écriture, connue sous le nom d'algorithme de Hörner, permet un éventuel calcul des valeurs numériques sans mise en mémoire des résultats partiels.

Il s'agit donc de résoudre l'équation suivante en l'inconnue x :

$$C I^{n-1} - x I^{n-1} - x I^{n-2} - x I^{n-3} - \dots - x I - x = 0;$$

on trouve alors:

$$x = \frac{C I^{n-1}}{I^{n-1} + I^{n-2} + \dots + I + 1} = \frac{C i (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}$$

Pour les données numériques $C = 50000$, $i = 0,05$ et $n = 10$, on obtient $x = 6166,8$ francs.

Une autre façon de raisonner consiste à noter C_t la valeur du capital au terme de la t -ème année. On dispose alors de cette équation récurrente du premier ordre :

$$C_t = 1,05 \cdot C_{t-1} - x.$$

La solution générale de l'équation homogène associée, à savoir $C_t = 1,05 \cdot C_{t-1}$, est égale à $z_t = k \cdot 1,05^t$, où k désigne une constante. Une solution particulière de l'équation complète est donnée par une constante A , avec $A = 20x$, d'où la solution générale de l'équation complète proposée vaut :

$$C_t = k \cdot 1,05^t + 20x.$$

La condition initiale $C_0 = 50000 - x$ permet de calculer la constante k , à savoir $k = 50000 - 21x$.

D'après l'énoncé, on exige que $C_9 = 0$, d'où il convient de résoudre l'équation (du premier degré en x) suivante :

$$(50000 - 21x) \cdot 1,05^9 + 20x = 0,$$

ce qui permet d'obtenir

$$x = \frac{50000 \cdot 1,05^9}{21 \cdot 1,05^9 - 20} = 6166,88 \text{ francs.}$$

CHAPITRE IV. GEOMETRIE

IV.0. Introduction

Les sportifs de haut niveau réagissent toujours plus vite que le commun des mortels, car ils anticipent généralement mieux. Ce phénomène s'explique notamment par une excellente connaissance du jeu : par exemple, le champion "devine" souvent la trajectoire de vol d'un ballon. Cette constatation montre que la réussite sportive réclame une bonne perception géométrique de l'espace dans lequel se déroule le jeu.

Nous donnons dans ce chapitre quelques exemples de l'intervention de la géométrie dans certaines disciplines.

Ainsi, le placement optimal sur un court de tennis est régi par une règle simple découlant d'une propriété fondamentale de la bissectrice d'un angle.

Le billard réclame d'évidentes qualités géométriques pour bien prévoir la direction que prendra la boule frappée.

Pour transformer un essai de rugby, le placement idéal du tir sera déterminé par une étude géométrique du problème.

Enfin, les notions et propriétés des vecteurs permettront de comprendre les principales données techniques en tennis. De cette analyse peuvent être décrites les caractéristiques fondamentales des coups à effet (le *chop* et le *lift*), ce qui en facilite un usage à bon escient.

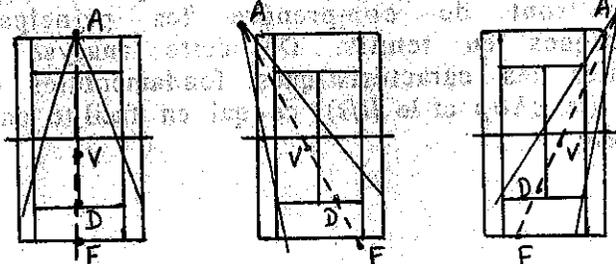
IV.1. Le placement sur un court de tennis et la notion de bissectrice

Les champions de tennis donnent souvent l'impression d'atteindre la balle avec une facilité étonnante ... et sans beaucoup courir. Ils se déplacent en effet (relativement) peu, car ils ont toujours l'intuition du meilleur endroit pour se placer sur le court.

Cette notion de remplacement, dont l'importance ne peut échapper à aucun tennisman, découle d'un principe élémentaire fort simple : il convient de toujours se replacer à l'endroit le plus susceptible de voir revenir la balle et non systématiquement au centre du terrain.

Nous allons traduire mathématiquement cette règle fondamentale, puis en donner quelques applications particulières.

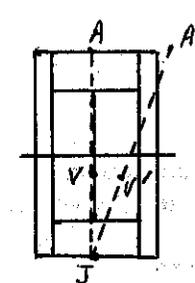
L'adversaire, noté A, essaye d'envoyer une balle qui va passer au-dessus du filet et retomber dans les limites du camp adverse. La zone qu'il pourra atteindre dépendra de sa position sur le court : les trajectoires possibles de ses frappes sont en réalité situées dans un cône de sommet A. Il convient dès lors de se placer à un endroit également distant des côtés extérieurs du cône, c'est-à-dire sur la bissectrice de l'angle dont dispose l'adversaire pour jouer son coup. Le placement doit tenir compte de la position du joueur par rapport à sa ligne de fond, mais aussi de l'endroit d'où A frappe son coup. Ainsi, sur les croquis ci-dessous, le joueur se placera idéalement en F (resp. en D; en V) s'il joue dans le fond du court (resp. à la demi-volée; à la volée).



Ainsi, lorsqu'un tennisman joue au centre du court (voir la première figure ci-dessus), il aura intérêt à se replacer au centre de son terrain, qu'il reste dans le fond ou qu'il monte au filet. Par contre, s'il joue très croisé (voir les deux figures de droite ci-dessus), il devra se décaler par rapport au centre du terrain : dans la direction opposée à celle de l'adversaire s'il reste dans le fond, mais dans la direction même de l'adversaire s'il monte au filet.

Comme conséquence immédiate de ce principe, voici une règle bien connue des bons joueurs.

Un joueur J souhaitant monter au filet à partir du centre de son terrain (voir croquis ci-contre) aura intérêt à jouer non croisé en A, plutôt que de croiser en A'. En effet, le placement idéal à la volée sera donné par le point V (resp. V') dans le premier (resp. second) cas et le déplacement

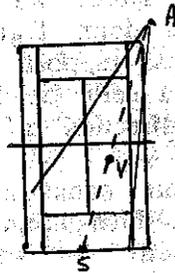


(nécessaire pour arriver au filet) JV est évidemment plus court que JV' . Cela confirme bien le conseil souvent donné par les entraîneurs : quand vous montez au filet, n'ouvrez pas l'angle!

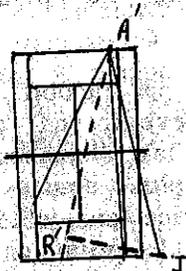
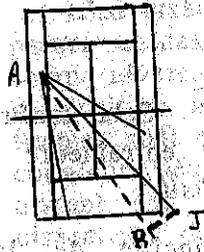
Donnons d'autres applications du principe de la bissectrice.

Quel est le meilleur placement par rapport à la ligne de fond? Il faut de préférence revenir en position fort avancée dans le court, car ainsi les distances à parcourir pour atteindre la balle seront plus courtes puisque la distance d'un point de la bissectrice aux côtés de l'angle diminue au fur et à mesure que le point en question se rapproche du sommet du cône. En plus de cet avantage relatif aux distances minimales à parcourir pour frapper la balle, signalons qu'une position à l'intérieur du court favorise la vitesse du jeu (et notamment la montée au filet).

Un serveur S exécute, à gauche, un service très croisé suivi d'une montée au filet (voir la figure ci-dessous). Se conformant à la règle de base, il avancera vers la droite par rapport au centre (c'est-à-dire vers le point V) : il pourra ainsi profiter aisément du "trou" laissé par l'adversaire A déporté vers l'extérieur droit du terrain.



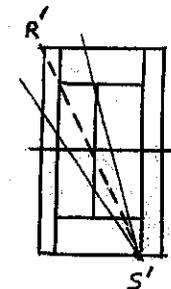
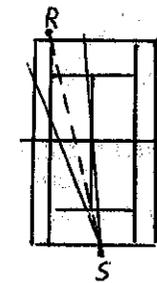
Soit un joueur J, en difficulté au fond du terrain suite à un coup de l'adversaire l'ayant déporté hors du court.



Il aura intérêt à rejouer fort croisé (en A) et non parallèle (en A'). Outre le fait que la première solution est plus sécurisante puisque le filet est légèrement plus bas au centre du terrain qu'en ses extrémités, le trajet de remplacement, à savoir JR dans le premier cas et JR' dans le second, sera plus court lorsque J optera pour la première solution.

