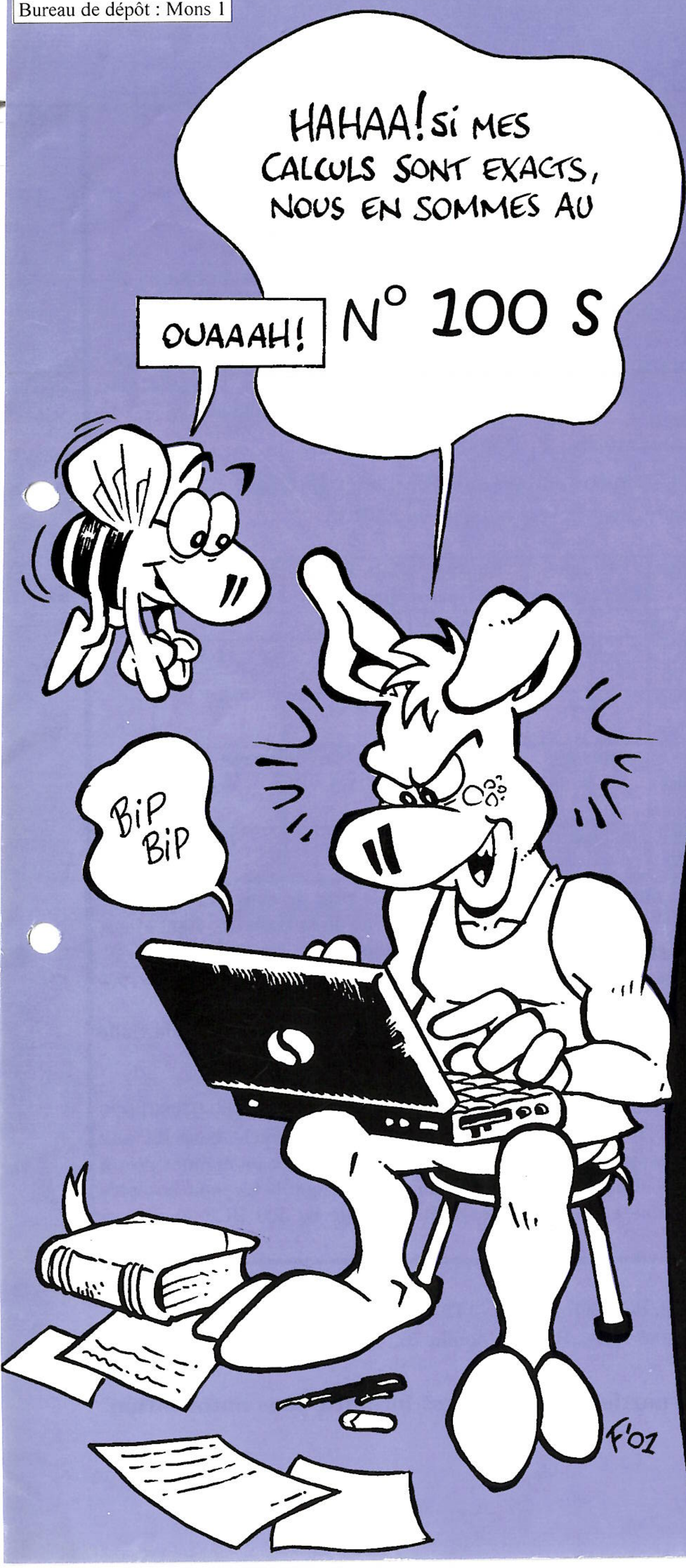
23e année
Février 2002 - n° 100 S
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH-JEUNES



MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, M.-F. GUISSARD, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, R. GOSSEZ, C. RANDOUR, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LALOUX, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POURBAIX, N. VANDENABEELE, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé		(*) 4 numéros (**) 7 numéros			
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)			(*) 4 numéros (**) 7 numéros		
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 500 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

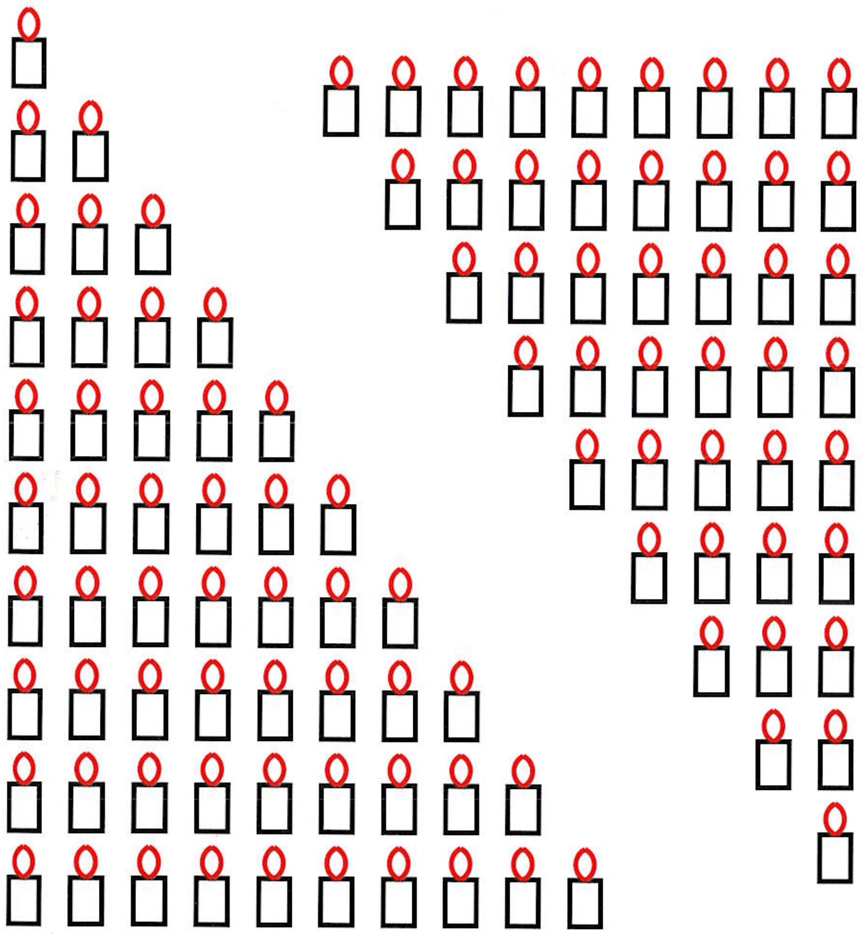
- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N° 100 S Vingt-troisième année 2002

Math-Jeunes

100 numéros de MJ

Michel Ballieu, *CREM*



Ce numéro est effectivement le centième de ta revue préférée ! Nous avons pensé qu'il fallait absolument fêter cet événement avec toi, ami lecteur.

Comment ?

Tout simplement en te proposant un « puzzle » mathématique. Le mot puzzle a été mis entre guillemets car il est employé ici au sens anglais du terme : c'est une espèce de casse-tête mathématique. Nous pouvons déjà annoncer que les meilleures solutions seront publiées dans un prochain numéro et qu'elles seront récompensées.

Car le trésorier aussi a envie de fêter le « centenaire » de *MJ* et nous a promis un petit budget spécial à cette occasion.

À toi donc de jouer. Ta solution doit nous parvenir à l'adresse suivante avant le 15 avril 2002.

Math-Jeunes
c/o Michel Ballieu
boulevard de l'Europe 36/1
1420 Braine-l'Alleud

Tu veilleras à respecter scrupuleusement le codage qui est expliqué ci-dessous. Tu n'oublieras pas d'indiquer tes nom et adresse ainsi que ton âge, l'école et la classe que tu fréquentes. Merci.

Voici l'énoncé du problème.

Math-Jeunes n° 100 S.26–29, 2002

Tu photocopies d'abord – éventuellement sur du papier genre bristol – l'ensemble de cases de la figure 1 qui suit. Le but du jeu est d'échanger les pions rouges et blancs qui sont disposés dans les cases comme le montre la figure 2. On peut déplacer un pion d'une case à une autre adjacente vide ou le faire sauter par dessus un pion voisin (blanc ou rouge) à condition qu'il aboutisse à une case vide. Comme pour les tours aux échecs, seuls les mouvements en ligne ou en colonne sont permis ; ceux en diagonale sont interdits. Il faut évidemment tenter de réaliser cela en un nombre minimum de coups.

