Badminton et probabilités

Davy Paindaveine

Université Libre de Bruxelles

Yvik Swan

Université de Liège

Bruxelles, août 2018


LIN 21 16 12
AXELSEN 19 21 13
LIN D
CHINA
WINNER SPEED 335 KPH

Scoring pour un set de badminton (sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
⋮	⋮	⋮
39	21-18	A

Scoring pour un set de badminton (sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
39	21-18	A

Scoring pour un set de badminton (sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
⋮	⋮	⋮
39	21-18	A

Scoring pour un set de badminton (sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
⋮	⋮	⋮
39	21-18	A

Scoring pour un set de badminton (sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
39	21-18	A

Modèle probabiliste

- La probabilité que A gagne un échange est constante
- Les échanges sont indépendants

Modèle probabiliste

- La probabilité que A gagne un échange est constante
- Les échanges sont indépendants

En d'autres termes,

$$P[\text{A gagne l'échange } 1] = P[\text{A gagne l'échange } 2] = \ldots =: p$$

$$P[\text{A perd l'échange } 1] = P[\text{A perd l'échange } 2] = \ldots =: q\,(= 1 - p)$$

(endurances égales, sensibilités identiques aux points importants, etc.)

Modèle probabiliste

- La probabilité que A gagne un échange est constante
- Les échanges sont indépendants

En d'autres termes,

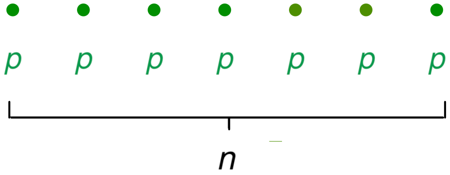
$$P[\text{A gagne l'échange } 1] = P[\text{A gagne l'échange } 2] = \ldots =: p$$

$$P[\text{A perd l'échange } 1] = P[\text{A perd l'échange } 2] = \ldots =: q \,(= 1 - p)$$

(endurances égales, sensibilités identiques aux points importants, etc.) et

$$P[\text{A perd l'échange } 6 \,|\, \text{A a perdu l'échange } 5] = P[\text{A perd l'échange } 6]$$

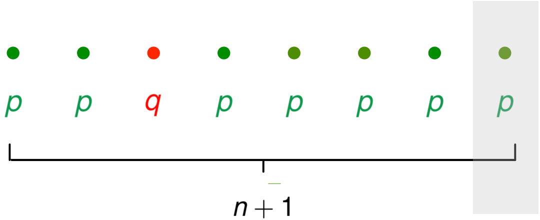
(pas de découragement, pas de "main chaude", etc.)



$$P[\text{A gagne } (n, 0)] = \underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{n \text{ fois}} = p^n$$

$$\underbrace{p \quad p \quad q \quad p \quad p \quad p \quad p \quad p}_{n+1}$$

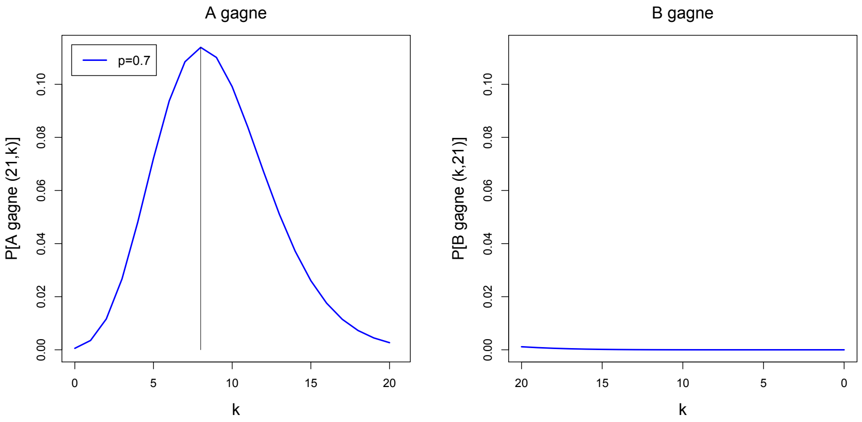
$$P[\text{A gagne } (n, 1)] = ? \times p^n q^1$$

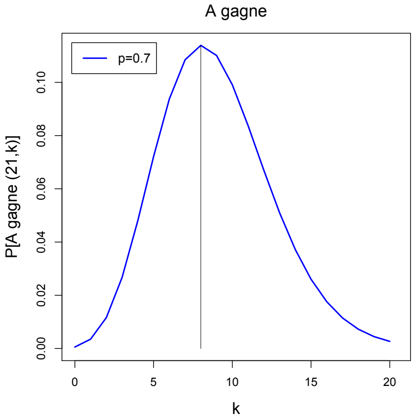


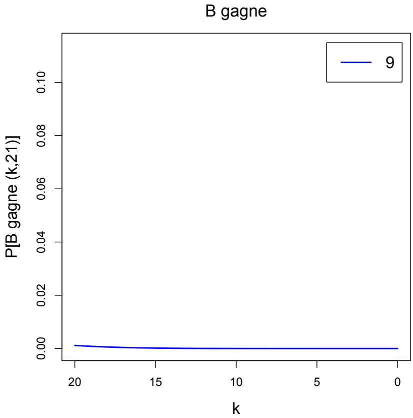
$$P[\text{A gagne } (n, 1)] = npq^{}$$

$$\underbrace{p \quad p \quad q \quad q \quad p \quad p \quad p \quad q \quad p \quad p}_{n+k}$$

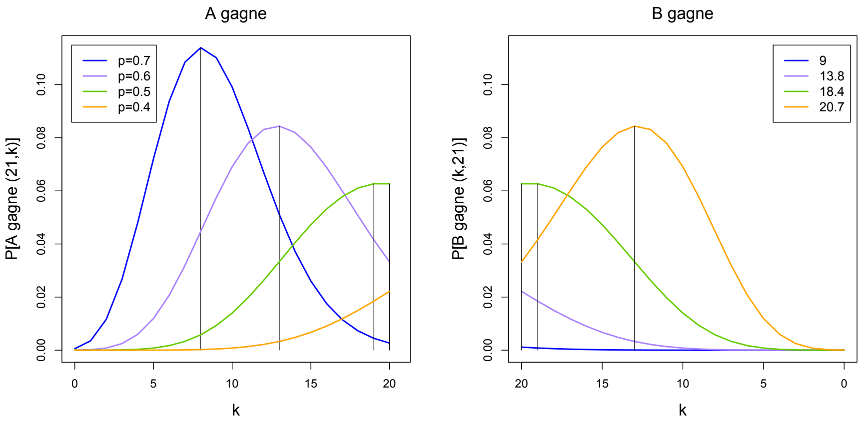
$$P[\text{A gagne } (n,k)] = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k, \text{ où } \binom{m}{\ell} := \frac{m!}{\ell!(m-\ell!)} \ (= C_m^\ell)$$


A gagne
p=0.7
P[A gagne (21,k)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
5
10
15
20
k
B gagne
P[B gagne (k,21)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
20
15
10
5
0
k

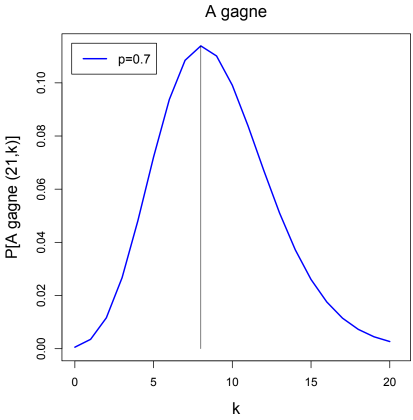


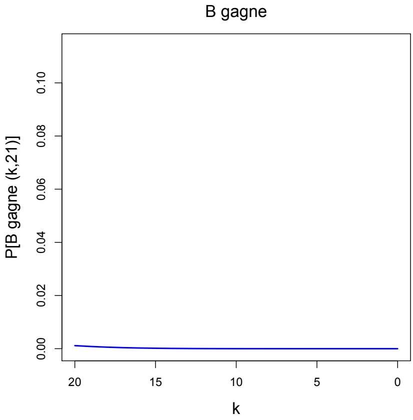


$$\mathrm{E}[\#\text{ points marqués par } B] = \sum_{k=0}^{20} k\, P[A \text{ gagne } (21,k)] + \sum_{k=0}^{20} 21\, P[B \text{ gagne } (k,21)]$$