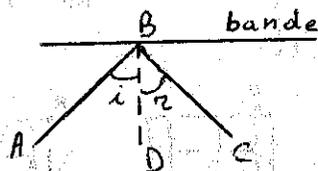
La position du serveur doit influencer celle du relanceur. Par exemple, si le serveur occupe une position centrale S, ce qui est fréquent, le relanceur se placera près de la ligne des couloirs, soit en R (cfr le croquis ci-dessous).

Par contre, si le serveur se décale par rapport au centre du terrain pour se positionner près de la ligne du couloir (par exemple, en S'), le relanceur devra se déporter vers l'extérieur du court (en R').



IV.2. Le billard et les notions d'angles d'incidence et de réflexion

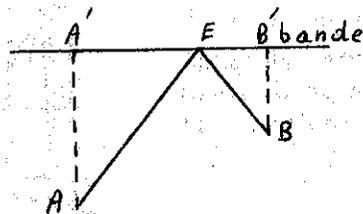
Lorsqu'une boule de billard est frappée en ligne droite (donc sans effet) et touche une bande, elle est renvoyée en ligne droite de telle sorte que son angle d'incidence soit égal à son angle de réflexion (voir figure ci-dessous) :



si la bille part du point A et vient frapper la bande en B, l'angle d'incidence i ($= \widehat{ABD}$), où la droite passant par B et D est la perpendiculaire à la bande, est égal à l'angle de réflexion r ($= \widehat{DBC}$).

A partir de cette règle fort simple, de nombreux problèmes géométriques peuvent être résolus [31,32].

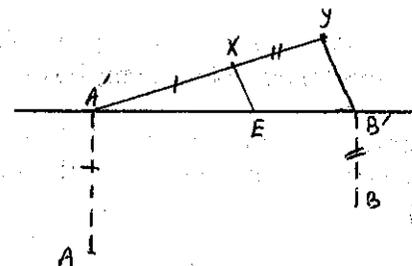
Considérons tout d'abord une bille située en un point A et qui doit percuter, après avoir touché la bande, une autre bille placée en B (voir figure ci-dessous) : quel point de la bande le joueur doit-il viser ?



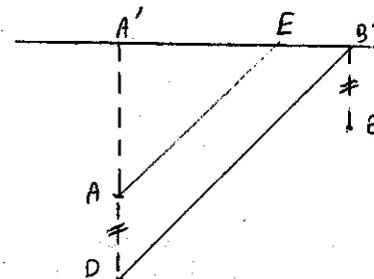
Plusieurs constructions permettent de répondre à cette question.

Tout d'abord, en supposant le problème résolu (raisonnement souvent efficace en mathématique), le point E de contact avec la bande est tel que les triangles AA'E et BB'E sont semblables (sachant que A' et B' désignent les projections orthogonales de A et B respectivement sur la bande).

Grâce au théorème de Thalès, le point E peut être construit comme suit : de A', on trace, dans une direction quelconque, un segment A'X de même longueur que AA', puis dans le prolongement, un segment XY de même longueur que BB'; on dessine ensuite YB', puis par X la parallèle à YB' : cette dernière rencontre la droite A'B' au point E cherché.

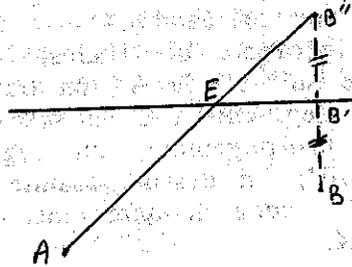


Une autre façon de procéder consiste à prolonger A'A par le segment AD de longueur égale à B'B, à relier D à B', puis à tracer de A la parallèle à DB' : elle coupe A'B' en E.



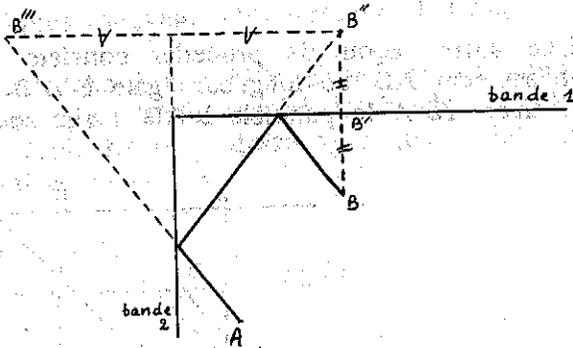
Mais la solution la plus simple exploite l'analogie entre le trajet de la boule et celui parcouru par un rayon lumineux qui se réfléchit sur un miroir.

On peut imaginer par la pensée que la bande du billard est un miroir. La boule située en B aurait alors une image virtuelle en B'', de sorte que le joueur peut "viser" le point fictif B'' : la boule frappera inévitablement la bande au point E cherché.



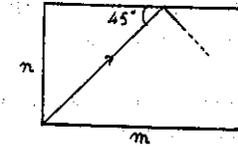
Cette technique du miroir peut être exploitée pour résoudre des problèmes plus complexes.

Par exemple, examinons le cas d'un joueur qui frappe une boule placée en un point A et souhaite atteindre une bille en B après avoir touché deux fois la bande.



Il doit alors utiliser deux fois la règle du miroir en construisant mentalement l'image B'' de B par rapport au premier miroir (défini par la bande 1), puis l'image B''' de B'' par le second miroir (déterminé par le prolongement de la bande 2) : il lui suffit de viser le point B''' pour atteindre son objectif (sur la figure ci-dessus, le trajet de la boule est dessiné en traits continus).

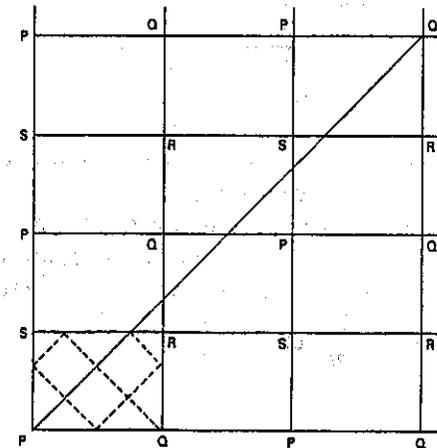
Supposons à présent qu'une boule, placée dans un des coins du billard (rectangulaire, de longueur m et de largeur n , sachant que m et n sont des nombres entiers), soit frappée dans la direction faisant un angle de 45° avec la bande rencontrée en premier lieu (voir figure ci-dessous).



A condition que la frappe soit suffisamment puissante, peut-on affirmer que la boule "tombera" dans (un trou situé dans un) coin du billard? Dans l'affirmative, après combien de rebonds sur les bandes? Et quel sera le coin atteint? [32]

Voici une réponse simple à ces questions lorsque m et n sont des nombres premiers.

Construisons une "mosaïque" de rectangles ayant tous les mêmes dimensions que le billard, de manière à former un carré dont chaque côté a pour longueur $m \cdot n$: pour cela, il suffit de placer verticalement (resp. horizontalement) m (resp. n) rectangles égaux.



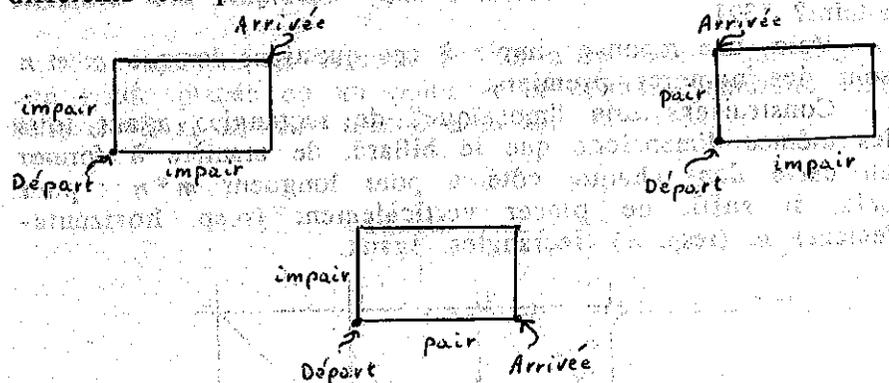
Nous conviendrons que les sommets PQRS du rectangle initial se retrouvent par effet-miroir sur les autres

Nous conviendrons que les sommets PQRS du rectangle initial se retrouvent par effet-miroir sur les autres rectangles, deux points images étant désignés par la même lettre.

Si le joueur, en partant du point P situé dans le coin sud-ouest du rectangle de base, vise le coin opposé du carré, la boule tombera dans le coin correspondant à ce dernier sommet, le trajet réel sur le billard étant indiqué sur la figure en traits pointillés.

La trajectoire virtuelle de la boule rencontrera $n-1$ (resp. $m-1$) lignes verticales (resp. horizontales) du diagramme, ce qui signifie concrètement que la bille "rebondira" $(m-1)+(n-1) = m+n-2$ fois sur la bande.