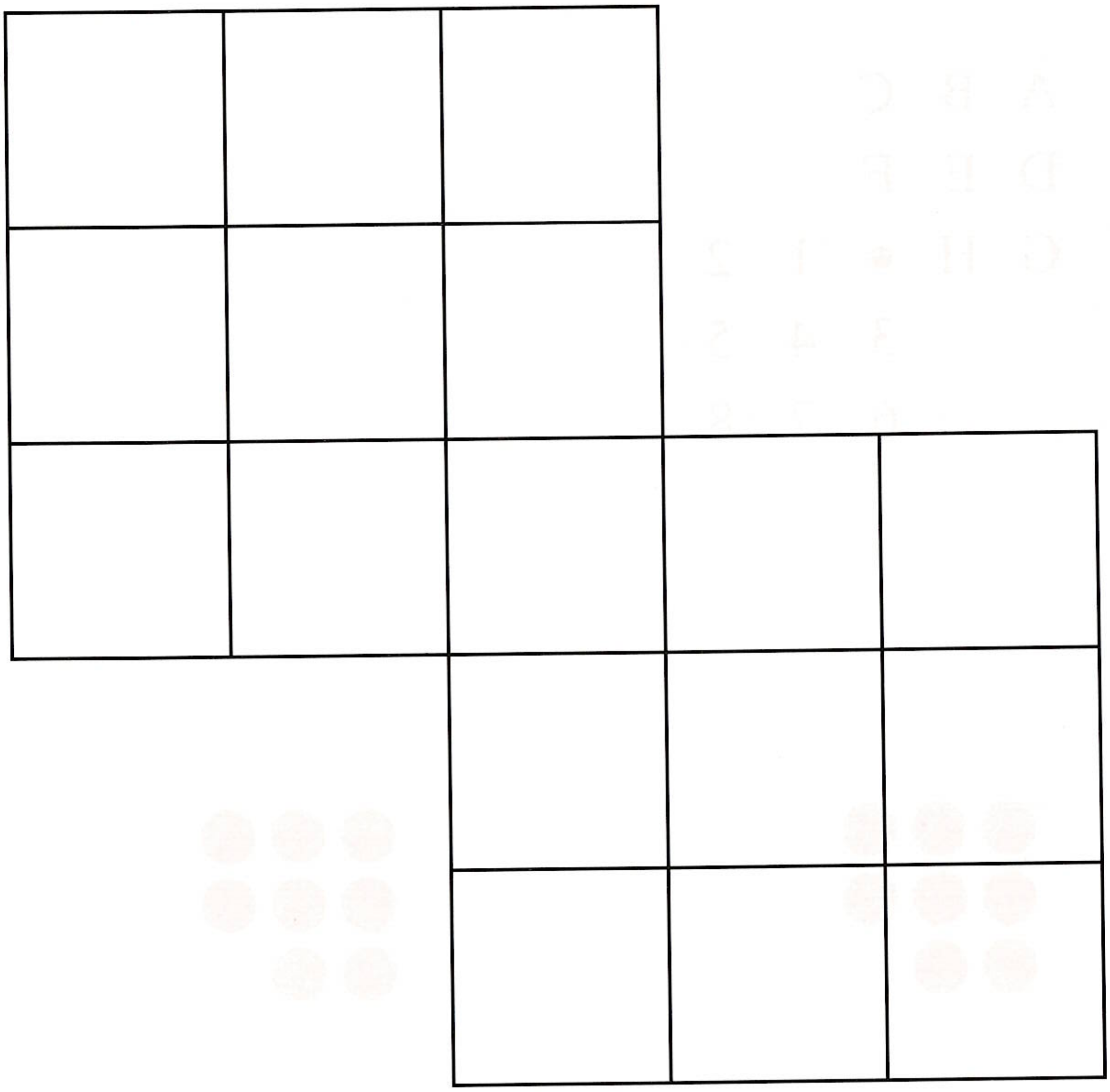


Fig. 1 : le « support » du jeu

La figure 2 ci-contre montre la disposition des pions au démarrage du jeu.
Nous allons décrire une manière de coder les mouvements sur le « damier ».
Le codage en question est assez simple, puisque à chaque instant du jeu, il n'y a qu'une seule case libre. Il suffit de désigner l'adresse de la case du pion qui va venir l'occuper.
Il faut donc attribuer une adresse à chaque **case** du damier. Convenons de réaliser cela comme dans la figure 3.

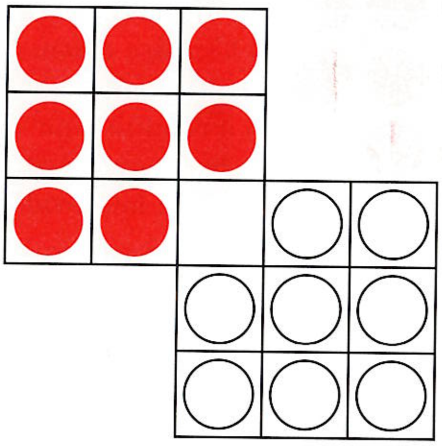


Fig. 2

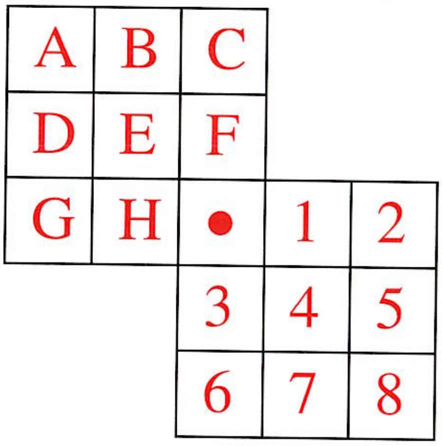
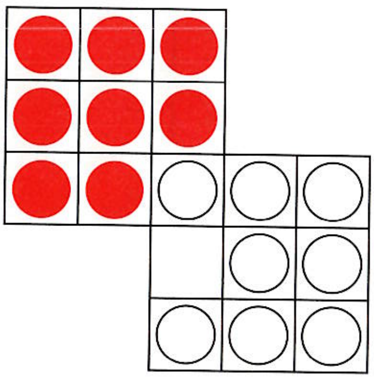
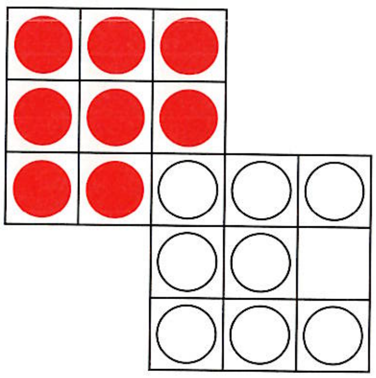


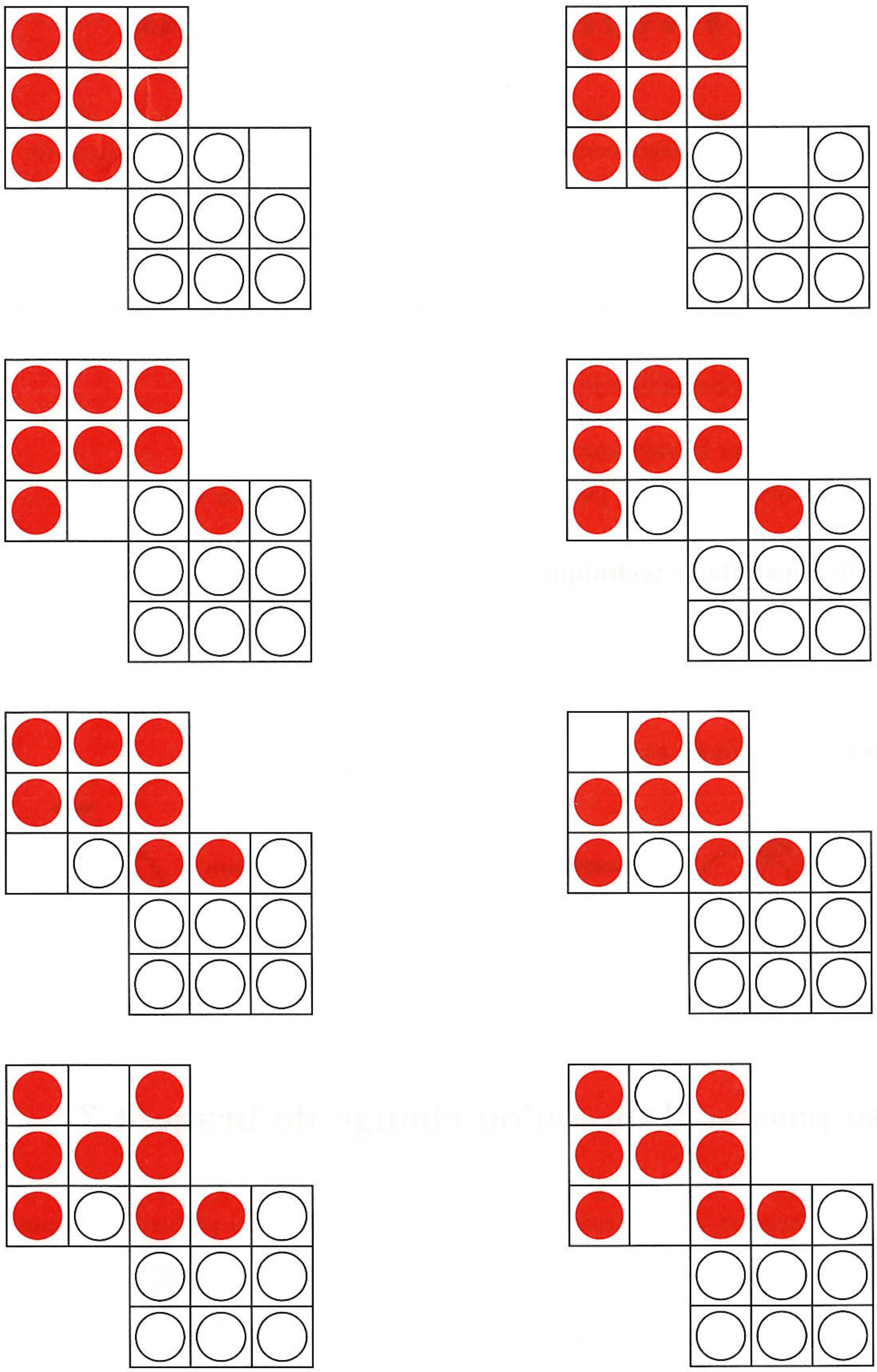
Fig. 3

À titre d'exemple, nous donnons ci-après un codage de 10 coups particuliers. Nous montrons ensuite l'effet réel de ces dix coups sur la disposition des pions (il faut lire cette succesion de gauche à droite et de haut en bas). Disons tout de suite que cela ne représente pas le meilleur démarrage pour réaliser l'opération d'échange des pions en un minimum de déplacements.

3 5 2 1 H • G A B H







À toi maintenant, ami lecteur de *Math-Jeunes*. Nous attendons impatiemment les meilleures solutions.

Promenade en vélo

M.-F. Guissard, *CREM*

Vous êtes certainement nombreux à posséder un vélo à changement de vitesse, vélo classique ou VTT. Vous utilisez couramment des expressions comme « changer de braquet », des mots comme « développement ». Les manuels d'utilisation déconseillent certains braquets, présentent parfois des tableaux de développements, ou donnent des indications sur la façon de les sélectionner.

Quel est le lien entre le braquet et le développement ?
Comment calcule-t-on un tableau de développement ?
Pourquoi certains braquets sont-ils déconseillés, voire écartés automatiquement ?
Perd-on ainsi des possibilités de développements ?
Comment sélectionner les développements du plus petit au plus grand ?
Comment comparer les développements utilisés par les sportifs ?

