Figures en évolution

Marie-France Guissard, Isabelle Wettendorff,
Marie-Françoise Van Troeye,
Valérie Henry, Pauline Lambrecht

CREM asbl

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

SBPMef, 28-30 août 2018 (Bruxelles)

Le CREM

- Recherches
- Publications
- Logiciels
- Formations
- Bibliothèque

CREM

www.crem.be

info@crem.be

Le Rallye Mathématique Transalpin

Concours de résolution de problèmes destiné à des classes de la 3^{e} primaire à la 2^{e} secondaire

Les élèves

- lisent,
- s'organisent,
- réfléchissent,
- développent des stratégies,
- calculent,
- débattent,
- rédigent,

en vue de résoudre collectivement 5 à 7 problèmes, adaptés à leur âge, en 50 minutes chrono.

Carpettes carrées

- Problème

Carpettes carrées

- Problème
- Démarches

Carpettes carrées

- Problème
- Démarches
- Exploitation

Carpettes carrées

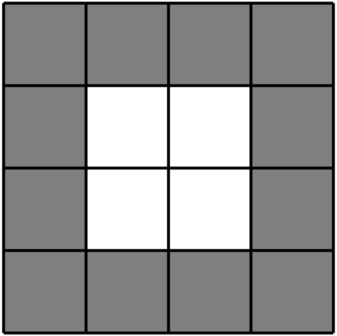
- Problème
- Démarches
- Exploitation
- Algébrisation

Carpettes carrées : le problème (d'après ©ARMT)

On commercialise un nouveau type de carpette carrée, constituée de petits carrés identiques : une rangée de gris sur les bords et des blancs à l'intérieur. La plus grande carpette a 10 carrés gris par côté.

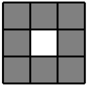
Est-il possible d'avoir une carpette de ce type composée du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Expliquez votre démarche.

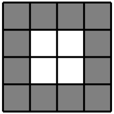


Exemple de carpette

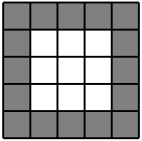
Carpettes carrées : démarches correctes



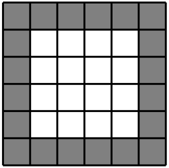
1 blanc
8 gris



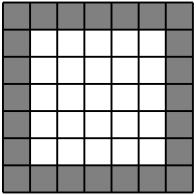
4 blancs
12 gris



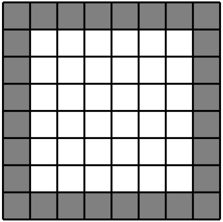
9 blancs
16 gris



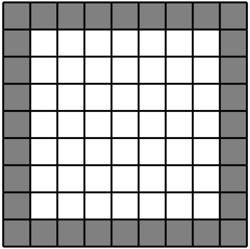
16 blancs
20 gris



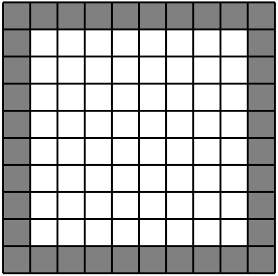
25 blancs
24 gris



36 blancs
28 gris



49 blancs
32 gris



64 blancs
36 gris

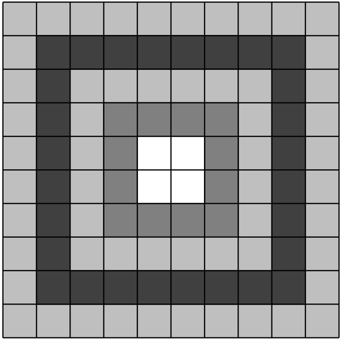
Carpettes carrées : démarches correctes

Nombre de carrés blancs sur un côté	Nombre de carrés blancs (à l'intérieur)	Nombre de carrés gris (de la bordure)
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
6	36	28
7	49	32
8	64	36

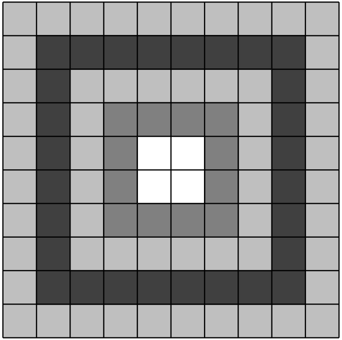
Tableau complété

Nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc	Nombre de carrés sur un côté de la carpette	Nombre total de carrés de la carpette	Nombre total de carrés blancs de la carpette	Nombre total de carrés gris de la carpette	Écart
1	3	9	1	8	7
2	4	16	4	12	8
3	5	25	9	16	7
4	6	36	16	20	4
5	7	49	25	24	1
6	8	64	36	28	8
7	9	81	49	32	17
8	10	100	64	36	28