Par ailleurs, le coin atteint en fin de parcours dépendra de la parité des nombres premiers m et n ; les différents cas possibles sont les suivants :



Lorsque m et n ne sont pas premiers (tout en restant entiers), le même raisonnement peut être appliqué en faisant cette fois appel à un carré ayant pour longueur de côté le nombre p égal au plus petit commun multiple de m et n : le nombre de bandes touchées vaudra dans ce cas $m'+n'-2$, avec $m' = \frac{p}{m}$ et $n' = \frac{p}{n}$.

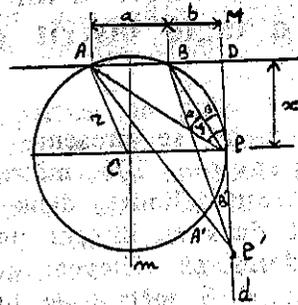
IV.3. La transformation d'un essai de rugby et la notion d'angle inscrit dans un cercle

Un terrain de rugby se présente sous la forme d'un grand rectangle, d'environ 100 mètres de long sur 50 mètres de large. Il est délimité, dans sa longueur par les lignes de touche, et dans sa largeur par les lignes de but. Au milieu de ces dernières s'élèvent deux poteaux, distants de 5,6 mètres, réunis à 3 mètres de hauteur par une barre transversale. Au-delà des lignes de but, sur 22 mètres de profondeur, se trouve une zone appelée l'*en-but*.



Pour marquer un essai, il faut faire toucher le ballon à terre dans l'*en-but*. Lorsqu'une équipe réussit un essai, elle peut tenter sa *transformation*. A cet effet, on désigne en son sein un buteur qui se place où il veut à l'intérieur du terrain, à condition de rester juste en face de l'endroit où fut marqué l'essai (c'est-à-dire sur une verticale, par rapport à la ligne des buts, passant par le point où a été déposé le ballon dans l'*en-but*) : l'essai sera transformé lorsque le ballon sera envoyé par un coup de pied entre les poteaux et au-dessus de la barre transversale les reliant.

Supposons qu'un essai ait été marqué, par exemple à droite des deux poteaux de but (soit en un point M de la figure ci-dessous).



Le problème mathématique consiste à trouver le point P sur la droite d perpendiculaire à la droite passant par les points A et B qui délimitent le but, de manière à ce que l'angle α ($=APB$) soit le plus grand possible.

Une solution peut être obtenue par la construction géométrique suivante.

On trace la médiatrice m du segment de droite d'extrémités A et B; r étant la distance de m et d , on dessine un arc de centre A (ou B) et de rayon r , lequel coupe m au point C. Le cercle de centre C et de rayon r est tangent à d au point P cherché.

Ce point P répond bien à la question. En effet, en tant qu'angle inscrit dans le cercle, l'angle α a pour mesure la moitié de l'arc AB qu'il intercepte (lorsque l'unité de mesure d'arc est l'arc intercepté par un angle au centre dont la mesure est égale à l'unité). Pour tout autre point P' situé sur d , l'angle AP'B est formé par deux cordes qui se coupent à l'extérieur du cercle et a de ce fait pour mesure la demi-différence des deux arcs AB et A'B' interceptés sur le cercle par ses côtés : la mesure de l'angle AP'B est donc bien inférieure à celle de APB.

On peut procéder plus analytiquement en caractérisant le point P par sa distance x à la ligne des buts. Pour simplifier les écritures, nous noterons a la distance entre les deux poteaux, b la distance entre le point B et la droite d et D le point situé à l'intersection de la droite d et de la ligne des buts. L'angle α est égal à la différence des angles

ξ ($=APD$) et β ($=BPD$) : on a donc $\alpha = \xi - \beta$, avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Comme la fonction *tangente* est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, le problème posé revient à maximiser $\text{tg } \alpha$. Or, on a

$$\text{tg } \alpha = \text{tg}(\xi - \beta) = \frac{\text{tg } \xi - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \xi \text{ tg } \beta}$$

d'où l'on tire

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a+b}{x} \frac{b}{x}} = \frac{ax}{x^2 + b(a+b)}$$

Il est facile de voir que le maximum de cette fonction (pour $x > 0$) est atteint lorsque

$$x = \sqrt{b(a+b)}.$$

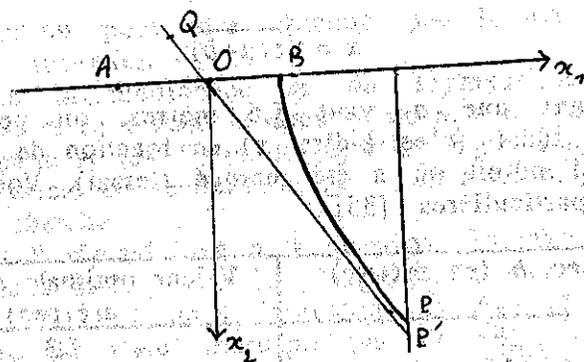
Sachant que a vaut 5,6 mètres, on peut calculer l'endroit idéal (c'est-à-dire x) en fonction de b (c'est-à-dire de l'endroit où a été marqué l'essai). Voici quelques valeurs particulières [35].

Distance b (en mètres)	Valeur optimale de x (en mètres)
5	7,3
10	12,5
15	17,6
20	22,6
25	27,6
30	32,7
35	37,7
40	42,7

A la lecture de ce tableau, une règle simple et générale apparaît : le buteur doit choisir une distance x (par rapport à la ligne des buts) qui dépasse approximativement de 2,5 mètres la longueur b (représentant la distance de la droite d et du poteau de but le plus proche de d). Bien entendu, si

l'essai a été marqué entre les poteaux ou si la longueur b est petite, le buteur devra se placer à une distance suffisamment grande pour pouvoir envoyer le ballon au-dessus de la barre horizontale des buts. D'un autre côté, si b est grand, la règle est également caduque : le tireur devra évidemment choisir une distance x assez courte pour que son essai puisse au moins atteindre la ligne des buts.

Nous allons à présent donner un autre moyen pratique et efficace pour estimer la position optimale du tir. A cet effet, rapportons le plan du terrain à un système d'axes orthonormés avec pour origine le point O situé sur le milieu du segment $[AB]$, l'axe des abscisses étant la droite passant par les points A et B et orientée vers la droite, l'axe des ordonnées étant la verticale passant par O et dirigée vers le bas.



Si x_1 désigne l'abscisse de P , son ordonnée vaut

$$x_2 = \sqrt{\left(x_1 - \frac{a}{2}\right)\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)}$$

En d'autres termes, le point P est situé sur l'hyperbole d'équation

$$x_1^2 - x_2^2 = \frac{a^2}{4}$$

Cette courbe possède comme asymptote la bissectrice OP' d'équation $x_1 = x_2$. Comme le point P' ne paraît guère éloigné de P , il est assez raisonnable de se demander

quelles sont les différences entre les angles APB et $AP'B$. A titre d'exemples, voici quelques données numériques [35]

abscisse x_1 (en mètres)	5	10	15	20
ordonnée x_2 (en mètres)	4,14	9,6	14,74	19,8
angle APB	34,06°	16,26°	10,76°	8,05°
angle $AP'B$	33,59°	16,25°	10,76°	8,05°

Il résulte de ce tableau que le remplacement de P par P' ne provoque pratiquement aucune différence. Or, le point P' peut évidemment être trouvé facilement. Il suffit en effet de tracer sur le sol une marque au point O (point milieu entre les deux poteaux A et B), ainsi qu'au point Q situé sur la bissectrice du premier quadrant et derrière la ligne des buts. Le tireur devra se déplacer le long de la verticale DP jusqu'à ce qu'il aperçoive alignées les deux marques en O et Q : le point P' ainsi obtenu lui donne pratiquement la position idéale pour effectuer son shoot.

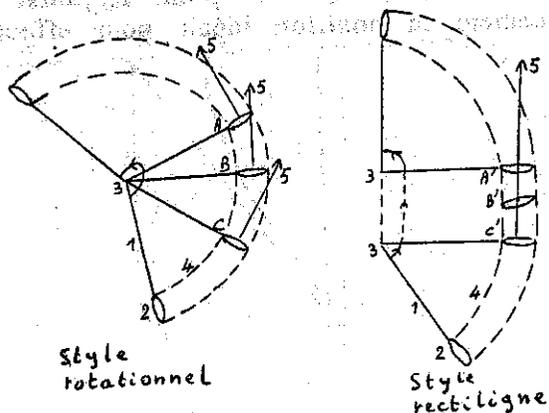
IV.4. La technique tennistique et des vecteurs

D'un point de vue technique, les joueurs de tennis peuvent être répartis en deux grandes catégories. Les uns adoptent le style dit *rotationnel* car leur bras décrit approximativement un arc de cercle; les autres ont un mouvement plus linéaire et jouent en style qualifié de *rectiligne*.