Nous allons essayer d'y voir un peu plus clair et de répondre à ces questions.

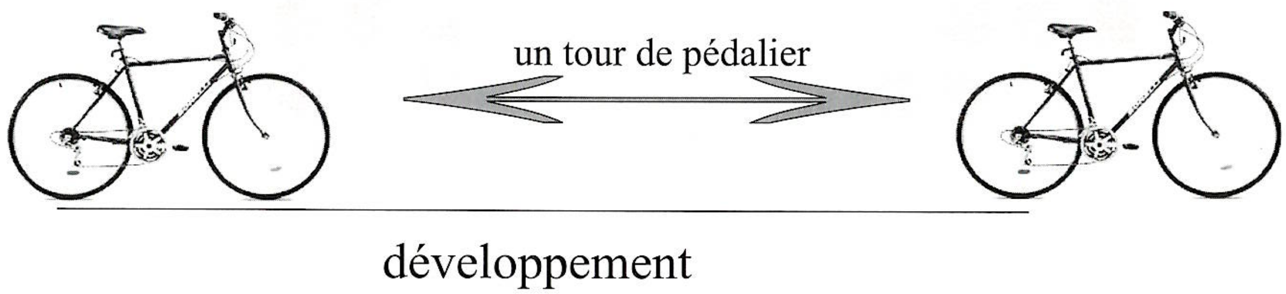
Math-Jeunes n° 100 S,30–34, 2002

Un peu de vocabulaire technique

Pignon : roue dentée située sur la roue arrière.

Plateau : roue dentée située sur le pédalier, servant à mouvoir la roue arrière par l'intermédiaire d'une chaîne.

Développement : distance parcourue en un tour de pédalier.



Que se passe-t-il lorsqu'on change de braquet ?

Quand on change de braquet, la chaîne passe d'un plateau à un autre, ou d'un pignon à un autre. Chaque braquet est caractérisé par le nombre de dents du plateau et du pignon. Ainsi, pour le braquet « 48×18 », le nombre de dents du plateau et du pignon sont respectivement 48 et 18.

Le changement de braquet permet de faire varier la distance parcourue à chaque tour de pédalier. Avec un « petit braquet », cette distance est courte et l'effort à fournir est léger, tandis qu'un « grand braquet » permet de parcourir une grande distance à chaque tour de pédalier, mais au prix d'un effort plus intense.

Calcul du développement

Les informations que l'on trouve dans la presse sportive ne nous éclairent pas sur la manière de calculer le développement. Voici un exemple :

Plus de 9 mètres par tour de pédale. Tony Rominger a employé un braquet de 60×14, soit une avancée supérieure à 9 mètres (9,02 m) à chaque tour de pédale lors de son record de l'heure.

La distance parcourue en un tour de pédalier vaut le produit de la distance parcourue en un tour de roue arrière, c'est-à-dire la longueur du périmètre de cette roue, par le nombre de tours effectués par celle-ci (ce nombre n'est pas nécessairement entier !).

Pour calculer le développement à partir du braquet, il faut donc établir le lien entre le nombre de dents du plateau et du pignon et le nombre de tours que la roue arrière effectue en un tour de pédalier.

La chaîne relie les dents du plateau à celles du pignon et une dent du plateau entraîne une dent du pignon par l'intermédiaire de la chaîne. Si on n'envisage pas le cas de la roue libre, le nombre de tours du pignon est toujours égal au nombre de tours de la roue arrière.

Prenons comme premier exemple un vélo à
3 plateaux de 24, 36 et 48 dents,
6 pignons de 12, 14, 16, 18, 20 et 24 dents.
Observons tout d'abord ce qui se passe avec le plateau de 36 dents.

Pour un tour de pédalier, calculons le nombre de tours effectués par la roue arrière avec chacun des pignons.

- Avec le pignon de 12 dents :
  pendant que les 36 dents du plateau défilent, les 12 dents du pignon défilent toutes 3 fois (puisque $36 = 12 \times 3$). À chaque tour de pédalier, le pignon fait trois tours complets.
- Avec le pignon de 18 dents :
  les 18 dents du pignon défilent toutes 2 fois. Le nombre de tours est encore entier et vaut 2.
- Avec le pignon de 24 dents :
  pendant que les 36 dents du plateau défilent, les 24 dents du pignon défilent toutes 1 fois, et 12 parmi les 24, soit la moitié, défilent une seconde fois.
  Le nombre de tours de la roue arrière vaut donc $1 + \frac{12}{24} = 1,5$.
- Avec les pignons de 14 dents, de 16 dents et de 20 dents :
  un raisonnement analogue permet de calculer que
  pour 14 dents, la roue arrière fait $2 + \frac{8}{14}$ tours, puisque $36 = 2 \times 14 + 8$;
  pour 16 dents, la roue arrière fait $2 + \frac{4}{16}$ tours $= 2$ tours et un quart, puisque $36 = 2 \times 16 + 4$;
  pour 20 dents, la roue arrière fait 1 tour $+\frac{16}{20}$ de tour, puisque $36 = 1 \times 20 + 16$.

Récapitulons ceci dans un tableau, en classant par ordre croissant du nombre de dents du pignon. Au préalable, remarquons que, lorsque le nombre de tours n'est pas entier, le dénominateur qui apparaît est le nombre de dents du pignon. Il serait donc plus adéquat de ne pas réduire les fractions, mais de les rendre équivalentes à une fraction dont le dénominateur est le nombre de dents du pignon.

Pour le plateau de 36 dents :

Nombre de dents du pignon	Nombre de tours de la roue arrière pour un tour de pédalier
12	$3 = \frac{36}{12}$
14	$2 + \frac{8}{14} = \frac{36}{14}$
16	$2 + \frac{4}{16} = \frac{36}{16}$
18	$2 = \frac{36}{18}$
20	$1 + \frac{16}{20} = \frac{36}{20}$
24	$1,5 = \frac{36}{24}$

Il suffit alors de multiplier le nombre de tours de la roue arrière par le périmètre de la roue pour obtenir le développement correspondant.

À ce stade, on peut déjà conclure que le plus petit développement sur ce plateau est obtenu en choisissant le plus grand pignon, et le plus grand développement avec le plus petit pignon.

Complétons le tableau en ajoutant les autres plateaux et profitons-en pour déterminer le plus petit et le plus grand braquet.

Nombre de dents du plateau	Nombre de dents du pignon	Nombre de tours de la roue arrière
48	12	$\frac{48}{12} = 4$
	14	$\frac{48}{14}$
	16	$\frac{48}{16} = 3$
	18	$\frac{48}{18}$
	20	$\frac{48}{20}$
	24	$\frac{48}{24} = 2$
36	12	$\frac{36}{12} = 3$
	14	$\frac{36}{14}$
	16	$\frac{36}{16}$
	18	$\frac{36}{18} = 2$
	20	$\frac{36}{20}$
	24	$\frac{36}{24} = 1,5$
24	12	$\frac{24}{12} = 2$
	14	$\frac{24}{14}$
	16	$\frac{24}{16}$
	18	$\frac{24}{18}$
	20	$\frac{24}{20}$
	24	$\frac{24}{24} = 1$

En résumé :

- Le nombre de tours de la roue arrière en un tour de pédalier (N) est le rapport entre le nombre de dents du plateau (D) et le nombre de dents du pignon (d) :

$$N = \frac{\text{nombre de dents du plateau}}{\text{nombre de dents du pignon}} = \frac{D}{d}.$$

C'est ce nombre N que nous appellerons *braquet*, de préférence à l'expression $D \times d$ qui a cours dans le milieu des cyclistes, mais qui ne se prête ni aux comparaisons, ni aux calculs.

- Le développement, qui est la distance parcourue en un tour de pédalier, est donc le produit du braquet N par le périmètre de la roue.
- Le plus petit braquet est obtenu en choisissant le plus petit plateau et le plus grand pignon, c'est-à-dire dans la fraction le plus petit numérateur et le plus grand dénominateur.
- Le plus grand braquet est obtenu en choisissant le plus grand plateau et le plus petit pignon, c'est-à-dire dans la fraction le plus grand numérateur et le plus petit dénominateur.

Remarques à partir de cet exemple :

1. Certains braquets obtenus à partir de roues dentées différentes sont les mêmes.

Pignon	Plateau	braquets
24	48	2
18	36	2
12	24	2
24	36	1,5
16	24	1,5

2. Certains braquets obtenus avec le plus petit plateau sont plus grands que d'autres obtenus avec un plateau supérieur.

Par exemple, sur le plateau à 24 dents, les pignons de 12 et 14 dents donnent des braquets plus grands que celui obtenu avec 36 dents au plateau et 24 dents au pignon.

Comparaison de développements

Voici un exemple de VTT :

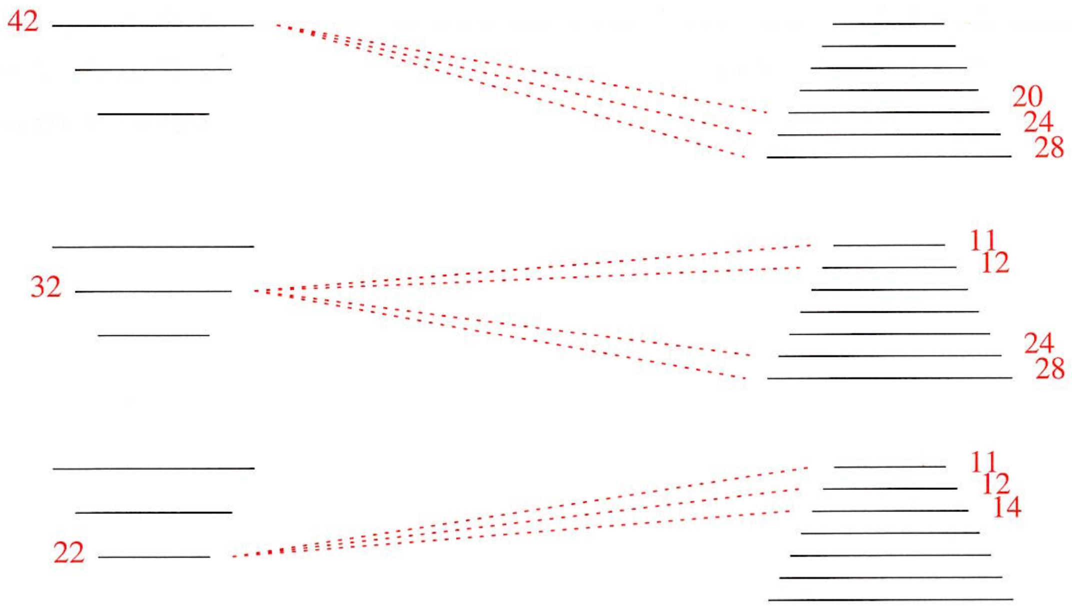
3 plateaux de 22, 32, 42 dents ;
8 pignons de 11, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28 dents.

