MATH-JEUNES

N° 1 ? septembre/octobre 1979

Courrier : J. MIEWIS, rue de joie, 75, 4000 - LIEGE.

Voici la première livraison de MATH-JEUNES. Elle comprend:

- un peu d'histoire : PYTHAGORE ou le rêve insensé,
  les origines de la trigonométrie,
- quelques énoncés de problèmes,
- un point de départ pour l'utilisation des calculatrices: l'ORGANIGRAMME.

Résoudre un problème n'est pas chose facile : sinon il n'y a pas problème. Ce n'est en tout cas jamais un exercice d'application d'une notion que l'on vient d'étudier dans le cours théorique.

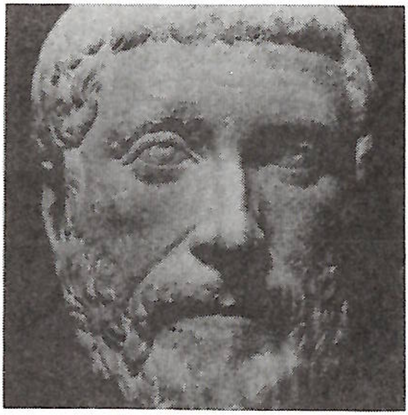
En cherchant on développe son imagination, on acquiert de la patience, de l'habitude aussi. Si les idées ne viennent pas vite, il faut savoir remettre à plus tard, et reprendre le travail ... autant de fois que nécessaire. Et si malgré cela on n'a pas trouvé, ne pas en tirer de conclusions sur ses aptitudes en mathématique et en particulier pour la résolution d'un autre problème.

Nous invitons les jeunes lecteurs qui se sont amusés à chercher et croient avoir trouvé une réponse à nous l'envoyer. (Voir l'adresse ci-dessus).

N'oubliez pas d'indiquer lisiblement

votre nom	votre classe	votre école

PYTHAGORE ou le rêve insensé



TOUT est NOMBRE !

Ainsi parle le prophète. Il est né à SAMOS en Grèce en 580 av.J.C.. La tyrannie de son pays le fera s'exiler en Italie du sud, près de CROTON où il va fonder une société secrète à la fois éthique, scientifique et politique. Il prêchera que toute la nature, que l'univers entier, que toute chose repose sur le nombre entier.

Sa vie est devenue une sorte de fable, riche de l'incroyable accumulation de ses prodiges ; mais sa personnalité n'a d'importance pour le progrès mathématique qu'autant qu'on la sépare du mysticisme bizarre du nombre où il se complaisait. Il a visité l'Egypte et Babylone où il a récolté de nombreuses règles empiriques et routinières appliquées sans aucune liaison et avec peu de contrôle au niveau de leur validité. Il est le premier Européen à soutenir que la plupart des résultats peuvent se déduire d'un nombre relativement faible de postulats par un raisonnement. Il a en quelque sorte inventé le développement déductif.

Suivant la légende, il est mort en 500 dans les flammes de sa propre école, incendiée par des fanatiques politiques et religieux qui avaient soulevé les masses pour protester contre les lumières qu'il avait cherché à leur apporter.

Aucun de ses écrits n'a survécu et il est aujourd'hui impossible de distinguer sa contribution personnelle de celle de ses disciples : ceux-çi citant toujours le maître. On doit à son école la relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. A la fin de sa vie, sa conception du monde devait recevoir un coup terrible lorsqu'il découvrit les quantités incommensurables : il est impossible de trouver deux nombres entiers dont le carré de l'un soit le double du carré de l'autre.

Ajoutons qu'il a développé une théorie mathématique des sons musicaux et que son harmonie numérique du monde l'a amené à postuler que la terre était une sphère.

Les origines de la trigonométrie

La trigonométrie est dans les premiers temps une science du calcul basée sur des théorèmes géométriques. Ces techniques sont étroitement liées à l'astronomie ; c'est ainsi qu'au départ, la trigonométrie est essentiellement sphérique. La trigonométrie plane ne verra le jour que vers le treizième siècle.

Le premier problème historiquement rencontré est celui du calcul de la longueur de la corde sous-tendant un angle, moitié d'un angle donné, en fonction de la corde de cet angle. C'est un grec du 2nd s.av.J.C., HIPPARQUE qui aurait calculé la première table des cordes. Un autre grec de la fin du premier siècle, MENELAUS formula quelques théorèmes sur la géométrie sphérique. Le plus ancien écrit conservé est l'un des 13 livres de l'ALMAGESTE de PTOLEMEE d'Alexandrie où une table des cordes est calculée de 30 en 30 minutes. Il date du second siècle. A cette époque, le système numérique en vigueur est le sexagésimal babylonien. La tradition se gardera, et malgré l'introduction au 16eme s. du système décimal, l'unité d'angle restera de nos jours partagée en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Un autre livre de l'ALMAGESTE traite de la résolution de triangles par des considérations angulaires. La loi des sinus y apparaît. C'est au 9eme s. que l'arabe āL-BATTāNī ajoutera la loi des cosinus et introduira le mot de sinus dans l'oeuvre de PTOLEMEE. Il découvrira la tangente et la cotangente qu'il calculera par intervalles de un degré.

La séparation entre la trigonométrie plane et sphérique sera réalisée en Europe par le prussien JOHANN MüLLER (1436-1476) connu sous le nom de REGIOMONTANUS. Il simplifiera les formules valables pour les triangles plans. La première table décimale calculée de minute en minute pour le sinus et la tangente est due au mathématicien français FRANCOIS VIETE (1540-1603). Il prônera une division décimale du degré.

La trigonométrie avait permis aux astronomes de cette époque de ramener des calculs avec de grands nombres à de simples lectures dans des tables trigonométriques. Cette méthode, connue sous le nom barbare de PROSTAPHERESE, consistait en un emploi judicieux des formules dites de transformation de produits en sommes. Cette méthode originale devait tomber en désuétude à la suite de l'invention des logarithmes par l'anglais JOHN NAPIER (1550-1617). L'anglais BROOK TAYLOR (1685-1731) nous a donné une méthode simple, mais longue, du calcul des tables trigonométriques. L'apparition des calculatrices, pour qui le temps ne compte plus, a rendu caducs à leur tour l'emploi de tables et l'utilité des logarithmes.

Signalons que le suisse LEONHARD EULER (1707-1783) s'est plus particulièrement intéressé à l'étude des fonctions trigonométriques.

Le coin des problèmes

Vous êtes invités à nous faire parvenir des réponses aux problèmes que nous posons. Vos envois, que nous souhaitons proprement présentés, peuvent nous parvenir soit par l'intermédiaire de votre professeur de mathématique, soit directement par la poste (voir l'adresse en première page). Bon amusement, même si les questions vous semblent difficiles.

1 Une addition bien cachée.

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

Ce jeu est bien connu : il s'agit ci-contre d'une addition ; chaque lettre est mise pour un chiffre ; deux lettres différentes pour des chiffres différents ; deux mêmes lettres pour les mêmes chiffres.

Nous affirmons : 1° $M = 1$; pourquoi ?
2° $S = 9$; pourquoi ?
3° $O = 0$; pourquoi ?

Ainsi on aurait alors :

$$\begin{array}{r} 9\ E\ N\ D \\ +\ 1\ 0\ R\ E \\ \hline 1\ 0\ N\ E\ Y \end{array}$$

Nous affirmons ensuite : 4° $N = E + 1$; pourquoi ?

5° $\begin{cases} N + R + 1 = 10 + E \\ D + E = 10 + Y \end{cases}$

Pourquoi n'avons nous pas considéré $N + R = 10 + E$?
De 4° et 5°, on tire : $R = 8$ et il vient :

$$\begin{array}{r} 9\ E\ N\ D \\ +\ 1\ 0\ 8\ E \\ \hline 1\ 0\ N\ E\ Y \end{array}$$

Cherchons N . Nous savons déjà que les valeurs 0,1,8 et 9 sont exclues. Mais aussi 2 ; pourquoi ? On élimine ensuite pour (N,E) les couples (3,4),(4,5) et (6,7). C'est un peu plus long à montrer. Il reste alors $N = 5$ et $E = 6$, qui conduit univoquement à la seule et unique solution

$$\begin{array}{r} 9\ 5\ 6\ 7 \\ +\ 1\ 0\ 8\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 6\ 5\ 2 \end{array}$$

Voici avec les mêmes conditions deux autres problèmes plus difficiles et qui n'admettent pas nécessairement une solution unique :

```
  SEND            SEND
  MORE              ME
+ GOLD          + MORE
 MONEY           MONEY
```

Dans le premier message, le correspondant anglais demandait qu'on expédie plus d'argent. Dans le second il précise qu'il faut de l'or ; dans le troisième, il indique que c'est à lui qu'il faut l'envoyer.

Nous vous demandons de restituer l'opération et s'il existe plusieurs solutions de trouver celle qui donne le plus petit résultat. Vous pouvez aussi inventer des problèmes du même type et nous les envoyer ... avec votre solution.

2 Un triangle perdu.

Le triangle a'b'c' est connu. Il a été construit à partir d'un triangle abc qui, lui, est perdu. Mais on sait comment s'était faite cette construction :

a' était le symétrique de a par rapport à b ,
b' était le symétrique de b par rapport à c ,
c' était le symétrique de c par rapport à a .

Comment retrouver le triangle abc ?

3 A propos du jeu " des chiffres et des lettres " .

Vous connaissez sans doute le jeu "des chiffres et des lettres" qui passe tous les jours de la semaine sur ANTENNE 2 à 18 h 55. Nous nous intéressons ici aux chiffres en donnant quelques précisions. Six plaquettes, portant chacune un nombre, sont tirées au hasard d'un ensemble de 24 plaquettes :

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
$\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{25}$ $\boxed{50}$ $\boxed{75}$ $\boxed{100}$

Ensuite, en tournant les roues de trois tambours, on détermine un nombre de 3 chiffres (de 100 à 999), le zéro n'étant pas admis en première position. Ce nombre, il faut l'obtenir en opérant par additions, soustractions, multiplications et divisions (quotients exacts) sur les 6 nombres choisis au début. On ne peut utiliser chaque plaquette qu'une seule fois, mais on ne doit pas nécessairement les faire intervenir toutes les six simultanément. Voici un exemple : avec 8,10,2,75, 8 et 7, formez le nombre 764.

Il existe plusieurs solutions avec ce tirage :

$$[(75 + 10) \times (7 + 2)] - (8 : 8)$$
$$(75 \times 10) + 8 + 8 - 2$$
$$(75 \times 10) + (2 \times 7)$$
$$[(75 + 2) \times 10] - 7 + (8 : 8)$$

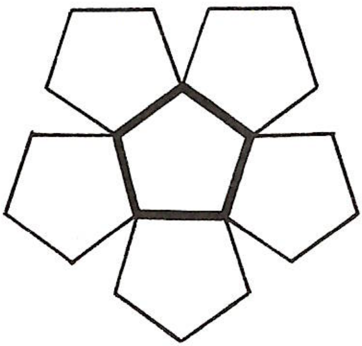
Il est certain qu'avec un choix donné de 6 nombres on ne peut pas toujours construire le nombre proposé. Par contre certains tirages permettent de construire de nombreux nombres. *La question que nous posons est la suivante :* choisir 6 plaques, non plus au hasard, mais de manière à pouvoir obtenir le plus de nombres différents compris entre 100 et 999. Construire chacun de ces nombres d'une manière au moins.

Aura gagné celui qui construira, avec 6 plaques, la plus longue suite d'entiers consécutifs.

4 Un bricolage qui conduit à un problème : A propos d'un polyèdre.

Matériel : Du carton mince mais rigide ; du papier collant; du matériel de dessin (crayon, compas,...) ; une paire de ciseaux (ou un couteau très tranchant).

Construction: Dessiner six pentagones réguliers, inscrits dans un cercle de 5 cm de rayon. Cette construction demandera probablement le recours à un livre de géométrie expliquant la construction du côté d'un pentagone, mais à défaut on peut procéder par tâtonnement. Dessiner dix triangles équilatéraux dont les côtés ont même longueur que le côté du pentagone. Découper ces seize polygones dans du carton.

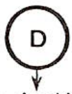


Poser ensuite les pentagones comme ci-contre et les coller avec le papier collant le long du trait épais. Relever ensuite les cinq pentagones extérieurs et poser des bandelettes collantes pour les fixer l'un à l'autre de manière à obtenir une sorte de coupe dont le bord supérieur est un polygone non plan de dix côtés.
Fixer sur chacun de ces dix côtés les dix triangles équilatéraux : chaque triangle à ainsi un côté commun avec un côté des pentagones. Les triangles peuvent pivoter autour du côté ainsi fixé. En les faisant pivoter on peut les placer de deux manières différentes pour qu'ils se raccordent deux à deux. Choisir la manière telle que les dix côtés restant libres de ces triangles forment un polygone étoilé.

Question : Ce polygone est-il plan ?

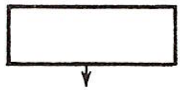
Organigramme

Qu'est-ce qu'un organigramme ? C'est un dessin permettant de visualiser commodément l'enchaînement des opérations élémentaires qui composent le traitement machine d'un problème donné. A cet effet, l'organigramme est formé de blocs reliés par des flèches. La forme et le contenu des blocs indiquent la nature des opérations à effectuer, tandis que les flèches indiquent leur ordre de succession. Nous retenons six types de blocs :

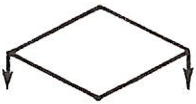


Bloc indiquant le début d'un traitement.

Bloc représentant la prise de donnée.

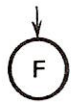


Bloc de traitement (à effectuer inconditionnellement).



Bloc de décision (plusieurs sorties).

Bloc représentant les solutions.



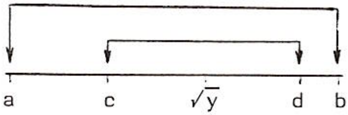
Bloc indiquant la fin du traitement.

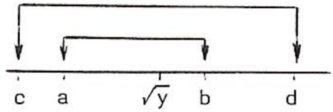
Ces " conditions de travail " étant posées, nous allons comme premier exemple exposer une méthode de calcul de racine carrée sans l'emploi d'une touche $\sqrt{x}$.

Nous choisissons une méthode attribuée à ISAAC NEWTON (1642-1727) : soit y le produit de a et b ; y est aussi le produit de $\sqrt{y}$ et $\sqrt{y}$, d'où

$$a \times b = \sqrt{y} \times \sqrt{y}$$

Si a est inférieur à $\sqrt{y}$, alors b doit être supérieur à $\sqrt{y}$, ou vice-versa. Dans chaque cas, a et b définissent un intervalle qui doit contenir $\sqrt{y}$. Gardons alors y fixé et faisons varier a et b. Si la valeur de a croît (ou décroît), la valeur de b doit décroître (ou croître) pour garder un produit constant. Sur la figure a est changé en c et b en d :



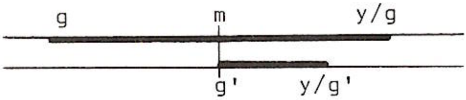


Nous pouvons affirmer que :

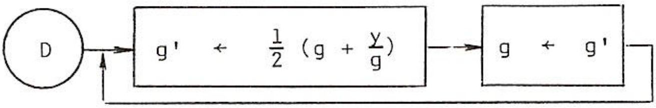
- *Chacun de ces intervalles contient la racine carrée de y*
- *chaque intervalle qui contient une des bornes d'un autre*

intervalle contient complètement ce dernier.

La méthode de Newton consiste à rechercher une succession d'intervalles de plus en plus petits qui contiennent $\sqrt{y}$, et tels que leur largeur se rapproche de zéro. En commençant par un nombre réel positif g, nous pouvons lui associer l'intervalle de bornes g et y/g : cet intervalle contient $\sqrt{y}$ puisque le produit de ces bornes est y. Le point milieu de cet intervalle est un choix excellent d'une seconde approximation g'. Le second intervalle, de bornes g' et y/g' est contenu dans le premier, contient $\sqrt{y}$, et sa largeur est inférieure à la moitié du premier. Il suffit à présent d'itérer le processus.

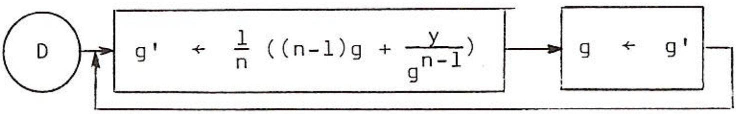


Voici une idée de la marche à suivre pratique :



Il reste à initialiser le traitement, puis à le terminer avec visualisation de la racine carrée cherchée. Nous attendons vos organigrammes et vos programmes. N'oubliez pas de nous préciser la marque et le type de calculatrices employées.

Signalons pour terminer la généralisation de cette méthode; l'extraction d'une racine n-ième se fait par le traitement :



<u>Valeur numérique d'un polynôme</u> : une astuce.

S'il vous arrive de devoir calculer la valeur d'un polynôme de degré n, il est intéressant de remarquer que

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ peut s'écrire

$P_n(x) = (((\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots + a_{n-1})x + a_n$

Le nombre d'opérations à effectuer pour obtenir la valeur du polynôme est sensiblement réduit par l'emploi de cette seconde écriture, même lorsque n est petit.