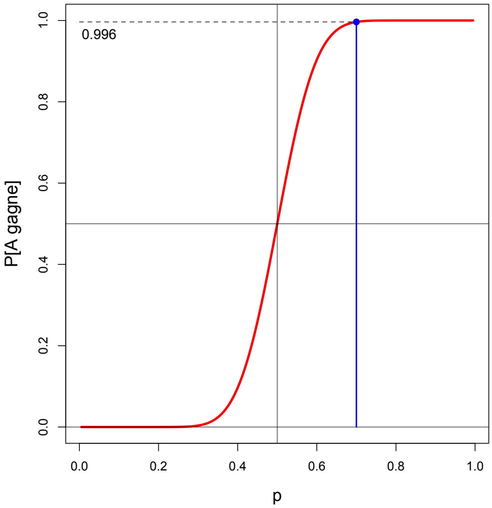


$$\mathrm{E}[\#\text{ points marqués par } B] = \sum_{k=0}^{20} k\, P[A \text{ gagne } (21,k)] + \sum_{k=0}^{20} 21\, P[B \text{ gagne } (k,21)]$$

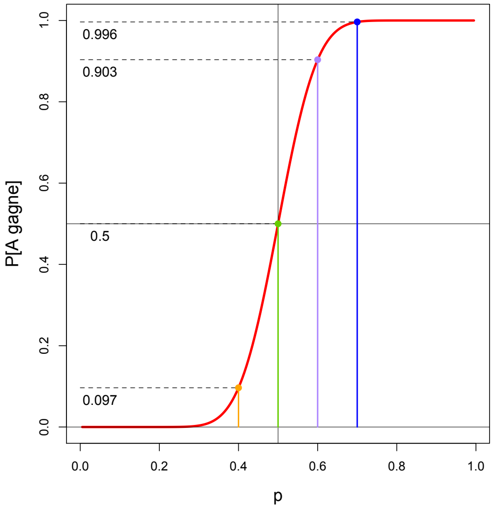




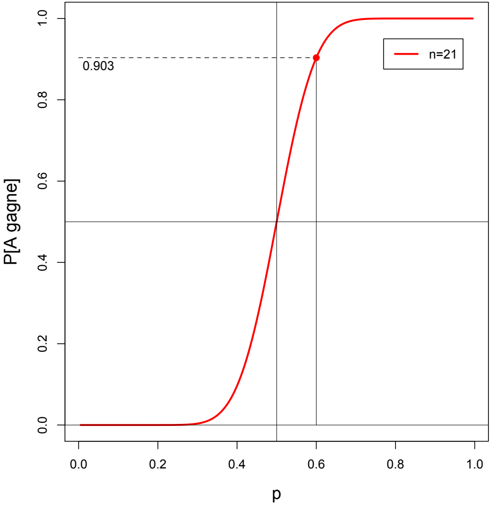
$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{20} P[A \text{ gagne } (21, k)] = 0.996$$



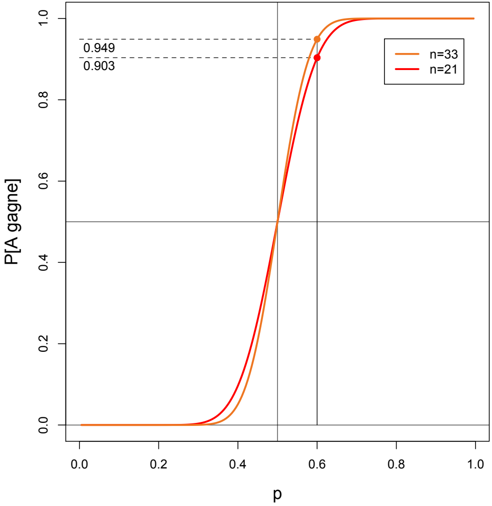
$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{20} P[A \text{ gagne } (21, k)]$$



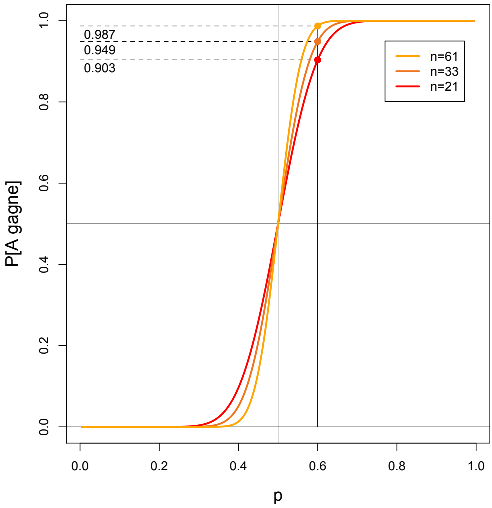
$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{20} P[A \text{ gagne } (21, k)]$$



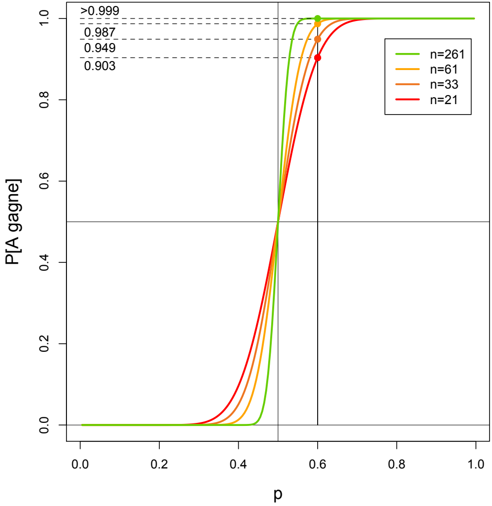
$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{n-1} P[A \text{ gagne } (n, k)]$$



$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{n-1} P[A \text{ gagne } (n, k)]$$



$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{n-1} P[A \text{ gagne } (n, k)]$$



$$P[A \text{ gagne}] = \sum_{k=0}^{n-1} P[A \text{ gagne } (n, k)]$$

Si effectuer m fois l'expérience E livre m_F réalisations de l'événement F, alors

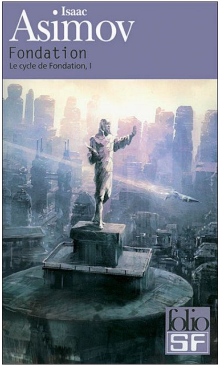
$$P[F] = \lim_{m \to \infty} \frac{m_F}{m}$$

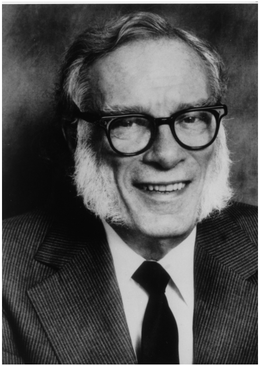
avec probabilité 1. Ceci permet d'approximer $P[F]$ par $\frac{m_F}{m}$.

Si effectuer m fois l'expérience E livre m_F réalisations de l'événement F, alors

$$P[F] = \lim_{m\to\infty} \frac{m_F}{m}$$

avec probabilité 1. Ceci permet d'approximer $P[F]$ par $\frac{m_F}{m}$.





Si effectuer m fois l'expérience E livre m_F réalisations de l'événement F, alors

$$P[F] = \lim_{m \to \infty} \frac{m_F}{m}$$

avec probabilité 1. Ceci permet d'approximer $P[F]$ par $\frac{m_F}{m}$.

E : un set de badminton

F : "A gagne $(21, k)$"

Si effectuer m fois l'expérience E livre m_F réalisations de l'événement F, alors

$$P[F] = \lim_{m \to \infty} \frac{m_F}{m}$$

avec probabilité 1. Ceci permet d'approximer $P[F]$ par $\frac{m_F}{m}$.