Combien ce VTT possède-t-il de braquets ?

Existe-t-il des développements identiques ?

Le mode d'emploi déconseille les combinaisons décrites ci-dessous. Perd-on des possibilités de développements ?

Comment sélectionner les développements du plus petit au plus grand ?



Les rapports déconseillés correspondent à une situation où la torsion de la chaîne provoque une usure des dents et de la chaîne elle-même.

La construction d'un tableau à double entrée avec les différents plateaux en ligne et les pignons en colonne permet de constater que le nombre de braquets théoriques est le produit du nombre de plateaux et du nombre de pignons.

Lors de la constitution de ce tableau, il vaut mieux placer les pignons par ordre décroissant du nombre de dents, puisque nous avons constaté auparavant que le plus petit braquet sur un plateau donné est obtenu avec le plus grand pignon.

Dans chaque case du tableau, on peut noter :

- Soit uniquement le braquet. La comparaison sera plus aisée si les fractions sont transformées en nombres décimaux. Deux décimales sont nécessaires et suffisent pour classer les rapports.
- Le développement au centimètre près, obtenu en multipliant le périmètre de la roue par le braquet.

Voici le tableau des braquets et celui des développements correspondants, pour une roue de 66 cm de diamètre.

Les résultats en rouge sont les choix déconseillés par le mode d'emploi.

plateau → pignon ↓	22	32	42
28	$\frac{22}{28} = 0,78$	$\frac{32}{28} = 1,14$	$\frac{42}{28} = 1,5$
24	$\frac{22}{24} = 0,92$	$\frac{32}{24} = 1,33$	$\frac{42}{24} = 1,75$
20	$\frac{22}{20} = 1,1$	$\frac{32}{20} = 1,6$	$\frac{42}{20} = 2,1$
18	$\frac{22}{18} = 1,22$	$\frac{32}{18} = 1,78$	$\frac{42}{18} = 2,33$
16	$\frac{22}{16} = 1,37$	$\frac{32}{16} = 2$	$\frac{42}{16} = 2,62$
14	$\frac{22}{14} = 1,57$	$\frac{32}{14} = 2,28$	$\frac{42}{14} = 3$
12	$\frac{22}{12} = 1,83$	$\frac{32}{12} = 2,67$	$\frac{42}{12} = 3,5$
11	$\frac{22}{11} = 2$	$\frac{32}{11} = 2,9$	$\frac{42}{11} = 3,82$

plateau → pignon ↓	22	32	42
28	1,62 m*	2,36 m	3,1 m
24	1,89 m	2,76 m	3,6 m
20	2,28 m	3,31 m	4,35 m
18	2,53 m	3,68 m	4,8 m
16	2,84 m	4,14 m	5,43 m
14	3,25 m	4,73 m	6,21 m
12	3,79 m	5,52 m	7,24 m
11	4,14 m	6,02 m	7,9 m

$^*\frac{22}{28}$ de 2,07 m = 1,62 m

Le premier tableau nous montre que, si on n'utilise pas les braquets déconseillés, on peut sélectionner les braquets du plus petit au plus grand comme suit :

sur le plus petit plateau, 5 pignons par ordre décroissant ;
sur le plateau moyen, 4 pignons par ordre décroissant ;
sur le grand plateau, 5 pignons par ordre décroissant.

On sélectionne donc les plateaux du plus petit au plus grand et, pour chaque plateau, les pignons sont choisis par ordre décroissant. Cette sélection fournit des développements en croissance progressive. C'est ce qui est réalisé par un sélecteur automatique. Les possibilités de développements ainsi perdues ne gênent pas le cycliste, car chacun des braquets déconseillés est proche d'un braquet obtenu sur un autre plateau.

À vos vélos, et que la promenade soit agréable !

Bibliographie

[1] *Even More Mathematical Activities*, BOLT B., Cambridge University Press, 1987.

[2] *Promenade en vélo, destination fractions*, CUISINIER, G., GUISSARD, M.-F. et VALENDUC, A.-M., Brochure du CREM, 1999.

[3] *Mathactive*, Documents pédagogiques, Mathématique dans l'enseignement professionnel, Ministère de l'Éducation Nationale.

[4] *Le feu, la lumière, le temps qui passe*, Guide du maître de CE au CM. Collection Raymond Tavernier, L'éveil par les activités scientifiques, Bordas.

* * *

Erratum

Une erreur s'est glissée dans la rubrique « Anniversaire » (page 3) de *Math-Jeunes* numéro 99. L'énoncé correct du « petit théorème de Fermat » est :

Si p est un nombre premier et a un nombre naturel, premier avec p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

RALLYE problèmes

C. Festraets

Voici les cinq problèmes suivants de ce rallye 2001-2002 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de *Math-Jeunes*, n'oubliez pas d'affranchir suffisamment vos lettres et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 15 avril 2002.

6 – Jouons aux dés

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. À l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme s de tous ces nombres après 2 001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

a) Donner la valeur minimale et la valeur maximale que l'on peut obtenir pour s.

b) La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

7 – Les trois nombres

On considère trois nombres positifs a, b et c tels que $a < b < c$ et tels que la différence entre a et b est la même que celle entre b et c. Déterminer ces nombres sachant que leur somme est égale à 6 et que la somme de leurs cubes est égale à $\frac{88}{3}$.

8 – Tournoi d'échecs

Deux joueurs s'affrontent dans un tournoi d'échecs, il n'y a aucun match nul. Le vainqueur sera celui qui gagne deux parties consécutives ou qui gagne un total de trois parties. Quelle doit être la durée d'une partie pour finir le tournoi en six heures au maximum ? Quelle sera alors la durée moyenne du tournoi en supposant que chaque joueur a une chance sur deux de gagner une partie ?

9 – Produit des chiffres

Combien y a-t-il d'entiers positifs de cinq chiffres dont le produit des chiffres est égal à 2 000 ?

10 – Multiple

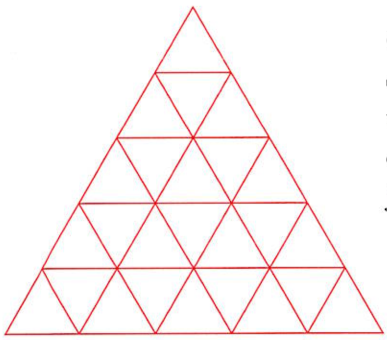
a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux et tels que

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331}.$$

Démontrer que a est un multiple de 1997.

Solution du problème « Mosaïque »

Examinons un triangle équilatéral de côté n cm, pavé de petits triangles équilatéraux de côté 1 cm.



Comptons d'abord le nombre de petits triangles dont la pointe est en haut, en partant de la base du grand triangle équilatéral : il y a une première rangée qui comporte n triangles, puis $n-1$ dans la deuxième rangée, $n-2$ dans la troisième rangée, et ainsi de suite jusqu'au sommet où il y a un triangle, soit en tout

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

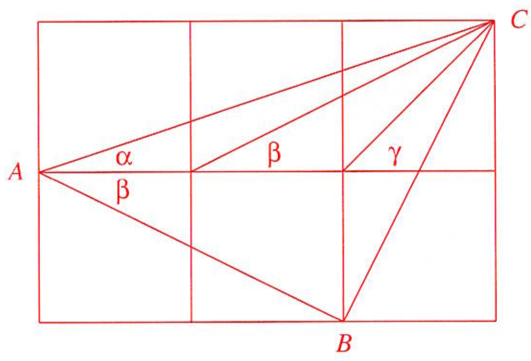
Comptons ensuite le nombre de petits triangles dont la pointe est en bas, en partant de la base du grand triangle équilatéral : il y en a $n-1$ dans la première rangée, $n-2$ dans la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière rangée où il y en a 1, soit en tout $(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

Le nombre total de petits triangles équilatéraux est égal à $\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2$.

Nous disposons de 15878 petits triangles ; le plus grand carré contenu dans 15878 est $15\,876 = 126^2$. Nous pouvons donc construire une mosaïque de côté 126 cm et il restera 2 pièces après cette construction.

Solution du problème « Trois carrés »

Si nous prenons comme unité le côté d'un des carrés, on a $|AB|^2 = |BC|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ et $|AC|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, d'où $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ ce qui montre que le triangle ABC est rectangle isocèle. Dès lors, $\alpha + \beta = 45°$ et comme $\gamma = 45°$, la somme des trois angles est égale à $90°$.



Solution du problème « Multiple de 3 »

Pour qu'un nombre soit multiple de 3, il faut que la somme de ses chiffres soit multiple de 3. On a donc quatre choix possibles : $(1, 2, 3)$ ou $(1, 2, 6)$ ou $(1, 2, 9)$ ou $(3, 6, 9)$.

Il y a dix manières de choisir trois nombres parmi cinq, énumérons-les : $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 2, 9)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 3, 9)$, $(1, 6, 9)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 3, 9)$, $(2, 6, 9)$ et $(3, 6, 9)$.