Dans le premier cas, le joueur débute son mouvement face au filet, puis tourne le buste sur les hanches et les genoux, la frappe se fait ainsi en rotation, et le coup se termine près de l'épaule (voir figure ci-dessous).

Légendes

- 1 Bras
- 2 Raquette
- 3 Charnière des épaules
- 4 Mouvement du bras
- 5 Trajectoire de la balle



Ce mouvement provoque généralement une assez grande imprécision. En effet, suivant que l'athlète attaque la balle en un point ou en un autre (par exemple, en A, B ou C sur la figure ci-dessus), cette balle prendra des directions fort variées qui sont définies par des vecteurs portés par la tangente au cercle (décrit par la raquette) au point d'impact de la balle; une légère différence au moment de la frappe entraîne un important décalage entre les vecteurs tangents.

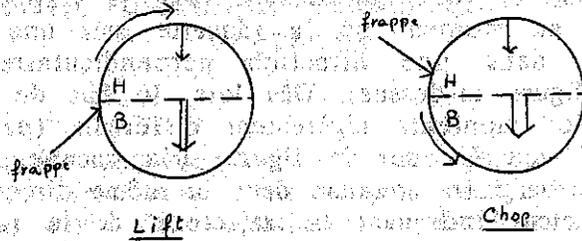
Par contre, dans le second cas, la frappe de balle s'effectue au moment où la raquette suit une trajectoire rectiligne, dans une direction perpendiculaire au filet (voir la figure ci-dessus). Dès lors, le fait de toucher la balle à des moments légèrement différents (par exemple, en A', B' ou C' sur la figure) n'a aucune importance, puisque la balle ira toujours dans la même direction définie par le vecteur indiquant la trajectoire de la raquette. Ce type de mouvement entraîne une plus grande précision; il est rendu possible par une chute dynamique du corps vers l'avant au moment de la frappe : reposant au départ sur le pied arrière, le poids du corps passera sur le pied avant, tandis que les épaules accompliront ce même transfert vers le filet, ce qui engendrera un déplacement rectiligne de la raquette au moment de l'impact avec la balle.

Nous allons à présent expliquer sommairement les principes des balles à effets, ce qui permettra d'expliquer rationnellement les avantages des balles *liftées* ou *chopées*.

La balle de tennis se déplace dans un gaz, à savoir l'air; elle est soumise de ce fait à une pression qui dépend du carré de sa vitesse. Ainsi, la trajectoire de la balle en mouvement est la résultante de plusieurs forces : la force de frappe supposée horizontale et dirigée vers le filet, la pesanteur dirigée verticalement vers le sol et la force exercée par l'air sur la balle.

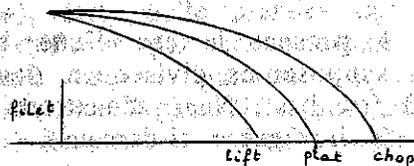
Lorsque la frappe se fait sans effet, la raquette se déplaçant alors parallèlement au sol, la pression exercée par l'air sur les parois de la balle est uniforme, de sorte que la seule force verticale agissant réellement est la pesanteur. La trajectoire de vol est alors parabolique (ainsi qu'il a été démontré dans le paragraphe relatif au dégagement en football).

Analysons à présent le cas d'une balle frappée avec effet. Nous la supposons divisée en deux demi-sphères, H (en haut) et B (en bas). Nous admettrons qu'elle se déplace vers la droite (voir figures ci-dessous).



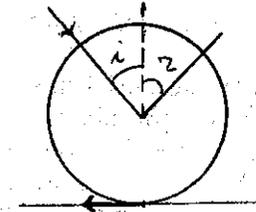
Soit d'abord une balle *liftée*, c'est-à-dire frappée de bas en haut. En tout point de H, les vitesses de translation et de rotation, dues respectivement à la frappe et à l'effet, vont dans la même direction et dès lors s'additionnent; par contre, en tout point de B, ces deux vitesses sont orientées différemment et, en valeur absolue, se soustraient. Comme la pression exercée par l'air en un point de la balle dépend du carré de la vitesse, cette pression en un point de H est supérieure au point correspondant de B. La résultante de toutes les forces agissant sur la balle est dès lors un vecteur important dirigé vers le bas. Le lift a donc pour conséquence de faire descendre plus vite la balle qui aura ainsi une trajectoire plus courte que la parabole décrite par la balle frappée (avec la même force) sans effet.

Considérons cette fois une balle *chopée*, c'est-à-dire frappée de haut en bas. Dans ce cas, les vitesses de translation et de rotation s'additionnent (resp. se soustraient) en les points de B (resp. de H). La résultante de toutes les forces agissant sur la balle est toujours dirigée vers le bas car la pesanteur est dominante, mais sa grandeur est moins importante que dans les autres cas. La balle suivra donc une trajectoire allongée par rapport aux autres types de coups (voir croquis ci-dessous).



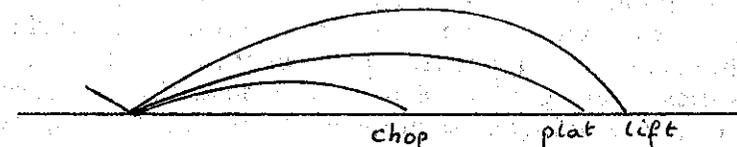
Analysons à présent la trajectoire de rebond.

Dans le cas d'une frappe sans effet, la balle atteint le sol avec un angle d'incidence déterminé et repart avec un même angle de réflexion (comme c'est le cas pour une boule de billard touchant une bande). Toutefois, l'impact avec le sol va freiner la balle et lui donner un léger effet de lift (car elle va, à cause de la réaction du sol, tourner sur elle-même dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure ci-dessous).



Pour le lift, cet effet dû au rebond va s'ajouter au lift initial. La résistance au sol est ainsi amoindrie et la balle, peu freinée, va repartir assez rapidement vers l'avant avec une vitesse accrue.

Par contre, pour le chop, l'effet provoqué par le rebond va diminuer le chop de départ et augmenter la résistance au sol : la balle aura tendance à rebondir moins haut et moins vite (voir croquis ci-dessous).



En conclusion, le lift raccourcit la trajectoire de vol et est de ce fait sécurisant; par ailleurs, il permet à la balle de rebondir avec vitesse et longueur : ces caractéristiques expliquent pourquoi les champions modernes l'utilisent de plus en plus. Le chop allonge la trajectoire de vol, mais donne un rebond peu important : il est dès lors idéal pour monter au filet à cause de la longueur de balle et du fait que l'adversaire doit frapper une balle délicate (car fort basse).

Chapitre V. Algèbre linéaire

V.0. Introduction

La recherche opérationnelle regroupe l'ensemble des méthodes mathématiques des phénomènes d'organisation.

C'est par l'étude scientifique de certaines opérations militaires que, pour la première fois lors de la seconde guerre mondiale, la recherche opérationnelle a été utilisée sur une vaste échelle. Il s'agissait de résoudre des problèmes tels que la composition du convoi maritime optimal compte tenu des éventualités des attaques ennemies et des disponibilités en matériel, ou encore de trouver la meilleure implantation des radars et des systèmes de défense antiaérienne, etc...

A partir de 1950 (environ), le champ d'application de la recherche opérationnelle a largement débordé du domaine militaire pour s'étendre à tous les problèmes d'organisation qui incluent les relations actives entre hommes, produits et machines, ces mots étant pris au sens large. C'est ainsi que, de nos jours, la recherche opérationnelle est appliquée avec bonheur à des secteurs très variés : en gestion, économie industrielle ou agricole, médecine, psychologie, sociologie, linguistique, ..., sports.

Ce chapitre a pour but de présenter, au travers d'exemples simples issus du monde sportif, quelques disciplines qui sont parmi les plus importantes de la recherche opérationnelle et qui reposent de façon fondamentale sur l'algèbre linéaire.

Les problèmes de choix stratégiques en sports constituent un exemple concret et facilement abordable pour initier à la théorie des jeux (à deux joueurs et de

somme nulle); tous les cas des jeux (strictement déterminés ou non) seront abordés.

Les classements des joueurs de tennis belges donnent naissance à une chaîne de Markov. En émettant certaines hypothèses plus ou moins plausibles, l'évolution à long terme du système est étudiée.

Les problèmes de diététique, chers à tout sportif de haut niveau, débouchent quelquefois sur un programme linéaire à résoudre ou encore sur une application de la célèbre méthode PERT, qui est une méthode d'ordonnement d'un projet et qui fut créée à l'occasion des lancements des fusées Polaris.

V.1. Les choix tactiques et la théorie des jeux

Lors des compétitions, les sportifs (ou leurs entraîneurs) doivent souvent sélectionner la tactique la plus adéquate en vue de réaliser le meilleur résultat possible. Par exemple, un tennisman peut, en fonction de ses qualités intrinsèques mais aussi par rapport à la valeur de son adversaire, choisir une tactique de services-voletés ou au contraire un style défensif et régulier basé sur le jeu en fond de court; une équipe de football (de hockey,...) peut soit jouer l'attaque à outrance, soit baser tout sur la défense et la contre-attaque; un coach en basket-ball peut organiser la défense de son équipe selon la formule dite individuelle ou celle de zone.

Nous allons approfondir ce dernier exemple et appeler, pour simplifier, A et B les deux équipes en présence. Chacune d'entre elles a le choix entre deux stratégies, notées 1 et 2. En fonction de leurs confrontations précédentes et des renseignements glanés par les entraîneurs (qui connaissent les points forts et faibles de toutes les équipes du championnat), il est possible de prévoir que si l'équipe A choisit l'option 1 tandis que B opte pour la stratégie j (avec $ij = 1$ ou 2), A (resp. B) marquera a_{ij} (resp. b_{ij}) points. Nous allons nous intéresser à la différence des points obtenus, c'est-à-dire à $x_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$: un nombre x_{ij} qui est positif (resp. négatif, nul) correspond évidemment à une victoire de A (resp. à une victoire de B; à un match nul).

Nous sommes ainsi en présence d'un jeu à deux joueurs (les deux équipes A et B) dont les intérêts sont contradictoires; le jeu est dit à somme nulle car les gains de A (à savoir, les x_{ij}) correspondent à des pertes pour B, et réciproquement. Par la suite, la matrice $G = (x_{ij})$ sera notée plus simplement $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: elle est appelée la

matrice des gains (pour A étant sous-entendu, car les gains de B sont rassemblés dans la matrice -G).

A l'instar de von Neumann-Morgenstern, nous allons supposer les deux joueurs A et B prudents et intelligents: d'une part, ils ne prendront pas trop de risques (pour éviter une défaite trop sévère dans les chiffres) et, d'autre part, ils auront un comportement rationnel; ainsi que nous allons le voir, ils chercheront chacun à maximiser leurs gains minimaux.

Plusieurs cas peuvent se présenter selon les différentes valeurs prises par les éléments de G.

Si $a \geq c$ et $b \geq d$, il est clair que A retiendra certainement sa première stratégie (qui domine la seconde); dans ces conditions, B choisira l'option qui lui occasionnera la plus petite perte égale à $\min(a, b)$.

Par exemple, si $G = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, l'équipe A (resp. B) optera pour sa première (resp. sa seconde) tactique: c'est le compromis qui contentera au mieux les deux parties; le gain 5 (de A) est donné par la stratégie du maximum (égal à 5) des minima (égaux respectivement à 5 et -2) des lignes définissant les options de A, mais aussi par celle du *minimum* qui revient, du point de vue de B, à choisir le minimum (égal à 5) des maxima (égaux respectivement à 10 et 5) des colonnes relatives aux options de B: dans ce cas, ces deux stratégies du maximum et du minimum, dictées par les hypothèses d'intelligence et de prudence faites à propos de A et de B, donnent la même solution 5 qui est en fait un *point-selle*, c'est-à-dire un nombre qui est le plus petit sur sa ligne et le plus grand sur sa colonne.

L'existence d'un point-selle, qui représente une solution "optimale" pour les deux adversaires, est aussi garantie dans les cas suivants (toujours relatifs à la matrice des gains $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$):

- si $c \geq a$ et $d \geq b$: A choisira sa deuxième stratégie et B retiendra le plus petit des nombres c et d ;
- si $a \geq b$ et $c \geq d$: B choisira sa deuxième stratégie (plus intéressante, car n'oublions pas que les éléments de la matrice G représentent des pertes pour B) et A sélectionnera le plus grand des nombres b et d ;
- si $b \geq a$ et $d \geq c$: B choisira sa première stratégie et A optera pour le plus grand des nombres a et c .

Ces quatre cas concernent un jeu qualifié de *strictement déterminé* car le point-selle de G dicte sans ambiguïté le choix optimal qui sera réalisé par chaque équipe.

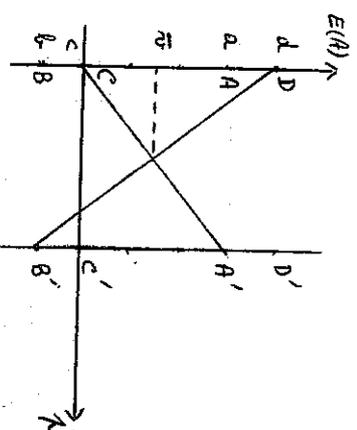
Dans les autres cas, la situation est moins nette, en ce sens que le jeu n'est pas strictement déterminé (ce qui revient à dire qu'il n'existe aucun point-selle dans la matrice G). On peut vérifier que le jeu n'est pas strictement déterminé si et seulement si les éléments de la diagonale de la matrice G sont tous les deux inférieurs ou tous les deux supérieurs aux deux éléments non diagonaux; dans ces conditions, les stratégies du maximin et du minimax conduisent à des résultats différents. Par exemple, pour $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, le maximin vaut 0, tandis que le minimax est égal à 3; aucun compromis ne sera accepté par les deux équipes : en effet, si A choisit sa première stratégie, B optera pour sa seconde, ce qui fera changer A d'avis et lui fera préférer sa seconde option, d'où B modifiera son opinion initiale pour retenir sa première stratégie, ce qui incitera A à revenir à sa position de départ!

Dans les jeux non strictement déterminés, il n'existe aucune stratégie, qualifiée de *pure*, qui sera toujours acceptée par les deux joueurs. Il faut alors recourir à des stratégies *mixtes*, c'est-à-dire choisir chaque option avec des probabilités déterminées. Nous noterons p (resp. q) la probabilité pour le joueur A (resp. B) de choisir sa première stratégie, d'où il choisira sa seconde avec une probabilité de $1-p$ (resp. $1-q$). De façon concrète, cette interprétation peut être donnée : si les deux équipes se

rencontrent souvent, par exemple 100 fois, A (resp. B) aura intérêt à choisir sa première stratégie $100p$ (resp. $100q$) fois, et sa seconde $100(1-p)$ (resp. $100(1-q)$) fois.

Voici la méthode pour résoudre un jeu non strictement déterminé, caractérisé par la matrice des gains $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; pour fixer les idées, nous prendrons $d > a > c > b$.

Regardons en premier lieu le point de vue du joueur A. Si B choisit sa première (resp. seconde) stratégie pure, tandis que A joue en stratégie mixte avec les probabilités p et $1-p$ pour ses première et seconde options respectivement, le gain espéré $E(A)$ de A sera donné par $ap + c(1-p)$ (resp. $bp + d(1-p)$). Par prudence, A va d'abord retenir ses gains minimaux (car il est sûr de gagner au moins ces valeurs), puis, par intelligence, il en prendra le maximum : il s'agit géométriquement du point le plus haut parmi les points les plus bas du diagramme ci-dessous représentant $E(A)$ en fonction de p (compris entre 0 et 1) pour les deux stratégies pures de B; le point retenu est à l'intersection des deux droites passant par les points D, B' et C, A' .



Sur l'exemple traité ci-dessus, à savoir $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, on trouve l'espérance optimale de A égale à $\frac{3}{2}$ pour $p = \frac{1}{2}$.

V.2. Le classement des tennismen et les chaînes de Markov

En Belgique, les joueurs de tennis reçoivent, à l'issue de chaque saison, un classement en fonction de leurs résultats (et suivant des critères objectifs permettant le traitement informatique des données ... sauf, à l'heure actuelle, en ce qui concerne les meilleurs joueurs belges!).

Il sera ici fait abstraction des joueurs non-classés, à savoir ceux qui ne disputent pas au moins quatre matches par saison.

L'élite comporte chaque année (environ) 10 joueurs classés en série A. Les compétiteurs dont le niveau est bon sur le plan régional, voire national, sont répertoriés en série B. Enfin, les joueurs locaux de club, qui sont évidemment majoritaires, sont groupés en série C.

