MATH JEUNES

3e Année - N° 10 Mai-Juin 1981

En-tête de Thomas COOMANS
Collège St Michel, Bruxelles

Chers amis,

Nous voici au terme de la deuxième année d'existence de MATH-JEUNES. Nous espérons que vous avez eu plaisir à le lire.

Vous avez répondu nombreux à notre appel et participé activement à notre concours-rallye de problèmes. Certains d'entre vous, abonnés trop tardivement, n'ont pas atteint le total des points qu'ils auraient pu espérer, nous les remercions d'avoir quand même pris part à notre compétition.

Au cycle inférieur, les résultats ne sont pas très brillants : (maximum possible 116, meilleur résultat 36) mais ceci nous semble normal; certains problèmes étaient difficiles bien que,comme vous le verrez en parcourant les solutions, peu d'entre eux faisaient appel à des connaissances que vous ne possédiez pas.

Au cycle supérieur, les résultats sont nettement meilleurs : (maximum possible 94, meilleur résultat 64) et nous sommes heureux de voir plusieurs élèves de 4ème se classer parmi les premiers.

Un prix sera envoyé prochainement à ceux qui, dans chacune des séries ont obtenu les meilleurs résultats (plus de 25 au cycle inférieur, plus de 47 au cycle supérieur); nous aimerions connaître leurs adresses personnelles pour faire ces envois qui ne pourront probablement pas leur parvenir avant le début des vacances.

Nous espérons que tous vous nous resterez fidèles l'année prochaine. Si vous avez un nouveau professeur qui n'abonne pas encore les élèves qui le désirent à notre journal, insistez pour qu'il le fasse. S'il ne le souhaite vraiment pas, vous pouvez également vous grouper et désigner un délégué qui sera votre intermédiaire.

Nous envisageons de reprendre l'an prochain notre concours-rallye, abonnez-vous donc rapidement. Nous pensons aussi à vous proposer un autre concours : désignation d'un meilleur article envoyé par l'un d'entre-vous.

Envoyez nous vos suggestions pour que MATH-JEUNES réponde mieux à vos désirs. A tous, nous souhaitons d'excellentes vacances.

LA REDACTION

Concours - Rallye 1980-81

CYCLE INFERIEUR :

36 Françoise GUILLAUME, 2ème Gén., Collège Saint-André, Auvelais.
34 Marc HAESEVOETS, 2ème Lat, Athénée Robert Catteau, Bruxelles.
28 Pierre WAGENAAR, 2ème Rén., Petit Séminaire de Floreffe.
26 Stéphane HORMAN, 3A2, Sacré Coeur de Burnot.
15 Carine FONTAINE, 2 Gén.,Ecole Moyenne de l'Etat, Jurbise.
15 Christian LAMBILLOTTE, 3ème Math-Lang.Mod, Collège Saint-Michel, Gosselies.
10 Anna CASTI, 3 mod, Lycée Marguerite Bervoets, Mons.
8 Joëlle ATIAS, 2ème Lat., Athénée Robert Catteau, Bruxelles.
8 Martine GASPAR, 2ème Lat., Athénée Robert Catteau, Bruxelles.

CYCLE SUPERIEUR :

64 Patrick KAISIN, 4lat Math, Collège Saint-Louis, Liège.
64 Filip VANDENBROECKE, 5 lat Math, Collège Cardinal Mercier, Braine l'Alleud.
62 Jean-Pierre BIANCHI, 4lat Math, Collège Saint-Louis, Liège.
57 Michel VAN LOO, 4 lat Math, Collège Jean XXIII, Bruxelles.
56 Jean-Luc MAQUESTIAU, 6ème, Athénée Royal de Ath.
55 Eric DESCHUYTENEER, 6ème, Athénée Royal de Ath.
53 Laurent DECRUCQ, 5 Sc A, Lycée Marguerite Bervoets, Mons.
50 Johanna CLABOTS, 4ème Gén., Lycée Royal de Wavre.
50 Denis BALLANT, 6 Sc B, Communauté Educative Jean XXIII Pesche .
49 Yves KONEN, 4 Sc A, Athénée Robert Catteau, Bruxelles.
46 classe de 4ème rénové de l'Institut Saint-Joseph d'Eghezée.
45 Philippe LEDENT, 4ème Sc A, Collège Jean XXIII, Bruxelles.
40 classes de 6ème Lat-Math-Sc A, Communauté Educative Jean XXIII à Pesche .
39 Michel VERGUYSE, 5lat Math, Athénée Léon Lepage, Bruxelles.
38 Philippe THIRION, 5ème Sc A, Séminaire de Floreffe.
35 Marie-Christine BERTIAU, 4 Sc A, Athénée Royal, Dour.
34 Luc BERCHEM, 6 lat Math, Athénée Royal, Hannut.
31 Laurent BIERNAUX, 4 lat Math, Athénée Royal Mixte, Woluwé-Saint-Pierre.
29 Didier DEPIREUX, 5 lat Math, Collège Saint-Louis, Liège.
28 Vincent REYNAERTS, 4 Sc A, Athénée Royal Mixte, Woluwé-Saint-Pierre.
27 Thierry HYPERSIEL, 4 Sc, Athénée Royal de Thuin.
27 François-Gabriel KNUTS, 4 ScB, Séminaire de Floreffe.
26 Christophe DELANGUE, Collège Saint-Michel du Chapois, Gosselies.
25 Pierre DE SIMPEL, 5 lat Math, Collège Notre-Dame, Tournai.
21 Thierry BRASSEUR, 5 lat Math, Athénée Royal de Hannut.

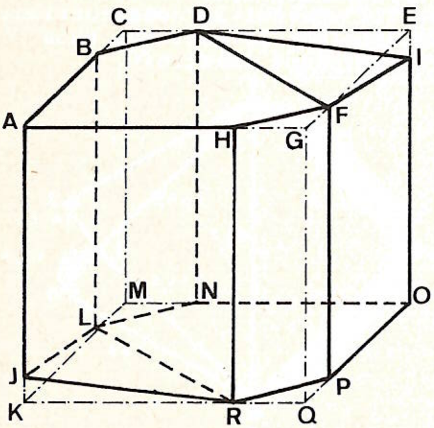
Le problème du Prince Rupert

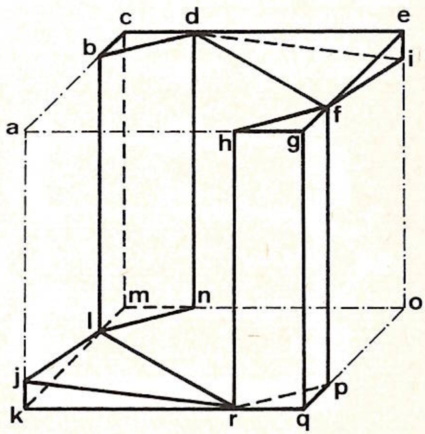
Dans son *HISTOIRE des MATHEMATIQUES* publiée à Paris en 1758, MONTUCLA affirme : " *La théorie des corps réguliers pourrait être aujourd'hui comparée à ces anciennes mines, où non seulement on ne fouille plus, mais dont le produit a presque entièrement perdu sa valeur. Les géométres la regardent tout au plus comme un objet d'amusement ou capable de fournir quelque problème singulier : un problème de ce genre est celui de percer un cube, de manière qu'un autre cube égal puisse passer au travers ...* ".

Ce problème avait été proposé par le Prince RUPERT (1619-1682), frère du roi d'Angleterre Charles II. Le prince en donna lui-même une solution. Mais l'amstellodamois Pieter NIEUWLAND (1764 - 1794) publia une solution plus inattendue de ce problème : soit un cube de côté a perçé judicieusement, alors un cube de côté 1,060660 x a peut le traverser !

Sans entrer dans les considérations théoriques qui ont mené à ce résultat, Math-Jeunes se propose de vous aider à construire un cube troué de 20 cm de côté ; nous rangerons ce cube dans une boîte cubique de 21 cm de côté et pourtant cette boîte pourra traverser le cube.

Voici à gauche la partie manquante du cube (le trou !) et à droite la partie restante :





Cette représentation est celle du cas limite ; dans notre construction, les points d,f,l,r auront une certaine épaisseur !

Arête limitée par :	Longueur théorique de l'arête :	Notre valeur en mm :
a,g	a	200
e,i	$\frac{3a}{16}$	37,5
i,o	$\frac{13a}{16}$	162,5
e,f	$\frac{3a}{4}$	150
f,g } a,h	$\frac{a}{4}$	50
i,f	$\frac{3\sqrt{17}a}{16}$	154,5
d,f	$\frac{3\sqrt{2}a}{4}$	212
f,h	$\frac{\sqrt{2}a}{4}$	70,5

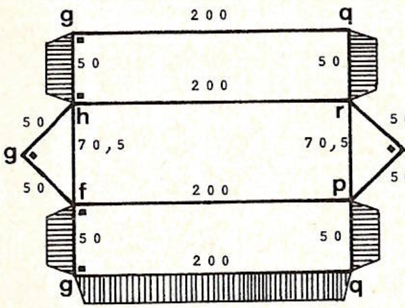
Le tableau ci-contre vous donne les principales mesures des arêtes ; les deux solides admettent le centre du cube comme centre de symétrie.

Pour des raisons de solidité, nous allons d'abord construire le "trou", pour être précis, le décaèdre de la figure de gauche. Le développement de ce solide est représenté sur la page suivante. La construction de celui-ci ne devrait pas poser de gros problèmes ! Toutefois, soyez très précis !

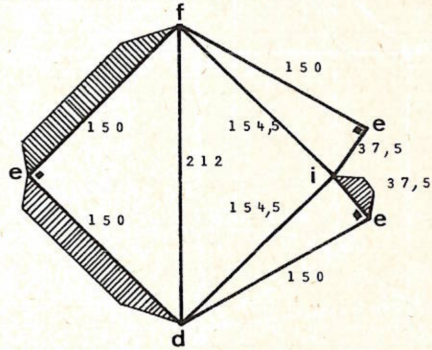
Nous allons maintenant construire les quatre onglets : deux prismes droits à base triangulaire et deux pyramides à base triangulaire.

Comment les attacher ensemble ? Notre proposition est que vous vous procuriez un fin fil métalique rigide. (1m20 suffit ; on trouve ce genre de fil dans le commerce comme accessoire de fabrication de cage d'oiseaux !).

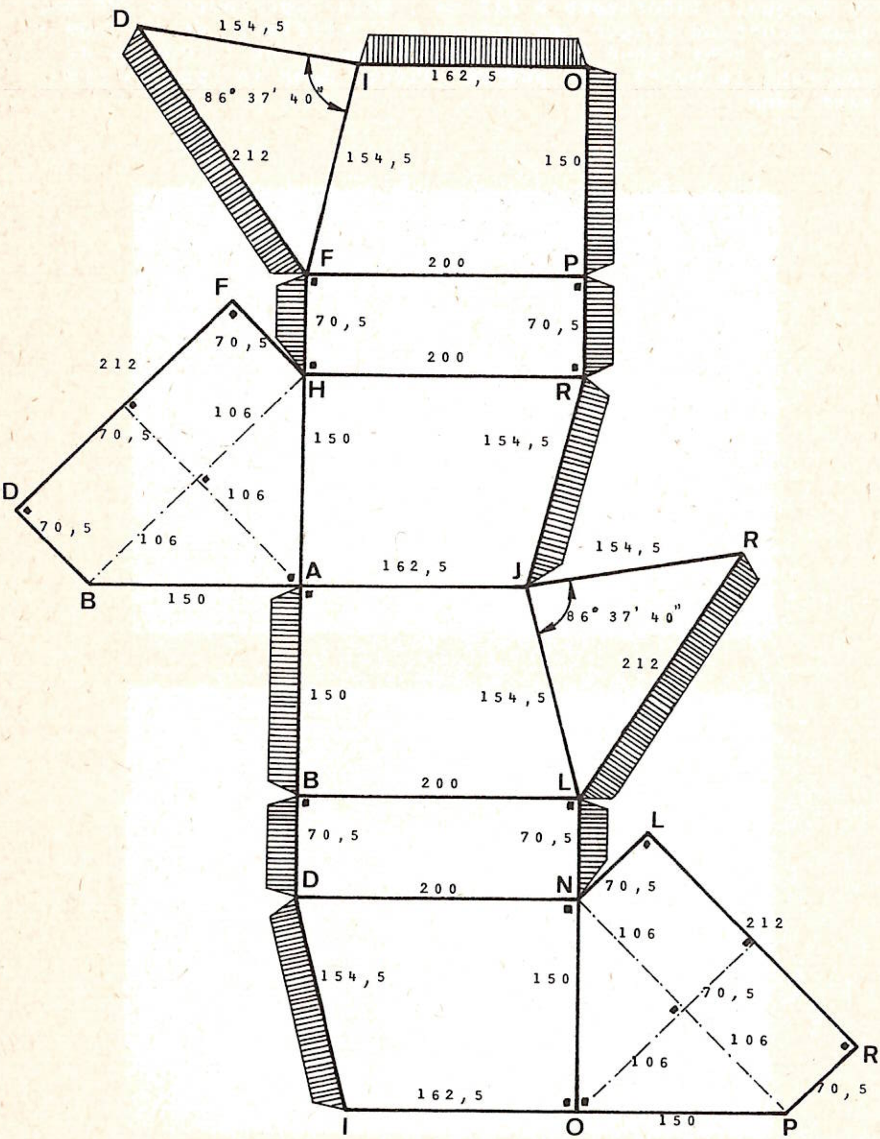
Avec une pince, vous faites décrire à votre fil le trajet milieu de [d,e] - e - g - q - k - m - c - milieu de [d,e]. Vous attachez les deux bouts du fil avec un simple papier collant. Avec de l'habileté, nous sommes certains que vous arriverez à coller les onglets autour de ce fil. Durant la construction, la rigidité de l'ensemble sera assurée par le fait que vous travaillerez "autour" du trou préalablement construit.



Développement du prisme

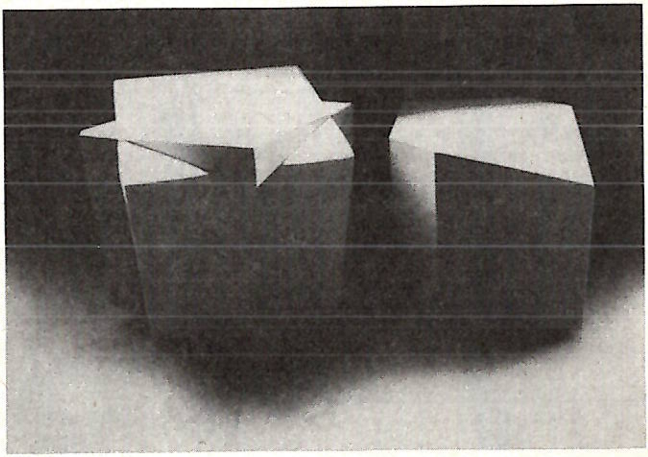


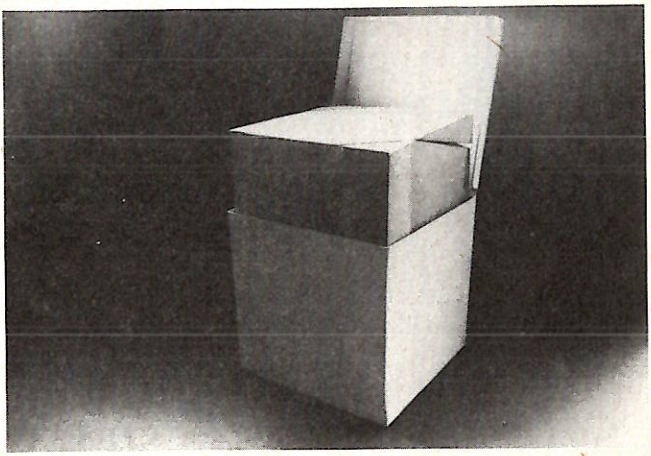
Développement de la pyramide

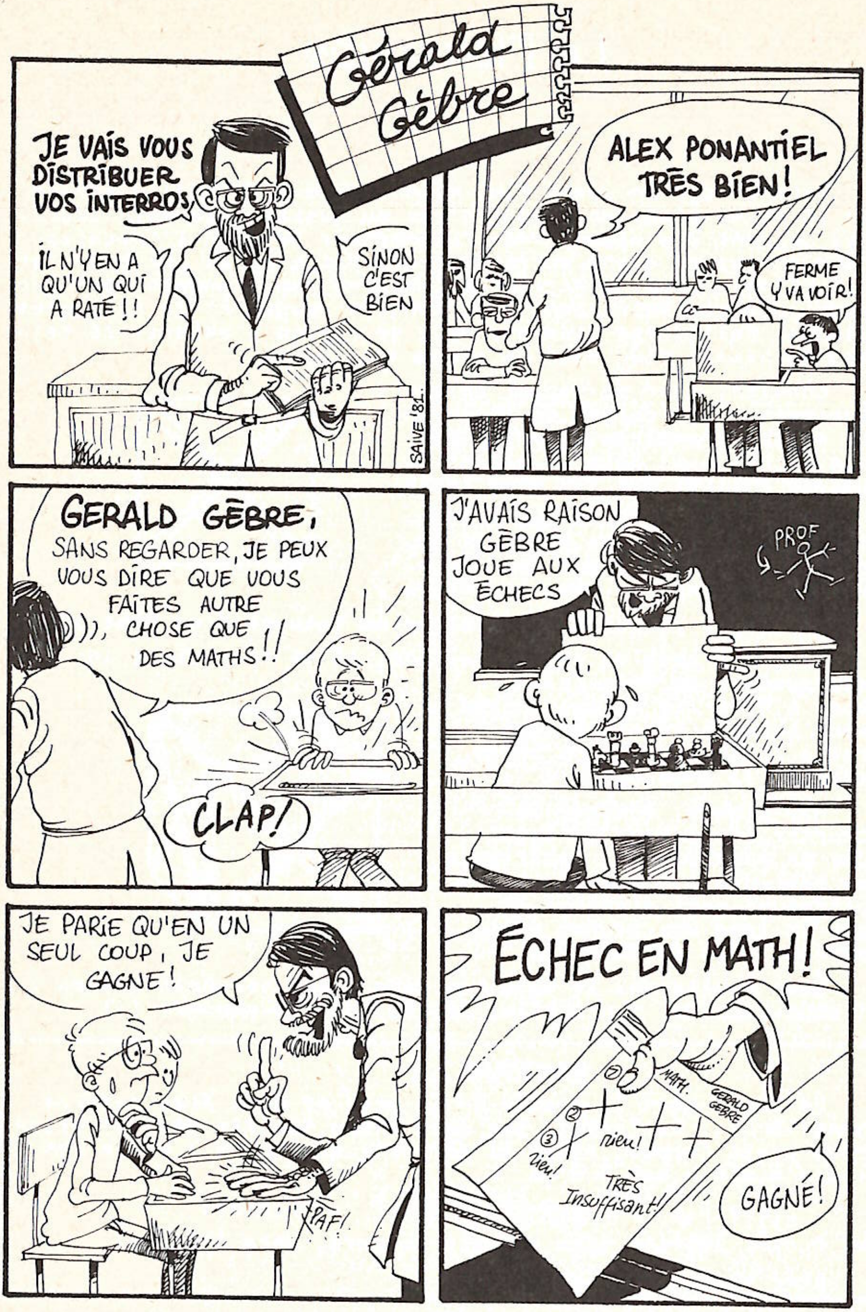


Développement du décaèdre

Il nous reste à présent à construire un cube. Si nous le construisons sous forme de boîte avec couvercle d'une arête de longueur inférieure à 212 mm , mais supérieure à 200 mm, nous pourrons ranger nos formes à l'intérieur de ce cube : ainsi le cube troué est plus petit que la boite cube , et pourtant la boite cube pourra glisser dans le trou du premier cube.