Pour que le nombre de trois chiffres soit multiple de 3, il y a quatre possibilités parmi dix, la probabilité est donc de $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Solution du problème « Héritage »

Soit x le montant de la fortune d'Harpagon.

Le premier enfant reçoit $100\,000 + \frac{x - 100\,000}{10} = 90\,000 + \frac{x}{10}$.

Il reste alors $x - 90\,000 - \frac{x}{10} = \frac{9x}{10} - 90\,000$.

Le deuxième enfant reçoit $200\,000 + \frac{\frac{9x}{10} - 90\,000 - 200\,000}{10} = 171\,000 + \frac{9x}{100}$.

Ils ont reçu tous les deux la même somme, donc $90\,000 + \frac{x}{10} = 171\,000 + \frac{9x}{100}$.

En multipliant les deux membres par 100, on trouve : $9\,000\,000 + 10x = 17\,100\,000 + 9x$.

D'où $x = 17\,100\,000 - 9\,000\,000 = 8\,100\,000$.

La fortune d'Harpagon s'élève à 8 100 000 francs et on vérifie aisément que chaque enfant reçoit 900 000 francs.
Harpagon a donc 9 enfants.

Solution du problème « Un grand tableau »

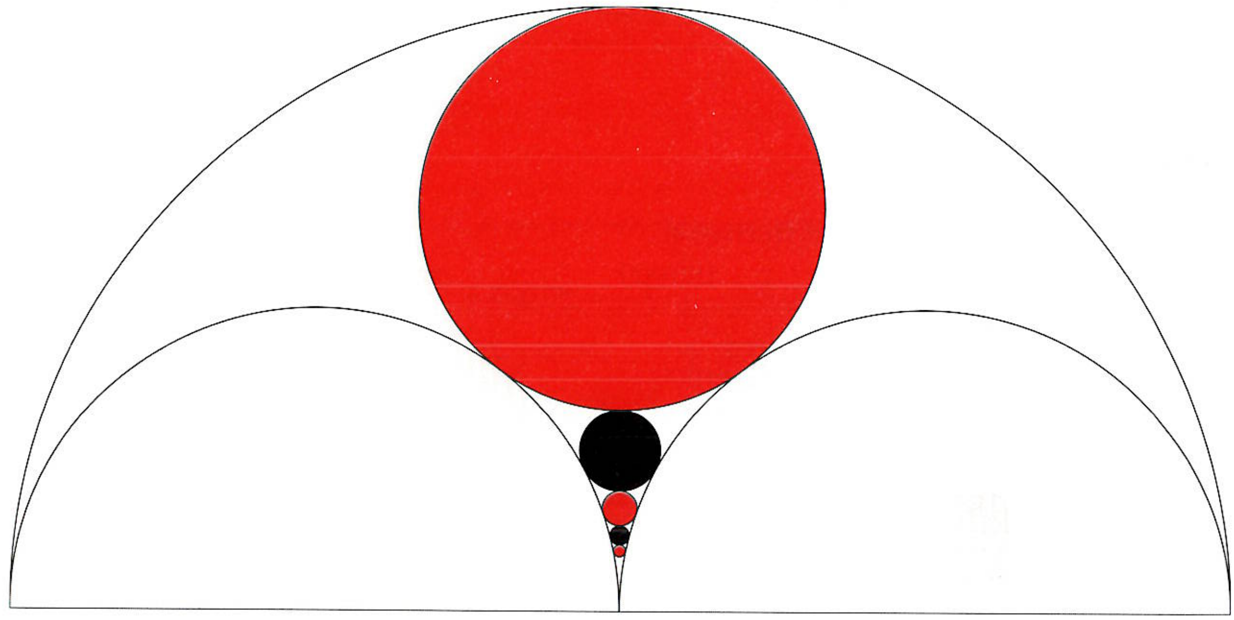
Un nombre choisi dans le tableau est de la forme $(k-1)n + i$ où k est le numéro de la ligne et i le numéro de la colonne où se trouve le nombre. k et i varient donc de 1 à n. Comme on prend n nombres tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas dans la même ligne ni dans la même colonne, k prend toutes les valeurs différentes de 1 à n et de même pour i. La somme vaudra donc

$$\begin{aligned}(0n + 1n + 2n + 3n + \cdots + (n-1)n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) &= \frac{(0n + (n-1)n)n}{2} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n-1)n^2 + (n+1)n}{2} \\ &= \frac{n^3 + n}{2}\end{aligned}$$

Disques Tritangents

Yolande Noël-Roch

Math-Jeunes n°100 S,38–41, 2002

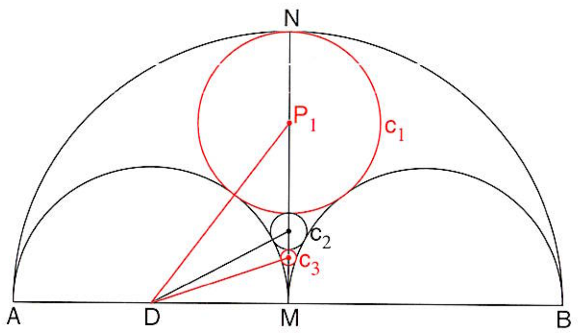


Essaie de reproduire le dessin ci-dessus.

Sans doute n'as-tu rencontré aucun problème pour dessiner les trois demi-disques de départ … mais il est moins commode de dessiner la famille des disques alternativement rouges et noirs !

Pour des raisons de symétrie de la figure, les centres de ces disques appartiennent au diamètre du « grand » demi-disque tangent aux deux « petits » demi-disques. Pour tracer le grand disque rouge, il faut savoir choisir le centre et le rayon. Les contraintes de symétrie et de tangence entre le disque rouge et le grand demi-disque permettent de résoudre le problème. C'est ce que nous allons faire en prenant le rayon r du grand demi-disque comme unité de longueur.

1. Calcul de r_1



Nous désignons par c_1 le grand cercle rouge, par P_1 son centre et par r_1 son rayon.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle DMP_1 :

$$|DP_1|^2 = |DM|^2 + |MP_1|^2$$

Comme $|MA| = |MB| = |MN| = 1$, on a $|DM| = \frac{1}{2}$ et $|MP_1| = |MN| - |NP_1| = 1 - r_1$. De plus, parce que les disques sont tangents, $|DP_1| = \frac{1}{2} + r_1$.

Nous obtenons dès lors

$$\left(\frac{1}{2} + r_1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - r_1)^2$$

D'où nous tirons

$$\boxed{r_1 = \frac{1}{3}}$$

2. Calcul de r_2

Désignons par P_2 et r_2 le centre et le rayon du disque c_2 (le deuxième disque de la famille des « disques tritangents »).

Dans le triangle rectangle DMP_2, nous pouvons affirmer

$$\begin{aligned} |DP_2|^2 &= |DM|^2 + |MP_2|^2 \\ \left(\frac{1}{2} + r_2\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 2r_1 - r_2)^2 \end{aligned}$$

Connaissant $r_1 = \frac{1}{3}$, nous déduisons

$$\boxed{r_2 = \frac{1}{15}}$$

3. Calcul de r_3

Dans le triangle DMP_3 :

$$\left(\frac{1}{2} + r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 2r_1 - 2r_2 - r_3)^2$$

Connaissant $r_1 = \frac{1}{3}$ et $r_2 = \frac{1}{15}$, nous déduisons

$$\boxed{r_3 = \frac{1}{35}}$$

4. Et la suite ?

En observant les valeurs de r_1, r_2 et r_3, essaie de conjecturer la valeur de r_4. Contrôle ton intuition en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle DMP_4.

Que valent r_5, r_6, ... r_{10}, r_n ?

Pour induire une forme générale de r_n, observons la manière dont r_3, r_2 et r_1 ont été calculés.

Une étape du calcul	Une égalité équivalente	Calcul final
$\frac{7}{5}r_3 = \frac{1}{25}$	$7r_3 = \frac{1}{5}$	$r_3 = \frac{1}{5\times 7}$
$\frac{5}{3}r_2 = \frac{1}{9}$	$5r_2 = \frac{1}{3}$	$r_2 = \frac{1}{3\times 5}$
$3r_1 = 1$	$r_1 = \frac{1}{3}$	$r_1 = \frac{1}{1\times 3}$

Ce tableau nous permet de « deviner »

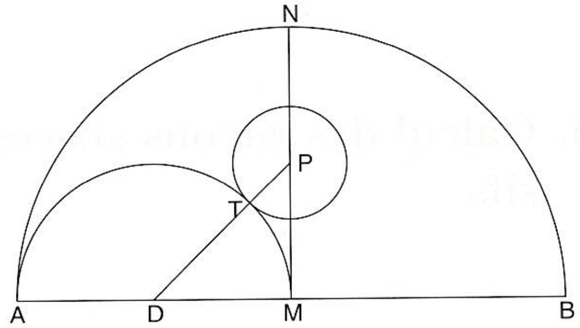
$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{1}{7\times 9} = \frac{1}{63} \\ r_5 &= \frac{1}{9\times 11} = \frac{1}{99} \\ &\vdots \\ r_{10} &= \frac{1}{19\times 21} = \frac{1}{399} \\ &\vdots \\ r_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}$$

À partir des calculs produits en appliquant le théorème de Pythagore, nous venons d'induire une façon de calculer r_n quel que soit n. Pour cela, nous avons dû concentrer notre attention sur le déroulement des calculs plutôt que sur les résultats obtenus dans les cas particuliers.

Reprenons ce déroulement dans le cas général.

5. Calcul de r_n

Observons la situation pour un disque quelconque de la famille (rouge ou noir !) :



Désignons par r le rayon du disque, par P son centre et par T le point de tangence entre ce disque et le disque de centre D et de rayon $[DA]$.

Comme dans les calculs déjà effectués, nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore

$$|DP|^2 = |DM|^2 + |PM|^2$$

Conformément au choix antérieur de l'unité de longueur, $|AM| = |MB| = |MN| = 1$ et $|DM| = \frac{1}{2}$.