Démarche incomplète



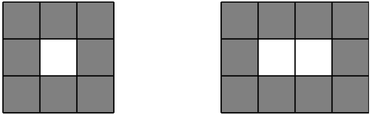
Démarche incomplète



Nombre de carrés du centre	Nombre de carrés de la bordure
4	12
$4 + 12 = 16$	20
$16 + 20 = 36$	28
$36 + 28 = 64$	36

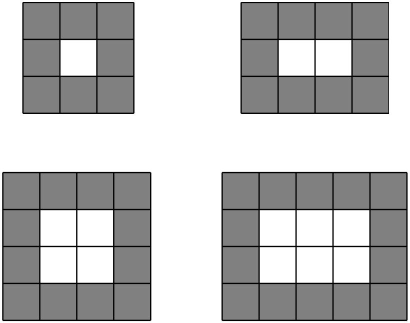
Démarches inadaptées ou incorrectes

Dans le registre géométrique



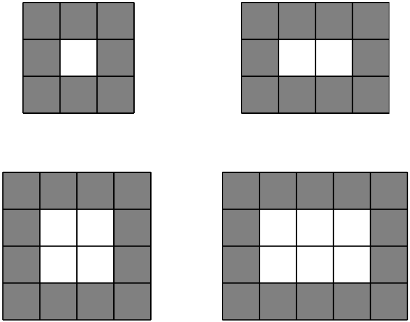
Démarches inadaptées ou incorrectes

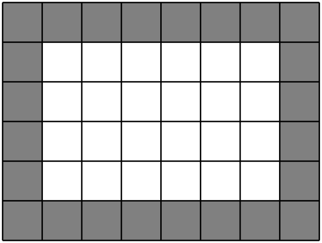
Dans le registre géométrique



Démarches inadaptées ou incorrectes

Dans le registre géométrique





24 carrés gris
24 carrés blancs

Démarches inadaptées ou incorrectes

Dans le registre numérique

- 4 carrés gris sur le bord, 12 carrés gris sur la bordure
  $\rightsquigarrow$ le nombre total de carrés gris
  $= 3 \times$ le nombre de carrés gris sur un bord

Démarches inadaptées ou incorrectes

Dans le registre numérique

- 4 carrés gris sur le bord, 12 carrés gris sur la bordure
  $\rightsquigarrow$ le nombre total de carrés gris
  $= 3 \times$ le nombre de carrés gris sur un bord

- formule du périmètre
  $\rightsquigarrow$ le nombre total de carrés gris
  $= 4 \times$ le nombre de carrés gris sur un bord

Tableau complété

Nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc	Nombre de carrés sur un côté de la carpette	Nombre total de carrés de la carpette	Nombre total de carrés blancs de la carpette	Nombre total de carrés gris de la carpette	Écart
1	3	9	1	8	7
2	4	16	4	12	8
3	5	25	9	16	7
4	6	36	16	20	4
5	7	49	25	24	1
6	8	64	36	28	8
7	9	81	49	32	17
8	10	100	64	36	28

Exploitation

1. Liens entre des colonnes

- Comparer le nombre de carrés sur un côté de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc.
- Comparer le nombre total de carrés de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de la carpette.
- Comparer le nombre de carrés blancs à l'intérieur de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc.
- Établir un lien entre le nombre total de carrés gris, le nombre total de carrés de la carpette et le nombre total de carrés blancs à l'intérieur de la carpette.

2. Liens au sein d'une colonne

Comment évolue

- le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc de la carpette ?
- le nombre de carrés sur un bord de la carpette ?
- la suite des nombres de carrés blancs intérieurs ?
  la suite des nombres de carrés de la carpette entière ?
- le nombre de carrés gris de la bordure ?

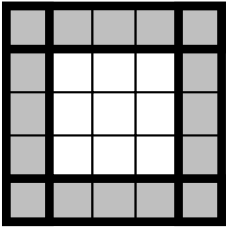
Procédés réexploitables en résolution de problèmes

- Dessiner pour comprendre la situation ;
- organiser ses recherches ;
- faire des liens entre différents éléments ;
- recourir au cadre géométrique pour valider des observations effectuées dans le cadre numérique, ou inversement ;
- présenter les résultats de recherche dans un tableau clair.

Comment pourrait-on faire pour calculer le nombre de carrés gris de la bordure si on sait que la carpette a 15 carrés blancs sur le côté de la partie centrale ?

Algébrisation

Le nombre de carrés gris est

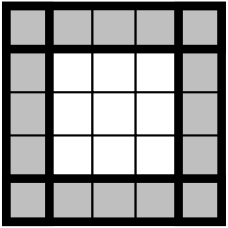


quatre fois le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale plus quatre

$$\text{nombre de carrés gris} = 4 \times b + 4$$

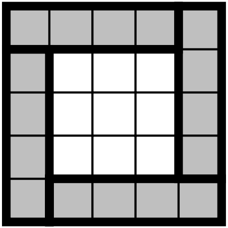
Algébrisation

Le nombre de carrés gris est



quatre fois le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale plus quatre

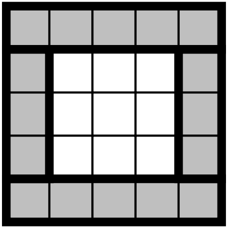
$$\text{nombre de carrés gris} = 4 \times b + 4$$



quatre fois le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale plus un

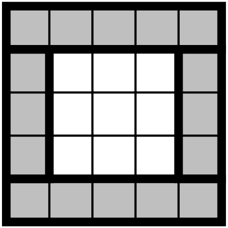
$$\text{nombre de carrés gris} = 4 \times (b + 1)$$

Algébrisation

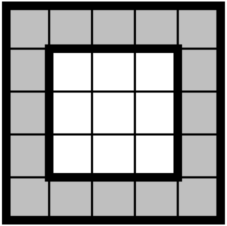


nombre de carrés gris $= 2 \times b + 2 \times (b + 2)$

Algébrisation



nombre de carrés gris $= 2 \times b + 2 \times (b + 2)$



nombre de carrés gris $= (b + 2)^2 - b^2$

Tapis rectangulaires I et II

- Problèmes

Tapis rectangulaires I et II

- Problèmes
- Démarches

Tapis rectangulaires I et II

- Problèmes
- Démarches
- Comparaison des deux problèmes

Tapis rectangulaires I et II

- Problèmes
- Démarches
- Comparaison des deux problèmes
- Exploitation
  - Représentations graphiques
  - Algébrisation

Tapis rectangulaires I et II

- Problèmes
- Démarches
- Comparaison des deux problèmes
- Exploitation
  - Représentations graphiques
  - Algébrisation
- Synthèse

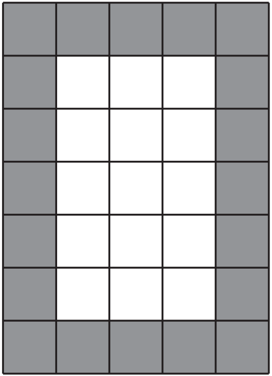
Tapis rectangulaires (I)

On commercialise un nouveau type de tapis rectangulaire constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

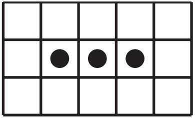
Sachant que ces tapis ont tous trois carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

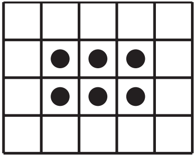
Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

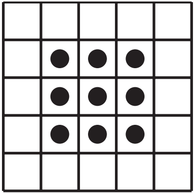
Expliquez votre démarche.



Démarches : dessins

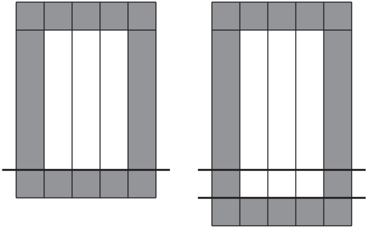






Démarches : dessins et tableaux

Trois carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc	Nombre total de carrés blancs	Nombre total de carrés gris
1	3	12
2	6	14
3	9	16
4	12	18
5	15	20
6	18	22
7	21	24
8	24	26
9	27	28
10	30	30
11	33	32
12	36	34
⋮	⋮	⋮



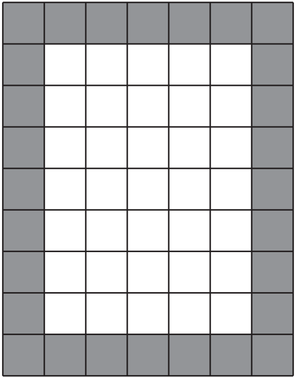
Tapis rectangulaires (II)

On commercialise un nouveau type de tapis rectangulaire constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

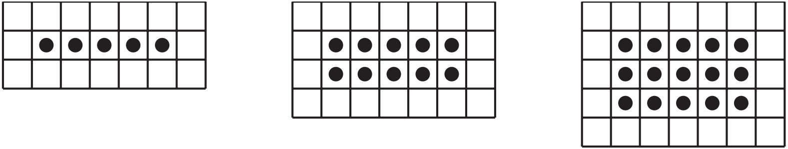
Sachant que ces tapis ont tous cinq carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

Expliquez votre démarche.



Démarches : dessins

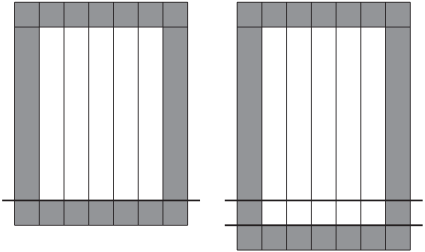


Démarches : dessins et tableaux

Cinq carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées blanches	Nombre total de carrés blancs	Nombre total de carrés gris
1	5	16
2	10	18
3	15	20
4	20	22
5	25	24
6	30	26
7	35	28
8	40	30
9	45	32
10	50	34
11	55	36
⋮	⋮	⋮

Démarches : dessins et tableaux

Cinq carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées blanches	Nombre total de carrés blancs	Nombre total de carrés gris
1	5	16
2	10	18
3	15	20
4	20	22
5	25	24
6	30	26
7	35	28
8	40	30
9	45	32
10	50	34
11	55	36
⋮	⋮	⋮



Comparaison des deux problèmes

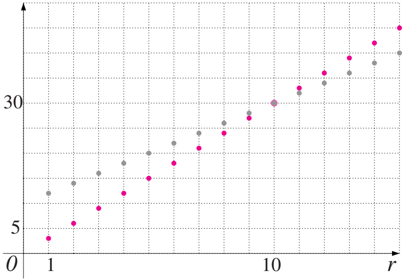
- Problème I :
  - il y a un tapis qui compte autant de carrés gris que de blancs (30) dans le tableau ;
  - il faut s'assurer de son unicité.

Comparaison des deux problèmes

- Problème I :
  - il y a un tapis qui compte autant de carrés gris que de blancs (30) dans le tableau ;
  - il faut s'assurer de son unicité.
- Problème II :
  - il n'y a pas de tapis qui compte autant de carrés gris que de blancs dans le tableau ;
  - il faut justifier qu'il n'y en aura jamais.

Exploitation : Représentations graphiques

Problème I

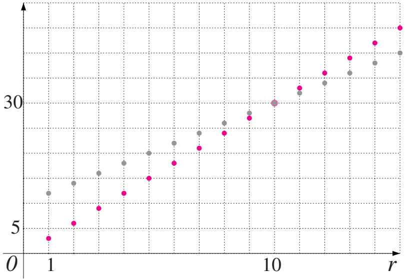


r = nombre de rangées de carrés blancs dans le rectangle central
● = nombre total de carrés blancs
● = nombre total de carrés gris

Un tapis avec 30 carrés gris
et 30 carrés blancs

Exploitation : Représentations graphiques

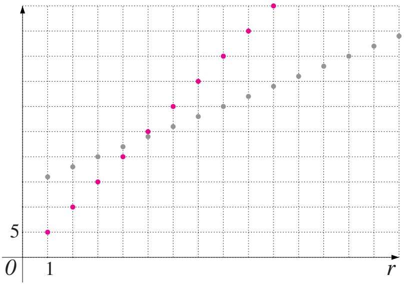
Problème I



r = nombre de rangées de carrés blancs dans le rectangle central
• = nombre total de carrés blancs
• = nombre total de carrés gris

Un tapis avec 30 carrés gris
et 30 carrés blancs

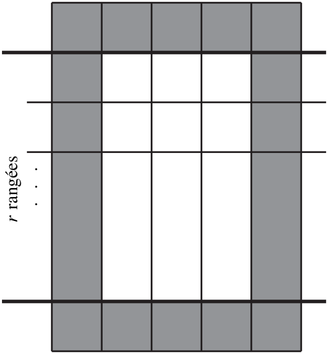
Problème II



r = nombre de rangées de carrés blancs dans le rectangle central
• = nombre total de carrés blancs
• = nombre total de carrés gris

Pas de solution

Problème I



le nombre total de carrés blancs :

$$B = 3 \times r,$$

le nombre total de carrés gris :

$$G = 2 \times r + 2 \times 5.$$

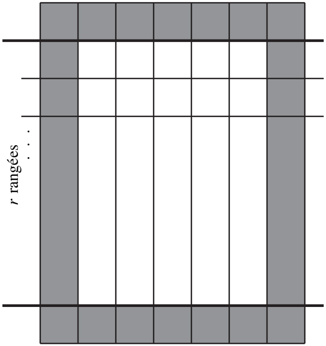
$$B = G$$

$$3 \times r = 2 \times r + 10,$$

$$r = 10$$

Algébrisation

Problème II



le nombre total de carrés blancs :
$$B = 5 \times r,$$

le nombre total de carrés gris :
$$G = 2 \times r + 2 \times 7.$$

$$B = G$$

$$5 \times r = 2 \times r + 14$$
$$r = \frac{14}{3}$$

solution non entière rejetée

Synthèse

- Nouvelles stratégies :
  - représentations graphiques,
  - mise en équation.

Synthèse

- Nouvelles stratégies :
  - représentations graphiques,
  - mise en équation.
- À propos des équations :
  - Tapis rectangulaires I : équation du premier degré, une solution entière
  - Tapis rectangulaires II : équation du premier degré, pas de solution entière
  - Carpettes carrées : équation du deuxième degré, pas de solution entière

Enjeux

- Établir des liens entre les registres géométrique, graphique et numérique.
- Présenter des résultats dans des tableaux ordonnés de nombres.
- Dégager des régularités dans un tableau de nombres, élaborer des conjectures.
- Distinguer conjecture et preuve.

Compétences transversales

- *Repérer, reformuler la ou les question(s) explicite(s)* [. . .].
- *Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures).*
- *Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.*
- *Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres* [. . .]
- *S'exprimer dans un langage clair et précis ; citer l'énoncé qu'on utilise pour argumenter ; maîtriser le symbolisme mathématique usuel, le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarche ou de la solution.*
- *Distinguer ≪ ce dont on est sûr ≫ de ≪ ce qu'il faut justifier ≫.*

Compétences disciplinaires

- *Relever des régularités dans des suites de nombres.*
- *Dans un contexte [...] de pavage et de reproductions de dessins, relever la présence de régularités.*
- *Organiser selon un critère.*
- *Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.*
- *Associer un point à ses coordonnées dans un repère.*
- *Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.*

Conclusion

L'approche par résolution de problèmes propose d'organiser l'apprentissage en partant des problèmes pour aller vers les concepts plutôt que dans le sens inverse, plus traditionnel.

Conclusion

L'approche par résolution de problèmes propose d'organiser l'apprentissage en partant des problèmes pour aller vers les concepts plutôt que dans le sens inverse, plus traditionnel.

La confrontation des stratégies est organisée pour emmener les élèves vers un véritable débat scientifique où la nécessité d'expliciter sa démarche viendra de la volonté d'être compris par ses pairs plutôt que d'une exigence de l'enseignant.

Conclusion

L'approche par résolution de problèmes propose d'organiser l'apprentissage en partant des problèmes pour aller vers les concepts plutôt que dans le sens inverse, plus traditionnel.

La confrontation des stratégies est organisée pour emmener les élèves vers un véritable débat scientifique où la nécessité d'expliciter sa démarche viendra de la volonté d'être compris par ses pairs plutôt que d'une exigence de l'enseignant.

La rédaction d'une démarche ou la justification d'une stratégie fait partie des compétences à enseigner.

Conclusion

L'approche par résolution de problèmes propose d'organiser l'apprentissage en partant des problèmes pour aller vers les concepts plutôt que dans le sens inverse, plus traditionnel.

La confrontation des stratégies est organisée pour emmener les élèves vers un véritable débat scientifique où la nécessité d'expliciter sa démarche viendra de la volonté d'être compris par ses pairs plutôt que d'une exigence de l'enseignant.

La rédaction d'une démarche ou la justification d'une stratégie fait partie des compétences à enseigner.

Le rôle de l'enseignant est largement modifié.

Merci pour votre attention
et votre participation

$\sim\sim\sim$

e-mail : `info@crem.be`

site web : `www.crem.be`