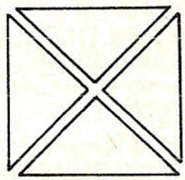



Gérald Gèbre
JE VAIS VOUS DISTRIBUER VOS INTERROS
IL N'Y EN A QU'UN QUI A RATÉ !!
SINON C'EST BIEN
SAIVE '81.
ALEX PONANTIEL TRÈS BIEN !
FERME Y VA VOIR !
GERALD GÈBRE, SANS REGARDER, JE PEUX VOUS DIRE QUE VOUS FAITES AUTRE CHOSE QUE DES MATHS !!
CLAP !
J'AVAIS RAISON GÈBRE JOUE AUX ÉCHECS
PROF
JE PARIE QU'EN UN SEUL COUP, JE GAGNE !
PAF !
ÉCHEC EN MATH !
MATH.
GÉRALD GÈBRE
rien !
rien !
TRÈS Insuffisant !
GAGNÉ !

Le Flexacube

Dans un carton assez fin, mais rigide, découpez 4 carrés de 10 cm de côté et chacun d'eux en quatre triangles isocèles suivant les diagonales. Recommencez ensuite l'opération dans un carton d'une autre couleur. Votre choix est bien sur libre, mais pour la clarté de l'exposé, nous supposerons que vous possédez maintenant 16 triangles rouges et 16 triangles blancs. Collez-les deux par deux de façons à obtenir 16 triangles blancs d'un côté et rouges de l'autre.

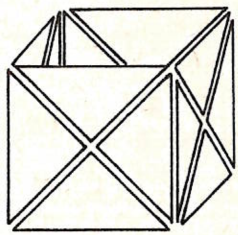
Ensuite, avec du papier collant, recomposez les carrés en prévoyant un espace d'environ 2 mm le long des bords. Ayez soin de placer du papier collant sur les deux faces.



Vous obtenez ainsi une articulation qui permet de plier et déplier le carré suivant les diagonales (en deux ou même en quatre).

Les faces rouges devant toutes se trouver d'un même côté.

Toujours avec du papier collant, et en respectant les espacements de 2mm, reliez bord à bord les quatre carrés pour obtenir les faces latérales (toutes rouges à l'extérieur !) d'un cube.



Par pliage, on peut retourner le montage de façon que la face blanche intérieure se retrouve à l'extérieur. Le pliage ne peut s'effectuer que le long des lignes articulées, sans déformation.

Nous publierons la solution dans notre prochain numéro ! (sous-entendu : n'oubliez pas de vous ré-abonner !!!)

ERRATUM ...

Le texte sous le dessin de la page 63 doit être modifié comme suit : La formule que nous avons établie peut s'écrire sous trois formes; ainsi il est vrai que cos c = cos a cos b + sin a sin b cos C d'où

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = -0{,}62577$$

et C vaut 128°44' (par rapport au nord, vers l'ouest)

Avec toutes nos excuses ...

Le nombre d'Or résultats algébriques (2e partie)

Nous allons poursuivre notre étude du nombre d'or en indiquant une caractéristique de la distribution des nombres rationnels au voisinage des nombres irrationnels dans laquelle le nombre d'or joue un rôle très particulier.

Tout d'abord, il est bien connu que les nombres rationnels (ceux de la forme $\frac{a}{b}$ pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_0$) sont, comme on le dit, *denses* dans l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire que tout nombre réel admet toujours un voisin rationnel, quelque petite que soit la distance (non nulle évidemment) à laquelle on exige que soit ce voisin.

Ceci peut se comprendre très aisément si l'on admet que les réels sont entièrement décrits par leur développement décimal : soit par exemple α le réel 78,481792270647297... ; on obtient alors des " voisins " rationnels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ... à volonté, qui sont à une distance de α inférieure à $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ... à volonté, en prenant, par exemple :

$$\alpha_1 = 78 \quad ; \quad \delta_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 78,4 = \frac{784}{10} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{1}{10}$$

$$\alpha_3 = 78,48 = \frac{7848}{100} \quad ; \quad \delta_3 = \frac{1}{100}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_6 = 78,48179 = \frac{7848179}{100000} \quad ; \quad \delta_6 = \frac{1}{10000} \quad , \text{ etc...}$$

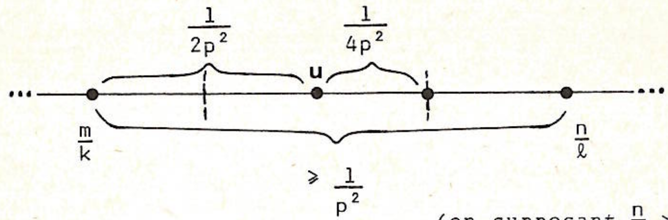
On <u>constate</u> dans cet exemple que, en gros, quand la distance maxima requise δ diminue, les approximants α_i ont des dénominateurs de plus en plus grands. Ceci est absolument nécessaire.

<u>Montrons</u>, plus précisément, que si le dénominateur se voit imposer une borne supérieure - p par exemple -, alors pour une distance maxima δ trop petite, il existe des réels qui n'ont pas de voisins parmi les rationnels de la forme $\frac{m}{k}$ avec $0 < k \leqslant p$. En effet, la distance minimale entre deux approximants $\frac{m}{k}$ et $\frac{n}{\ell}$, différents et satisfaisant $0 < k \leqslant p$, $0 < \ell \leqslant p$ est donnée par :

$$\left| \frac{m}{k} - \frac{n}{\ell} \right| = \left| \frac{m\ell - nk}{k\ell} \right| \geqslant \frac{1}{k\ell} \geqslant \frac{1}{p^2}$$

($m\ell - nk$ ne peut être nul, puisque les deux approximants sont différents, et c'est un nombre entier ; il est donc, en valeur absolue $\geqslant 1$!)

La distance entre deux approximants à dénominateurs inférieurs à p est donc toujours supérieure à $1/p^2$



(*en supposant* $\frac{n}{\ell} > \frac{m}{k}$)

Montrons qu'il existe un nombre u dont la distance à n'importe quel voisin à déniminateur plus petit que p est, par exemple, plus grande que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2p^2}$.

Il suffit de prendre, par exemple, $u = \frac{m}{k} + \frac{1}{2p^2} = \frac{2p^2m + k}{2kp^2}$

<u>Résumons-nous</u> : si on admet des dénominateurs aussi grands que l'on veut, on peut approcher tout réel par des rationnels d'aussi près que l'on veut ; mais par contre, si l'on impose aux approximants rationnels d'avoir un dénominateur inférieur à une valeur fixée, alors il n'est plus possible d'approximer n'importe quel réel d'aussi près que l'on veut.

Voici un résultat intermédiaire :

> THEOREME :
>
> *Pour tout irrationnel* ξ , *il existe une infinité de nombres rationnels* $\frac{b}{k}$ *tels que* $\left| \xi - \frac{b}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$

Vous remarquerez que, dans ce théorème, le dénominateur k de l'approximant b/k apparaît également dans l'appréciation de la finesse de l'approximation. Nous ne démontrerons pas ici ce théorème, mais nous allons indiquer en quoi le nombre d'or y intervient sans trop se montrer.

On peut se demander en effet s'il ne serait pas possible de raffiner l'approximation ; plus précisément : le théorème ci-dessus reste-t-il vrai si l'on impose que

$\left| \xi - \frac{b}{k} \right|$ soit inférieur à $\frac{1}{ak^2}$, avec a plus grand que $\sqrt{5}$

(et donc $\frac{1}{ak^2}$ plus petit que $\frac{1}{\sqrt{5}k^2}$) ?

La réponse est négative, mais, en un certain sens, "seulement" à cause du nombre d'or !

C'est le " seul " irrationnel pour lequel le théorème cesse d'être vrai dès que $a > \sqrt{5}$, ou encore,

C'EST L'IRRATIONNEL LE PLUS MAL APPROXIMABLE PAR DES RATIONNELS AU SENS DE CE THEOREME.

(Il convient d'être un peu prudent : il n'est pas vraiment le seul, mais tous ceux qui partagent ce " défaut " lui sont, comme on dit, " équivalents " :

deux nombres α et β sont dits équivalents ssi il existe des entiers i,j,k,ℓ tels que $\alpha = \dfrac{i\beta + k}{j\beta + \ell}$ et $i\ell - jk = \pm 1$.

Si l'on excepte le nombre d'or et ses équivalents, le théorème ci-dessus reste vrai en remplaçant $\sqrt{5}$ par $2\sqrt{2}$!)

Démontrons la proposition ci-dessus, en supposant qu'il existe $a > \sqrt{5}$ pour lequel on dispose néanmoins d'une infinité d'approximants b/k satisfaisant (1)

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{k} \right| < \frac{1}{ak^2} \qquad (k,b \in \mathbb{N}_0)$$

Posons x de telle sorte que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{k} = \frac{1}{xk^2} \qquad (*)$$

On a alors

$$\left| \frac{1}{xk^2} \right| < \frac{1}{ak^2}$$

c'est-à-dire $|x| > a > \sqrt{5}$. D'autre part on a, en regroupant autrement *(*)* :

$$\frac{1}{xk^2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{k}$$

en multipliant par k :

$$\frac{1}{xk} - \frac{\sqrt{5}k}{2} = \frac{k}{2} - b$$

en élevant au carré :

$$\frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x} + \frac{5}{4}k^2 = \frac{k^2}{4} - bk + b^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x} = b^2 - bk - k^2$$

dont le membre de droite est un entier. Montrons que cet entier est nul. On a :

$$0 \leqslant \left| b^2 - bk - k^2 \right| = \left| \frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x} \right| \leqslant \left| \frac{1}{x^2k^2} \right| + \left| \frac{\sqrt{5}}{x} \right|$$

$$= \frac{1}{x^2k^2} + \frac{\sqrt{5}}{|x|}$$

Mais $|x| > \sqrt{5} > 1$; donc $\dfrac{1}{|x|} < 1$, à fortiori : $\dfrac{1}{x^2} < 1$:

d'où $\dfrac{1}{x^2k^2} < \dfrac{1}{k^2}$, et donc $\dfrac{1}{x^2k^2} + \dfrac{\sqrt{5}}{x} < \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{\sqrt{5}}{|x|}$. On a donc :

$$0 \leqslant |b^2 - bk - k^2| < \frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{5}}{|x|}$$

De plus, $|x| > \sqrt{5}$ implique $1 - \dfrac{\sqrt{5}}{|x|} > 0$, et il existe donc k suffisamment grand pour que

$$\frac{1}{k^2} < 1 - \frac{\sqrt{5}}{|x|}$$, autrement dit, pour que

$$0 \leqslant |b^2 - bk - k^2| < \frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{5}}{|x|} < 1$$

Mais alors, pour cette valeur de k, $|b^2 - bk - k^2|$ étant un entier ne peut être que nul, autrement dit, on a nécessairement $b^2 - bk - k^2 = 0$ avec $b, k \in \mathbb{N}_0$; or nous avons démontré dans la première partie (M.J.n°9 p 53) que $b^2 - bk - k^2 = 0$ n'a pas de solution entière non triviale !!!

Notre hypothèse nous a donc conduit à une contradiction ; en bons mathématiciens classiques, nous la rejetterons, et considérerons comme démontré que pour avoir

$$\left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{b}{k} \right| < \frac{1}{ak^2}$$

pour une infinité d'approximants $\dfrac{b}{k}$ ($b, k \in \mathbb{N}_0$), il faut que a soit au plus égal à $\sqrt{5}$.

Le nombre d'or, quel trouble fête !

Ceci dit, avez-vous vu à quel moment dans la démonstration nous avons utilisé l'hypothèse qu'il existe <u>une infinité</u> d'approximants satisfaisant la condition ad hoc ?

Si vous ne l'avez pas vu, quelle idée vous faites-vous d'une <u>démonstration</u> ?

Réponses dans un prochain numéro.

Texte de Michel MOREAU.

(1) : En fait on démontrera seulement que le nombre d'or impose la borne $a = \sqrt{5}$, <u>et non qu'il est le seul</u>, avec ses équivalents, à l'imposer !

Détendons-nous

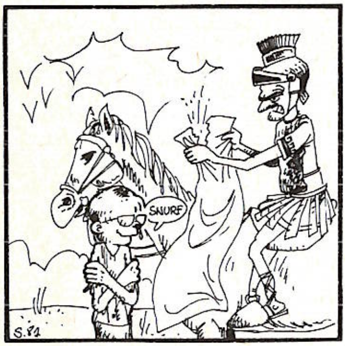
Dans cette grille, des lettres à égale distance les unes des autres semblent être dans un désordre apparent. Pourtant, un grand nombre de noms de mathématiciens, sont dissimulés dans tous les sens (horizontalement, verticalement, en diagonale, de gauche à droite et de droite à gauche, de haut en bas et de bas en haut). Parfois, une même lettre fait partie de plusieurs noms. Vous devez découvrir ces noms, là où ils se cachent. Dès que vous en trouvez un, vous encerclez dans la grille les lettres qui le composent et vous barrez ce mot sur la liste alphabétique qui accompagne le problème. Quant aux lettres qui n'ont pas servi, elles forment les noms de deux grands mathématiciens.

E	N	E	H	T	S	O	T	A	R	E	H	L	H	C	O	S
E	G	N	A	R	G	A	L	I	P	O	R	C	I	A	T	S
L	A	R	C	H	I	M	E	D	E	A	L	V	A	R	N	E
E	U	L	E	R	E	M	E	L	I	E	N	Y	I	N	H	Y
D	S	L	W	P	A	I	L	E	R	O	O	M	A	O	A	A
N	S	R	E	N	E	E	N	I	F	E	R	M	A	T	M	B
O	E	L	N	T	R	D	H	E	T	L	S	G	W	I	I	C
N	N	R	L	C	H	A	S	L	E	S	A	H	E	A	L	A
E	O	A	B	I	L	A	L	U	A	L	L	P	Y	T	T	N
Z	P	T	E	L	H	C	I	R	I	D	E	A	L	S	O	T
I	O	E	R	P	S	D	G	L	Y	N	U	M	C	A	N	O
N	I	R	N	S	I	E	E	H	M	L	O	P	O	S	C	R
B	N	R	O	E	O	E	C	O	E	I	E	L	I	N	A	E
I	C	E	U	T	L	U	G	R	E	E	N	S	L	N	G	P
E	A	S	L	O	A	I	E	N	S	I	M	P	S	O	N	E
L	R	L	L	C	G	M	E	E	D	I	L	C	U	E	P	N
T	E	S	I	P	E	D	D	R	A	N	O	E	L	E	B	A

Abel
Apollonius de Perge
Archimède
Banach
Bayes
Bernoulli
Bessel
Cantor
Carnot
Cauchy
Chasles
Cotes
Crelle
Dirichlet
Dupin
Eratosthène
Euclide
Euler
Fermat
Galilée
Galois
Gauss
Grassmann
Green
Hamilton
Heine
Hill
Horner
Lagrange
Lahire
Laplace
Leibniz
Leonard de Pise
Lie (3 fois)
Mere (2 fois)
Moivre
Monge
Moore
Neile
Neper
Pascal
Peano
Poincaré
Riemann
Serret
Simpson
Tait
Taylor
Weyl
Wren
Zenon d'Elée
Zorn

Bon courage !

A propos de St. Martin...



Saint-Martin fut un évèque de Tours en France qui vécut au quatrième siècle. Suivant la légende, il se signala par sa charité, partageant son manteau avec un pauvre alors qu'il était jeune soldat de l'Empire romain...

Peut-on en déduire que la charité c'est partager ce que l'on a ? Saint-Martin nous pardonnera cette mauvaise farce ; mais imaginons un moment que touché par l'exemple de Saint-Martin, le pauvre décide à son tour de partager son avoir avec son bienfaiteur... Saint-Martin re-partagerait son bien en deux, le pauvre re-partagerait, Saint-Martin re-re-partagerait ...

Mathématisons la situation : soit S_0 le bien initial de Saint-Martin et P_0 le bien initial du pauvre. Examinons l'état de leurs fortunes après un "aller-retour" :

<u>Situation initiale</u> :

Saint-Martin : S_0

Pauvre : P_0

<u>Situation après que Saint-Martin ait partagé son bien</u> :

Saint-Martin : $\frac{1}{2} S_0$

Pauvre : $P_0 + \frac{1}{2} S_0$

<u>Situation après que le pauvre ait partagé son bien</u> :

Saint-Martin : $\frac{1}{2} S_0 + \frac{1}{2} (P_0 + \frac{1}{2} S_0)$

Pauvre : $\frac{1}{2} (P_0 + \frac{1}{2} S_0)$

En notant S_1 et P_1 l'état de leurs fortunes, on trouve :

$$S_1 = \frac{3}{4} S_0 + \frac{1}{2} P_0 \qquad P_1 = \frac{1}{4} S_0 + \frac{1}{2} P_0$$

Cette étape peut se symboliser (et se calculer) par la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

La somme des éléments d'une colonne de cette matrice (de transition) est toujours égale à 1 car la première colonne représente la répartition entre les deux intéressés des avoirs de Saint-Martin à l'étape précédente, et la seconde représente la répartition des avoirs du pauvre. On se convainct aisément de ce que cette même matrice représente le changement d'avoir entre l'étape 2 et l'étape 1.

$$\begin{pmatrix} S_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

Si l'on admet l'existence d'une répartition limite stable des avoirs, on se trouve mathématiquement confronté à la résolution de l'équation :

$$\begin{pmatrix} S_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

où l'on espère $S_{n+1} = S_n$ et $P_{n+1} = P_n$, donc :

$$\begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix}$$

ou encore, suivant les règles du calcul matriciel :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \mathbf{O} \qquad \text{ou} \qquad (\mathbf{M} - \mathbf{E}) \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \mathbf{O}$$

Nous voici confrontés à un système de 2 équations à 2 inconnues homogènes. Le système n'est pas de rang 2 puisque la somme des éléments des colonnes est 0. Le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système est indéterminé et

$$-\frac{1}{4} S_n + \frac{1}{2} P_n = 0$$

ou encore : $S_n = 2 P_n$

Après n étapes, (et n grand), Saint-Martin posséderait le double de ce que posséderait le pauvre.

Au départ, les avoirs étaient : $S_0 + P_0$

En finale, $S_n = \frac{2}{3}(S_0 + P_0)$ et $P_n = \frac{1}{3}(S_0 + P_0)$

On peut donc résumer le problème en remarquant, que quels que soient les avoirs originaux, si les " échanges " sont arrêté lorsque le premier donneur vient de recevoir, ce dernier emporte les deux tiers du lot !

Le pauvre ne connaissait pas les subtilités de la mathématique, et Saint-Martin est vraiment un saint ... et la morale est sauve : il faut de toutes façons donner le premier ...

Sur une idée de Claude DELMEZ.

Avis de recherche

En vue d'une préparation aux Olympiades Mathématiques Internationales

les élèves
- qui sont actuellement en 4eme ou 5eme,
- qui sont passionnés de mathématique,
- qui aiment les problèmes,
- qui à longueur de leçon posent des "colles" à leur professeur,
- qui n'étudient pas pour les bilans, mais font quand même le maximum (ou presque),
- qui s'inquiètent déjà des intégrales quand, en classe, on commence à peine l'étude des dérivées,
- qui ont de l'imagination, mais aussi de la mémoire,

sont priés de se faire connaître auprès de

Madame C. FESTRAETS,
rue J.B. Vandercammen, 36,
1160 - Bruxelles

Tél : 02 / 673 90 44

Le coin des problèmes

R4 (A propos d'un polyèdre)

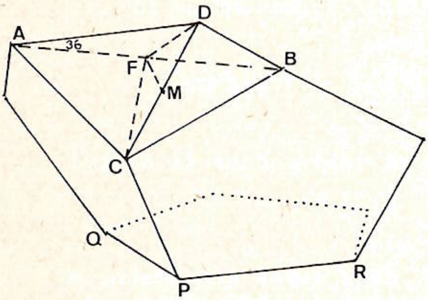
Nous n'avons reçu aucune réponse correcte à ce problème.

En voici une, pas trop longue, qui ne fait intervenir que des relations trigonométriques simples dans des triangles rectangles.

Nous désignerons par "base du polyèdre" le pentagone qui est entouré de cinq pentagones et nous placerons cette face dans un plan horizontal.

Pour montrer que le polygone étoilé construit dans l'énoncé est plan, une première idée qui peut venir à l'esprit est de montrer que les distances de deux sommets consécutifs de ce polygone à la base sont égales. En effet, le plan de ce polygone, s'il existe, est nécessairement parallèle à la base. On peut y arriver, mais les calculs sont longs.

On a avantage, comme cela arrive souvent dans la résolution d'un problème, à remplacer la propriété à démontrer par une thèse équivalente.



Considérons le demi-dodécaèdre placé sur sa base (nous en avons dessiné la base et deux faces adjacentes). Désignons par A et B (voir figure) deux sommets de pentagones situés à la même hauteur et par C le sommet situé plus bas. AB est évidemment horizontale et nous pouvons considérer le plan horizontal passant par AB. Dans ce plan horizontal construisons vers l'intérieur du dodécaèdre le point D tel que $|AD| = |BD| = c$ où c est la longueur du côté du pentagone.
Nous aurons établi que le polygone de l'énoncé est plan si nous montrons que $|CD| = c$.
En effet, les triangles ACD et BCD sont alors équilatéraux

<u>Calcul de BC</u> : Désignons par δ l'angle formé par le plan ACB et le plan horizontal et remarquons que cet angle est l'angle dièdre du dodécaèdre. Si F est le milieu de [AB] nous aurons $\measuredangle DFC = \delta$. Les triangles ACB et ADB sont isométriques et $\measuredangle DAB = \measuredangle CAB = 36°$.

Soit M le milieu de [CD] , le triangle BFC étant isocèle, FM est bissectrice et hauteur. Dans le triangle

DFM on a donc

$$|DM| = |DF| \sin\frac{\delta}{2}$$

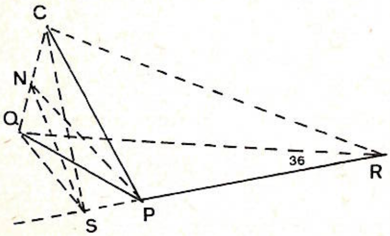
et dans le triangle DAF , $|DF| = c \sin 36°$

d'où

$$|BC| = 2c \sin 36° \sin\frac{\delta}{2}$$

Reste à calculer $\sin\frac{\delta}{2}$.

<u>Calcul de $\sin\frac{\delta}{2}$</u> : Considérons le trièdre (PQ,PC,PR) dont les angles dièdres sont tous égaux à δ et les angles de deux arêtes valent 108° . De C et Q abaissons les perpendiculaires sur PR. Par raison de symétrie, elles rencontrent PR au même point S . $\sphericalangle CSQ = \delta$ et $|CS| = |CQ|$



Soit N le milieu de [CQ] nous aurons : $SN \perp CQ$ et bissectrice de $\sphericalangle CSQ$.

Par conséquent, dans le triangle rectangle CSN

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{|CN|}{|CS|}$$

Calculons $|CN|$ dans le triangle CNP et $|CS|$ dans le triangle CSR . Nous trouvons

$$|CN| = c \cos 36°$$
$$|CS| = 2c \cos 36° \sin 36° .$$

On a donc à

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2 \sin 36°}$$

Remplaçons enfin $\sin\frac{\delta}{2}$ par sa valeur dans le calcul de BC , on trouve

$$|BC| = c$$

Le polygone de l'énoncé est plan.

Au cours de notre recherche, nous avons été amenés à rencontrer des propriétés intéressantes du dodécaèdre que nous n'avons finalement pas utilisées, mais que nous vous proposons de vérifier.

1) La hauteur du sommet A par rapport au plan de base est égale à 2a où a désigne l'apothème des pentagones.
2) La hauteur du sommet C par rapport au plan de base est égale à r rayon du cercle circonscrit au pentagone.
3) Si O est le centre du cercle circonscrit à la base, la droite AO fait avec le plan de base un angle de 45° .
4) Les droites PC et CD sont perpendiculaires.

R25 (Avec 16 cartes.)

La seule réponse complète et justifiée que nous ayons reçue est celle de Jean-Pierre BIANCHI, 4LM, au Collège Saint-Louis de Liège. La voici:

Premier point : un seul coin contient un roi.
- si aucun roi n'est dans un coin, on s'aperçoit que deux seront sur une même ligne, ou il n'y en aura pas sur les diagonales.
- si deux coins ou plus sont occupés par des rois, ils y en aura forcément deux sur une même rangée ou sur une même diagonale.

Second point : les quatre coins se composent exactement d'un roi, d'une dame, d'un valet et d'un as.
- le raisonnement est le même pour chaque carte : voir 1er pt.

Troisième point : Afin d'éviter de compter des solutions égales à des rotations ou retournements près, on place le roi dans le coin supérieur gauche. Comment dans ces conditions disposer la dame, le valet et l'as autour du roi ? 6 possibilités semblent exister, mais les trois dernières sont symétriques des trois premières par rapport à l'axe passant par le roi et le coin opposé.

R			D
A			V

R			D
V			A

R			A
V			D

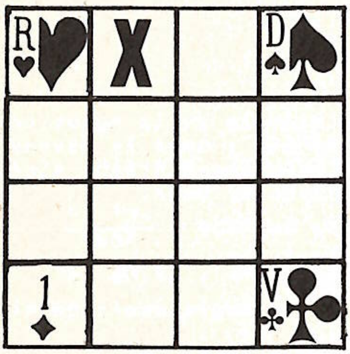
R			A
D			V

R			V
D			A

R			V
A			D

Quatrième point : Le roi peut être de 4 couleurs, la dame de 3, le valet de 2 et l'as est fixé : Bref chacune des trois possibilités ci-dessus peut être "coloriée" de 24 manières. A ce stade existent donc 72 possibilités !

Cinquième point : Etant donné une quelconque de ces 72 possibilités, le carré ne peut être complété que de deux manières. Voici ces deux manières pour un choix quelconque de remplissage des quatre coins :



En X, peuvent se placer l'as de trèfle ou le valet de carreau et rien d'autre !
Une fois ce choix fait, le carré est entièrement déterminé (voir page suivante) : il y a donc 72 x 2 = 144 possibilités !

Historiquement, ce problème est le onzième d'un recueil de "problèmes plaisants et délectables" publié en 1612 par Claude Gaspar BACHET, sieur de Méziriac.

La solution qu'il préconise est très proche de ce qu'a trouvé notre jeune ami.

R ♥	1 ♣	V ♦	D ♠
V ♠	D ♦	R ♣	1 ♥
D ♣	V ♥	1 ♠	R ♦
1 ♦	R ♠	D ♥	V ♣

R ♥	V ♦	1 ♣	D ♠
D ♣	1 ♠	V ♥	R ♦
V ♠	R ♣	D ♦	1 ♥
1 ♦	D ♥	R ♠	V ♣

R27 (Les lois cachées.)

Voici comment pouvaient se poursuivre les séries de nombres proposés :

5, 24, 123, 622, 3121, 15620 ... $t_n = 5^n - n + 1$ ($t_0 = 5$)

2, 3, 4, 7, 6, 11 ... $t_{2n} = 2n + 2$, $t_{2n+1} = n + 3$ ($t_0 = 2$)

13, 17, 19, 23, 29, 31 ... Suite des nombres premiers.

5, 8, 13, 21, 34, 55 ... Suite de Fibonacci

1, 3, 7, 15, 31, 63 ... $t_n = 2^{n+1} - 1$ ($t_0 = 1$)

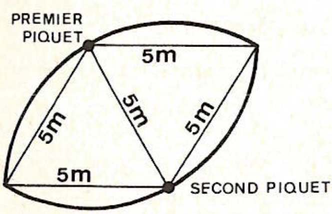
13, 25, 37, 49, 511, 613 ..."unité"+ 2,"dizaine"+ 1

6, 8, 12, 14, 18, 20 ... (+2 , +4 alterné)

11110, 1010, 132, 110, 50, 42 ... (30 exprimé en base 2,3,4,...)

Cette dernière série ne fut comprise que par Jean-Pierre BIANCHI, 41m, Collège Saint-Louis à Liège, Laurent BIERNAUX, 41m, Athénée Royal Mixte de Woluwé-Saint-Pierre et François-Gabriel KNUTS, 4ScB, Séminaire de Floreffe. Un bravo tout particulier...

R29 (La chèvre.)



Voici un exemple de la solution la plus simple : nous la devons à Marie-Christine BERTIAU, 4ScA, Athénée Royal de Dour.

Surface du secteur : $\frac{\pi R^2 \ \hat{n}^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{3{,}14159 \ 5^2 \ 60^\circ}{360^\circ} = 13{,}08 \ m^2$

Surface du triangle équilatéral:

$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 10{,}83 \ m^2$

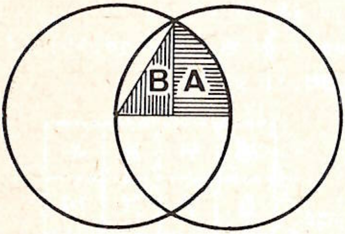
Surface du segment : $13{,}08\ m^2 - 10{,}83\ m^2 = 2{,}25\ m^2$

Surface des 4 segments : $4 \times 2{,}25\ m^2 = 9\ m^2$

Surface des 2 triangles équilatéraux : $2 \times 10{,}83\ m^2 = 21{,}66\ m^2$

Surface broutable par la chèvre : $9\ m^2 + 21{,}66\ m^2 = 30{,}66\ m^2$

(Le calcul avec plus de décimales conduit à $30{,}70924\ m^2$)



Voici une démonstration plus astucieuse : nous la devons à Philippe THIRION, 5ScA, Petit Séminaire de Floreffe.

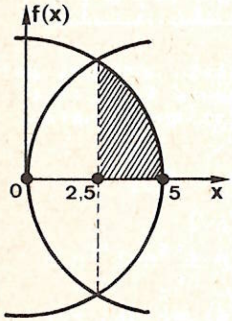
Surface A+B = $\frac{1}{6}$ Surface cercle = $\frac{1}{6}\pi R^2$ (R = 5 m)

Surface B = $\frac{1}{2}$ R cos 60° R sin 60°

$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2}\,R^2 = \frac{\sqrt{3}R^2}{8}$

Surface A = Surface A+B - Surface A = $\frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}R^2}{8}$

Surface broutable par la chèvre : 4 x Surface A = $30{,}70924\ m^2$



Pour suivre, voici une solution basée sur la notion d'intégrale : nous la devons à Dominique FLANDROIT, ex-rhéto à l'IPEP de Mons.

$$S = 4 \int_{2,5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$$

On pose $x = 5 \cos t \rightarrow dx = -5 \sin t\, dt$

si $x = 2{,}5 \rightarrow t = \arccos \frac{2{,}5}{5} = \frac{\pi}{3}$

si $x = 5 \rightarrow t = \arccos \frac{5}{5} = 0$

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sqrt{25 - 25 \cos^2 t}\,(-5) \sin t\, dt$$

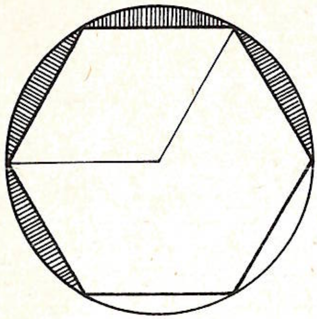
$$= -100 \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^2 t\, dt = -50 \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} dt + 50 \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \cos 2t\, dt$$

On pose $t = \frac{u}{2} \rightarrow dt = \frac{1}{2}du$; si $t = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{2\pi}{3}$; si $t=0 \rightarrow u=0$

$$S = -50 \Big[\, t \,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{0} + 50 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} \cos u \left(\frac{1}{2}\right) du = -50 \left(0 - \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$25 \Big[\, \sin u \,\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{0} = \frac{50\pi}{3} + 25 \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{50\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} = 30{,}70924\ m^2$$

Enfin, voici la solution non moins astucieuse de Thierry RAVANELLI, 4ScA, à l'Athénée Royal de Thuin :



La surface cherchée correspond au $\frac{4}{6}$ de la surface obtenue par différence des surfaces du disque et de l'hexagone régulier inscrit ; augmenté du tiers de la surface de cet hexagone.

Surface du disque : $\pi R^2 = 78,54\ m^2$

Surface de l'hexagone : $6\ \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

$= 64,95\ m^2$

Surface cherchée : $\frac{4}{6}(78,54 - 64,95)\ m^2 + \frac{1}{3}\ 64,95\ m^2 = 30,71\ m^2$

R31 (Mélancolie)

Voici la seule réponse que nous ayons à ce problème : merci à Pierre DE SIMPEL, 51m, Collège Notre-Dame de Tournai. Le problème reste bien sûr ouvert.

16	9	5	4
2	7	11	14
3	6	10	15
13	12	8	1

R32 (Plier,couper,superposer,...)

Après 7 étapes, il y avait 10923 bouts de papier. Beaucoup trouvèrent ce résultat, souvent par tâtonnements. Denis BALLANT, 6ScB à la Communauté Educative Jean XXIII de Pesches nous donne un moyen théorique d'obtenir ce résultat. Le voici :

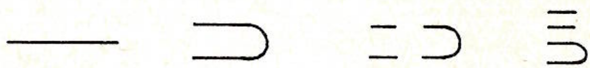
Avant l'étape n : nombre de papiers non pliés : x_{n-1}

nombre de papiers pliés : y_{n-1}

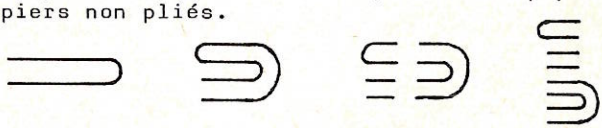
nombre total de papiers : $t_{n-1}=x_{n-1}+y_{n-1}$

Après l'étape n : nombre de papiers : x_n , y_n , t_n

Avec un papier non plié, les 3 actions d'une étape donnent naissance à deux papiers non pliés et un papier plié :



Un papier plié se transforme, lui, en trois papiers pliés et deux papiers non pliés.



Ainsi : $\boxed{x_n = 2\ x_{n-1} + 2\ y_{n-1}\ ;\ y_n = x_{n-1} + 3\ y_{n-1}}$

Au départ, $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

Voyons les premiers résultats en suivant ces lois :

Numéro de l'étape :	n	1	2	3	4	...
Avant cette étape :	x_{n-1}	1	2	6	22	
	y_{n-1}	0	1	5	21	
Après cette étape :	x_n	2	6	22	86	
	y_n	1	5	21	85	
Total après l'étape:	t_n	3	11	43	171	

On remarque que $x_n = y_n + 1$

Comme $y_n = x_{n-1} + 3\ y_{n-1}$, on déduit une loi de transformation pour y : $y_n = y_{n-1} + 1 + 3\ y_{n-1} = 4\ y_{n-1} + 1$

Et la loi de récurrence pour t_n peut s'écrire :

$$t_n = x_n + y_n = 2\ y_n + 1 = 2\ (\ 4\ y_{n-1} + 1\ ) + 1 = 8\ y_{n-1} + 3$$
$$= 4\ y_{n-1} + 4\ y_{n-1} + 4 - 1 = 4\ y_{n-1} + 4\ (\ y_{n-1} + 1\ ) - 1$$
$$= 4\ y_{n-1} + 4\ x_{n-1} - 1 = 4\ (\ y_{n-1} + x_{n-1}\ ) - 1 = 4\ t_{n-1} - 1$$

Ainsi $t_1 = 4\ t_0 - 1 = 4.1 - 1 = 3$

$t_2 = 4\ t_1 - 1 = 4.3 - 1 = 11$

$t_3 = 4\ t_2 - 1 = 4.11 - 1 = 43$

...

Mais $t_3 = 4\ t_2 - 1 = 4\ (\ 4\ t_1 - 1\ ) - 1 = 4^2\ t_1 - 4 - 1$

$= 4^2\ (\ 4\ t_0 - 1\ ) - 4 - 1 = 4^3\ t_0 - 4^2 - 4 - 1$

$= 4^3 - 4^2 - 4^1 - 4^0$

On postule que $t_n = 4^n - 4^{n-1} - 4^{n-2} - \dots - 4^2 - 4^1 - 4^0$

$t_n = 4^n - S_{n-1}$

Calculons S_{n-1}:

$$S_{n-1} = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + 4^0 \qquad (1)$$
$$4\ S_{n-1} = 4^n + 4^{n-1} + \dots + 4^2 + 4^1 \qquad (2)$$

(2) - (1) → $3\ S_{n-1} = 4^n - 1$

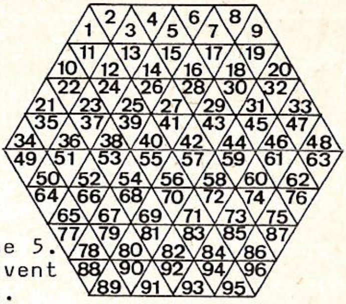
et $S_{n-1} = \dfrac{4^n - 1}{3}$; d'où $t_n = 4^n - \dfrac{4^n - 1}{3} = \dfrac{3.4^n - 4^n + 1}{3}$

$\boxed{t_n = \dfrac{2.4^n + 1}{3}}$ et en particulier $t_7 = \dfrac{2.4^7 + 1}{3} = 10923$

Remarquons que l'on peut écrire : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

et associer ainsi cette petite expérience physique à une application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: le problème revenant à calculer une puissance quelconque de cette application.

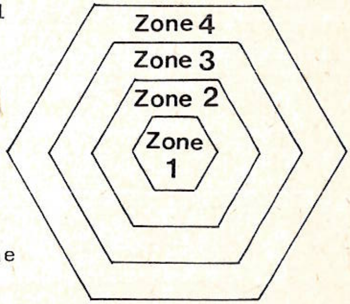
R33 (Découpage)



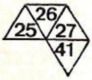
Les figures étant isométriques seront toutes formées de

- 1 triangle de la zone 1,
- 3 triangles CONSECUTIFS de la zone 2,
- 5 triangles CONSECUTIFS de la zone 3,
- 7 triangles CONSECUTIFS de la zone 5.

Les "raccords" entre deux zones doivent être effectués par un côté au moins.
Nous prenons comme triangle central la case 41.

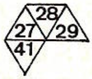


Nous avons trois possibilités de choix dans la zone 2 :



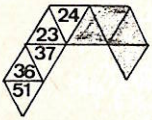
A1

A2

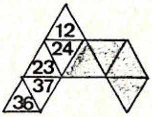


A3

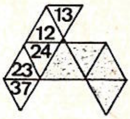
Dans la zone 3, la situation A1 mène à 8 extensions :



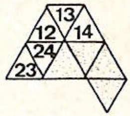
B1



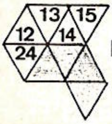
B2



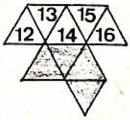
B3



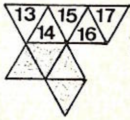
B4



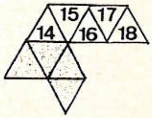
B5



B6

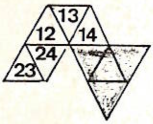


B7

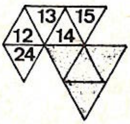


B8

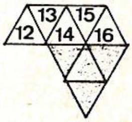
La situation A2 mène à 7 extensions dans la zone 3 :



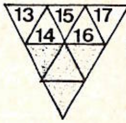
C1



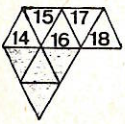
C2



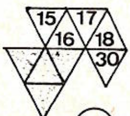
C3



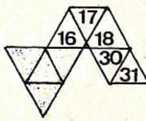
C4



C5



C6



C7

Il n'est pas utile d'étudier la situation A3 ; par symétrie celle-ci mène au même nombre de solutions que la situation A1.
Il nous faut à présent compter le nombre de 7-uples de triangles consécutifs de la zone 4 ayant au moins un côté commun avec les diverses possibilités de la zone 3

Nous ne pouvons - par manque de place - reproduire toutes ces possibilités. Patrick KAISIN, 4Lm, Collège Saint-Louis, Liège a vérifié que les situations B2, B7, et C4 donnent chacune 11 extensions, les 12 autres situations donnant 12 extensions.

Ainsi, la situation A1 mène à 6.12+2.11 = 94 solutions.
Par symétrie, la situation A3 admet aussi 94 solutions.
Quant à la situation A2, elle mène à 6.12+11 = 83 solutions.
Il y a donc 271 découpages possibles...

R34 (Un grand nombre.)

Remarquons immédiatement que le nombre 9^{9^9} signifie $9^{(9^9)}$ ou encore $9^{387420489}$, résultat que toute calculatrice vous donnera en un instant.

Nous allons - après l'avoir rappelé - nous servir d'une propriété intéressante de la fonction log (logarithme en base 10).

- La partie entière du log x représente avec une unité par défaut, le nombre de chiffres de x si x > 1

Ainsi, $\log 9^{387420489} = 387420489 \log 9 = 369693099{,}6$ prouve que $9^{387420489}$ comporte <u>369693100 chiffres</u> !!!

La longueur de papier sera de 369693100 . 4mm = <u>1478 km 772 m 40 cm</u> .
Son écriture nécessitera 369693100 secondes ou encore <u>11 ans 263 jours 20 heures 31 minutes et 40 secondes</u> !!!

Ont répondu à ce problème : Michel VAN LOO, 4lm, Collège Jean XXIII à Bruxelles, Pierre DE SIMPEL, Collège Notre Dame de Tournai, Jean-Pierre BIANCHI, 4lm, Collège Saint-Louis, Liège, et Marie-Christine BERTIAU, 4ScA à l'Athénée Royal de Dour.

R35 (Echiquier et dominos.)

Où que vous placiez le domino sur l'échiquier, il occupe forcément une case blanche et une case noire ! Supprimer deux cases situées en deux coins opposés de l'échiquier provoque toujours un déséquilibre entre le nombre de cases de chaque couleur. On ne peut donc jamais recouvrir l'échiquier tronqué de telle sorte avec 31 dominos.

C'est ce que nous ont dit Philippe BROGNOUX,de Jumet, Michel VAN LOO, 4lm, Collège Jean XXIII à Bruxelles, Bruno DEMEY, 5ScB au Collège Saint-Henri de Comines, la classe de

4eme rénové de l'Institut Saint-Joseph à Eghezée, Michel BERNARD, 3ScA à l'Institut Saint-Jean-Baptiste de Wavre, et Pierre DE SIMPEL du Collège Notre Dame de Tournai (5lm).

R36 (L'amnistie partielle.)

Placez-vous un instant dans la cellule n° 12 : voyez ce qui s'y passe :

Ronde n° :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Etat de votre porte :	F	O	F	O	F	F	O	O	O	O	O	O	F	F	F

et elle restera définitivement fermée ...

L'état de la porte fut modifié 6 fois (et 12 a 6 diviseurs) Pour que la porte reste ouverte, il faudrait que le nombre de modifications soit impair, en d'autres termes, il nous faut rechercher les nombres admettant un nombre impair de diviseurs. Seuls, les carrés parfaits ont cette propriété.

R37 (Problème d'Algèbre.)

On calcule : $(a^2 + 2ab + b^2 + a + b + 1)^2 =$

$(a + b + 1)^2 + (a + b)^2 + (a^2 + 2ab + b^2 + a + b)^2$

Thierry BRASSEUR, 5lm à l'Athénée Royal de Hannut et Laurent DECRUCQ, 5ScA, au Lycée Marguerite Bervoets de Mons nous ont envoyé leur solution.

R38 (Le whisky ... avec ou sans eau ?)

On peut bien sur faire le calcul ... ou se dire qu'au début, il y a 10 cm³ dans A et 10 cm³ dans B. A la fin aussi ! Donc tout ce qui manque d'un côté doit se retrouver de l'autre. Sinon on aurait transformé de l'eau en whisky ou inversément.

Ont évité le piège : Hervé CONSTANT, 5TQ à l'Institut Technique de l'Etat de Rance, Marc MAILLEZ, 6eR au Lycée Jean d'Avesnes de Mons, Laurent DECRUCQ, 5ScA au Lycée Marguerite Bervoets de Mons, Bruno DIVRY, 5TQ à l'Institut Technique de l'Etat à Rance, De VINCK, Pierre WAGENAAR, 2eme, François-Gabriel KNUTS, tous trois du Séminaire de Floreffe, Marc HOESEVOETS, 2lat à l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles, Denis BALLANT, 6eScB à la Communauté Eéducative Jean XXIII à

Pesches, Alain BAILLY, Scientifique Spéciale à l'Institut St Joseph de Charleroi, Sylvie THIBAUT, 4LM, au Lycée Royal de Charleroi, Laurent GRYSON, 5ScB au Collège St Henri de Comines, Yves KONEN, 4ScA à l'Athéne Robert Catteau à Bruxelles et Luc BERCHEM, 6LM et Thierry BRASSEUR, 5LM à l'Athénée Royal de Hannut.

R39 (Naturel ou pas naturel ?)

Voici la solution de Thierry BRASSEUR, 5LM, à l'Athénée Royal de Hannut :

Si l'on étudie la variation du dernier chiffre des puissances de 7 et de 3, on observe :

$$\left.\begin{array}{l} 7^1 = 7 \\ 7^2 = 49 \\ 7^3 = 343 \\ 7^4 = 2401 \\ 7^5 = 16807 \end{array}\right\} \textit{Période de 4 !} \qquad \left.\begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \\ 3^5 = 243 \end{array}\right\} \textit{Période de 4 !}$$

On peut donc conclure que si l'exposant de 7 est divisible par 4, le nombre se terminera par le chiffre 1 ; si l'exposant est de type $4n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$, le nombre se terminera par le chiffre 7, ... La méthode est semblable pour les puissances de 3.

1980^{1990} et 80^{90} sont trivialement multiples de 4 (car 1980 et 80 le sont !).

Ainsi, $7^{1980^{1990}}$ et $3^{80^{90}}$ se terminent tous deux par 1 ; leur différence est donc un multiple de 10 et la fraction proposée peut se simplifier en un naturel.

R40 (Election présidentielle française.)

Nous admettons qu'il y a $n+1$ candidats en présence. Les pourcentages de voix qu'ils obtiennent sont respectivement $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ avec les conditions :

$$100 = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\text{et} \qquad a_i = \frac{a_0}{2^i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

On peut écrire :

$$100 = a_0 + \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2^2} a_0 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_0$$

$$100 = \frac{2^n a_0 + 2^{n-1} a_0 + 2^{n-2} a_0 + \ldots + a_0}{2^n}$$

$$100 = \frac{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1}{2^n} a_0$$

et donc : $$a_0 = 100 \frac{2^n}{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1}$$

Le dénominateur de cette fraction vérifie les inégalités

$$2^{n+1} > 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1 > 2^n$$

On remarque en effet que $2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique dont le premier terme est 1 et la raison 2. L'algèbre nous apprend que cette somme vaut $2^{n-1} - 1$; ce qui justifie la première inégalité. (La seconde étant triviale !)

Si l'on divise chaque terme de nos inégalités par 2^n , on obtient :

$$2 > \frac{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1}{2^n} > 1$$

et

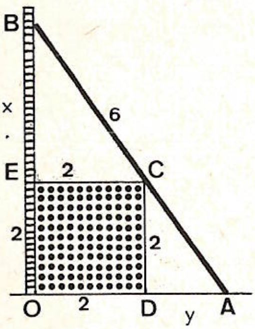
$$\frac{1}{2} < \frac{2^n}{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1} < 1$$

et en multipliant par 100 : $\frac{1}{2}.100 < a_0 < 1.100$

ainsi $50 < a_0 < 100$ et un second tour n'est pas nécessaire !

Tel est la solution proposée par Yves KONEN, 4ScA à l'Athénée Robert Catteau de Bruxelles.

R41 (L'échelle.)



Posons x la distance de B à E et y la distance de D à A. On a :

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 36$$
$$x^2 + y^2 + 4 (x + y) + 8 = 36$$
$$(x + y)^2 + 4 (x + y) - 2xy - 28 = 0$$

Les triangles de sommets A,D,C et C,E,B sont semblables. On en déduit :

$$\frac{y}{2} = \frac{2}{x} \quad \text{d'où} \quad xy = 4$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient une équation du second degré dont l'inconnue est x + y

$$(x + y)^2 + 4 (x + y) - 36 = 0$$

On trouve comme valeur pour x + y : $2 (\sqrt{10} - 1)$ et $-2 (\sqrt{10} + 1)$; cette dernière - négative - devant être rejetée.

Puisque $x + y = 2 (\sqrt{10} - 1)$ et $xy = 4$, x et y sont solutions de l'équation du second degré en l'inconnue z :

$$z^2 - 2(\sqrt{10} - 1)z + 4 = 0$$

Puisque le coefficient de z est pair, le discriminant vaut

$\Delta = (\sqrt{10} - 1)^2 - 4 = 10 - 2\sqrt{10} + 1 - 4 = 7 - 2\sqrt{10} = 5 + 2 - 2\sqrt{10} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{5} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$

Les solutions sont : $z_1 = \sqrt{10} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} \simeq 2{,}984$

$z_2 = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} \simeq 1{,}340$

Comme nous cherchons la hauteur maximale, nous retenons z_1.

Cette hauteur vaut 2m + 2,984m = 4,984m
(en fait : $1 + \sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$!)

Voila quelle était la solution de Thierry BRASSEUR, 5lm à l'Athénée Royal de Hannut. Nous avons aussi reçu une solution correcte de Laurent DECRUCQ, 5ScA, Lycée Marguerite Bervoets à Mons, Xavier de VINCK, du Petit Séminaire de Floreffe, Laurent GRYSON, 5ScB du Collège Saint Henri de Comines, Yves KONEN, 4ScA, à l'Athénée Robert Catteau de Bruxelles.

R42 (Le portefeuille.)

Voici le raisonnement de Luc KAISER, 5ScA à l'Institut Saint Jean-Baptiste de Wavre:

Si Louise est coupable, elle ment lorsqu'elle affirme ne pas avoir pris le portefeuille, de même elle ment en accusant Albert : Louise n'a pas dit la vérité deux fois : elle est innocente !

Si Pierre est coupable, il ment en s'innocentant ; ses deux autres affirmations doivent être exactes, donc Albert serait un second coupable ! Pierre n'est pas coupable.

Si Albert est coupable, il ment quand il déclare ne pas l'être ; ses deux autres affirmations sont justes, et Marie est coupable, ce qui est impossible puisqu'il n'y a qu'un seul coupable. Albert est aussi innocent !

Si Marie est coupable, elle ment en s'innocentant et elle ne peut accuser Jean ; elle aussi ne peut être coupable.

Si Jean est coupable, il ment lorsqu'il affirme ne pas avoir pris le portefeuille, il dit vrai à propos de son père et vrai à propos de Marie. Cette dernière confirme d'ailleurs ! Jean est donc coupable !

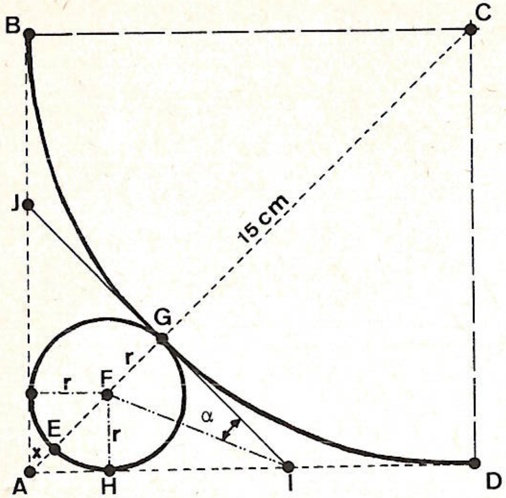
R43 (Le cauchemar.)

Soit x la distance entre A et E; r le rayon inconnu. Dans le triangle isocèle rectangle ACD, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$(x + 2r + 15)^2 = 15^2 + 15^2$$

Dans le triangle isocèle rectangle AFH, on a :

$$(x + r)^2 = r^2 + r^2$$



Il suffit, constate Michel VERGUYSE, 41m à l'Athénée Léon Lepage à Bruxelles, de résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues x et r. On a :

$$\begin{cases} x + 2r + 15 = 15\sqrt{2} & (1) \\ x + r = r\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

De *(2)*, on tire

$$x = r\,(\sqrt{2} - 1)$$

et *(1)* devient :

$$r\,(\sqrt{2} - 1) + 2r = 15\sqrt{2} - 15$$

$$r\,(\sqrt{2} + 1) = 15\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$r = \frac{15\,(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1}$$

Après simplifications, $r = 15\,(\sqrt{2} - 1)^2 \simeq 2{,}57359$ et le diamètre de la petite balle vaut <u>5,14719 cm.</u>

Alain BAILLY, Scientifique Spéciale à l'Institut Saint-Joseph de Charleroi fait remarquer qu'une seule équation suffit. La longueur de AC est à la fois :

$15\sqrt{2}$ (diagonale du carré ABCD)

et $r\sqrt{2} + r + 15$ ($r\sqrt{2}$ est la diagonale du carré AHFK)

Quant à Bruno DIVRY, 5eme Technique Qualification Electricité à l'I.E.T.E. de Rance, il nous propose une démonstration plus originale :

Il est facile de calculer la longueur de AG (= longueur de GI) : $15\,(\sqrt{2} - 1)$. Dans le triangle FGI, $FG = GI\ \mathrm{tg}\ \alpha$ (car IF est une bissectrice, le cercle de centre F étant le cercle inscrit au triangle AIJ !)

Donc $\alpha = \frac{1}{2}\,\widehat{AIG} = \frac{1}{2}\,45° = 22°30'$

Lorsque l'on connait le cosinus d'un angle α , la tangente de la moitié de cet angle est calculable par la formule :

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\ 22°30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{1 + \cos 45°}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} =$$

... après simplifications ... $\sqrt{2} - 1$

Aussi, $FG\ (= r) = 15\,(\sqrt{2} - 1)\,(\sqrt{2} - 1)$

$$= 15\,(\sqrt{2} - 1)^2$$

R45 (Drôles de dés !)

Il y a trente dés de la sorte, nous dit Filip VANDENBROECKE, 5Lm au Collège Cardinal Mercier de Braine-l'Alleud. En effet, plaçons un premier chiffre (le 6) sur une face :

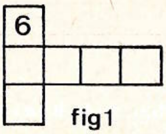


fig1

Pour placer le chiffre suivant (le 5), il y a deux possibilités :
- ou bien sur la face opposée au 6,
- ou bien sur une des 4 faces touchant la face n° 6.

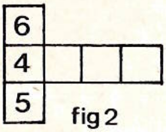


fig2

<u>1er cas</u> : (fig 2)

il n'y a qu'une possibilité pour placer le 4, car elles touchent toutes les deux autres faces de la même façon ! Pour les trois derniers chiffres, il y a <u>6 choix possibles</u>.

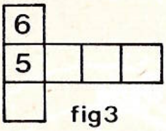
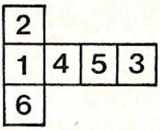


fig3

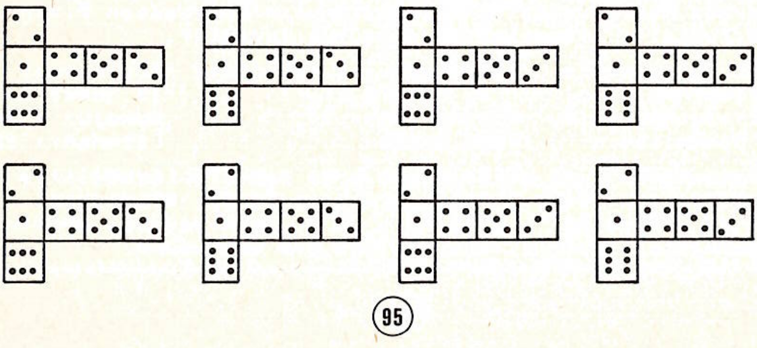
<u>2eme cas</u> : (fig 3)

Si le 5 est placé sur une face touchant le 6, il reste 4.3.2.1 positions différentes pour les 4 autres chiffres ; il y a <u>24 choix possibles</u>.

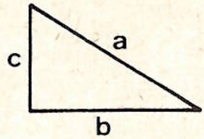
Ce raisonnement semble parfait et nous serions tenté de considérer que 30 est la réponse à notre problème. Et pourtant, nous fait remarquer Patrick KAISIN, 41m au Collège Saint- Louis de Liège, un fabricant de dés pourrait vous en fournir 8 fois plus, soit 240 ! En effet, le dé dont le développement théorique serait :



pourrait être construit de 8 façons différentes ; les faces portant les numéros 2,3 et 6 n'admettant pas les mêmes types de symétrie que les trois autres faces !



R46 (Triangles rectangles ...)



Voici, légèrement simplifiée, la solution de Laurent DECRUCQ, 5ScA au Lycée M. Bervoets à Mons: le système à résoudre est :

$$a, b, c \in \mathbb{N}^0 \qquad (1)$$

$$a + b + c = \frac{bc}{2} \qquad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (3)$$

(3) + 2bc donne : $(b + c)^2 = a^2 + 2bc$ ou $2bc = (b+c+a).(b+c-a)$ et à cause de *(2)* : $2bc = \frac{bc}{2}(b+c-a)$.

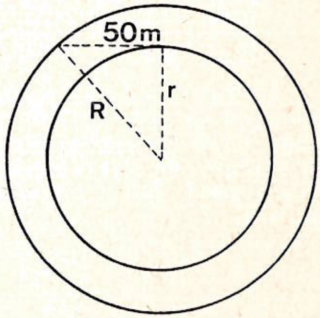
En simplifiant par $bc \neq 0$, on obtient $a = b+c-4$.
En introduisant ce résultat dans *(2)*, il vient :

$2b + 2c - 4 = \frac{bc}{2}$ d'où l'on tire : $b = \frac{4c - 8}{c - 4} = 4 + \frac{8}{c - 4}$

Suite à *(1)*, c-4 doit diviser 8 , d'où le tableau :

c-4	c	b	a
1	5	12	13
2	6	8	10
4	8	6	10
8	12	5	13

R49 (La moquette.)



Soit R le rayon du grand cercle et r le rayon du petit cercle, nous dit Eric DESCHUYTENEER, 6e à l'Athénée Royal de Ath.

On a : $R^2 = r^2 + 50^2$

d'où $2500 = R^2 - r^2$

Or la surface d'une couronne circulaire est : $\pi(R^2 - r^2)$;

la surface du tapis est donc : $2500\ \pi\ m^2 = 7854\ m^2$

MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française. (S.B.P.M.e.f.) Association sans but lucratif.

Editeur responsable	Rédacteur (et courrier)	Abonnement
W. VANHAMME,	J. MIEWIS	(5 numéros)
Rue Firmin Martin,2,	Rue de Joie, 75,	Benelux :50FB
1160 Bruxelles	4000 Liège	Etranger:100FB

Les abonnements sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur. Pour l'année scolaire 81-82, abonnement à verser au compte 001 - 0828109 - 96 de Math-Jeunes, chemin des Fontaines, 14bis à 7460 CASTEAU dès Septembre.