Dans toujs les cas, le théorème de Pythagore s'applique avec

$$\begin{aligned} |DP|^2 &= \left(\frac{1}{2} + r\right)^2 \\ |DM|^2 &= \frac{1}{4} \\ |PM|^2 &= (1 - |NP|)^2 \end{aligned}$$

Mais $|NP|$ qui valait

- r_1 dans le calcul de r_1,
- $2r_1 + r_2$ dans le calcul de r_2,
- $2r_1 + 2r_2 + r_3$ dans le calcul de r_3,

vaut $2r_1 + 2r_2 + \cdots + 2r_{n-1} + r_n$ dans le calcul de r_n.

Nous sommes ainsi amenés à trouver r_n à partir de

$$\left(\frac{1}{2} + r_n\right)^2 = \frac{1}{4} + (1 - 2r_1 - \cdots - 2r_{n-1} - r_n)^2$$

... ce qui est possible si les valeurs de r_1, r_2, ..., r_{n-1} ont été préalablement calculées.

En posant $A = 1 - 2r_1 - \cdots - 2r_{n-1}$, nous avons

$$\left(\frac{1}{2} + r_n\right)^2 = \frac{1}{4} + (A - r_n)^2$$

d'où

$$r_n = \frac{A^2}{1 + 2A}$$

6. Calcul des rayons successifs

Nous pouvons maintenant calculer n'importe quel rayon par le procédé itératif mis au point jusqu'ici. Nous connaissons $r_1 = \frac{1}{3}$, la « première valeur » de A est donc $1 - 2r_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Nous connaissons ainsi la première ligne du tableau ci-dessous :

$r = \frac{A^2}{1+2A}$	A
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\vdots$	$\vdots$

Retrouvons, grâce à cet algorithme, les valeurs de r_2, r_3 et r_4 :

$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15}$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$
$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{7} = \frac{1}{35}$	$\frac{1}{5} - \frac{2}{35} = \frac{1}{7}$
$\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{9} = \frac{1}{63}$	$\frac{1}{7} - \frac{2}{63} = \frac{1}{9}$

7. Deux façons d'obtenir les mêmes résultats

Rappelons-nous la formule « devinée » dans un premier temps :

$$r_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Indiçons les valeurs successives de A :

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - 2r_1 \\ A_2 &= 1 - 2r_1 - 2r_2 \\ A_3 &= 1 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 \\ &\vdots \\ A_n &= 1 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - \cdots - 2r_n \end{aligned}$$

Nous pouvons alors contrôler que la deuxième et la quatrième colonne du tableau ci-dessous provoquent des calculs différents mais que les résultats sont identiques (sauf erreur de calcul !) :

i	$r_i = \frac{A_{i-1}^2}{1+2A_{i-1}}$	$A_i = A_{i-1} - 2r_i$	$r_i = \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{(4-1)(4+1)} = \frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{(6-1)(6+1)} = \frac{1}{35}$
4	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{(8-1)(8+1)} = \frac{1}{63}$
5	$\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{1+\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{11} = \frac{1}{99}$	$\frac{1}{9} - \frac{2}{99} = \frac{1}{11}$	$\frac{1}{(10-1)(10+1)} = \frac{1}{99}$
6	$\frac{\left(\frac{1}{11}\right)^2}{1+\frac{2}{11}} = \frac{\frac{1}{11}}{13} = \frac{1}{143}$	$\frac{1}{11} - \frac{2}{143} = \frac{1}{13}$	$\frac{1}{(12-1)(12+1)} = \frac{1}{143}$
7	$\frac{\left(\frac{1}{13}\right)^2}{1+\frac{2}{13}} = \frac{\frac{1}{13}}{15} = \frac{1}{195}$	$\frac{1}{13} - \frac{2}{195} = \frac{1}{13}$	$\frac{1}{(14-1)(14+1)} = \frac{1}{195}$
$\vdots$	$\vdots$		

Pour réaliser de tels calculs, l'outil idéal est un tableur. Voici un extrait d'un travail sur `Excel`.

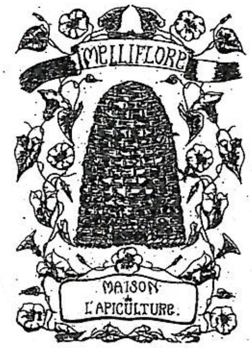
B	C	D	E
i	ri	Ai	ri
1	0,33333333	0,33333333	=1/((2*B2-1)*(2*B2+1))
=B2+1	=D2*D2/(1+2*D2)	=D2-2*C3	=1/((2*B3-1)*(2*B3+1))
=B3+1	=D3*D3/(1+2*D3)	=D3-2*C4	=1/((2*B4-1)*(2*B4+1))
=B4+1	=D4*D4/(1+2*D4)	=D4-2*C5	=1/((2*B5-1)*(2*B5+1))
=B5+1	=D5*D5/(1+2*D5)	=D5-2*C6	=1/((2*B6-1)*(2*B6+1))
=B6+1	=D6*D6/(1+2*D6)	=D6-2*C7	=1/((2*B7-1)*(2*B7+1))
=B7+1	=D7*D7/(1+2*D7)	=D7-2*C8	=1/((2*B8-1)*(2*B8+1))
=B8+1	=D8*D8/(1+2*D8)	=D8-2*C9	=1/((2*B9-1)*(2*B9+1))
=B9+1	=D9*D9/(1+2*D9)	=D9-2*C10	=1/((2*B10-1)*(2*B10+1))
=B10+1	=D10*D10/(1+2*D10)	=D10-2*C11	=1/((2*B11-1)*(2*B11+1))
=B11+1	=D11*D11/(1+2*D11)	=D11-2*C12	=1/((2*B12-1)*(2*B12+1))
=B12+1	=D12*D12/(1+2*D12)	=D12-2*C13	=1/((2*B13-1)*(2*B13+1))
=B13+1	=D13*D13/(1+2*D13)	=D13-2*C14	=1/((2*B14-1)*(2*B14+1))
=B14+1	=D14*D14/(1+2*D14)	=D14-2*C15	=1/((2*B15-1)*(2*B15+1))
=B15+1	=D15*D15/(1+2*D15)	=D15-2*C16	=1/((2*B16-1)*(2*B16+1))
=B16+1	=D16*D16/(1+2*D16)	=D16-2*C17	=1/((2*B17-1)*(2*B17+1))
=B17+1	=D17*D17/(1+2*D17)	=D17-2*C18	=1/((2*B18-1)*(2*B18+1))
=B18+1	=D18*D18/(1+2*D18)	=D18-2*C19	=1/((2*B19-1)*(2*B19+1))
=B19+1	=D19*D19/(1+2*D19)	=D19-2*C20	=1/((2*B20-1)*(2*B20+1))

i	ri	Ai	ri
1	0,3333333	0,333	0,33333333
2	0,0666667	0,2	0,06666667
3	0,0285714	0,143	0,02857143
4	0,015873	0,111	0,01587302
5	0,010101	0,091	0,01010101
6	0,006993	0,077	0,00699301
7	0,0051282	0,067	0,00512821
8	0,0039216	0,059	0,00392157
9	0,003096	0,053	0,00309598
10	0,0025063	0,048	0,00250627
11	0,0020704	0,043	0,00207039
12	0,0017391	0,04	0,00173913
13	0,0014815	0,037	0,00148148
14	0,0012771	0,034	0,00127714
15	0,0011123	0,032	0,00111235
16	0,0009775	0,03	0,00097752
17	0,0008658	0,029	0,0008658
18	0,0007722	0,027	0,0007722
19	0,000693	0,026	0,000693

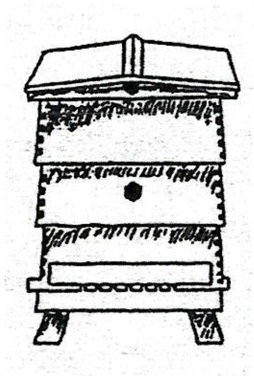
La mathématique au quotidien ...

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

Le goût du miel



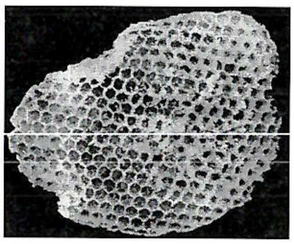
Les journées du patrimoine organisées chaque année en région wallonne pendant le mois de septembre, nous donnent la possibilité de découvrir des « richesses » méconnues (ou inaccessibles en temps normal) et parfois si proches de notre environnement habituel. C'est fort bien ainsi.



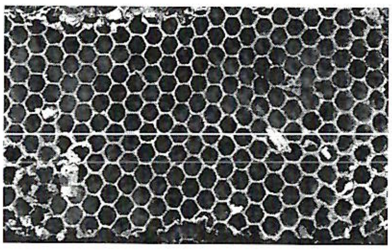
Et c'est parfois aussi l'occasion de rencontrer des « mathématiques » là où on ne les attend peut-être pas. C'est ainsi qu'attirés par la publicité de ces journées, vous auriez pu, comme je l'ai fait, visiter un rucher et y recevoir des explications détaillées sur l'élevage des abeilles et sur la qualité des produits magiques qu'elles nous offrent. L'organisation de leur vie sociale est également un sujet d'étonnement et d'admiration.

Mais les abeilles ont aussi des dons (ou des instincts) de mathématiciens et d'ingénieurs. Partons donc maintenant à la rencontre de quelques aspects mathématiques cachés du côté des ruches.

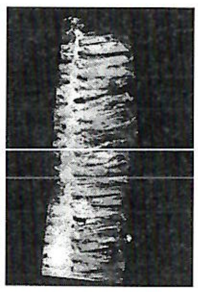
Que ce soit à l'état sauvage ou dans un élevage d'apiculteur, les abeilles construisent des cellules basées, depuis toujours, sur un même modèle. Voici des vues des cellules.