E : un set de badminton

F : "A gagne $(21, k)$"

$m_F := 0$

REPEAT m times

    $\text{score}_A := 0$ et $\text{score}_B := 0$

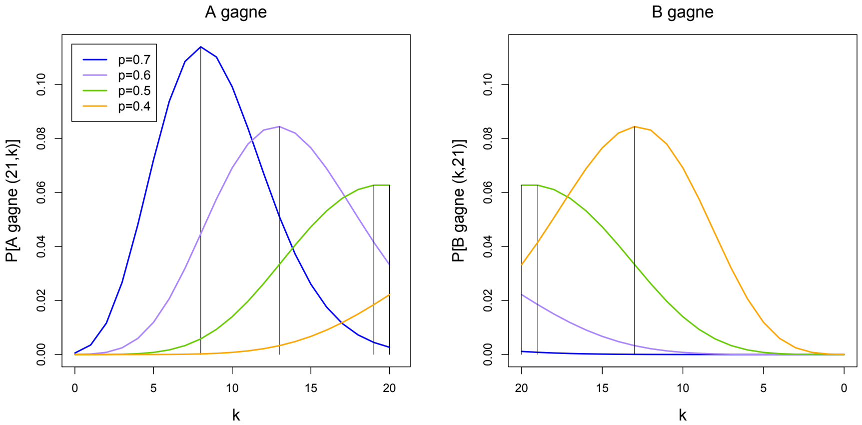
    WHILE $(\text{score}_A < 21$ et $\text{score}_B < 21)$

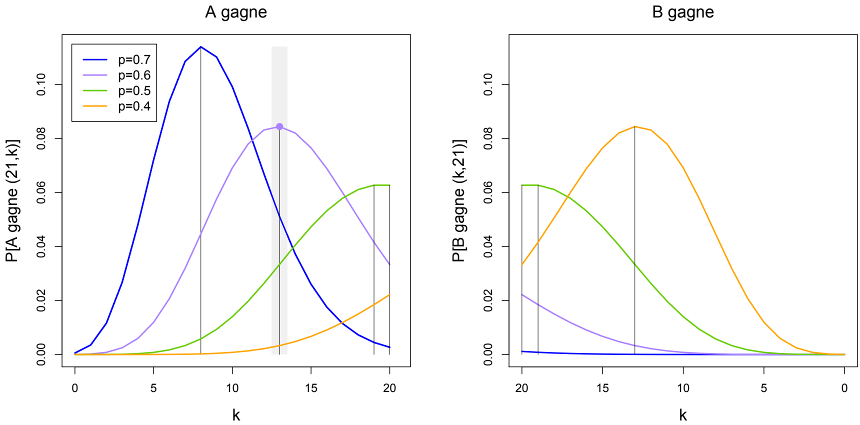
        IF $(\text{uniform}(0, 1) \leq p)$ THEN $\text{score}_A := \text{score}_A + 1$ ELSE $\text{score}_B := \text{score}_B + 1$

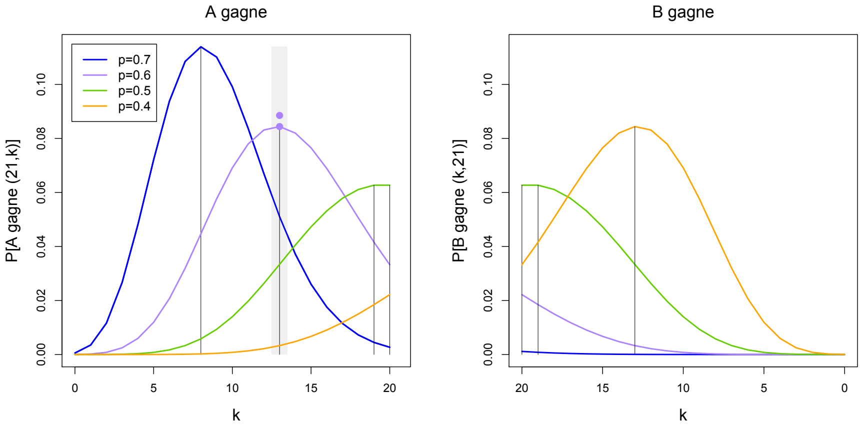
    END WHILE

    IF $(\text{score}_A = 21$ et $\text{score}_B = k)$ THEN $m_F := m_F + 1$

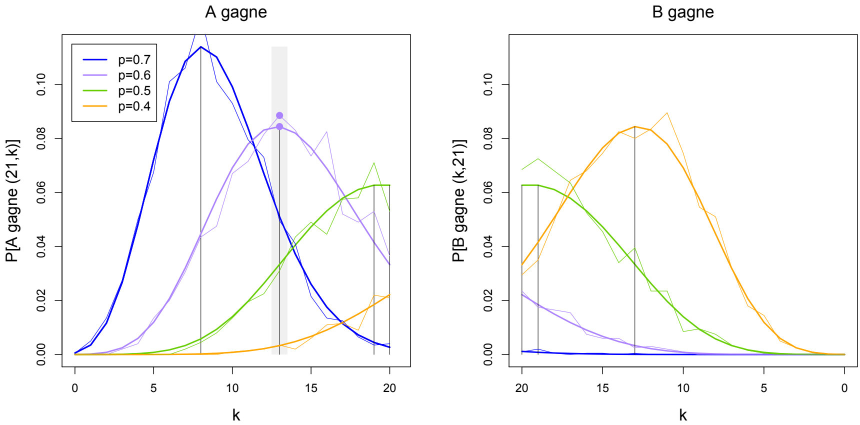
END REPEAT


A gagne
B gagne
p=0.7
p=0.6
p=0.5
p=0.4
P[A gagne (21,k)]
P[B gagne (k,21)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
5
10
15
20
k
k

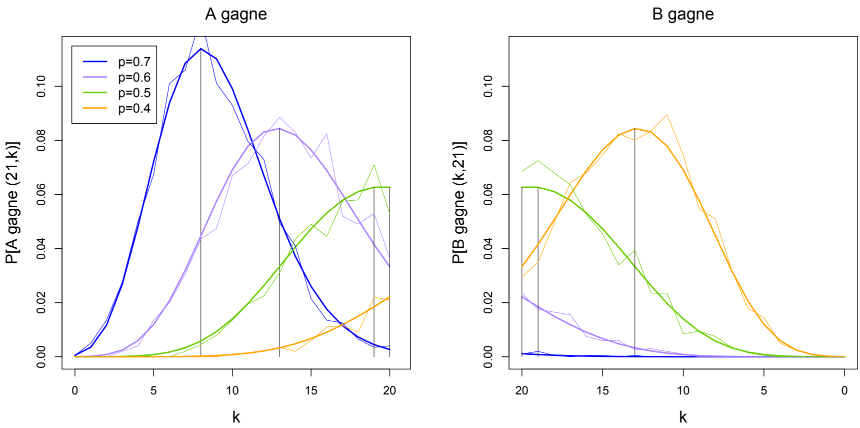

A gagne
P[A gagne (21,k)]
p=0.7
p=0.6
p=0.5
p=0.4
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
5
10
15
20
k
B gagne
P[B gagne (k,21)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
20
15
10
5
0
k



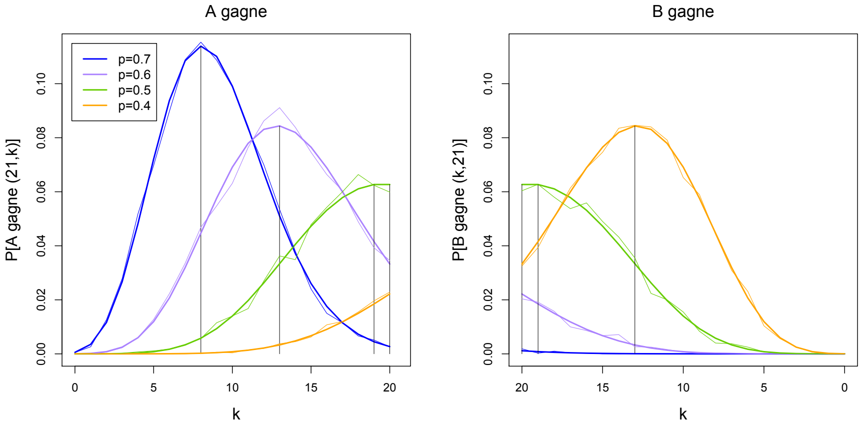
Sur la base de $m = 2000$ sets



Sur la base de $m = 2000$ sets



Sur la base de $\underline{m = 2000}$ sets



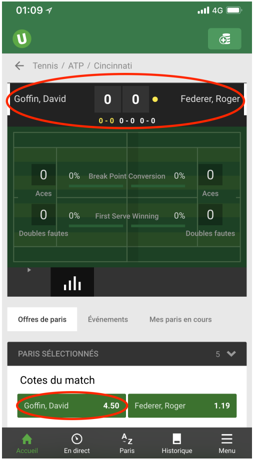
Sur la base de $\underline{m = 8000}$ sets

Attention: ces approximations numériques

- ne permettront pas d'étudier les probabilités en fonction de p

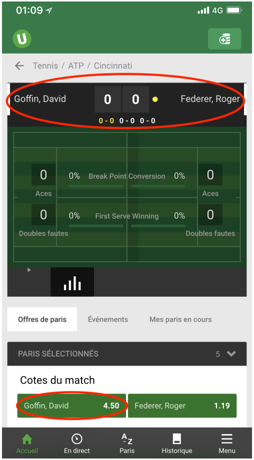
Attention: ces approximations numériques

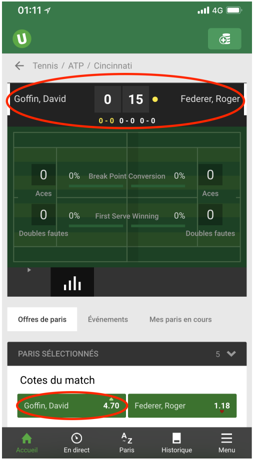
- ne permettront pas d'étudier les probabilités en fonction de p
- pourraient se réveler trop lentes pour un usage "en ligne"



Attention: ces approximations numériques

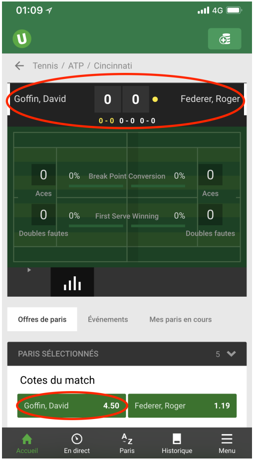
- ne permettront pas d'étudier les probabilités en fonction de p
- pourraient se réveler trop lentes pour un usage "en ligne"

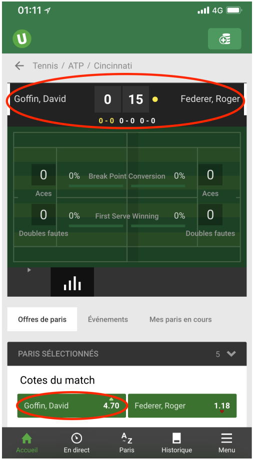


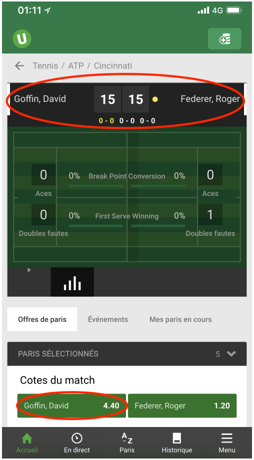


Attention: ces approximations numériques

- ne permettront pas d'étudier les probabilités en fonction de p
- pourraient se réveler trop lentes pour un usage "en ligne"

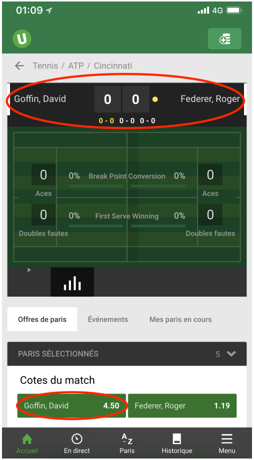


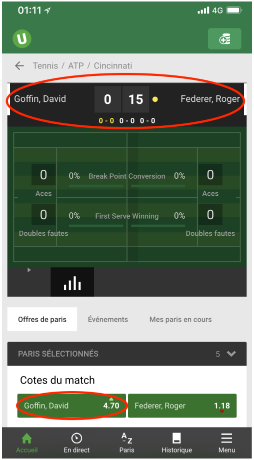


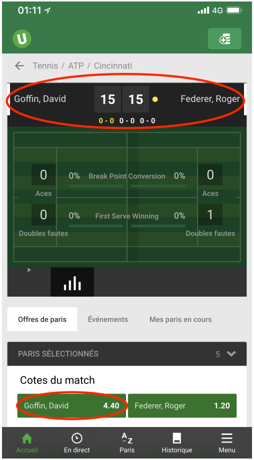


Attention: ces approximations numériques

- ne permettront pas d'étudier les probabilités en fonction de p
- pourraient se réveler trop lentes pour un usage "en ligne"







- pourraient échouer! (voir plus tard)

Modèle probabiliste 2

- Les échanges sont indépendants
- La probabilité que *A* gagne un échange sur son service est constante
- La probabilité que *B* gagne un échange sur son service est constante

Modèle probabiliste 2

- Les échanges sont indépendants
- La probabilité que A gagne un échange sur son service est constante
- La probabilité que B gagne un échange sur son service est constante

En d'autre termes,

$$P[\text{A gagne l'échange } 1 \mid \text{A sert}] = P[\text{A gagne l'échange } 2 \mid \text{A sert}] = \ldots =: p_A$$

$$P[\text{B gagne l'échange } 1 \mid \text{B sert}] = P[\text{B gagne l'échange } 2 \mid \text{B sert}] = \ldots =: p_B$$

Tennis!

Modèle probabiliste 2

- Les échanges sont indépendants
- La probabilité que A gagne un échange sur son service est constante
- La probabilité que B gagne un échange sur son service est constante

En d'autre termes,

$$P[\text{A gagne l'échange } 1 \mid \text{A sert}] = P[\text{A gagne l'échange } 2 \mid \text{A sert}] = \ldots =: p_A$$

$$P[\text{B gagne l'échange } 1 \mid \text{B sert}] = P[\text{B gagne l'échange } 2 \mid \text{B sert}] = \ldots =: p_B$$

et

$$P[\text{A perd l'échange } 1 \mid \text{A sert}] = P[\text{A perd l'échange } 2 \mid \text{A sert}] = \ldots =: q_A \ (= 1 - p_A)$$

$$P[\text{B perd l'échange } 1 \mid \text{B sert}] = P[\text{B perd l'échange } 2 \mid \text{B sert}] = \ldots =: q_B \ (= 1 - p_B)$$

Tennis!

$$\underbrace{p_A \quad p_A \quad p_A \quad p_A \quad p_A \quad p_A \quad p_A}_{n}$$

$$P[\text{A gagne } (n, 0)] = p_A^n$$

$$\underbrace{p_A \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad p_A \quad p_A \quad p_A \quad p_A}_{n+1}$$

$$P[\text{A gagne } (n,1)] = n p_A^{n-1} q_B q_A$$

$$\underbrace{p_A \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad q_A \quad q_B \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad p_A}_{n+k}$$

$$\underbrace{p_A \quad p_A \quad q_A \quad p_B \quad q_B \quad p_A \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad p_A}_{n+k}$$

$$P[\text{A gagne } (n, k)] = ?$$

Définition

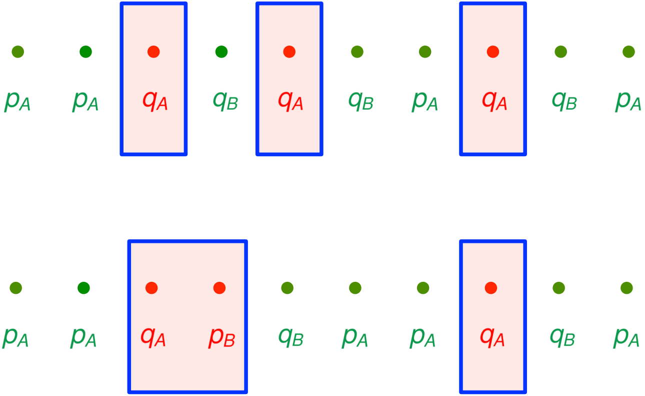
Une interruption *est une séquence d'échanges dans laquelle B prend le service, marque un ou plusieurs points, puis perd le service.*

$p_A \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad q_A \quad q_B \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad p_A$

$p_A \quad p_A \quad q_A \quad p_B \quad q_B \quad p_A \quad p_A \quad q_A \quad q_B \quad p_A$

Définition

Une *interruption* *est une séquence d'échanges dans laquelle B prend le service, marque un ou plusieurs points, puis perd le service.*



Définition

Une interruption est une séquence d'échanges dans laquelle B prend le service, marque un ou plusieurs points, puis perd le service.

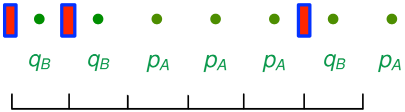
Pour le score (n, k), $k \geq 1$,

- il peut y avoir entre $r = 1$ et $r = k$ interruptions
- il y a $\binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1}$ configurations avec r interruptions
- chacune de ces configurations a probabilité $(q_A q_B)^r p_A^{n-r} p_B^{k-r}$.

Donc

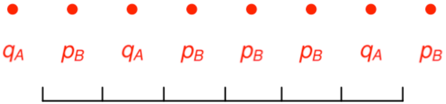
$$P[\text{A gagne } (n, k)] = \sum_{r=1}^{k} \binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1}(q_A q_B)^r p_A^{n-r} p_B^{k-r}.$$

Il y a $\binom{n}{r}$ façons de placer les r interruptions parmi les n points marqués par A



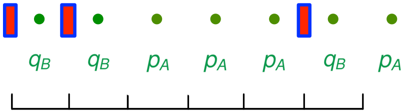
n positions possibles pour les r interruptions

Il y a $\binom{k-1}{r-1}$ façons de distribuer les k points marqués par B dans les r interruptions



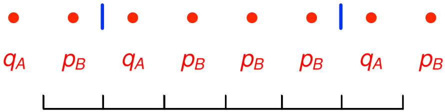
$k-1$ positions possibles pour les $r-1$ "séparateurs d'interruptions"

Il y a $\binom{n}{r}$ façons de placer les r interruptions parmi les n points marqués par A



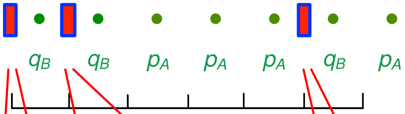
n positions possibles pour les r interruptions

Il y a $\binom{k-1}{r-1}$ façons de distribuer les k points marqués par B dans les r interruptions



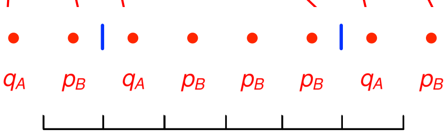
$k-1$ positions possibles pour les $r-1$ "séparateurs d'interruptions"

Il y a $\binom{n}{r}$ façons de placer les r interruptions parmi les n points marqués par A



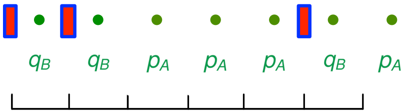
n positions possibles pour les r interruptions

Il y a $\binom{k-1}{r-1}$ façons de distribuer les k points marqués par B dans les r interruptions



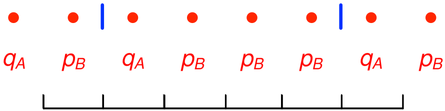
$k-1$ positions possibles pour les $r-1$ "séparateurs d'interruptions"

Il y a $\binom{n}{r}$ façons de placer les r interruptions parmi les n points marqués par A

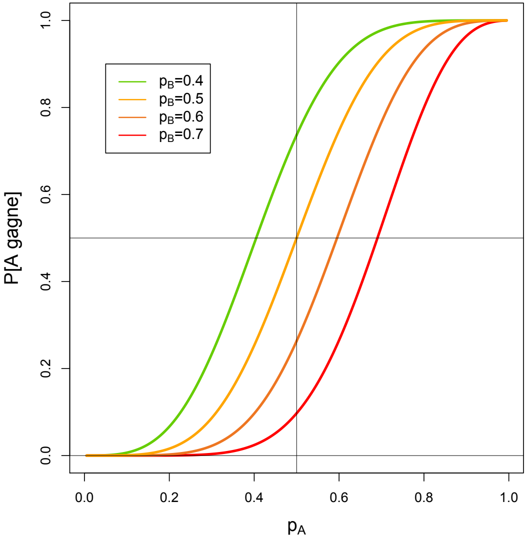


n positions possibles pour les r interruptions

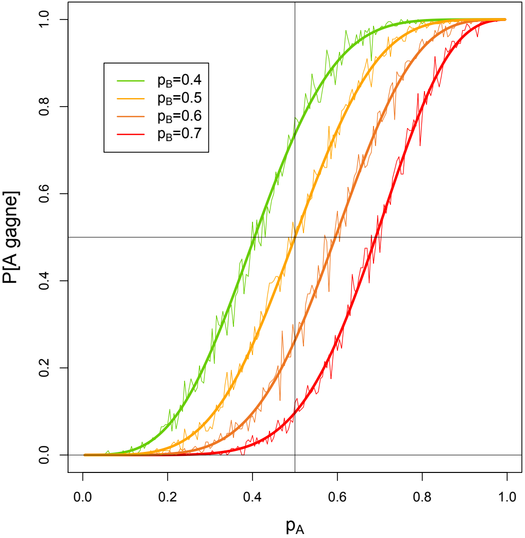
Il y a $\binom{k-1}{r-1}$ façons de distribuer les k points marqués par B dans les r interruptions



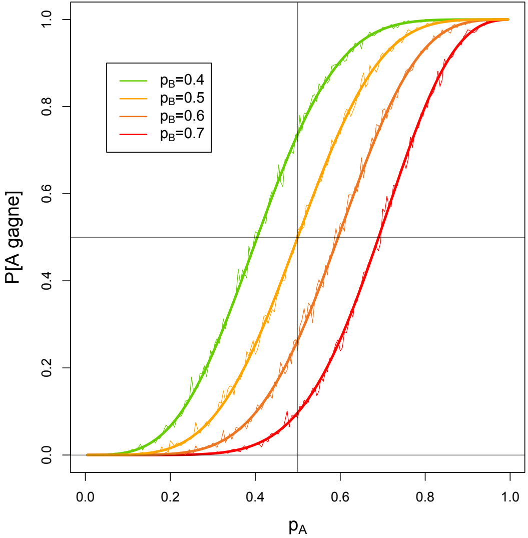
$k-1$ positions possibles pour les $r-1$ "séparateurs d'interruptions"



p_B=0.4
p_B=0.5
p_B=0.6
p_B=0.7
P[A gagne]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p_A



Sur la base de 200 sets pour $p = .005, .010, .015, \ldots, .995$



Sur la base de <u>800 sets</u> pour $p = .005, .010, .015, \ldots, .995$

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point si il/elle sert
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point si il/elle sert
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point si il/elle sert
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

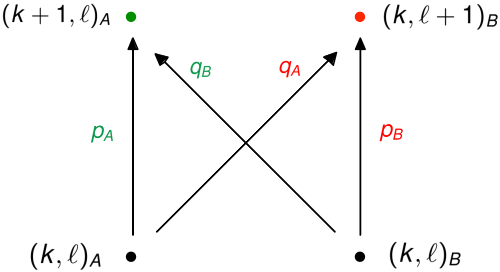
- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

Un autre scoring (encore sans tie-break)

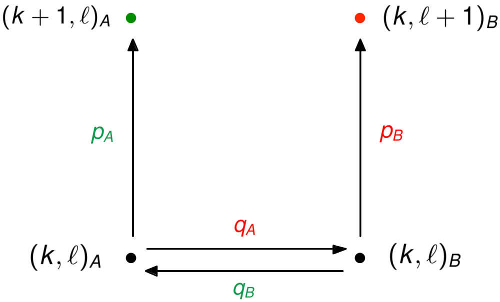
- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point $\boxed{\text{si il/elle sert}}$
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $\boxed{n = 15}$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
⋮	⋮	⋮
	15-12	A

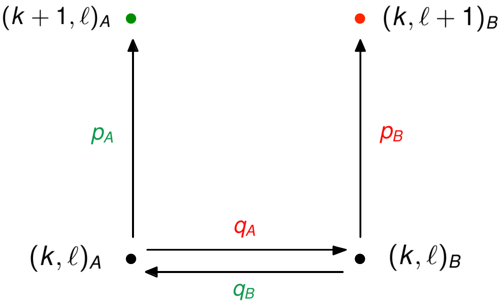


$$p_A = P[A \text{ marque} \mid A \text{ sert}]$$

$$p_B = P[B \text{ marque} \mid B \text{ sert}]$$


$(k+1,\ell)_A$
$(k,\ell+1)_B$
p_A
p_B
q_A
$(k,\ell)_A$
$(k,\ell)_B$
q_B

Ici, un échange ne mène pas toujours à un point, mais un "super-échange" bien



$$\tilde{p}_A = P[A \text{ marque} \mid A \text{ sert}] = p_A + (q_A q_B) p_A + (q_A q_B)^2 p_A + \ldots = \frac{p_A}{1 - q_A q_B}$$

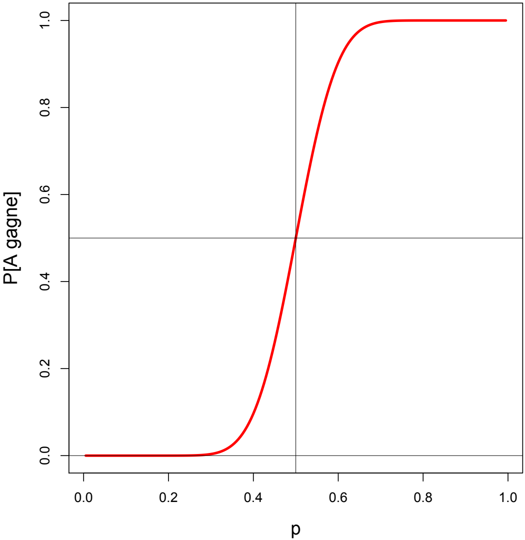
$$\tilde{p}_B = P[B \text{ marque} \mid B \text{ sert}] = p_B + (q_B q_A) p_B + (q_B q_A)^2 p_B + \ldots = \frac{p_B}{1 - q_A q_B}$$

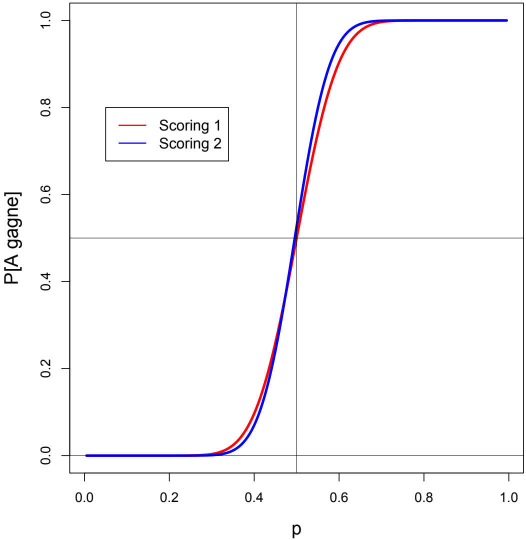
il en découle que

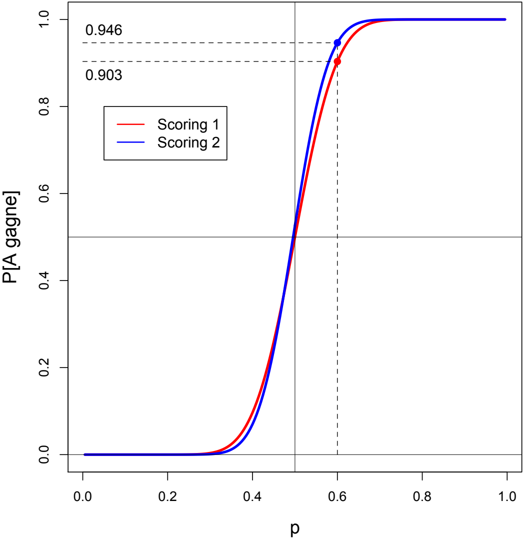
$$P[\text{A gagne } (n,0)] = \tilde{p}_A^n = \left(\frac{p_A}{1-q_Aq_B}\right)^n.$$

Plus généralement, en posant $\tilde{q}_A := 1-\tilde{p}_A$ et $\tilde{q}_B := 1-\tilde{p}_B$, on a

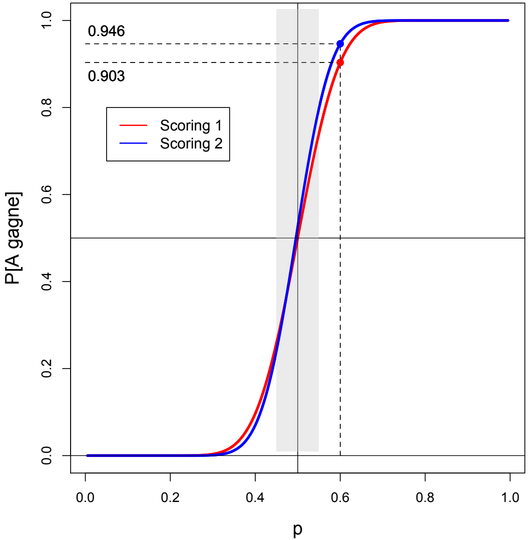
$$\begin{aligned} P[\text{A gagne } (n,k)] &= \sum_{r=1}^{k} \binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1}(\tilde{q}_A\tilde{q}_B)^r \tilde{p}_A^{n-r}\tilde{p}_B^{k-r} \\ &= \frac{p_A^n p_B^k}{(1-q_Aq_B)^{n+k}} \sum_{r=1}^{k} \binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1}(q_Aq_B)^r. \end{aligned}$$


P[A gagne]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p


Scoring 1
Scoring 2
P[A gagne]
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



0.946
0.903
Scoring 1
Scoring 2
P[A gagne]
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


0.946
0.903
Scoring 1
Scoring 2
P[A gagne]
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Notons D le nombre d'échanges du set.

La distribution de D est d'intérêt

- pour les joueurs
  (le joueur peu endurant s'intéressera à $P[D > 35]$)
- pour les organisateurs de tournoi
  (parce que $\mathrm{E}[D]$ permettra d'estimer la durée du tournoi)
- pour les chaînes de télévision / les annonceurs
  (parce que $\mathrm{Var}[D]$ permettra d'apprécier l'incertitude sur l'heure à laquelle on pourra diffuser la publicité entre deux sets)
- ...

Notons D le nombre d'échanges du set.

Dans le premier scoring,

$$\begin{aligned} P[D = n + k] &= P[D = n + k \mid A \text{ gagne } (n, k)] P[A \text{ gagne } (n, k)] \\ &\quad + P[D = n + k \mid B \text{ gagne } (k, n)] P[B \text{ gagne } (k, n)] \\ &\quad + P[D = n + k \mid \text{un autre score}] P[\text{un autre score}] \end{aligned}$$

Le premier scoring

- Le serveur du premier échange est tiré au sort
- Le vainqueur d'un échange marque un point
- Le vainqueur d'un échange sert dans l'échange suivant
- Le vainqueur du set est le premier à atteindre $n = 21$ points

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-1	B
⋮	⋮	⋮
39	21-18	A

Notons D le nombre d'échanges du set.

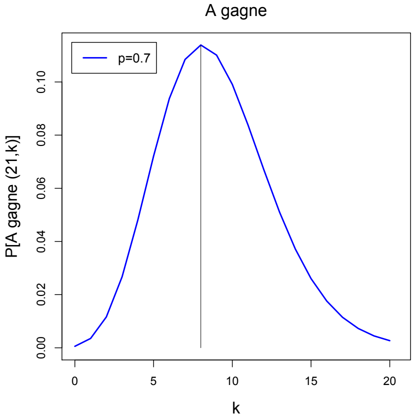
Dans le premier scoring,

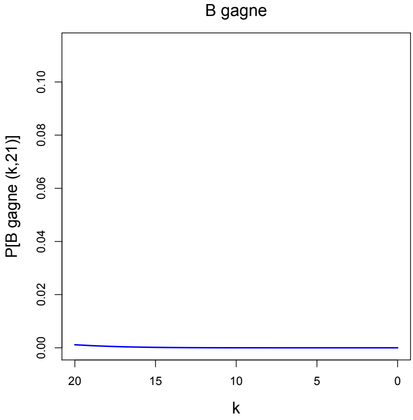
$$\begin{aligned} P[D = n+k] &= \underbrace{P[D = n+k \mid A \text{ gagne } (n,k)]}_{=1} P[A \text{ gagne } (n,k)] \\ &\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid B \text{ gagne } (k,n)]}_{=1} P[B \text{ gagne } (k,n)] \\ &\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid \text{un autre score}]}_{=0} P[\text{un autre score}] \end{aligned}$$

Notons D le nombre d'échanges du set.

Dans le premier scoring,

$$\begin{aligned}
P[D = n+k] &= \underbrace{P[D = n+k \mid A \text{ gagne } (n,k)]}_{=1} P[A \text{ gagne } (n,k)] \\
&\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid B \text{ gagne } (k,n)]}_{=1} P[B \text{ gagne } (k,n)] \\
&\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid \text{un autre score}]}_{=0} P[\text{un autre score}] \\
&= P[A \text{ gagne } (n,k)] + P[B \text{ gagne } (k,n)].
\end{aligned}$$


A gagne
p=0.7
P[A gagne (21,k)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
5
10
15
20
k

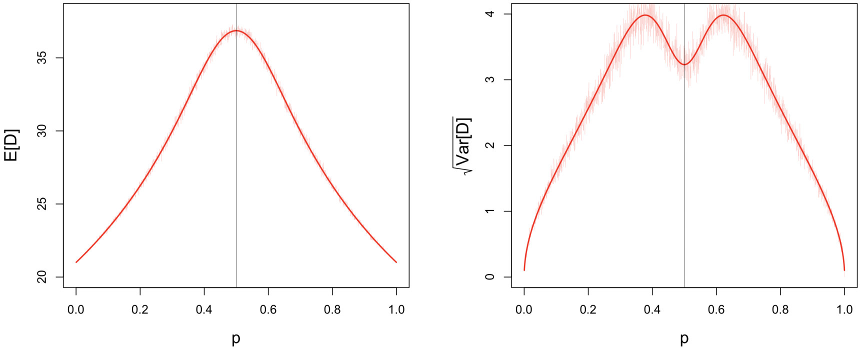

B gagne
P[B gagne (k,21)]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
20
15
10
5
0
k

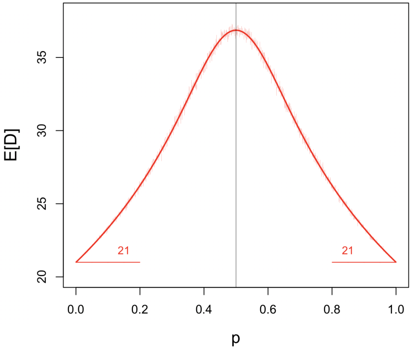
Notons D le nombre d'échanges du set.

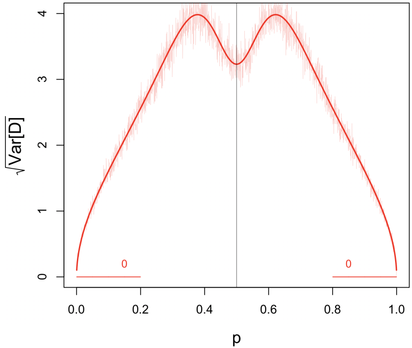
Dans le premier scoring,

$$\begin{aligned}
P[D = n+k] &= \underbrace{P[D = n+k \mid A \text{ gagne } (n,k)]}_{=1} P[A \text{ gagne } (n,k)] \\
&\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid B \text{ gagne } (k,n)]}_{=1} P[B \text{ gagne } (k,n)] \\
&\quad + \underbrace{P[D = n+k \mid \text{un autre score}]}_{=0} P[\text{un autre score}] \\
&= P[A \text{ gagne } (n,k)] + P[B \text{ gagne } (k,n)].
\end{aligned}$$

Ceci fixe la distribution de D, qui permet entre autres de calculer $\mathrm{E}[D]$ et $\mathrm{Var}[D]$.


E[D]
20
25
30
35
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p
$\sqrt{\mathrm{Var}[D]}$
0
1
2
3
4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p


E[D]
35
30
25
20
21
21
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p


$\sqrt{\mathrm{Var}[D]}$
4
3
2
1
0
0
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p

Dans l'autre scoring, $D \mid [A \text{ gagne } (n, k)]$ reste aléatoire...

Echange	*Score*	*Serveur*
	0-0	A
1	1-0	A
2	2-0	A
3	2-0	B
4	2-1	B
5	2-1	A
6	2-1	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
?	15-12	A

Définition

- *Une interruption est une séquence d'échanges dans laquelle B prend le service à A, marque un ou plusieurs points, puis perd le service au profit de A qui marque au moins un point.*
- *Un brol est une séquence de deux échanges dans laquelle un joueur prend le service à l'autre et le perd aussitôt.*

- Pour le score (n, k), il peut y avoir au plus k interruptions

  le nombre de brols est arbitraire

- Chaque brol se produit avec probabilité $q_a q_b$

Lemme

Soit $F_{j,r}(n,k) :=$ "A gagne (n,k) avec exactement j brols et r interruptions". Alors

$$P[F_{j,r}(n,k)] = \binom{n+k+j-1}{j}\binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1} p_A^n p_B^k (q_A q_B)^{j+r}$$

pour tout tout naturel j et tout $r \in \{\min(k,1), \ldots, k\}$.

(1) Ceci permet de confirmer les probabilités de score déjà obtenues.

Théorème

$$P[A \text{ gagne } (n,k)] = \sum_{j,r} P[F_{j,r}(n,k)] = \frac{p_A^n p_B^k}{(1-q_A q_B)^{n+k}} \sum_{r=\min(k,1)}^{k} \binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1}(q_A q_B)^r$$

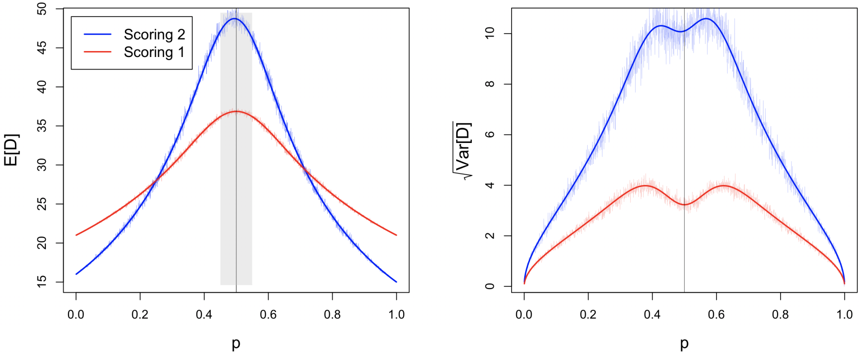
(2) Comme $F_{j,r}(n,k)$ mène toujours à $n+k+2r+2j$ échanges, cela livre aussi

$$P[D=n+k+2\ell|A \text{ gagne } (n,k)]$$

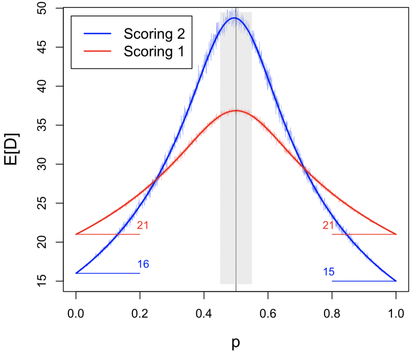
$$=\sum_{j,r} \underbrace{P[D=n+k+2\ell|F_{j,r}(n,k)]}_{=1 \text{ si } j+r=\ell,\ 0 \text{ sinon}} P[F_{j,r}(n,k)]$$

$$=\sum_{j+r=\ell} P[F_{j,r}(n,k)].$$

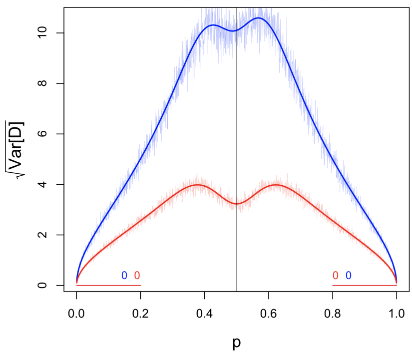
Les probabilités $P[D=n+k+2\ell]$ découlent donc des probabilités totales...



Scoring 2
Scoring 1
E[D]
p
$\sqrt{\mathrm{Var}[D]}$
p

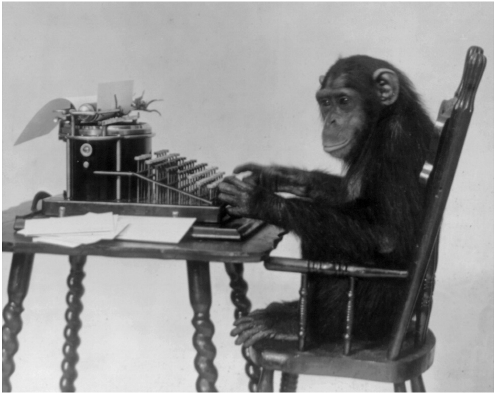


Scoring 2
Scoring 1
E[D]
p
21
21
16
15



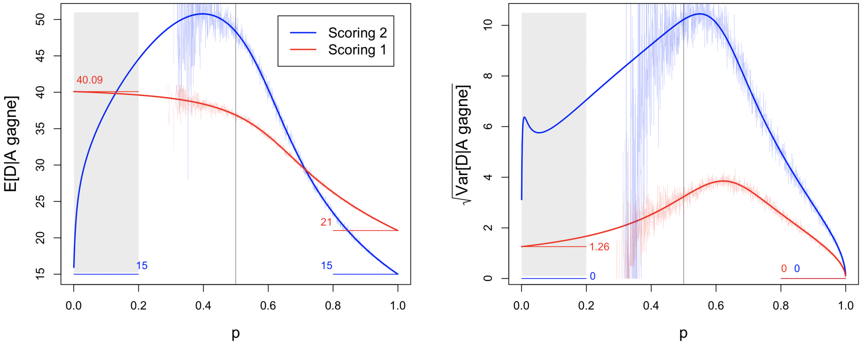
$\sqrt{Var[D]}$
p
0 0
0 0

Supposons que vous ayez remporté un set contre Lin Dan.

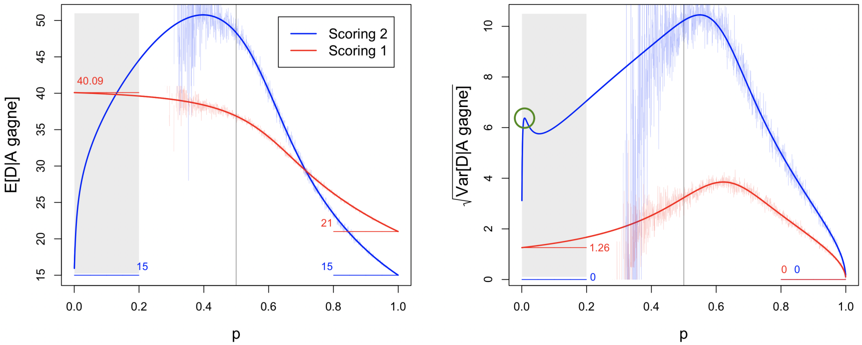


Comment le set s'est-il déroulé?

Cas 1: Lin Dan est B

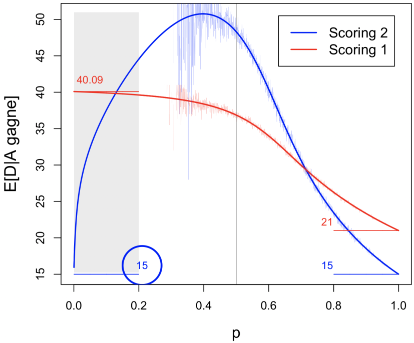


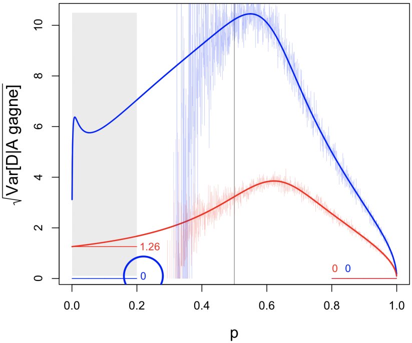
Cas 1: Lin Dan est B



Approximer par simulations cette valeur est impossible

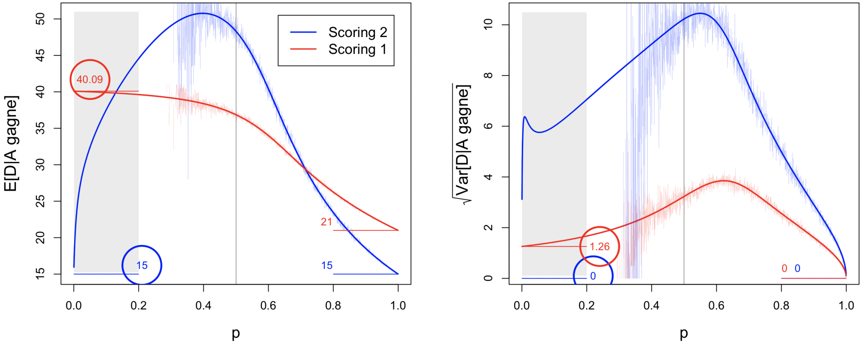
Cas 1: Lin Dan est B





Le miracle qui prédomine est une victoire $(15, 0)$

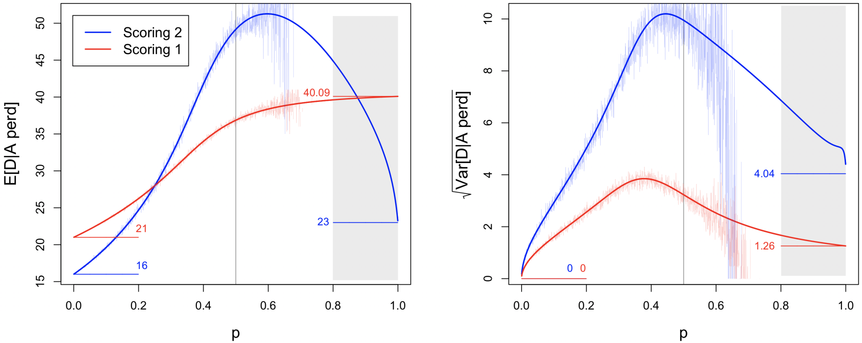
Cas 1: Lin Dan est B



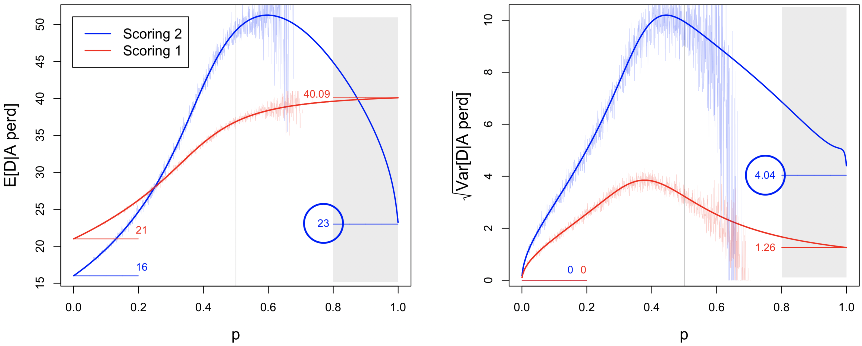
Dans le scoring 2, Le miracle qui prédomine est une victoire (15, 0)

Dans le scoring 1, le set est très serré (et de score incertain)

Cas 2: Lin Dan est A



Cas 2: Lin Dan est A



Les miracles qui prédominent sont ceux (équiprobables) qui correspondent à des victoires $(\ell, 15)$, $\ell = 0, \ldots, 14$, en exactement $15 + \ell + 1$ échanges

Recherches futures

- Définir un modèle probabiliste qui prend en compte la motivation / la fatigue. Comment faire ceci de façon naturelle?
- Déterminer des méthodes pour la prévision en ligne du vainqueur (à la Klaassen and Magnus (2003) pour le tennis) et de la durée restante
- Estimer (p_a, p_b) en se fondant sur (n, k)... ou sur (n, k, d)

Phillips, M.J. (1978). Sums of random variables having the modified geometric distribution with application to two-person games. *Advances in Applied Probability* 10, 647-665.

Hsi, B.P., et Burich, D.M. (1971). Games of two players. *Journal of the Royal Statististical Society Series C* 20, 86-92.

Simmons, J. (1989). A probabilistic model of squash: strategies and applications. *Journal of the Royal Statististical Society Series C* 38, 95-110.

Strauss, D., et Arnold, B.C. (1987). The rating of players in racquetball tournaments. *Journal of the Royal Statistical Society Series C* 36, 163-173.

Klaassen, F.J.G.M., et Magnus, J.R. (2003). Forecasting the winner of a tennis match. *European Journal of Operational Research* 148, 257-267.

Percy, D. F (2009). A mathematical analysis of badminton scoring systems. *Journal of Operational Research Society* 60, 63-71.

Anderson, C.L. (1977). Note on the advantage of first serve. *Journal of Combinatorial Theory A* 23, 363.

Kingston, J.G. (1976). Comparison of scoring systems in two-sided competitions. *Journal of Combinatorial Theory A* 23, 363.

Paindaveine, D., et Swan, Y. (2011). A stochastic analysis of some two-person sports. *Studies in Applied Mathematics* 127, 221-249.

Merci de votre attention

Phillips, M.J. (1978). Sums of random variables having the modified geometric distribution with application to two-person games. *Advances in Applied Probability* 10, 647-665.

Hsi, B.P., et Burich, D.M. (1971). Games of two players. *Journal of the Royal Statistical Society Series C* 20, 86-92.

Simmons, J. (1989). A probabilistic model of squash: strategies and applications. *Journal of the Royal Statistical Society Series C* 38, 95-110.

Strauss, D., et Arnold, B.C. (1987). The rating of players in racquetball tournaments. *Journal of the Royal Statistical Society Series C* 36, 163-173.

Klaassen, F.J.G.M., et Magnus, J.R. (2003). Forecasting the winner of a tennis match. *European Journal of Operational Research* 148, 257-267.

Percy, D. F (2009). A mathematical analysis of badminton scoring systems. *Journal of Operational Research Society* 60, 63-71.

Anderson, C.L. (1977). Note on the advantage of first serve. *Journal of Combinatorial Theory A* 23, 363.

Kingston, J.G. (1976). Comparison of scoring systems in two-sided competitions. *Journal of Combinatorial Theory A* 23, 363.

Paindaveine, D., et Swan, Y. (2011). A stochastic analysis of some two-person sports. *Studies in Applied Mathematics* 127, 221-249.

Merci de votre attention