Un joueur classé en série A une année reste souvent dans sa catégorie la saison suivante : on peut raisonnablement estimer qu'il a une chance sur 10 de redescendre en série B, mais qu'il lui est impossible de retomber en série C. Une série B a une chance sur 100 de monter en série A, 5 chances sur 100 de descendre en série C, et donc 94 chances sur 100 de rester en B l'année suivante. Enfin, une série C possède seulement 5 chances sur 1000 de monter en B et 995 chances sur 1000 de rester en C l'année suivante; il est donc impossible de passer de la série C à la série A en une seule année.

Ces données sont vérifiées (à peu de choses près) chaque année au moment où sortent les classements : elles peuvent donc être regardées comme des constantes au cours du temps (cette hypothèse n'étant évidemment pas tout à fait réaliste, mais fort simplificatrice). Dans ces conditions, les classements de tennis en Belgique fournissent un exemple concret d'une chaîne de Markov caractérisée par la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,01 & 0,94 & 0,05 \\ 0 & 0,005 & 0,995 \end{pmatrix}$$

les premières, deuxième et troisième lignes et colonnes se référant respectivement aux séries A, B et C.

Considérons le cas d'un joueur qui, cette année, a reçu le classement C. L'an prochain, il aura 995 chances sur 1000 de rester en C et 5 chances sur 1000 de monter en B. En fait, le classement théorique du joueur après un an est donné par le vecteur de probabilité

$$X_1 = X_0 P = (0 \quad 0,005 \quad 0,995)$$

où $X_0 = (0 \quad 0 \quad 1)$ désigne le vecteur de probabilité au moment initial. Après deux ans, le classement (probable) de ce joueur sera donné par le vecteur de probabilité suivant :

$$X_2 = X_1 P = (0,00005 \quad 0,009675 \quad 0,990275).$$

D'une manière générale, si un sportif est classé, en l'année $t = 0$, en série A, B ou C avec une probabilité égale à p_1 , p_2 ou p_3 respectivement, son classement après n années sera donné théoriquement par le vecteur de probabilité :

$$X_n = X_0 P^n$$

sachant que $X_0 = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$; de fait, on obtient de proche en proche :

$$X_1 = X_0 P$$

$$X_2 = X_1 P = X_0 P^2$$

$$X_3 = X_2 P = (X_0 P^2) P = X_0 P^3 \dots$$

Sachant que les joueurs vieillissent (et en arrivent à ne plus jouer), faisons abstraction des personnes pour ne considérer que les "postes" de classements proprement dits

(cette hypothèse ayant pour but de construire une chaîne de Markov). Nous supposons constants les nombres de joueurs classés en chaque série, les probabilités de transition étant les mêmes chaque année et toujours données par la matrice de transition P ci-dessus. Quelle sera l'évolution à très long terme du système de classements ?

Pour répondre à cette question, étudions les puissances P^n de P.

La matrice P est diagonalisable à l'aide d'une matrice régulière R; on a donc

$$R^{-1} P R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

où les λ_i désignent les valeurs propres distinctes de P (et l'on peut prendre sans restriction $\lambda_1 = 1$, les modules de λ_2 et de λ_3 étant alors inférieurs à l'unité) et où les colonnes C_1, C_2 et C_3 de la matrice R sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres correspondantes, avec $C_1 = U$ (vecteur-colonne dont toutes les composantes sont égales à 1). On en déduit :

$$P = R \text{diag}(1, \lambda_2, \lambda_3) R^{-1}$$

$$P^n = R \text{diag}(1, (\lambda_2)^n, (\lambda_3)^n) R^{-1} = (U \quad (\lambda_2)^n C_2 \quad (\lambda_3)^n C_3).$$

Si n tend vers l'infini, on a (des limites étant toujours prises pour n tendant vers "plus l'infini") :

$$\lim (\lambda_i)^n = 0,$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 2, 3$, d'où

$$\lim P^n = (U \quad 0 \quad 0) R^{-1} = \bar{P}.$$

La matrice \bar{P} , dont les éléments donnent les proportions des différentes catégories de classements après un temps "infiniment long", est une matrice composée de trois lignes identiques, qui coïncident toutes avec la première ligne de la matrice R^{-1} . Ce vecteur-ligne peut être calculé simplement en résolvant un système linéaire. En effet, considérons un vecteur-ligne de probabilité Y (de composantes $y_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$, avec $y_1 + y_2 + y_3 = 1$) tel que $Y P = Y$; on obtient de proche en proche $Y P^2 = Y, \dots$,

$Y P^n = Y$, puis en passant à la limite pour n tendant vers l'infini, $Y P = Y$; comme la somme des y_i vaut 1, les lignes de \bar{P} coïncident toutes avec le vecteur Y : pour les trouver, il suffit donc de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 0,9 y_1 + 0,01 y_2 &= y_1 \\ 0,1 y_1 + 0,94 y_2 + 0,005 y_3 &= y_2 \\ 0,05 y_2 + 0,995 y_3 &= y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

L'unique solution de ce système est le vecteur-ligne Y de composantes $y_1 = \frac{1}{111}, y_2 = \frac{10}{111}, y_3 = \frac{100}{111}$. Concrètement, si l'on attend un temps très long, il y aura (approximativement) un classement en série A, pour 10 en série B et 100 en série C.

Continuons de rêver et imaginons l'existence d'une catégorie spéciale regroupant, par exemple, tout qui a décroché un jour un titre de champion national : une fois entré dans ce cercle restreint, le joueur possède indéfiniment tous les privilèges inhérents à son statut d'ancien champion de Belgique. On sait que le champion est toujours issu de la série A, ce qui donne, en conservant pratiquement les mêmes données que ci-dessus, mais en supprimant la série C (pour simplifier l'exposé, ce qui ne constitue pas une restriction puisque les joueurs classés en C ne jouent aucun rôle à l'échelon suprême), la nouvelle matrice de transition dont les lignes et colonnes se réfèrent respectivement à la "catégorie des champions", aux séries A et aux séries B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,01 & 0,94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$$

avec $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,01 & 0,94 \end{pmatrix}$

Etudions encore l'évolution des classements au cours du

temps; elle est à nouveau donnée par les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$, ces puissances allant converger vers une nouvelle matrice dont les lignes ne seront évidemment plus identiques (d'où il n'y aura plus "d'état stationnaire"). On trouve successivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (A+I)B & A^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (A^2+A+I)B & A^3 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (A^{n-1} + \dots + A + I)B & A^n \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de A sont inférieures à 1 (en valeur absolue), on peut démontrer [4] que (les limites étant toujours prises pour n tendant vers "plus l'infini") :

$$\lim A^n = 0 \text{ et } \lim (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I) = (I-A)^{-1}$$

d'où

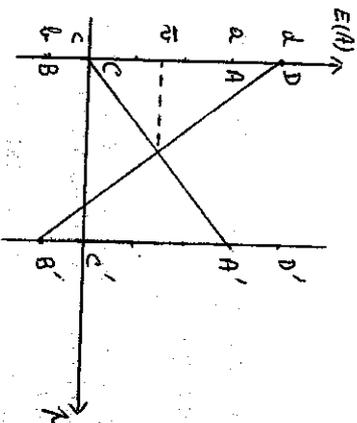
$$\lim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (I-A)^{-1}B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{11} & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En conclusion, dans ce système (fort) idéalisé, les séries A et B disparaîtront après un temps suffisamment long, soit pour passer dans la catégorie des champions (avec une probabilité évidemment supérieure en ce qui concerne les séries A), soit pour disparaître purement et simplement (ce qui s'explique mathématiquement par le fait que la matrice de transition $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$ n'est plus stochastique, c'est-à-dire que toutes ses lignes ne sont pas des vecteurs de probabilité).

rencontrent souvent, par exemple 100 fois, A (resp. B) aura intérêt à choisir sa première stratégie 100p (resp. 100q) fois, et sa seconde 100(1-p) (resp. 100(1-q)) fois.

Voici la méthode pour résoudre un jeu non strictement déterminé, caractérisé par la matrice des gains $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; pour fixer les idées, nous prendrons $d > a > c > b$.

Regardons en premier lieu le point de vue du joueur A. Si B choisit sa première (resp. seconde) stratégie pure, tandis que A joue en stratégie mixte avec les probabilités p et 1-p pour ses première et seconde options respectivement, le gain espéré E(A) de A sera donné par $ap + c(1-p)$ (resp. $bp + d(1-p)$). Par prudence, A va d'abord retenir ses gains minimaux (car il est sûr de gagner au moins ces valeurs), puis, par intelligence, il en prendra le maximum : il s'agit géométriquement du point le plus haut parmi les points les plus bas du diagramme ci-dessous représentant E(A) en fonction de p (compris entre 0 et 1) pour les deux stratégies pures de B; le point retenu est à l'intersection des deux droites passant par les points D, B' et C, A'.



Sur l'exemple traité ci-dessus, à savoir $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, on trouve l'espérance optimale de A égale à $\frac{3}{2}$ pour $p = \frac{1}{2}$.

Chaque flacon de mélange doit contenir au minimum 600000 unités de chaque vitamine. Combien de grammes de chaque ingrédient faut-il prendre pour que le menu final coûte le moins cher possible ?

Désignons par x_i la quantité (en grammes) de P_i (pour $i = 1, 2, 3$) intervenant dans le mélange. L'objectif est le prix global d'achat donné par

$$f = 10x_1 + 7,5x_2 + 20x_3;$$

il convient de le minimiser sur l'ensemble E des programmes réalisables défini par les conditions de non-négativité $x_i \geq 0$ (pour $i = 1, 2, 3$) et les deux vraies contraintes

$$\begin{aligned} 120000x_1 + 30000x_2 + 60000x_3 &\geq 600000 \\ 20000x_1 + 10000x_2 + 20000x_3 &\geq 600000 \end{aligned}$$

Dans l'espace à trois dimensions, E un polyèdre convexe dont les sommets sont les points $(0,0,10)$, $(0,60,0)$, $(30,0,0)$, $(0, \frac{140}{9}, \frac{20}{9})$ et $(\frac{70}{19}, 0, \frac{50}{19})$. D'après le théorème fondamental de la programmation linéaire, le minimum de f sur E est atteint en un de ces sommets; il est facile de vérifier que ce minimum vaut 89,4 unités monétaires et est la valeur de f au point $(\frac{70}{19}, 0, \frac{50}{19})$. Le mélange doit donc contenir $\frac{70}{19}$ grammes de P_1 , $\frac{50}{19}$ grammes de P_3 et pas de P_2 (bien que ce produit soit le moins cher).

De nos jours, la "diététique" sportive recourt malheureusement de plus en plus au dopage. Pour les (très mauvais) sportifs qui font appel à ce procédé (regrettable), nous livrons une recette en vue de fabriquer une "poison magique" [17] (dont les vertus résistent à prouver!).

Pour fabriquer le breuvage, il faut un chaudron, une serpe d'or, de l'eau de source et les ingrédients suivants : 2

améthystes (a), 6 betteraves (b), 4 coeurs d'abeilles ouvrières (c), 7 dattes d'Egypte (d), 9 épines d'acacia (e), 15 fraises des bois (f), 3 gueules de vipères (g), une branche de houx coupée par la serpe d'or (h). Il est recommandé de remplir le chaudron avec l'eau de source, puis de faire macérer les ingrédients en respectant les règles qui suivent :

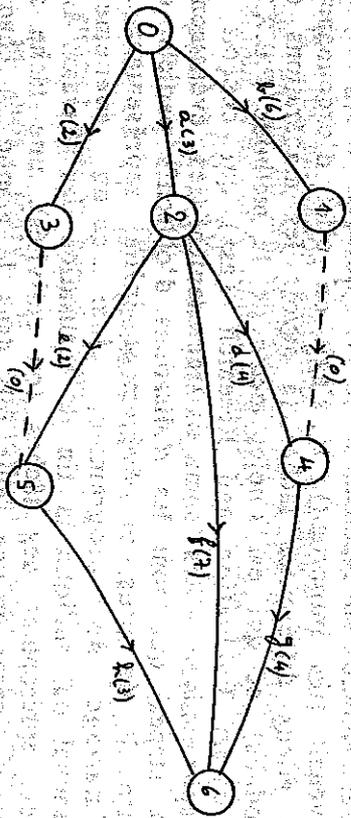
- 1) il faut que a ait macéré au moins trois jours avant de mettre à macérer d, f, e;
- 2) g (resp. f; h) doit macérer au moins quatre (resp. sept; trois) jours;
- 3) avant de mettre à macérer g, il faut que b ait macéré au moins six jours et que d ait macéré au moins quatre jours;
- 4) avant de mettre à macérer h, il faut que c et e aient macéré au moins deux jours.

Plusieurs questions se posent : dans quel ordre et quand peuvent être introduits les différents ingrédients? Quelle sera la durée minimale de macération?

On peut évidemment résoudre ce petit problème par tâtonnements, mais la théorie des graphes s'avère utile (et serait même indispensable si le nombre d'ingrédients devenait très important). Il s'agit en effet d'ordonner au mieux différentes tâches (à savoir les macérations de produits), ce qui est l'objet même de la méthode P.E.R.T. (Program Evaluation and Research Task) qui conçoit le graphe suivant. Les sommets représentent les événements (ou étapes) que sont les réalisations d'objectifs partiels; on introduit de plus un événement initial représentant le démarrage du programme, ainsi qu'un événement terminal qui indique la fin de réalisation des travaux. Les arcs représentent des tâches (ou activités), une tâche ne devant figurer qu'une seule fois dans le graphe. A chaque arc est affecté un nombre qui est la durée d'exécution de l'activité correspondante. La disposition des arcs doit traduire la succession ou la simultanéité des activités. Si l'arrivée d'un arc coïncide avec le départ d'un autre, cela signifie que l'activité associée au premier arc doit être achevée pour que celle associée au second puisse commencer; plus généralement, si une tâche x ne peut être

réalisée qu'après une autre y , il doit exister un chemin partant de l'arrivée de l'arc associé à y jusqu'au départ de l'arc associé à x . De plus, deux arcs partant d'un (resp. aboutissant en un) même sommet peuvent commencer (resp. se terminer) en même temps. La représentation de certaines relations d'antériorité ou de simultanéité nécessite parfois l'introduction de tâches *fictives*, représentées par des arcs dessinés en traits pointillés, de durée nulle. Les sommets sont représentés par des entiers, le départ du programme correspondant à 0; les tâches peuvent alors être notées par des couples (i, j) , où i est l'étape du début et j l'étape de fin de la tâche; de plus, on peut faire en sorte que $i < j$.

Dans le cas de la potion magique, ces conventions conduisent à ce graphe, où les sommets sont numérotés de 0 (pour le sommet initial) à 6 (pour le sommet final), les durées des opérations (correspondant à la macération, des produits considérés) sont indiquées entre parenthèses et deux tâches fictives (de durée nulle) sont nécessaires :



Il est facile de voir que le chemin de valeur maximum reliant les sommets 0 à 6 est la succession des arcs a , d et g , de valeur totale 11. Concrètement, il faudra au moins 11 jours pour que la potion puisse être terminée et cette durée

minimum de 11 jours sera précisément atteinte lorsque l'ingrédient a (resp. d ; g) est mis à macérer au jour $t = 0$ (resp. $t = 3$; $t = 7$). Ces ingrédients a , d et g sont qualifiés de *critiques* car tout retard à la mise à macération de l'un quelconque d'entre eux augmente d'autant la durée minimale du projet global. Par contre, pour les autres produits b , c , e , f et h , on dispose d'un certain intervalle, dit de *flottement*, pendant lequel le délai minimal de tout le projet; par exemple, h peut être mis à macérer à une date quelconque entre les cinquième et huitième jours tout en conservant une durée totale de 11 jours : $[5, 8]$ est l'intervalle de flottement de h , tandis que 5 et 8 sont respectivement la *date au plus tôt* et la *date au plus tard* de h .

Pour une tâche critique, les dates au plus tôt et au plus tard coïncident, de sorte que l'intervalle de flottement est de longueur nulle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Audin P. - Duchet P., *1000 classes, 1000 chercheurs : un millième*, Publication de l'APMEP, n° 74, 1989, 85 pages.
- [2] Avey P., Mathematics in sport, *The Mathematical Gazette*, 73 (463), 1989, pp. 1-6.
- [3] Bair J., *Mathématiques générales : 320 exercices, 380 problèmes avec leurs solutions, 160 tableaux*, 2ème éd., Editions De Boeck Université et Editions Universitaires, Bruxelles - Paris, 1990, 264 pages.
- [4] Bair J., *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales*, Editions De Boeck Université et Editions Universitaires, Bruxelles - Paris, 1990, 185 pages.
- [5] Brooks W.J. - Hughton L.P., A problem in squash strategy, *The Mathematical Gazette*, 72 (460), 1988, pp. 92-95.
- [6] Cocks C., Forecasting football results, *The Mathematical Gazette*, 66 (435), 1982, pp. 57-58.
- [7] Colwell D. - Gillett J., Is goal scoring a Poisson process? *The Mathematical Gazette*, 65 (431), 1981, pp. 30-32.
- [8] Colwell D. - Gillett J., One hundred matches of England v Scotland, *The Mathematical Gazette*, 67 (440), 1983, pp. 116-117.
- [9] Colwell D. - Gillett J., Meeting in a tournament, *The Mathematical Gazette*, 74 (468), 1990, pp. 143-144.
- [10] Colwell D. - Gillett J. - Jones B., The expected number of holes, *Theta*, vol. 3 (2), 1989, pp. 3-6.

Bibliographie

- [11] Colwell D. - Gillett J. - Jones B., Expectation in a sudden-death situation, *The Mathematical Gazette*, 73 (471), 1991, pp. 54-57.
- [12] Colwell D. - Gillett J. - Jones B., A Markov chain in cricket, *The Mathematical Gazette*, 75 (472), 1991, pp. 183-185.
- [13] Cornuvel J. - Sandron J.M., *Le guide Marabout de tous les sports*, Editions Gérard, Verviers, 1970, 416 pages.
- [14] Dauven J., *Encyclopédie des sports*, Larousse, Paris, 1961, 582 pages.
- [15] Dennett J.R., Cricket and derangements, *The Mathematical Gazette*, 74 (467), 1990, pp. 2-5.
- [16] Fletcher A.A., Odds on the champion, *The Mathematical Gazette*, 60 (412), 1976, p. 124.
- [17] Galion E., *La mathématique et ses applications*, Cedic, Paris, 1972, 208 pages.
- [18] Gardner M., *La magie des paradoxes*, Bellin, Paris, 1980, 135 pages.
- [19] George S.L., Optimal strategy in tennis : a simple probabilistic model, *Applied Statistics*.
- [20] Griffel D.H., More mathematical billiards, *The Mathematical Gazette*, 73 (464), 1989, pp. 118-119.
- [21] Jongmans F. - Varlet J., *Mathématiques générales à l'usage des sciences humaines II*, Université de Liège, 1970.
- [22] Kapadia R., Forecasting football results, *The Mathematical Gazette*, 66 (435), 1982, pp. 55-56.
- [23] Parlebas P., Modélisation du jeu sportif : le système des scores du volley-ball, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 91, 1985, pp. 57-80.

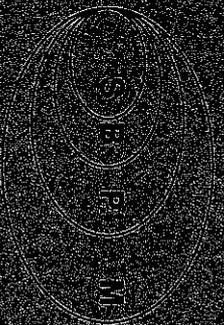
- [24] Parlebas P., Les jeux de paume : systèmes de scores, morphismes et paradoxes, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 92, 1985, pp. 41-68.
- [25] Parlebas P., Lignes de scores, durée de jeu et effet pevers en volley-ball, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 95, 1986, pp. 19-44.
- [26] Pollard R., Goal-scoring and the negative binomial distribution, *The Mathematical Gazette*, 69 (447), 1985, pp. 45-47.
- [27] Primrose E., Football probabilities, *The Mathematical Gazette*, 66 (438), 1982, pp. 306-307.
- [28] Reep C. - Benjamin B., Skill and chance in association football, *J. R. Statist. Soc. A*, 131, 1968, pp. 581-585.
- [29] Reep C. - Pollard R. - Benjamin B., Skill and chance in ball games, *J. R. Statist. Soc. A*, 134, 1971, pp. 623-629.
- [30] Roper T., Mathematics and the motion of the human body, *The Mathematical Gazette*, 74 (467), 1990, pp. 19-26.
- [31] Rouche N., Le billard et les boules fantômes, *Math. Jeunes*, 44, 1989, pp. 73-78.
- [32] Shultz H. - Shiffert R., Mathematical billiards, *The Mathematical Gazette* 72 (460), 1988, pp. 95-97.
- [33] Stewart I., Visions mathématiques (un cours de tennis : le décompte des points amplifie la différence entre les joueurs), *Pour la Science*, Mai 1988, pp. 100-104.
- [34] Villiers C., Dans nos classes, *Mathématique et Pédagogie*, 78, 1990, pp. 69-71.
- [35] Worsnup G., An aid to conversions in rugby, *The Mathematical Gazette*, 72 (465), 1989, pp. 225-226.

TABLE DES MATIERES

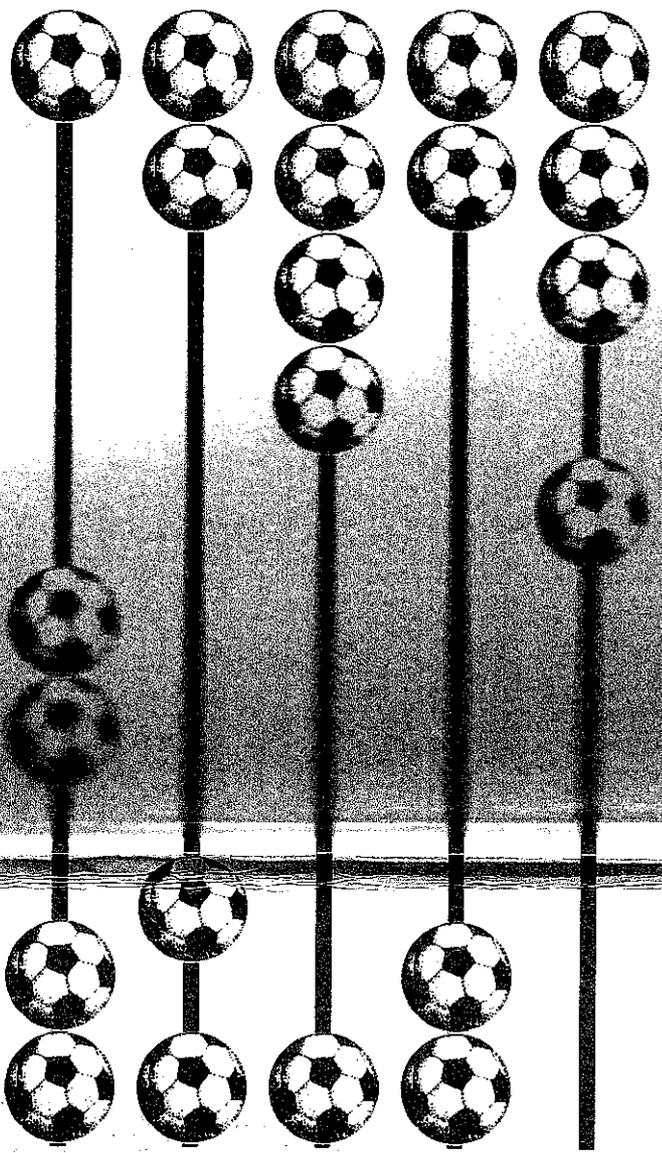
AVANT-PROPOS	3
CHAPITRE I.	
1.0. Introduction	5
1.1. L'analyse combinatoire et divers problèmes sportifs	5
1.2. Le cricket et la notion de dérangement	6
1.3. Système des scores et structure de treillis	11
CHAPITRE II.	
CALCUL DES PROBABILITES ET STATISTIQUE	16
II.0. Introduction	24
II.1. Un choix stratégique en squash et le nombre d'or	24
II.2. Un modèle probabiliste pour déterminer le meilleur choix du service en tennis	25
II.3. La prolongation d'un match de football par des penalties et la loi binomiale	29
II.4. Les buts marqués et la loi de Poisson	33
II.5. Le golf et la loi multinomiale	37

CHAPITRE III. ANALYSE.....	48
III.0. Introduction.....	48
III.1. Athlétisme, paradoxe de Zénon et notion de série.....	50
III.2. Le tir à un panier de basket et la notion de continuité.....	53
III.3. Cyclisme, automobilisme, alpinisme et notion de dérivée.....	56
III.4. La probabilité de gagner au tennis et la notion de fonction composée.....	60
III.5. Dégagement en football et équations différentielles.....	64
III.6. Problèmes de gestion sportive et résolution d'équations.....	68
CHAPITRE IV. GEOMETRIE.....	73
IV.0. Introduction.....	73
IV.1. Le placement sur un court de tennis et la notion de bissectrice.....	74
IV.2. Le billard et les notions d'angles d'incidence et de réflexion.....	78
IV.3. La transformation d'un essai en rugby et notion d'angle inscrit dans un cercle.....	83
IV.4. La technique tennisistique et des vecteurs.....	88
CHAPITRE V. ALGEBRE LINEAIRE.....	92
V.0. Introduction.....	92
V.1. Les choix tactiques et la théorie des jeux.....	94
V.2. Le classement des tennismen et les chaînes de Markov.....	100
V.3. Diététique sportive, programmation linéaire et méthode PERT.....	105
BIBLIOGRAPHIE.....	110
TABLe DES MATIERES.....	113

FRANÇOIS BAIER
L'ÉQUILIBRE ET LE MATHÉMATIQUEN



Mathématiques et sports



Société Belge des Professeurs de
Mathématique d'expression française