Essaim sauvage



Essaim d'élevage

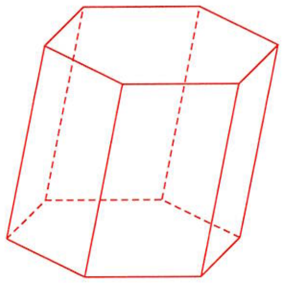


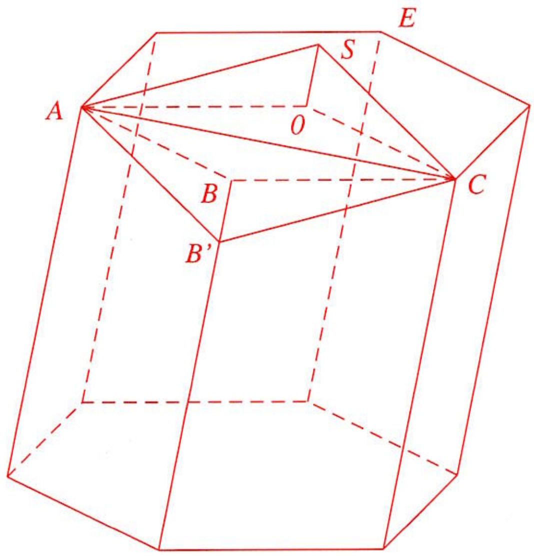
Vue « verticale »

Les abeilles construisent, par instinct, des rayons à deux faces, disposés verticalement. Chaque face est composée de cellules légèrement inclinées vers le bas et, comme le montrent bien les illustrations, à ouvertures hexagonales. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les cellules des deux faces ne sont pas deux à deux dans le prolongement l'une de l'autre.

Math-Jeunes n°100 S,42–45, 2002

Chacune des cellules est accolée par le fond à trois cellules de l'autre face du rayon ce qui permet d'assurer une meilleure solidité à l'ensemble mais aussi d'obtenir une optimisation du volume avec un minimum de cire. En idéalisant la situation et en utilisant le langage mathématique, on dira que chaque cellule est un prisme à base hexagonale (l'ouverture). La figure ci-contre montre un prisme dont les deux bases hexagonales sont parallèles et donc isométriques. Mais le « fond » de chaque alvéole des abeilles n'est pas plane. Il est formé de trois losanges isométriques. Chaque losange est commun avec un losange du fond d'une cellule de l'autre face.





Chacun de ces losanges est obtenu comme l'illustre la figure ci-contre représentant une alvéole retournée (pour des motifs de visibilité). En fait, tout se passe comme si la pyramide $AB'CB$ était « découpée » du prisme initial pour être remplacée par son image $ASCO$ par la rotation de 180° autour de l'axe AC. Notez bien que les volumes des pyramides $AB'CB$ et $ASCO$ sont égaux. En raisonnant de même pour des rotations autour des axes EC et EA, on retrouve la forme globale d'une alvéole d'abeille.

La forme hexagonale des alvéoles construites par les abeilles a été remarquée par ARISTOTE (4^e^ siècle ap. J.-C.). PAPPUS (4^e^ siècle ap. J.-C.) a étudié cela d'un point de vue géométrique. C'est au 18^e^ siècle, que MARALDI, un astronome de l'observatoire de Paris, a recherché expérimentalement les angles des **losanges**. Il a obtenu 70°32' et donc 109°28' pour le supplément. En 1739, un géomètre allemand, KÖENIG, détermina, par des techniques sophistiquées de calcul, que les angles des losanges étaient respectivement de 70°34' et donc de 109°26' pour le supplément.

Les valeurs trouvées par MARALDI étaient remarquablement proches de celles obtenues par KÖENIG.

Mais il y a mieux !

En 1743, MACLAURIN « revisita » les calculs de KÖENIG et y découvrit une légère erreur. Après rectification, il obtint 70°32' (donc 109°28') c'est à dire les mêmes valeurs que celles données par MARALDI.

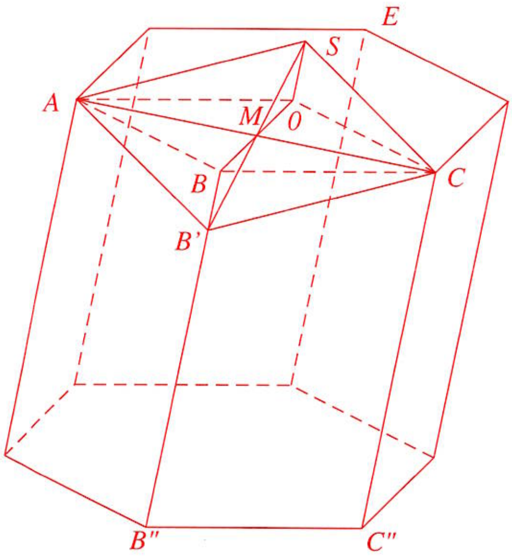
Comment celui-ci avait-il pu obtenir une telle précision ? La réponse ne m'est pas connue.
Il semble bien que les abeilles, agissant d'instinct, essayent de minimiser, pour un volume donné, la surface totale de leurs alvéoles ce qui leur permet des économies de cire.

Car si le volume total du prisme de départ n'est pas modifié par les transformations décrites de son fond, il n'en est pas de même de sa surface totale. Celle-ci dépendra de l'inclinaison du plan de chaque losange par rapport au plan initial de base du prisme originel.

Si vous avez connaissance du traitement de problèmes d'optimisation par l'emploi de la dérivée d'une fonction, vous ne devriez pas être en peine de comprendre ce qui suit.

Dans le cas contraire, votre lecture peut s'arrêter provisoirement ici et il ne vous reste qu'à faire crédit à ce qui précède et à aller directement à la conclusion de ce texte.

Continuons le combat ! Considérons que le prisme est droit. Soit α la mesure, en dregrés, de l'angle SMO. Soit c la longueur de $[B"C"]$ et h celle de $[CC"]$.
L'hexagone de base est un hexagone régulier, on a :



$$|OM| = \frac{|OB|}{2} = \frac{c}{2}$$
$$|SO| = |OM| \operatorname{tg} \alpha = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{2}$$
$$|MC| = |OM| \operatorname{tg} 60° = \frac{c\sqrt{3}}{2} \text{ (triangle } OMC)$$
$$|SM| = \frac{|SO|}{\sin \alpha} = \frac{c \times \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{c}{2 \cos \alpha} \text{ (triangle } SOM)$$
$$|B'B"| = h - |BB'| = h - |SO| = \frac{2h - c \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

L'aire totale de l'alvéole vaut 6 fois l'aire du trapèze $B'B"C"C$ plus 3 fois l'aire du losange $SCB'A$.

$$\text{Aire } (B'B"C"C) = \left(h + \frac{2h - c \operatorname{tg} \alpha}{2}\right) \times \frac{c}{2} = \frac{(4h - c \operatorname{tg} \alpha) \times c}{4} = \frac{4hc - c^2 \operatorname{tg} \alpha}{4}$$

$$\text{Aire } (SCB'A) = \frac{c\sqrt{3} \times c}{2 \cos \alpha} = \frac{c^2\sqrt{3}}{2 \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aire totale de l'alvéole} &= 6 \times \frac{4hc - c^2 \operatorname{tg} \alpha}{4} + 3 \times \frac{c^2\sqrt{3}}{2 \cos \alpha} \\
&= 6ch - \frac{3c^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{3c^2\sqrt{3}}{2 \cos \alpha} \\
&= \frac{12ch \cos \alpha - 3c^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + 3c^2\sqrt{3}}{2 \cos \alpha} \\
&= \frac{12ch \cos \alpha + 3c^2(\sqrt{3} - \sin \alpha)}{2 \cos \alpha} \\
&= 6ch + \frac{3}{2}c^2 \times \frac{\sqrt{3} - \sin \alpha}{\cos \alpha}
\end{aligned}$$

c et h sont des longueurs donc des nombres positifs. L'expression précédente varie comme $\dfrac{\sqrt{3} - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ qui dépend de la variable α et peut être désignée par $f(\alpha)$.

Les variations de $f(\alpha)$ s'étudient grâce à sa dérivée.

Cette dérivée est $f'(\alpha) = \dfrac{-1+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ qui s'annule pour $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

L'étude du signe de $f'(\alpha)$ montre que pour cette valeur de $\sin\alpha$, l'aire totale de l'alvéole est minimale.

Dans ce cas, $\alpha = 35°15'52''\ldots$

Il ne reste plus qu'à calculer les valeurs des angles des losanges, correspondants à cette valeur de α.

Reprenons la figure d'étude.
Désignons par 2β la mesure en degrés de l'angle ASC. La mesure en degrés de l'angle MSC est alors β. On a

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|MC|}{|MS|} = \frac{c\sqrt{3}\times 2\cos\alpha}{2c} = \sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Pour $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, on a

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}\sqrt{1-\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}$$

(cf. le complément ci-dessous).

Avec la calculatrice, on trouve $2\beta = 109°28'16''\ldots$ c'est-à-dire les valeurs trouvées par Maraldi. De toute façon, ces valeurs sont idéales car dans la réalité le prisme n'est pas droit suite à l'inclinaison des alvéoles.

Complément

Une formule de trigonométrie donne $\cos(2\beta) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$.

Si vous ne la connaissez pas, c'est le moment de la retenir ! Donc, ici, $\cos(2\beta) = \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3}$.

Cette valeur se retrouve comme cosinus des angles des liaisons $H-C-H$ dans la molécule de méthane où l'atome C occupe le centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont les quatre atomes H.

Elle se retrouve également comme cosinus de l'angle de deux faces latérales d'une pyramide à base carrée dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. Vous pouvez, à titre d'exercice, vérifier ces faits.

Bonne cure de gelée royale !

