Commençons la séance par deux expériences.

# Un tour ou deux tours ?

Un exercice de gymnastique montre

un tour complet $\neq$ deux tours complets.

$\boxed{\text{Comment "expliquer" cela ?}}$

---

"La géométrie fait partie de la physique." (Paul Libois)

Pour des “applications”, voir les vidéos

- danse des bougies :

  `https://www.youtube.com/watch?v=4Gf8Xa0N2yk`

  `https://www.youtube.com/watch?v=0FQsisO1gOY`

- le cube attaché qui tourne sans créer de noeud :

`https://en.wikipedia.org/wiki/Anti-twister_mechanism`

  `https://en.wikipedia.org/wiki/Plate_trick`

# Ombres de figures

L'ombre au soleil

| | | |
|---|---|---|
| d'un cercle | n'est pas toujours | un cercle; |
| d'une ellipse | est toujours | une ellipse; |
| d'un carré | n'est pas toujours | un carré; |
| d'un parallélogramme | est toujours | un parallélogramme. |

Les notions géométriques se différencient.

Une explication mathématique ?

# Une seule géométrie ?

Jean-Paul DOIGNON
Université Libre de Bruxelles
doignon@ulb.ac.be

A la mémoire de Paul LIBOIS (1901–1991)

Exposé au Congrès de la SBPMef le 30 août 2018

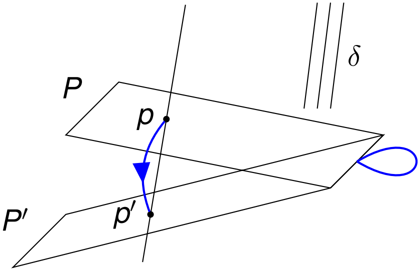
# Projections parallèles

Les ombres au soleil amènent à trier les notions géométriques en

| non résistantes | résistantes |
|---|---|
| cercle | ellipse |
| carré | parallélogramme |
| angle droit | |
| | droite |
| triangle équilatéral | triangle |

Formalisons "ombre au soleil".

Dans l'espace, soit $P$ et $P'$ deux plans et
$\delta$ direction de droites parallèle ni à $P$ ni à $P'$.




### Définition (projection parallèle)

La projection parallèle du plan $P$ sur le plan $P'$, de direction $\delta$, envoie le point $p$ de $P$ sur le point $p'$ de $P'$ tel que

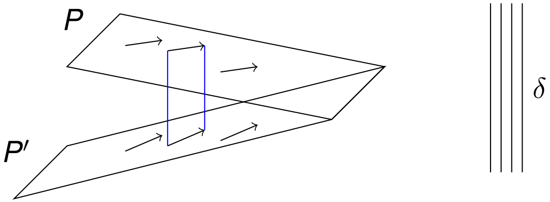
$p' = p$ si $p \in P \cap P'$,

sinon la droite $pp'$ est dans la direction $\delta$.

Le point $p'$ est univoquement déterminé par le point $p$.
L'application de $P$ sur $P'$ est bijective.

Nous pouvons aussi projeter des transformations,

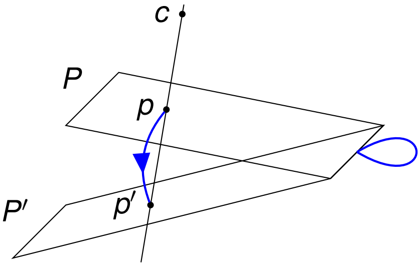
par ex. une translation :




| non résistantes | résistantes |
| --- | --- |
| rotation | translation |
| symétrie orthogonale | homothétie |
| | 'affinité' |

Observons à présent des ombres créées par un point lumineux.

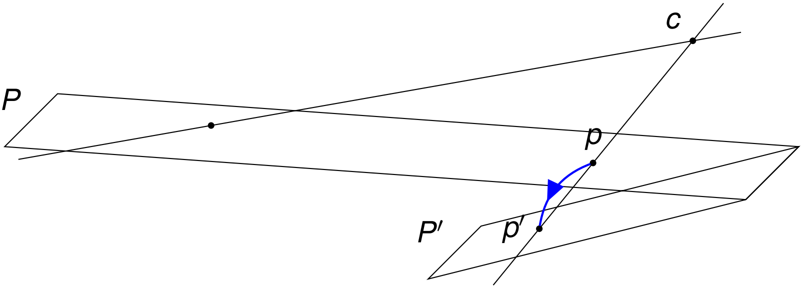
Dans l'espace usuel, soit $c$ un point,
$P$ et $P'$ deux plans évitant $c$.




### Définition (projection centrale)

La projection centrale du plan $P$ sur le plan $P'$ à partir du centre $c$ envoie le point $p$ de $P$ sur le point $p'$ intersection du plan $P'$ et de la droite $cp$.

… MAIS …




Le point image $p'$

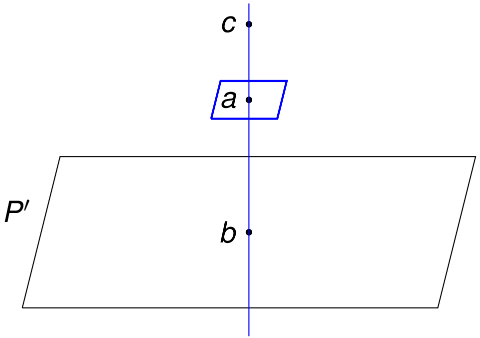
n'existe pas si la droite $cp$ est parallèle au plan $P'$ (ou alors...),

sinon est univoquement déterminé par le point $p$.

Nous reviendrons sur cette question.

## Exercice

Quand la projection centrale d'un carré est-elle encore un carré ?



L’image par une projection centrale de

| | | |
|---|---|---|
| une ellipse | n’est pas toujours | une ellipse; |
| une parabole | n’est pas toujours | une parabole; |
| une conique ovale | est toujours | une conique ovale; |
| un carré | n’est pas toujours | un carré; |
| un parallélogramme | n’est pas toujours | un parallélogramme, |
| un “quadrilatère” | est toujours | un “quadrilatère”. |

Une conique ovale est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.

Un “quadrilatère” est une figure formée de quatre points $a$, $b$, $c$ et $d$ et des quatre droites $ab$, $bc$, $cd$, $da$ (pas nécessairement convexe).

**Exercice (plutôt : Devoir)**

Réaliser une photo de montgolfière qui donne un morceau d’hyperbole.

Une notion qui résiste aux projections centrales
résiste aussi aux projections parallèles.

**Exercice**

Montrer que toute projection parallèle est produit de deux projections centrales.

Les notions géométriques planes se trient en résistantes aux projections

| ni parallèles ni centrales | parallèles mais pas centrales | centrales |
|---|---|---|
| cercle | ellipse | conique ovale |
| triangle équilatéral | triangle | “triangle” |
| carré | parallélogramme | “quadrilatère” |
| | | “droite” |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Pour les “droites”, nous y reviendrons.

## Proposition

Pour une permutation des points d'un plan $P$, sont équivalents :

(a) être un produit de projections parallèles (utilisant des plans intermédiaires);

(b) conserver les droites (c.-à-d., appliquer toute droite sur une droite);

(c) dans un système de coordonnées, admettre une description analytique de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

autrement dit
$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + p \\ y' = c\,x + d\,y + q \end{cases}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $p$ et $q$ sont des réels fixés tels que $a\,d - b\,c \neq 0$.

### Définition

Une telle permutation est une permutation affine ou affinité du plan.

### Proposition

Les affinités du plan forment un groupe pour la composition, c.à-d. :

1.- la permutation identique est une affinité;
2.- la composée de deux affinités est encore une affinité;
3.- la permutation réciproque d'une affinité est encore une affinité.

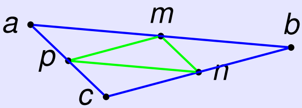
### Proposition

Le groupe des affinités du plan agit transitivement sur

- les points;
- les droites;
- les triangles;
- les parallélogrammes.

# Trois problèmes de l'Olympiade

**Exercice (OMB, éliminatoire miNi, 1986)**




Si $m$, $n$, $p$ sont les milieux des segments $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, le rapport des aires du triangle $mnp$ et du triangle $abc$ vaut

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, autre réponse.

**Exercice**

Tout parallélogramme est-il inscriptible à une ellipse ?

# Et les projections centrales ?

Plus compliqué, avec

- les points à l'infini,
- les coordonnées homogènes.

Il en résulte aussi un groupe, le groupe des 'projectivités' du plan.

Deux expériences

Projections parallèles et centrales

Enseigner la géométrie avec ou sans axiomatique ?

# Enseigner la géométrie :
## observation du monde physique,
## apprentissage d'une théorie formelle.

La géométrie, même basée sur l'observation,
requiert un minimum de formalisation :

- définitions de concepts de base
  point(?), droite, mesure d'angle, ...
- axiomes, postulats
  par deux points passe une et une seule droite, ...
- définitions, constructions, théorèmes, etc.
- nouvelles définitions, nouveaux théorèmes, etc.
  carré, pentagone régulier, ...
- etc.

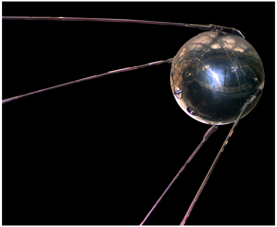
Premier exemple connu : EUCLIDE, *Les Eléments*
(sans doute écrit à Alexandrie vers $-300$).

L'enseignement de la géométrie a été et reste en grande partie basé sur les *Eléments* d'EUCLIDE.

Mais :

> "Un point est ce dont il n'y a aucune partie."
>
> "Une ligne est une longueur sans largeur."

Pourquoi et comment cet enseignement a-t-il évolué ?



En résumant—très outrageusement—en deux points :

- le spoutnik (lancé le 4 octobre 1957);
- JEAN DIEUDONNÉ : “A bas Euclide !”, “Mort aux triangles !”

  (Séminaire de Royaumont, du 23 novembre au 4 décembre 1959, organisé par l’OECE, futur OCDE)

Sur l’histoire de l’enseignement de la géométrie,
il y aurait énormément à dire.

EMILE BOREL vers 1910, GUSTAVE CHOQUET vers 1950, etc.

Un excellent résumé :

E. BARBIN and G. MENGHINI, History of teaching geometry. In *Handbook on the History of Mathematics Education* (2014), éds A. KARP et G. SCHUBRING.

Grand rôle de Belges dans les réformes au XXème siècle :

- Willy Servais;
- Paul Libois;
- Georges et Frédérique Papy;
- ...

G. Vanpaemel, Belgian contributions to the New Math movement in Europe. Paper presented at 8th STEP Meeting - Corfu (2012).

G. Vanpaemel, D. De Bock et L. Verschaffel, Willy Servais ... *Losanges* 23(2013), 20–27.

D. De Bock et G. Vanpaemel, A bas Euclide ! *Losanges* 3(2015), 25–35.

# Axiomatiques de la géométrie plane classique

Tri des notions fondamentales et axiomes, par exemple :

| **géométrie affine plane** | **géométrie euclidienne plane**<br>*ajouter* : |
|---|---|
| point, droite,<br>rapport de section | distance,<br>(mesure d'angle) |
| par deux points une seule droite<br>etc. | inégalité triangulaire,<br>égalité si … |

DAVID HILBERT publie Grundlagen der Geometrie en 1899.

Aujourd'hui dans l'enseignement supérieur :

espace vectoriel réel euclidien.

Remarque. Requiert $\mathbb{R}, +, \cdot$ !?

# Faut-il enseigner les axiomatiques ?

JEAN DIEUDONNÉ à Royaumont :

Non, sauf peut-être à partir de 17 ans.

*[. . . ] en travaillant pendant un certain temps [. . . ] en faisant constamment appel à l'intuition.*

*[. . . ] démontrer sans faute logique que l'énoncé en question en implique un autre; [. . . ]*

*[. . . ] cela montrerait sous son vrai jour la nature de la déduction logique et son caractère relatif,*
*trop souvent voilé par la façon dont on l'embrouille avec la notion métaphysique de vérité.*

PAUL LIBOIS :

"Est-il vrai que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ?"

Deux expériences

Projections parallèles et centrales

Enseigner la géométrie avec ou sans axiomatique ?

Un mot sur la géométrie projective

# Les points à l'infini

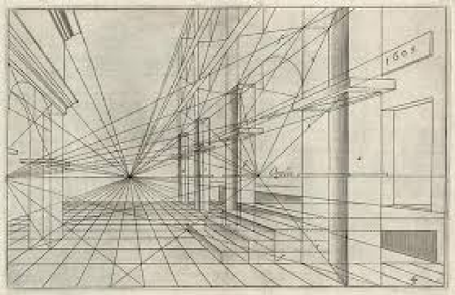
Débuts de la perspective avec

FILIPPO BRUNELLESCHI (1377–1446)

et PAOLO DAL POZZO TOSCANELLI (1397–1482),

puis LEON BATTISTA ALBERTI (1404–1472), ...

PAUL VREDEMAN DE VRIES (1567–1617?)



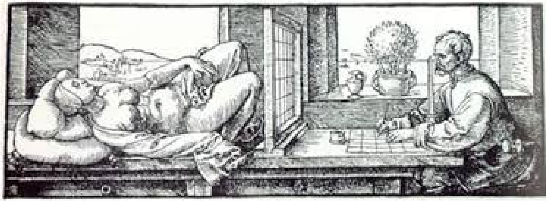

L'image des droites d'une direction donne

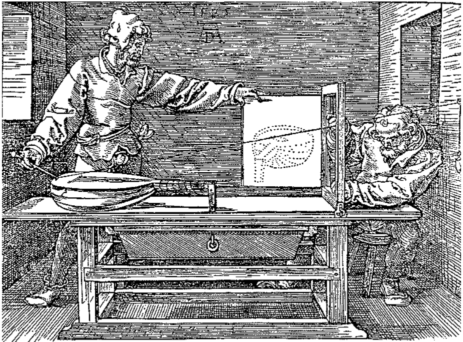
soit des droites d'une direction (par ex., les verticales),

soit des droites concourantes en un point de fuite.

Le dessin résulte bien d’une projection centrale :

Albrecht Dürer (1471–1528)





Jean-Victor Poncelet (1788–1867)
(pendant sa captivité à Saratov en Russie de mars 1813 à juin 1814)
étudie les notions projectives (résistantes aux projections centrales).

### Définition (plan projectif)

Le plan projectif s'obtient à partir du plan (affin) en

- ajoutant un nouveau point par direction de droites
  (un tel point est commun à toutes les droites de la direction),
- décidant que les nouveaux points forment une nouvelle droite.

(on oublie la distinction entre les anciens et nouveaux points !)

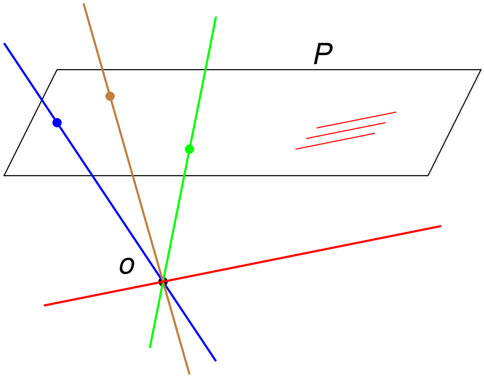
Ce n'est pas la définition la plus élégante mathématiquement.

J. Gray, *Worlds Out of Nothing: a course in the history of geometry in the 19th century*. Springer, 2007.

# Vers une autre définition du plan projectif

Plaçons dans l'espace le plan $P$ à compléter,

et choisissons un point $o$ hors de $P$ :




Les points de $P$ à distance finie plus ceux à l'infini

correspondent

aux droites par le point $o$.

Voici la définition (simplifiée ici) due à FELIX KLEIN vers 1873.

**Définition (plan projectif)**

Le plan projectif a pour
- "point" une droite de l'espace usuel passant par l'origine $o$;
- "droite" l'ensemble des "points" contenus dans un plan fixé par $o$.

**Proposition**

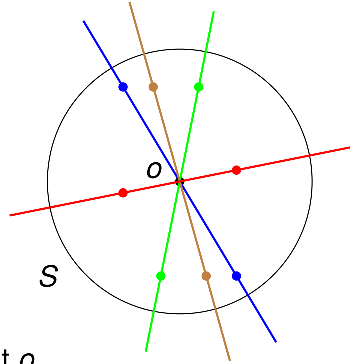
Dans le plan projectif,
deux points appartiennent à exactement une droite commune;
deux droites contiennent exactement un point commun.

Cet exemple de la dualité point–droite dans le plan projectif
illustre l'intérêt de la géométrie projective.

Remarque. La structure du plan projectif peut être enrichie
(birapport, distance, variété différentiable, etc.).

# Encore une autre vision du plan projectif

Prenons dans l'espace une sphère $S$ de centre $o$ :




les droites par le point $o$

correspondent

aux paires de points antipodaux de la sphère $S$.

Le plan projectif s'obtient à partir de la sphère $S$

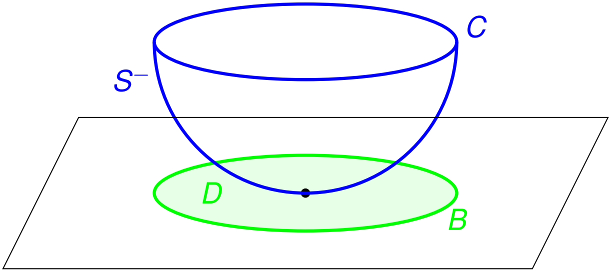
en identifiant chaque point de $S$ avec son point antipodal;

les droites projectives proviennent des grands cercles.

# Et une dernière vision du plan projectif

De la sphère $S$, ne gardons que l'hémisphère "sud" $S^-$,
bordé par le grand cercle horizontal $C$,
avec toujours identification des points antipodaux de $C$.

Projetons $S^-$ sur le disque $D$ du plan tangent au "pôle sud" :



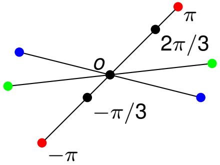

Topologiquement, le plan projectif s'obtient à partir du disque $D$
en identifiant chaque point du bord $B$ de $D$ avec son point opposé.

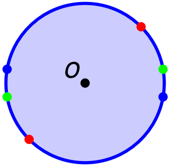
# Un tour diffère de deux tours

Travaillons dans l'espace usuel, avec un point origine *o* fixé :

- toute position de la main est image d'une position initiale par un déplacement[1] fixant *o*;
- une rotation autour d'une droite par *o* est un déplacement fixant *o*, et réciproquement (EULER, 1776).

Représentons les deux rotations d'angle $\pm\alpha$ par les deux points à distance $\alpha$ de *o* sur l'axe de la rotation (ici $0 \leq \alpha \leq \pi$) :




(à voir en 3D)

Attention : il faut identifier les deux points de l'axe à distance $\pi$ de *o* !

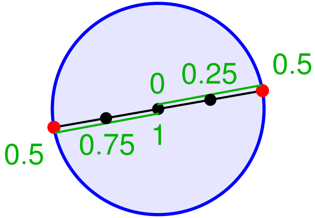
[1] permutation des points de l'espace conservant les distances et l'orientation

Faire un tour, c'est réaliser les rotations d'angles

$t \cdot 2\pi$, pour $t$ de 0 à 1,

ou mieux

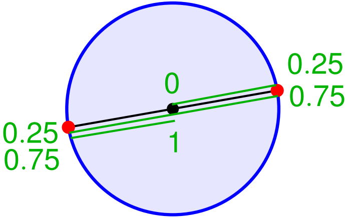
$$\begin{cases} t \cdot 2\pi, & \text{pour } t \text{ de } 0 \text{ à } 0.5, \\ (t-1) \cdot 2\pi, & \text{pour } t \text{ de } 0.5 \text{ à } 1 \end{cases}$$




c.-à-d. parcourir une fois la "droite".

faire deux tours, c'est réaliser les rotations d'angles

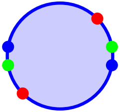
$t \cdot 4\pi$, pour $t$ de 0 à 1




c.-à-d. parcourir deux fois la "droite".

Expliquons la "droite" et la différence entre un et deux tours,

mais en dimension 2 plutôt que 3.



Le disque, après identification des points opposés de son bord,
est topologiquement un plan projectif.

De plus, la "droite" s'identifie à une droite de ce plan projectif.

A montrer : dans le plan projectif,

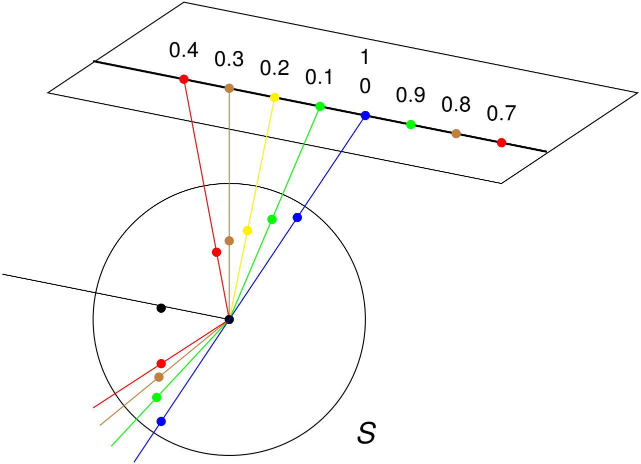
- parcourir une fois une droite donne un chemin qui ne peut pas être ramené continûment à un point;
- parcourir deux fois une droite donne un chemin qui se ramenène continûment à un point.

Travaillons dans

le plan projectif obtenu à partir d'une sphère $S$,

après identification des paires de points antipodaux.

Dans le plan projectif, parcourir une fois une droite donne un chemin $\gamma$ qui ne peut pas être ramené continûment à un point :




En effet, $\gamma$ se relève sur $S$ en un chemin d'extrémités distinctes.

Dans le plan projectif, parcourir deux fois une droite donne un chemin qui peut être ramené continûment à un point.

En effet, le chemin relevé sur la sphère est cette fois le parcours d'un grand cercle.

Un tel chemin se ramène continûment à un point.

Pour rendre rigoureux les arguments ci-dessus, il faut introduire les notions de "chemins" et d'“homotopie entre chemins”.

Pour les physiciens :

le groupe $SU(2)$ est un recouvrement double du groupe $SO(3)$.

E.D. Bolker, The spinor spanner.
*The American Mathematical Monthly* 80(1973), 997–984,

A. Jurisic, The Mercedes knot problem.
*The American Mathematical Monthly* 103(1996), 756–770

Deux expériences

Projections parallèles et centrales

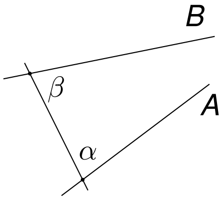
Enseigner la géométrie avec ou sans axiomatique ?

Un mot sur la géométrie projective

Deux mots sur les géométries non-euclidiennes

# La longue histoire du cinquième postulat d'EUCLIDE

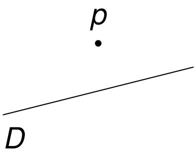
Enoncé original :




si $\alpha + \beta < 180°$,

alors les droites *A* et *B* se coupent.

Formulation équivalente due à JOHN PLAYFAIR (1748–1819) :




par un point *p* extérieur à une droite *D* passe exactement une droite parallèle à la droite donnée.

## Le cinquième postulat se déduit-il des autres hypothèses ?

Beaucoup d'essais de preuve de la réponse négative, par l'absurde : en niant le cinquième postulat, on cherche à déduire une absurdité.

Par exemple, GIOVANNI SACCHERI (1667–1733) conclut par

> "…car cela répugne à la nature de la ligne droite."

Implicitement, on étudie une géométrie non-euclidienne. Ensuite

| | |
|---|---|
| CARL FRIEDRICH GAUSS | (vers 1817, sans oser publier), |
| JÁNOS BOLYAI | (en 1823, publié en 1825), |
| NIKOLAI LOBACHEVSKI | (en 1823, publié en 1829) |

développent une telle géométrie.

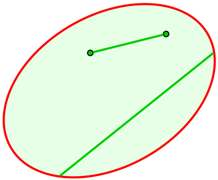
EUGENIO BELTRAMI (en 1868) et FELIX KLEIN (en 1871) :

l'existence du plan euclidien implique celle du plan non-euclidien, et réciproquement.

# Modèle de KLEIN

Définissons les

“points” comme étant les points à l’intérieur d’une ellipse fixée,



“segments” comme les segments usuels,

“droites” comme les restrictions non vides des droites usuelles.

La condition de PLAYFAIR n’est pas satisfaite.

Remarque. Il faut encore définir une distance, la mesure d’angles, etc.

# Une autre géométrie non-euclidienne

En 1854, BERNHARD RIEMANN conçoit une géométrie sans droites parallèles

(elle ne satisfait donc pas la condition de PLAYFAIR).

Sur la sphère, nous avons des segments et des grands cercles.

Deux points $p$ et $q$ déterminent un unique segment et un unique grand cercle…

… sauf si $p$ et $q$ sont diamétralement opposés.

Identifions donc les paires de points antipodaux :

il en résulte un plan projectif.

La distance sur la sphère induit une distance sur le plan projectif.

Il en résulte une autre géométrie non-euclidienne.

# Implications philosophiques et pédagogiques

Baser l'enseignement sur l'observation du monde physique est ...

... risqué.

POINCARÉ (1854–1912) : "Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre, elle peut simplement être plus commode."

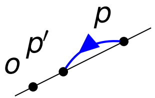
Des physiciens introduisent ensuite d'autres notions d'espace :

- relativité restreinte, avec 4 dimensions (ALBERT EINSTEIN, 1905);
- relativité générale, avec 4 dimensions(ALBERT EINSTEIN, 1915);
- espace des cordes vibrantes (10 ou 11 dimensions, YOICHIRO NAMBU, HOLGER NIELSEN et LEONARD SUSSKIND, 1970, puis MICHAEL B. GREEN, JOHN H. SCHWARZ, etc.);
- espace des membranes vibrantes (EDWARD WITTEN, 1995);
- etc.

L. MLODINOW,
*Euclid's Window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace.*
Free Press, 2001; Penguin, 2002.

# Les inversions et la géométrie conforme

Soit $o$ un point du plan euclidien et $k$ un réel strictement positif.




$$|op| \cdot |op'| = k$$

## Définition (inversion)

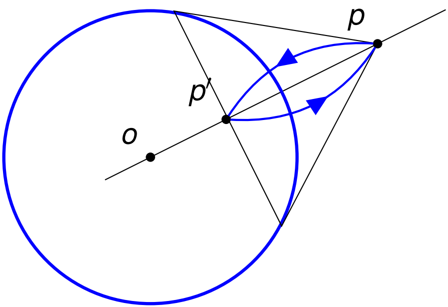
L'inversion de pôle $o$ et de puissance $k$ (avec $k > 0$) envoie tout point $p$ distinct de $o$ sur le point $p'$ tel que

- $o$, $p$ et $p'$ sont alignés,
- $|op| \cdot |op'| = k$,
- $p$ et $p'$ sont du même côté de $o$.

Cette inversion envoie donc $p'$ sur $p$ (elle est involutive), et fixe les points à distance $\sqrt{k}$ du point $o$.

Il est naturel d'ajouter un point au plan euclidien, $\infty$,
et de décider que l'inversion échange $o$ et ce point.

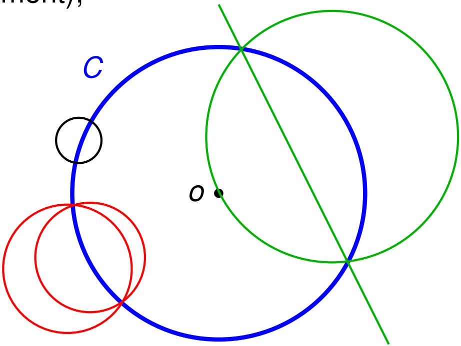
Toute inversion du plan euclidien complété (par le point $\infty$) est déterminée par son cercle de points fixes.




Le point $\infty$ appartient à chaque droite complétée, mais à aucun cercle.

L'inversion de cercle $C$ de points fixes et pôle $o$ envoie

- toute droite complétée contenant $o$ sur une droite complétée contenant $o$;
- toute droite complétée évitant $o$ sur un cercle par $o$ (et réciproquement);




- tout cercle évitant $o$ sur un cercle évitant $o$;
- renverse l'orientation du plan;
- respecte les $|$mesures$|$ d'angles entre droites/cercles.

Appelons cycle un cercle ou une droite complétée par $\infty$.

Par rapport aux inversions, les notions de géométrie planes sont

| non résistantes | résistantes |
|---|---|
| droite<br>cercle | 'cycle' |
| segment de droite | 'arc de cycle' |
| | $\lvert$mesures$\rvert$ d'angle |

Les notions résistantes sont dites conformes.

**Définition (plan conforme)**

Le plan conforme est le plan euclidien complété par le point $\infty$, structuré par l'ensemble des cycles.

On oublie la distinction entre les anciens points et le nouveau point.

On peut aussi ajouter la mesure d'angle.

# Conclusions

Nombreuses géométries :

- euclidienne;
- affine;
- projective;
- non-euclidiennes;
- conforme;
- relativité restreinte (4 dimensions);
- relativité générale (4 dimensions);
- espace des cordes, espace des membranes;
- etc.

L'élève ne doit pas nécessairement les rencontrer,
mais l'enseignant devrait connaître au moins leur existence.

Merci de votre intérêt !