Sources

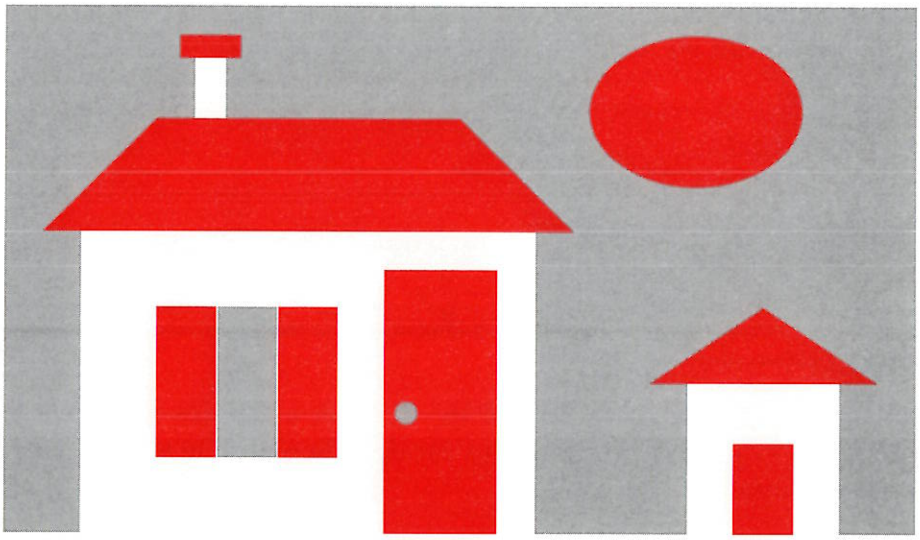
- *Géométrie de l'espace et du plan*, Sortais Y. et R., Hermann.
- *Exercices d'algèbre*, Schons, La Procure, Namur.
- *Melliflore*, apiculture à Erquennes (Hainaut).
- Divers sites Internet.

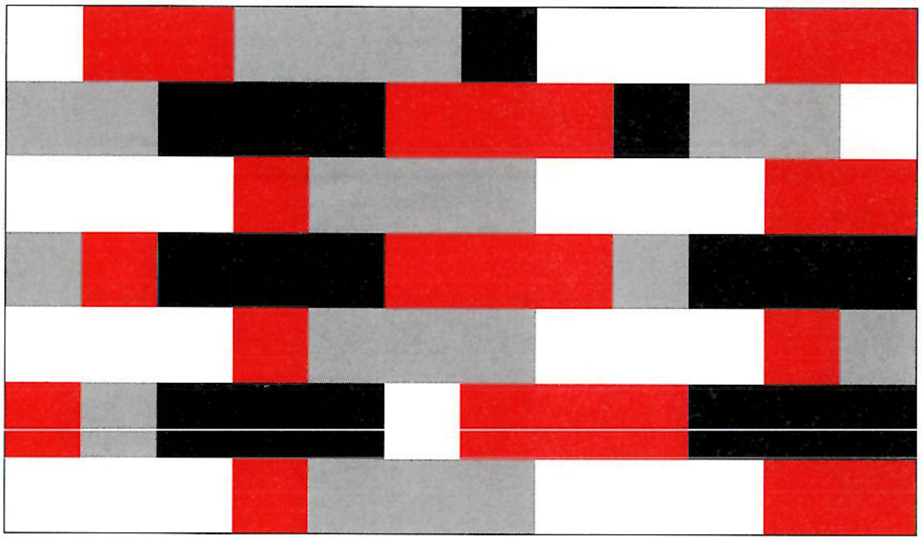
Solution des jeux du MJ 99S

Michel Ballieu, *CREM*

1. Le problème des quatre couleurs

Le premier problème est très simple puisqu'on peut trouver une solution qui utilise trois couleurs seulement.





2. L'horloge frileuse

Un calcul rapide montre que l'avance en vingt-quatre heures est de $(30 - 20)$ secondes $=$ 10 secondes c'est-à-dire $\frac{1}{6}$ de minute. Il faudra donc $5 \times 6 = 30$ jours pour une avance de 5 minutes. Le 31 mai au matin, l'avance sera donc exactement de 5 minutes...

Math-Jeunes n°100 S,46–48, 2002

Mais nous observons que, le matin du 28 mai, l'avance était de $27 \times \frac{1}{6}$ de minute, soit quatre minutes et demie et donc, au soir de ce même jour, l'avance est de cinq minutes également.

3. Nombres parfaits

Le nombre 6 est parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.

Le suivant est 28 car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ensuite, on passe à $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$. Et en fait, il y en a encore beaucoup d'autres.

Nous reparlerons plus en détail de ces nombres parfaits dans le prochain *Math-Jeunes*.

4. Les brebis

Soit n le nombre de brebis. Le nombre $(n - 1)$ doit être divisible par 2, 3, 4, 5 et 6. Il est donc multiple de 60 et n est de la forme $60k + 1 = 7\ell$ puisqu'il est divisible par 7. Le nombre n peut ainsi se déterminer à partir de l'équation diophantienne linéaire :

$$7\ell - 60k = 1.$$

En donnant à k des valeurs entières positives successives, on trouve la plus petite solution pour $k = 5$ qui fournit $n = 301$. On voit facilement que ce problème admet une infinité de solutions.

5. Les oiseaux

Ce problème est issu du chapitre onze du *Liber abaci* de LEONARDO PISANI dit FIBONACCI. Dans le prologue de cette œuvre, l'auteur nous révèle que son père était *publicus scriba*, responsable de la comptabilité pour les commerçants de la ville de Pise, à la douane de Bougie (Bejaïa) en Algérie. Il fit venir auprès de lui le jeune Léonard afin qu'il s'initie aux méthodes de calcul par le biais des « figures indiennes » que nous avons l'habitude de nommer « chiffres arabes ».

LEONARDO FIBONACCI n'aura de cesse de répandre, dans tout le bassin méditerranéen, les connaissances acquises au contact des Arabes et contribue ainsi à faire connaître en Occident la numération de position.

Le chapitre onze du *Liber abaci* expose des problèmes de proportionnalité liés à la fabrication des pièces de monnaie. À l'époque, une pièce valait son « pesant » de métal précieux (or ou argent) dont le taux différait selon la ville (Gênes, Pise, Florence, ...) qui battait monnaie.

La technique de résolution qu'il décrit à cette occasion lui permet de traiter des problèmes qui débouchent sur des équations diophantiennes (à solutions entières) indéterminées. Parmi ces problèmes, celui des oiseaux est célèbre.

Le système linéaire qui traduit ce problème est :

$$\begin{cases} 3x + 2y + \dfrac{z}{2} & = 30, \\ x + y + z & = 30, \end{cases}$$

où x, y et z sont des entiers positifs qui représentent respectivement les nombres de perdrix, de colombes et de moineaux.

Fibonacci observe tout d'abord que, pour acheter 30 oiseaux pour 30 deniers, il faut constituer des ensembles de n oiseaux pour n deniers de manière que *l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces les plus chères.* On peut simplifier le problème en recherchant des combinaisons de seulement deux espèces d'oiseaux dans cette proportion. Fibonacci observe que $1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$, ce qui fournit un ensemble de *cinq* oiseaux (une perdrix et quatre moineaux) pour *cinq* deniers (ensemble E_1 du tableau ci-après).

Il observe encore que $1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$, ce qui lui donne cette fois un ensemble de *trois* oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour *trois* deniers (ensemble E_2 du tableau).

En considérant une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtient *trente* oiseaux pour *trente* deniers. La solution du problème consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second ($E = 3E_1 + 5E_2$).

	perdrix à 3 deniers	colombes à 2 deniers	moineaux à 1/2 denier	nombre d'oiseaux	coût
E_1	1		4	$1+4=5$	$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$
E_2		1	2	$1+2=3$	$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$
E	3	5	$3 \times 4 + 5 \times 2 = 22$	$3+5+22=30$	$3 \times 3 + 5 \times 2 + 22 \times \frac{1}{2} = 30$

L'auteur termine en nous signalant qu'il est possible de trouver des combinaisons linéaires qui réalisent des ensembles de n'importe quel nombre n d'oiseaux pour n deniers si n est supérieur à 15. Mais pour n inférieur à 15, il affirme que le problème n'est possible que pour 8, 11 et 13 oiseaux, et il décrit la combinaison qui fournit la solution dans chacun des cas. Remarquons tout d'abord que Fibonacci a oublié de mentionner la combinaison $1E_1 + 3E_2$ qui donne 14 oiseaux pour 14 deniers. Pour n supérieur à 15, on peut obtenir

16 oiseaux pour 16 deniers : $2E_1 + 2E_2$,
17 oiseaux pour 17 deniers : $1E_1 + 4E_2$,
18 oiseaux pour 18 deniers : $3E_1 + 1E_2$.

À partir de là, on obtient 19, 20 et 21 oiseaux en ajoutant $1E_2$ à chacune des combinaisons précédentes et ainsi de suite.

Bibliographie

[1] CREM, *De la proportionnalité à la linéarité*, Rapport de recherche à paraître.

[2] Fibonacci, L., *Liber abaci*, Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* n° 2616 *codice Magliabechiano (Badia Fiorentina)*, Biblioteca Nazionale, Firenze.

[3] Ghersi, I., *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano, 1999.

Math-Jeunes

vous offre une page de nombres premiers.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193,
197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421,
431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547,
557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659,
661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,
809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929,
937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039,
1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151,
1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259,
1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373,
1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483,
1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583,
1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697,
1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811,
1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933,
1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053,
2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153,
2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287,
2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389,
2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531,
2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659,
2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741,
2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857,
2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999,
3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121,
3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257,
3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371,
3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511,
3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607, 3613,
3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719, 3727,
3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853,
3863, 3877, 3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989,
4001, 4003, 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099,
4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231,
4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349, 4357,
4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483, 4493,
4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637,
4639, 4643, 4649, 4651, 4657, 4663, 4673, 4679, 4691, 4703, 4721, 4723, 4729, 4733, 4751,
4759, 4783, 4787, 4789, 4793, 4799, 4801, 4813, 4817, 4831, 4861, 4871, 4877, 4889, 4903,
4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957, 4967, 4969, 4973, 4987, 4993, 4999, 5003.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée