

# MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique  
d'expression française

## *Math-Jeunes*

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe  
36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P.  
CAZZARO, C. FESTRAETS, M.-F. GUSSARD,  
J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SI-  
NON, R. GOSSEZ, C. RANDOUR, S. TROM-  
PLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

## *Math-Jeunes junior*

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78,  
7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LA-  
LOUX, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POUR-  
BAIX, N. VANDENABEELE, C. VANDERCAM-  
MEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
<i>Math-Jeunes junior</i> ou <i>Math-Jeunes</i> (*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5) (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
<i>Math-Jeunes junior</i> ou <i>Math-Jeunes</i> (*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : <http://www.sbpm.be>

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 500 BEF pour frais d'encaissement.)

## *Éditeurs responsables :*

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

# Math-Jeunes

*Anniversaire*

50

*M. Ballieu, Les nombres parfaits*

51

*C. Van Hooste, Emma Zouth a un problème*

53

*Rallye Problèmes*

59

*G. Noël, Construire un cadran solaire*

60

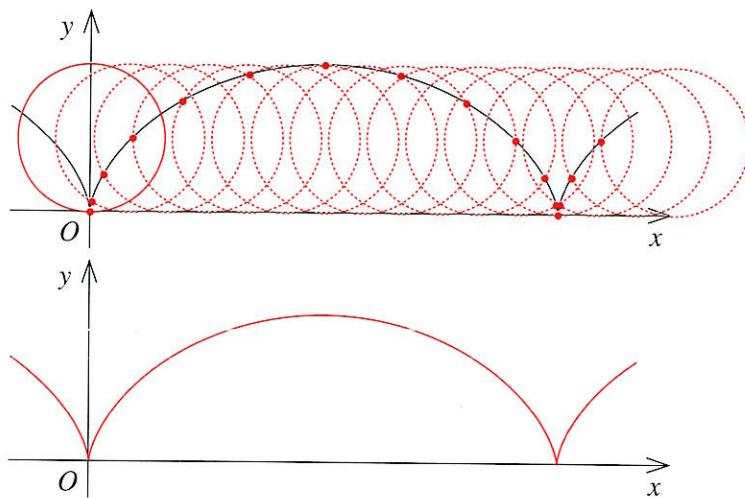


S. Trompler

## Gilles Personne de ROBERVAL (1602 - 1675)

L'année qui suit la naissance de FERMAT, 1602, voit naître un mathématicien très célèbre aussi et qui va fréquenter le même groupe scientifique que lui, celui du père MERSENNE. Il s'appelle en réalité GILLES PERSONNE. Ses parents sont des cultivateurs du village de Roberval, d'où le nom sous lequel on le connaît surtout. Il étudie les mathématiques dès l'âge de quatorze ans. On sait qu'il a parcouru la France en gagnant sa vie par des leçons particulières. Dans chaque ville, il cherchait à suivre un enseignement dans les universités. C'est en 1628 qu'il se fixe à Paris et entre en contact avec le groupe du père MERSENNE. Il devient professeur de mathématiques au Collège Royal en 1634, mais pour garder cette

chaire, il doit gagner un concours tous les trois ans sur une question proposée par les candidats. On pense que c'est pour cette raison qu'il garde ses résultats, sans les publier, et se réserve ainsi l'occasion de triompher au bon moment. Malheureusement, cette méthode l'a empêché à plusieurs reprises d'être reconnu comme le premier à avoir résolu un problème et des querelles de priorité avec DESCARTES et CAVALIERI, entre autres, en ont résulté. En 1655, il est enfin titulaire à vie de cette chaire. Il devient membre de l'Académie des Sciences, dès sa fondation, en 1669. Sur les conseils du père MERSENNE, il travaille à la **cycloïde**, courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sur une droite.



Les équations paramétriques de cette courbe sont

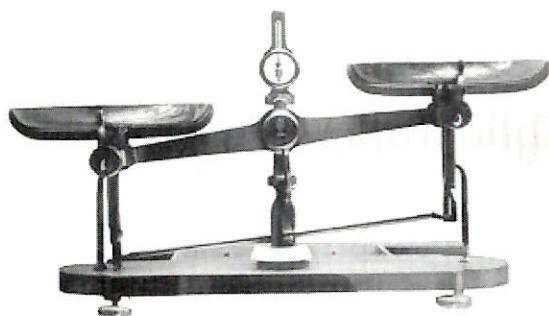
$$\begin{cases} x = r\theta - r \sin \theta \\ y = r - r \cos \theta \end{cases}$$

où  $r$  est le rayon du cercle.

GALILÉE, PASCAL et d'autres encore se sont passionnés pour cette courbe. Elle a donné lieu à une telle guerre de priorités qu'on l'appelle parfois l'Hélène des géomètres ! ROBER-

VAL calcule l'aire sous une arche et trouve qu'elle vaut trois fois l'aire du cercle qui l'a engendrée.

Il construit la tangente en un point de la courbe, par une méthode cinématique : il considère la tangente comme la direction instantanée d'un mobile qui parcourt la courbe et décompose son mouvement suivant deux directions (celle de la droite sur laquelle roule le cercle et celle de la tangente au cercle qui roule). Par la loi de composition des mouvements, il peut tracer la tangente à la cycloïde, compte tenu du fait que ces deux vitesses sont égales. Cette méthode, très différente de celle qu'ont employée ses contemporains, fait de lui le créateur de la géométrie cinématique. Les élèves de France comme de Belgique ont peut-être plus entendu parler de ROBERVAL pour son invention de la **balance de Roberval**. Elle est encore employée dans le commerce actuellement. Elle comporte deux plateaux reposant à la partie supérieure du fléau, sur deux couteaux dont les tranchants sont tournés vers le haut et qui sont fixés à deux tiges mobiles, reliées entre elles à leurs extrémités inférieures par un levier également mobile autour de son milieu. Cette disposition qui ne change en rien les conditions d'équilibre rend très commode l'emploi de cette balance.



# Les nombres parfaits

M. Ballieu, *CREM*

## 1. Introduction

Dans le numéro 99 de la revue *Math-Jeunes*, figurait, parmi les jeux proposés, la recherche de nombres parfaits. Ceux-ci, rappelons-le, sont des nombres égaux à la somme de leurs diviseurs autres qu'eux-mêmes. Ainsi, 6 est parfait puisque  $6 = 1 + 2 + 3$ , de même que  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ . Y en a-t-il beaucoup ? Une infinité ? Comment les trouver ? Nous allons tenter de donner une réponse peut-être incomplète à ces questions.

Les nombres parfaits – cela n'étonnera guère, avec un nom pareil – ont joué et jouent encore un certain rôle dans les spéculations numérologiques. Dieu a créé le monde en 6 jours – si, si, il s'est reposé le septième ! La lune fait le tour de la terre en 28 jours... Essayons de percer – du moins en partie – le mystère qui entoure ces nombres déjà connus des mathématiciens grecs.

## 2. Construction de nombres parfaits

La proposition 36 du neuvième livre des *Éléments* d'EUCLIDE donne un moyen de fabriquer des nombres parfaits. Elle fournit donc une condition suffisante pour qu'un nombre soit parfait.

En langage moderne, cette proposition s'énonce :

*un nombre de la forme  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$  est parfait si  $q = 2^p - 1$  est premier.*

Un tel premier  $q$  s'appelle de nos jours **premier de MERSENNE** du nom de ce religieux de

l'ordre des Minimes qui, au dix-septième siècle correspondait avec de grands érudits tels que FERMAT, PASCAL, ROBERVAL, ... Il a joué un grand rôle de diffusion des résultats scientifiques de son époque.

Notre connaissance des nombres parfaits n'a guère évolué depuis le troisième siècle avant Jésus-Christ. EULER a démontré que les nombres parfaits pairs sont nécessairement de la forme indiquée par EUCLIDE. Nous disposons ainsi d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre pair soit parfait. Mais nous ignorons si l'ensemble de ces nombres parfaits pairs est infini, car nous ne savons pas s'il existe un nombre infini de premiers de MERSENNE. Des investigations sur ordinateur ont permis de constater qu'il n'y a pas de nombre parfait impair jusqu'à des valeurs très grandes, de l'ordre de plusieurs millions mais nous ne possédons toujours pas de preuve qu'il n'y en a pas du tout !

La démonstration de la proposition d'EUCLIDE nécessite la connaissance d'un petit résultat issus de ce que l'on appelle la **théorie des nombres**. Cette dernière est une branche des mathématiques que l'on pourrait aussi appeler **arithmétique évoluée**, mais ce n'est cependant pas tout à fait synonyme.

### 3. Somme des diviseurs d'un nombre

Le théorème fondamental de l'arithmétique affirme qu'à l'ordre des facteurs près, la décomposition de tout entier  $n$  en facteurs premiers est unique. Soit donc cette décomposition

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_\ell^{a_\ell},$$

où  $p_1 < p_2 < \cdots < p_\ell$  et où les  $a_i$  sont des naturels non nuls.

Nous te proposons, ami lecteur, de justifier chacune des étapes de ce qui suit – avec l'aide éventuelle de ton professeur de

mathématiques. Tu peux également examiner quelques cas particuliers afin de mieux te convaincre des égalités que nous écrivons ci-dessous.

Tout diviseur de  $n$  a la forme

$$p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_\ell^{b_\ell},$$

où tous les  $b_i$  sont tels que  $0 \leq b_i \leq a_i$ .

Notons  $\sigma(n)$  la somme de tous les diviseurs de  $n$ , y compris  $n$  lui-même. Il vient :

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{b_1=0}^{a_1} \sum_{b_2=0}^{a_2} \cdots \sum_{b_\ell=0}^{a_\ell} p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_\ell^{b_\ell} \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{a_i}),\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right).$$

### 4. Démonstration

Supposons que  $n$  soit de la forme  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$  où  $q = 2^p - 1$  est premier et calculons  $\sigma(n)$ .

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = (2^p - 1) \cdot (q + 1) \\ &= (2^p - 1) \cdot 2^p = 2n.\end{aligned}$$

Puisque la somme de tous les diviseurs de  $n$  est égale à  $2n$ , la somme de tous les diviseurs de  $n$  sauf lui-même vaut alors  $n$ , ce qui implique que  $n$  est parfait.

### Bibliographie

- [1] EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac (3 vol.), Presses Universitaires de France, 1994.
- [2] HARDY, G.H. & WRIGHT, E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979.
- [3] ORE, Oystein, *Number Theory and its History*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.



# Emma Zouth a un problème

C. Van Hooste, *Athénée Royal Vauban*

Oui, Emma Zouth a un vrai problème.

Le mazout qui sert à alimenter la chaudière de son chauffage central se trouve dans une cuve cylindrique d'une capacité de 2000 litres, placée horizontalement, c'est-à-dire disposée de telle manière que l'axe de la cuve soit horizontal (fig. 1). Pour évaluer la quantité de mazout encore disponible dans la cuve, Emma y plonge verticalement une jauge graduée (fig. 2). Celle-ci compte vingt traits espacés régulièrement (fig. 3) ; le dernier trait correspondant à la « hauteur » totale de la cuve, autrement dit à son diamètre. Emma attend que le niveau de mazout atteigne le premier trait de la jauge pour passer commande chez son distributeur. Elle estime qu'il lui reste alors 5% de la capacité totale de la cuve, soit 100 litres.

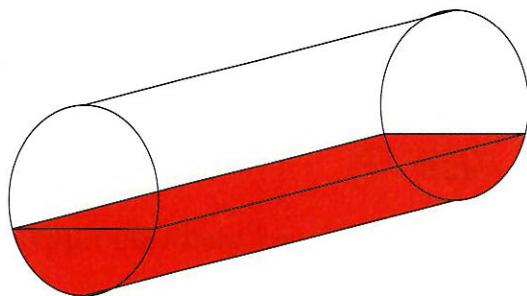


Fig. 1

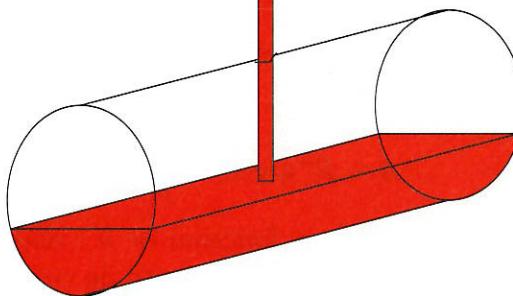


Fig. 2

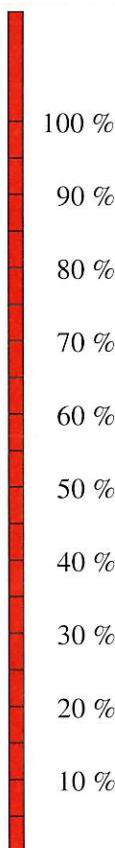


Fig. 3

Bien qu'il ne se passe que quelques jours entre la commande et la livraison et qu'elle n'a besoin que de 10 litres de mazout par jour, Emma Zouth arrive très souvent à court de combustible avant que le camion de distribution ne soit venu la réapprovisionner. Emma Zouth ne comprend pas !

Tâchons de l'aider.

Calculons la quantité de mazout disponible dans la cuve en fonction de la hauteur atteinte par celui-ci.

Soit

$L$  et  $R$  la longueur et le rayon de la cuve,

$V$  le volume occupé par le mazout,

$h$  la hauteur atteinte par le mazout dans la cuve,

A l'aire de la surface dessinée par le mazout sur les « bases » de la cuve.

Nous avons  $V = L \cdot A$ , ce qui montre que le calcul revient essentiellement à déterminer  $A$ , c'est-à-dire l'aire d'un *segment circulaire*.



L'aire d'un segment circulaire est égale à la différence entre l'aire d'un *secteur circulaire* et celle d'un triangle (lorsque ce segment circulaire n'est pas plus grand qu'un demi-disque, donc lorsque  $h$  est inférieur à  $R$ ) ; ainsi,

$$A = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2 \sin \theta = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin \theta),$$

où  $\theta$  est l'angle du secteur circulaire (fig. 4).

Pour établir le lien entre  $A$  et  $h$ , nous devons éliminer  $\theta$  dans la relation ci-dessus. Or, en utilisant les notations de la figure 4, nous avons

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{|OM|}{|OV|} \quad \text{ou} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{R-h}{R}.$$

De là, nous tirons

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arccos \frac{R-h}{R}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{1 - \left( \frac{R-h}{R} \right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{h(2R-h)} \end{aligned}$$

et

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \frac{R-h}{R} \sqrt{h(2R-h)}.$$

Nous obtenons finalement

$$A = R^2 \arccos \frac{R-h}{R} - (R-h) \sqrt{h(2R-h)}.$$

La relation ci-dessus donne  $A$  en fonction de  $h$  ; mais, en vérité,  $A$  dépend plutôt du rapport  $\frac{h}{R}$  comme le fait apparaître la forme suivante de cette relation :

$$A = R^2 \left( \arccos \left( 1 - \frac{h}{R} \right) - \left( 1 - \frac{h}{R} \right) \sqrt{\frac{h}{R} \left( 2 - \frac{h}{R} \right)} \right)$$

En posant  $\frac{h}{R} = h_r$ , cette dernière relation s'écrit

$$A = R^2 \left( \arccos(1-h_r) - (1-h_r) \sqrt{h_r(2-h_r)} \right).$$

En principe, celle-ci n'est valable que lorsque  $h \leq R$ , donc pour  $h_r \leq 1$ . Cependant, nous pouvons établir facilement qu'elle le reste pour  $h_r > 1$ , c'est-à-dire lorsque  $h > R$ .

Pour  $h_r > 1$ , nous avons (fig. 5)  $A = \pi R^2 - A'$ .

Dès lors, pour prouver que la relation reste valable pour  $h_r > 1$ , il suffit de montrer que le graphique de la fonction, définie pour  $0 \leq h_r \leq 2$ ,

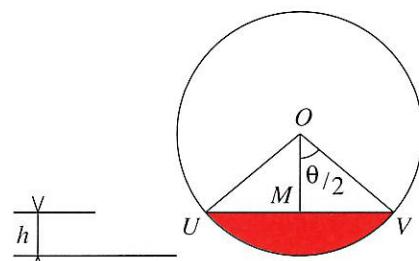


Fig. 4

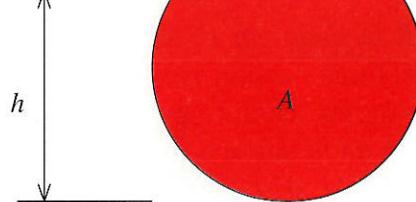


Fig. 5



$$A(h_r) = R^2 \left( \arccos(1 - h_r) - (1 - h_r) \sqrt{(h_r(2 - h_r))} \right)$$

admet pour centre de symétrie le point de coordonnée  $(1, \frac{\pi R^2}{2})$  :

$$\begin{aligned} A(2 - h_r) &= R^2 \left( \arccos(h_r - 1) - (h_r - 1) \sqrt{(2 - h_r)h_r} \right) \\ &= R^2 \left( \pi - \arccos(1 - h_r) + (1 - h_r) \sqrt{h_r(2 - h_r)} \right) \\ &= \pi R^2 - R^2 \left( \arccos(1 - h_r) - (1 - h_r) \sqrt{h_r(2 - h_r)} \right) \\ &= 2A(1) - A(h_r) \end{aligned}$$

En appelant  $V_m$  la capacité totale de la cuve, nous avons  $V_m = \pi R^2 L$  d'où  $L = \frac{V_m}{\pi R^2}$  et le volume occupé par le mazout dans la cuve est donné en fonction de  $h_r$  par

$$V(h_r) = \frac{V_m}{\pi} \left( \arccos(1 - h_r) - (1 - h_r) \sqrt{h_r(2 - h_r)} \right).$$

Revenons au problème de Emma Zouth.

Lorsque la jauge qu'elle utilise tend à lui faire croire qu'il reste 5% de mazout dans la cuve, soit 100 litres,  $h_r = 0,1$  et le volume restant est réellement

$$V(0,1) = \frac{2000}{\pi} (\arccos 0,9 - (0,9\sqrt{0,19})) \approx 37,4 \text{ litres.}$$

De quoi tenir quatre jours au plus !

### Remarques

- Le calcul de l'aire  $A$  du segment circulaire peut être réalisé par calcul intégral :

$$A = 2 \int_{-R}^{h-R} \sqrt{R^2 - z^2} dz.$$

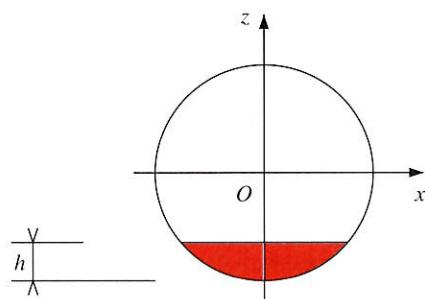
- L'étude de la fonction  $A(h_r)$  est possible suivant le schéma classique car les dérivées de cette fonction ont une forme particulièrement simple :

$$A'(h_r) = 2R^2 \sqrt{h_r(2 - h_r)}$$

et

$$A''(h_r) = \frac{2R^2(1 - h_r)}{\sqrt{h_r(2 - h_r)}}.$$

Cette étude permet de conclure que la fonction  $A(h_r)$  est strictement croissante et que son graphique admet un point d'inflexion pour  $h_r = 1$ .



3. Une jauge graduée donnant le pourcentage de volume restant de mazout peut être confectionnée à partir d'une bonne tabulation des valeurs de la fonction  $A(h_r)$  ou bien en exploitant le graphique de  $A(h_r)$ .

## Tabulation des valeurs de la fonction $A(h_r)$

Hauteur relative	Volume relatif
$\frac{h}{R}$	$\frac{V}{V_{max}}$
0,01	0,00
0,02	0,00
0,03	0,00
0,04	0,00
0,05	0,01
0,06	0,01
0,07	0,01
0,08	0,01
0,09	0,02
0,10	0,02
0,11	0,02
0,12	0,02
0,13	0,03
0,14	0,03
0,15	0,03
0,16	0,04
0,17	0,04
0,18	0,04
0,19	0,05
0,20	0,05
0,21	0,06
0,22	0,06
0,23	0,06
0,24	0,07
0,25	0,07

Hauteur relative	Volume relatif
$\frac{h}{R}$	$\frac{V}{V_{max}}$
0,26	0,08
0,27	0,08
0,28	0,09
0,29	0,09
0,30	0,09
0,31	0,10
0,32	0,10
0,33	0,11
0,34	0,11
0,35	0,12
0,36	0,12
0,37	0,13
0,38	0,13
0,39	0,14
0,40	0,14
0,41	0,15
0,42	0,15
0,43	0,16
0,44	0,16
0,45	0,17
0,46	0,17
0,47	0,18
0,48	0,18
0,49	0,19
0,50	0,20

Hauteur relative	Volume relatif
$\frac{h}{R}$	$\frac{V}{V_{max}}$
0,51	0,20
0,52	0,21
0,53	0,21
0,54	0,22
0,55	0,22
0,56	0,23
0,57	0,23
0,58	0,24
0,59	0,25
0,60	0,25
0,61	0,26
0,62	0,26
0,63	0,27
0,64	0,28
0,65	0,28
0,66	0,29
0,67	0,29
0,68	0,30
0,69	0,31
0,70	0,31
0,71	0,32
0,72	0,32
0,73	0,33
0,74	0,34
0,75	0,34

Hauteur relative	Volume relatif
$\frac{h}{R}$	$\frac{V}{V_{max}}$
0,76	0,35
0,77	0,35
0,78	0,36
0,79	0,37
0,80	0,37
0,81	0,38
0,82	0,39
0,83	0,39
0,84	0,40
0,85	0,40
0,86	0,41
0,87	0,42
0,88	0,42
0,89	0,43
0,90	0,44
0,91	0,44
0,92	0,45
0,93	0,46
0,94	0,46
0,95	0,47
0,96	0,47
0,97	0,48
0,98	0,49
0,99	0,49
1,00	0,50

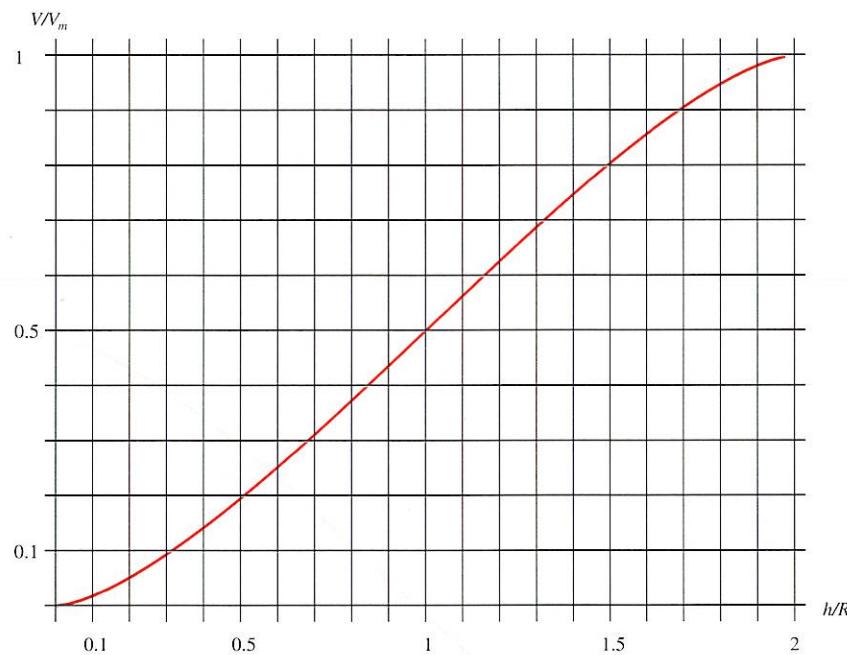
Pour graduer correctement une jauge qui indique le volume de mazout restant dans la cuve, de 5 en 5%, les traits doivent être placés à

20%, 32%, 42%, 51%, 60%, 68%, 77%, 85%, 92% et 100%

de la demi-longueur utile de cette jauge. Le trait placé à 100% correspond donc à une cuve à moitié pleine.

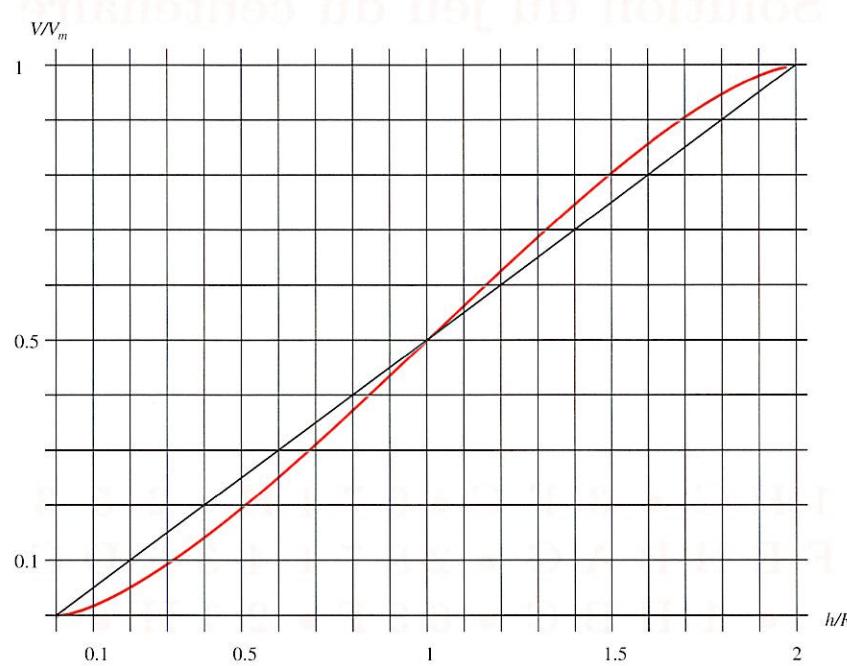


## Graphique de la fonction $A(h_r)$



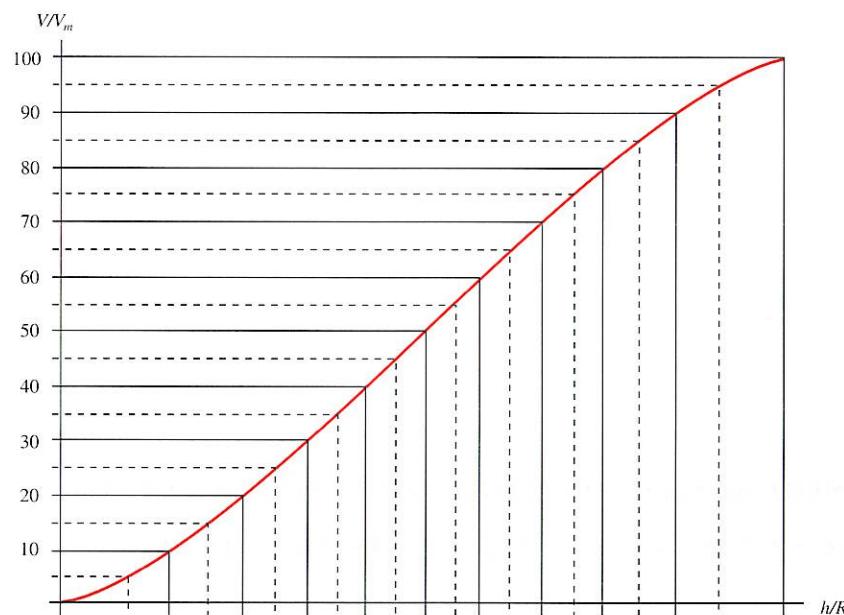
## Comparaison entre évaluation précise et une estimation linéaire du volume restant dans la cuve

Le graphique de la fonction  $A(h_r)$  permet une évaluation correcte de la quantité de mazout restant dans la cuve. La droite en donne une estimation erronée ; ainsi, son utilisation pour des valeurs inférieures à 0,5 (soit 25% de la hauteur de la cuve) conduit à des erreurs importantes et à des prises de décision tardives.



## Étalonnement correct d'une jauge

À l'aide du graphique de la fonction  $A(h_r)$ , il est aisément de construire une jauge correctement graduée. Partant de l'axe des ordonnées (proportion de volume restant), des horizontales sont tirées jusqu'au graphique de la fonction  $A(h_r)$ , puis repartant du graphique, des verticales sont tracées jusqu'à l'axe des abscisses (proportion de hauteur sur la jauge en fonction du rayon de la cuve). En espacant, par exemple, les horizontales de 5 en 5%, nous obtenons alors sur l'axe des abscisses, une jauge dont la graduation donne la quantité de mazout restant dans la cuve de 5 en 5%.



\* \*  
\*

## Solution du jeu du centenaire

Le problème qui a été posé est extrait des *Casse-tête mathématiques de Sam Loyd*, choisis et présentés par Martin GARDNER (Dunod, Bordas, Paris, 1970).

LOYD ne donne pas la solution de ce jeu. Il dit que la plupart des ouvrages en proposent une en 52 coups, alors que le problème peut se résoudre en 47.

H. E. DUDENEY, quant à lui, donne une solution en 46 mouvements ! Elle est publiée par W. W. ROUSE BALL et H.S.M. COXETER dans *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publ., Inc. (13<sup>e</sup> édition), New York, 1987.

Voici cette solution :

**1 H G • 3 F C • 6 7 1 H • 2 5 3  
F E H B A G • 2 8 7 1 4 3 F D G  
• 1 H B C • 6 3 F • 2 1 H •**



# Rallye problèmes

noturboréel

C. Festaerts

Voici les cinq derniers problèmes de ce rallye. N'oubliez pas de présenter vos solutions sur des feuilles séparées pour chaque problème et d'y indiquer vos nom, prénom, âge, classe, école et adresse personnelle. Soignez votre présentation. Bon courage! Vos solutions doivent parvenir à C. Festaerts, 36, rue J. B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 13 mai 2002 au plus tard.

## 11 – Poignées de mains

Chaque personne qui vit sur terre a serré la main à un certain nombre d'autres personnes.

Prouver que le nombre de personnes qui ont serré un nombre impair de mains est pair.

## 12 – Nombres consécutifs

Démontrer que quels que soient cinq nombres entiers positifs consécutifs, il est toujours possible de choisir l'un d'entre eux qui soit premier avec les quatre autres.

## 13 – Division

L'écriture décimale d'un nombre entier  $A$  consiste en 1001 chiffres 7. Quels sont le quotient et le reste de la division de  $A$  par 1001 ?

## 14 – Un peu de géométrie

La grande base d'un trapèze mesure 97 cm et le segment qui joint les milieux des diagonales de ce trapèze mesure 3 cm. Quelle est la longueur de la petite base du trapèze ?

## 15 – Valeurs d'une fonction

Une fonction  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  vérifie les deux conditions

- 1)  $f(ab) = f(a)f(b)$  si  $a$  et  $b$  sont deux entiers premiers entre eux ;
- 2)  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  si  $a$  et  $b$  sont deux nombres premiers.

Démontrer que  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$ ,  $f(5) = 5$  et  $f(2002) = 2002$ .

Les solutions des dix derniers problèmes de ce rallye 2001-2002 seront publiées dans le numéro 102 de *Math-Jeunes*.

# Construire un cadran solaire

G. Noël, Université de Mons-Hainaut

## Introduction

Pour connaître l'heure, vous regardez votre montre. Mais l'horlogerie n'a pas toujours existé. Pendant des siècles, l'heure a été déterminée à l'aide de **cadrans solaires**. Vous avez certainement déjà rencontré de tels instruments, peints sur les murs d'anciens bâtiments ou simplement déposés sur un socle dans un parc.

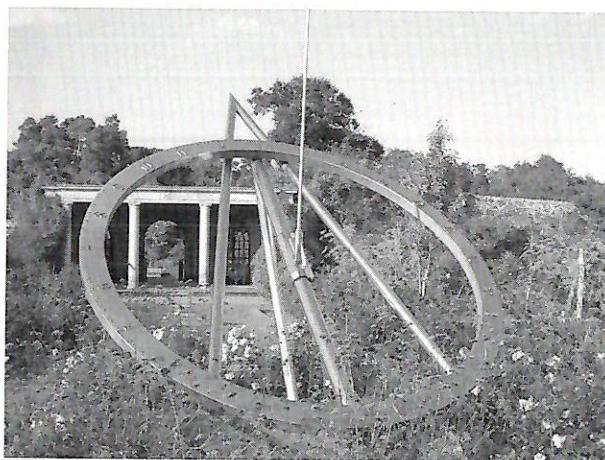


Figure 1 : Cadran solaire de Herstmonceux, Sussex, Angleterre

Le plus ancien cadran connu serait égyptien et daterait d'environ 1500 ans avant notre ère. Cependant d'après G. Oudenot, (voir [?]) « *les chinois prétendent qu'ils employaient déjà des cadrans à l'époque de l'empereur Yao, 24 siècles avant Jésus-Christ. Malheureusement l'existence de l'empereur Yao est incertaine* ».

Il est des cadrans de formes et de dispositions variées. Certains sont de véritables œuvres d'art. Presque tous sont basés sur le même principe. Une baguette, appelée **style**, est fixée sur une **table** plane (qui peut être verticale aussi bien que horizontale ou oblique). Un cadran, ensemble de rayons issus de la base du style, est dessiné sur la table. La position de

l'ombre du style par rapport à ce cadran indique l'heure.



Figure 2 : Un cadran solaire à Pérouges, Ain, France

Vous êtes-vous déjà demandé quelle est la nature géométrique des courbes peintes sur un cadran solaire ? Comment sont-elles construites ? Dépendent-elles de l'orientation du cadran ? du lieu où le cadran est installé ? Nous allons chercher ensemble la réponse à certaines de ces questions.

## Quelques rappels

D'abord, rafraîchissons-nous les idées par quelques rappels de géographie et d'astronomie.

Comme chacun sait, le globe terrestre est animé de deux mouvements :

- la rotation diurne, mouvement au cours duquel la terre tourne sur elle-même en 24 heures, autour de son axe. Ce mouvement induit un découpage du temps en jours.
- la révolution autour du soleil, mouvement au cours duquel la terre décrit une ellipse autour du soleil en un an, soit approximativement 365,25 jours. Ce mouvement induit un découpage du temps en années <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Le découpage en mois n'est pas dû au mouvement de la terre, mais bien à celui de la lune.



Le plan de l'orbite terrestre autour du soleil est appelé le **plan de l'écliptique**.

Il se fait que l'axe de la terre n'est pas perpendiculaire au plan de l'écliptique. Si c'était le cas, le soleil serait toujours à la verticale de l'équateur. Mais l'axe de la terre fait constamment un angle  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$  avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique. Il en résulte que le plan de l'équateur ne passe pas toujours du même côté du soleil.

Voici un schéma très approximatif<sup>(2)</sup> de l'orbite terrestre :

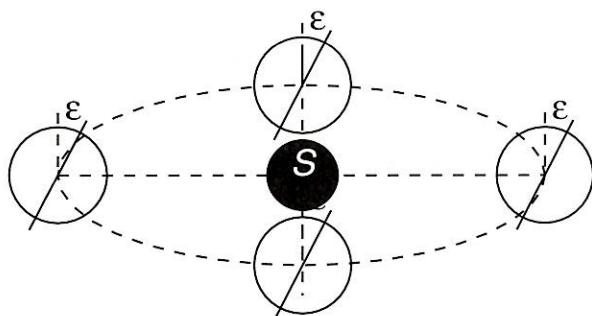


Figure 3

On appelle **déclinaison** du soleil l'angle entre les rayons solaires et le plan équatorial. Lorsque la déclinaison vaut  $\delta$ , le soleil est à la verticale d'un point de latitude  $\delta$ . La table suivante indique — à un degré près — la déclinaison du soleil le premier jour de chaque mois de l'an 2001 :

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$-23^{\circ}$	$-17^{\circ}$	$-7^{\circ}$	$4^{\circ}$	$15^{\circ}$	$22^{\circ}$
1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12
$23^{\circ}$	$18^{\circ}$	$8^{\circ}$	$-3^{\circ}$	$-14^{\circ}$	$-22^{\circ}$

Aux environs du 21 juin a lieu le **solstice d'été**. A ce moment, la déclinaison du soleil vaut exactement l'angle  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$ , qui est l'angle de l'axe de la terre avec le plan de l'écliptique. Le soleil est alors à la verticale d'un point du **tropique du Cancer**. Dans l'hémisphère nord, les jours sont les plus longs.

<sup>(2)</sup> Vu les différences de taille entre la terre, le soleil et la taille de l'orbite terrestre, un dessin réaliste est impossible à réaliser.

<sup>(3)</sup> Contrairement à ce que pourrait laisser croire la figure 3, le soleil n'occupe pas le centre de l'ellipse, mais un foyer et ni les solstices, ni les équinoxes ne correspondent aux sommets.

Par contre, aux environs du 21 décembre, le soleil est à la verticale des points de latitude  $-\varepsilon = 23^{\circ}27'$  Sud. Ce sont les points du **tropique du Capricorne**. Dans l'hémisphère nord, les jours sont les plus courts.

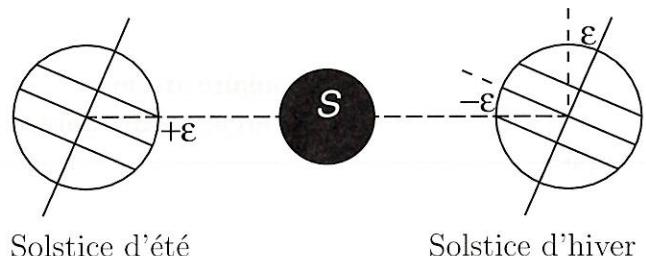


Figure 4

Entre le solstice d'été et le solstice d'hiver, le soleil passe à la verticale des points de latitude comprise entre  $+\varepsilon$  et  $-\varepsilon$ . En particulier, il passe à la verticale des points de l'équateur terrestre lorsque sa déclinaison vaut  $0^{\circ}$ . La droite terre-soleil est alors perpendiculaire à l'axe de la terre : c'est l'**équinoxe d'automne**, aux environs du 21 septembre.

Le soleil passe de nouveau à la verticale de l'équateur aux environs du 21 mars : c'est l'**équinoxe de printemps**<sup>(3)</sup>.

La figure 5 représente le globe terrestre, sur lequel sont dessinés l'équateur, les deux tropiques, et le méridien de Greenwich.

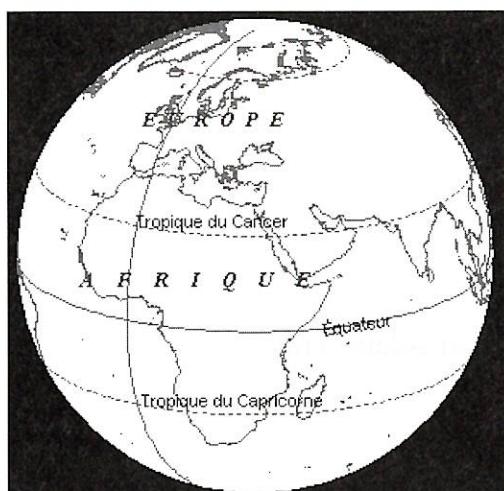


Figure 5

Le va-et-vient du soleil au-dessus de la bande tropicale a aussi pour conséquence le phénomène du **soleil de minuit** : aux points de la terre de latitude supérieure à  $90^\circ - 23^\circ 27' = 66^\circ 33'$ , et en ceux de latitude inférieure à  $-66^\circ 33'$ , il arrive que le soleil soit visible durant 24 heures consécutives. Le parallèle de latitude  $66^\circ 33'$  est le **cercle polaire arctique**, celui de latitude  $-66^\circ 33'$  est le **cercle polaire antarctique**.

Intéressons-nous au mouvement de rotation diurne et au découpage du jour en 24 heures qu'il permet de définir. Pour un observateur vivant à la surface du globe terrestre, tout se passe comme si la terre était fixe, le soleil tournant autour d'elle en un jour.

En un point donné de la terre, c'est le passage du soleil dans le plan méridien qui sert de référence. Rappelons donc aussi ce qu'est le plan méridien d'un point de la terre :

*Le **plan méridien** du point  $P$  situé à la surface de la terre est le plan passant par  $P$  et par l'axe de rotation de la terre.*

À présent, nous pouvons définir correctement les expressions « midi vrai » et « jour solaire vrai » :

- En un point donné de la terre, il est **midi vrai** lorsque le soleil est situé dans le plan méridien de ce point, et du même côté que le demi-méridien contenant le point (si le soleil est de l'autre côté, il est minuit vrai).
- Le **jour solaire vrai** est l'intervalle de temps séparant deux midis vrais consécutifs.

La figure 6 montre la terre au solstice d'été, lorsqu'il est midi vrai à Greenwich. On note en effet que la zone d'ensoleillement maximum est située à l'intersection du tropique du Cancer et du méridien de Greenwich. La calotte polaire arctique est entièrement dans la zone ensoleillée.

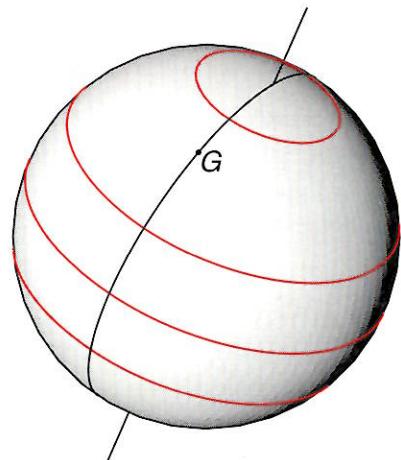


Figure 6

Ces définitions étant posées, pour déterminer l'heure, il ne reste plus qu'à trouver un moyen (par exemple un cadran solaire) de découper le jour solaire vrai en 24 heures.

Il faut cependant signaler que la définition du jour solaire vrai comporte des inconvénients, notamment le fait que la durée de ce jour varie d'un jour à l'autre. On définit alors un **jour moyen** et une **heure solaire moyenne** que l'on détermine moyennant le calcul d'une correction appelée **équation du temps**. Nous ne tiendrons pas compte de cette complication due au mouvement de révolution annuelle autour du soleil. Au surplus, l'heure légale en Belgique n'est pas l'heure moyenne de votre domicile, mais celle du méridien de Greenwich augmentée d'une heure en hiver et de deux heures en été. L'heure lue sur le cadran solaire n'est donc pas celle indiquée par votre montre !

Comme il est d'usage, nous admettrons aussi que le soleil est suffisamment loin pour que tous les rayons solaires puissent être considérés comme parallèles.

## Où est le soleil ?

Puisque l'axe de rotation de la terre d'une part, et les rayons solaires d'autre part, ont toujours la même direction, l'angle entre ceux-ci et l'axe de la terre ne change pas au cours d'une journée.



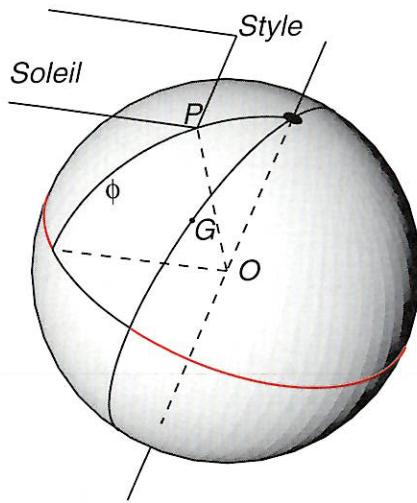


Figure 7

Imaginons un observateur situé en un point  $P$ , de latitude  $\phi$ , de la surface terrestre qui observe la position du soleil.

Pour l'observateur, situé en  $P$ , ce n'est pas la terre qui tourne sur elle-même, c'est le soleil  $S$  qui tourne autour de la terre en un jour. Comme l'angle entre les rayons solaires et l'axe de la terre ne change pas au cours de la journée, l'observateur a l'impression qu'en un jour le rayon  $PS$  balaie un cône droit <sup>(4)</sup> de sommet  $P$  et dont l'axe est parallèle à l'axe de la terre. Appelons-le le **cône de soleil**.

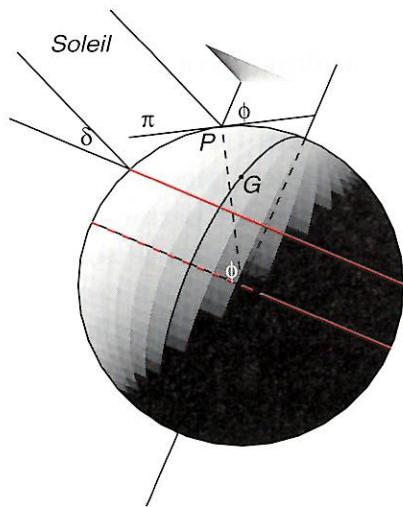


Figure 8

La figure ?? représente la terre au solstice d'été alors qu'il est midi (solaire vrai) en un

point  $P$ . Ce point a été placé sur le contour apparent du globe terrestre de façon que son plan méridien soit vu en vraie grandeur. Sont également représentés le plan horizontal  $\pi$  passant par  $P$ , un segment parallèle à l'axe de la terre (le style) et le cône de soleil passant par l'extrémité du style. On note que la latitude  $\phi$  d'un lieu est égale à l'angle de l'axe terrestre avec le plan horizontal de ce lieu.

Si la déclinaison du soleil est notée  $\delta$ , l'ouverture du cône de soleil (l'angle entre l'axe du cône et les génératrices) est l'angle complémentaire  $\frac{\pi}{2} - \delta$ . Au cours de l'année,  $\delta$  varie de  $-23^{\circ}27'$  à  $+23^{\circ}27'$ . L'ouverture du cône est donc toujours comprise entre  $90^{\circ}$  et  $66^{\circ}33'$  <sup>(5)</sup>. En particulier, l'ouverture vaut  $90^{\circ}$  (de sorte que le cône de soleil est un plan), lorsque le soleil est situé dans le plan de l'équateur, ce qui arrive deux fois par an lors des équinoxes.

## Les cadrants classiques

Les cadrants « classiques » sont ceux dont la table est plane et dont le style est un segment orienté parallèlement à l'axe de la terre. Le style est donc inclus au plan méridien du lieu considéré. Pour lire l'heure sur le cadran, on observe l'ombre du style sur la table du cadran. Du point de vue géométrique, cette ombre est portée par l'intersection du plan soleil-style et de la table.

Encore faut-il que le cadran ait été gradué.

Le fabricant de cadrants doit donc **calculer** la position de l'ombre du style en fonction de l'heure solaire vraie et de la position de la table. Deux paramètres peuvent être déterminés : l'**orientation** de l'ombre et la **longueur** de l'ombre.

- L'orientation de l'ombre ne dépend que de l'heure vraie. Par exemple, tous les jours, à midi vrai, le soleil est — comme le style

<sup>(4)</sup> Ou tout au moins une partie de cône, car pendant la nuit les rayons du soleil n'atteignent pas le point  $P$ .

<sup>(5)</sup> Pourquoi  $90^{\circ}$  plutôt que  $113^{\circ}27'$  ?

— dans le plan méridien, le plan soleil-style coïncide avec le plan méridien ; l'ombre du style est donc portée par l'intersection du plan méridien et de la table.

On note  $H$  l'**angle horaire** du soleil en un lieu donné, c'est-à-dire l'angle dont la terre a tourné depuis le dernier passage du soleil au méridien de ce lieu. On donne souvent la valeur de l'angle horaire en heures de 15 degrés, car en une heure, la terre tourne de  $\frac{360}{24} = 15$  degrés. Ainsi, après une heure (à une heure de l'après-midi), l'angle horaire vaut 15 degrés, après deux heures, 30 degrés, etc.

L'intersection de la table et du plan soleil-style ne dépend que de l'angle horaire, non du jour de l'année. Pour les cadrants les plus simples, on se contente de calculer et dessiner les intersections de la table avec les plans soleil-style associés à diverses valeurs de l'angle horaire  $H$ .

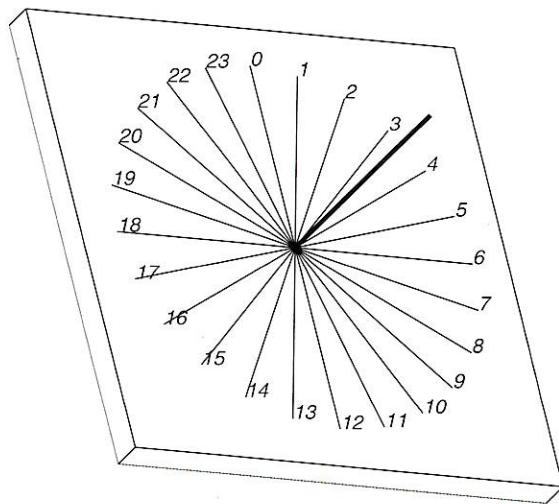


Figure 9

- D'un jour à l'autre, la déclinaison du soleil change. Tout en ayant la même orientation que la veille à la même heure, l'ombre du style n'a donc plus la même longueur. Les cadrants plus élaborés tirent parti de ce fait : en observant la longueur de l'ombre, on peut déduire la déclinaison du soleil donc la date. Le fabricant de cadrants doit calculer les courbes décrites en une journée par l'ombre de l'extrémité du style.

(6) Photographie extraite de [?].

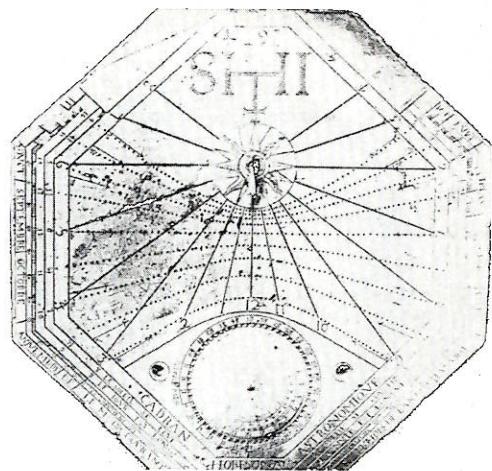


Figure 10 (6)

Pour pouvoir calculer les éléments qui viennent d'être décrits, le fabricant doit encore connaître la **position de la table**. On distingue en effet plusieurs espèces de cadrants solaires.

- Dans un **cadran équatorial** (figure ??), la table est perpendiculaire au style, elle est donc parallèle au plan équatorial. Son angle avec le plan horizontal est le complémentaire de la latitude du lieu.
- Dans un **cadran horizontal** (figure ??), la table est horizontale. L'angle entre le style et la table est alors égale à la latitude  $\phi$  du lieu. Il existe des lieux sur la terre où un cadran horizontal est aussi équatorial. Lesquels ?
- Dans un **cadran vertical** (figure 2), la table est verticale. Ceci ne fixe pas complètement sa position. Les cadrants solaires verticaux sont généralement placés sur la façade d'un bâtiment, ce qui ne permet pas toujours de les orienter comme on le souhaiterait. Les cas les plus simples sont ceux des cadrants orientés Nord-Sud ou Est-Ouest.

Dans tous les cas, pour déterminer l'ombre de l'extrémité du style, il suffit de calculer le point de percée du rayon solaire passant par cette extrémité dans le plan de la table du cadran. Au cours de la journée, le rayon de soleil décrit le cône de soleil. Ainsi, la courbe décrite par l'ombre de l'extrémité du style en un jour est l'intersection du cône de soleil avec le plan de la table.

Quelle que soit l'orientation de la table, les courbes qui nous intéressent sont des coniques.

Dans cet article, nous ne nous préoccuperez pas des cadrants verticaux, car il n'est guère difficile de voir que tout cadran vertical est identique à un cadran horizontal placé en un autre lieu.

## Un repère dans l'espace

Nous voulons déterminer les courbes à tracer sur la table d'un cadran solaire, donc calculer leurs équations. Ajoutons immédiatement que nous restreindrons notre étude au cas où le cadran doit être installé en un point de l'hémisphère nord. Le cas des points de l'hémisphère sud se traite de façon semblable.

Nous devons introduire dans l'espace un système de coordonnées. Nous choisissons un repère orthonormé dont l'origine est le point  $P$  situé à la base du style. La longueur de celui-ci sera l'unité de longueur. Prenons comme axe  $PZ$  la droite qui supporte le style, dont l'extrémité est par conséquent le point  $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi défini, l'axe  $PZ$  est dans le plan méridien de  $P$ . Plaçons également l'axe  $PX$  dans le plan méridien, perpendiculairement à  $PZ$  et dirigé vers l'intérieur de la terre. Le plan  $XPZ$  est donc le plan méridien.

Enfin, l'axe  $PY$  est placé perpendiculairement à ce plan, donc tangent au parallèle passant par  $P$  et dans le plan horizontal passant par l'origine. Nous l'orientons dans la direction opposée au soleil couchant, c'est à dire vers l'est. Le plan  $PXY$  est perpendiculaire au style, donc parallèle au plan de l'équateur.

La figure ci-dessous représente le système d'axes et le cône de soleil prolongé « vers le bas ». C'est cette deuxième nappe du cône que nous devons couper par le plan de la table du cadran.

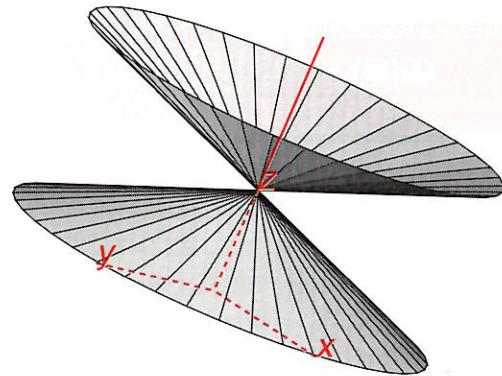


Figure 11

## Les cadrants équatoriaux

La table d'un tel cadran est parallèle au plan équatorial, donc située dans le plan  $PXY$  d'équation  $z = 0$ , ce qui facilite notre travail.

Supposons que le soleil ne soit pas dans le plan équatorial, de sorte que sa déclinaison  $\delta$  n'est pas nulle. Alors le cône solaire passant par l'extrémité du style est un cône droit d'axe  $PZ$  et son intersection avec le plan  $PXY$  est un cercle, dont le rayon vaut  $\cotg \delta$  (figure ??).

Ceci règle définitivement le cas des cadrants solaires équatoriaux : on les gradue tout simplement en découplant le plan en 24 secteurs de  $15^\circ$ . La trajectoire de l'ombre de l'extrémité du style est un cercle dont le rayon vaut  $\cotg \delta$  et varie donc au cours de l'année de  $\cotg 23^\circ 27' (\simeq 2,305)$  à l'infini.

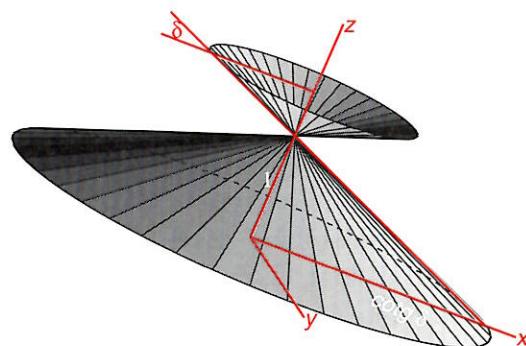


Figure 12

Notons  $Q_\delta(H)$  la position de l'ombre de l'extrémité du style, lorsque l'angle horaire vaut  $H$  et la déclinaison du soleil,  $\delta$ . On a alors

$$Q_\delta(H) = \begin{pmatrix} \cotg \delta \cdot \cos H \\ \cotg \delta \cdot \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sur la figure ??, on a représenté de l'extérieur vers l'intérieur, les cercles correspondant aux valeurs  $\delta = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots, 22^\circ$  et  $23^\circ 27'$  de la déclinaison du soleil, ainsi que les 24 rayons correspondant à  $H = 0\text{h}$ ,  $H = 1\text{h}$ , etc. Cependant, plutôt que de noter les rayons de 0 à 23 selon la valeur de  $H$  en heures, nous les notons selon l'usage courant : 11, 12 et 13 désignent respectivement 11h du matin, midi et 1h de l'après-midi. La valeur indiquée sur un rayon est donc 12 pour  $H = 0\text{h}$ , 13 pour  $H = 1\text{h}$ , ..., 11 pour  $H = 23\text{h}$ .

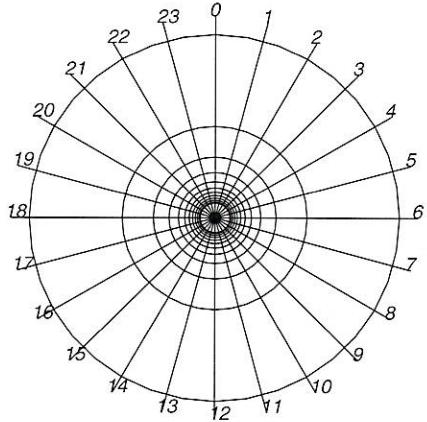


Figure 13

Notons que le tracé d'un cadran équatorial ne dépend ni de la longitude, ni de la latitude du lieu où il doit être installé. En cela, les cadrants équatoriaux sont particulièrement commodes.

Notons aussi qu'un cadran équatorial n'est utilisable que durant la demi-année pendant laquelle le soleil et le style se trouvent du même côté de la table, c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à celle d'automne pour les lieux situés dans l'hémisphère nord. (Mais un cadran équatorial dont le style serait dirigé vers le sud plutôt que le nord serait utilisable durant l'autre demi-année.) Il n'est pas non plus utilisable aux moments des équinoxes puisque, la cotangente de  $0^\circ$  n'étant pas définie, le point  $Q_0(H)$  ne l'est pas non plus.

(7) La suite de cet article sera plus technique, veillez à avoir à portée de main un formulaire contenant les principales formules trigonométriques.

## Les cadrants horizontaux

Le maçon qui installera votre cadran solaire appréciera sans nul doute que vous ayez choisi un cadran horizontal plutôt qu'un cadran équatorial puisque sa table est... horizontale.

Quant à nous (7), nous devons chercher l'ombre de l'extrémité du style sur le plan horizontal  $\pi$  en fonction de l'angle horaire  $H$  et de la déclinaison  $\delta$  du soleil. Nous noterons  $R_\delta(H)$  cette ombre. Le principe n'est pas compliqué : puisque nous connaissons déjà l'ombre  $Q_\delta(H)$  sur le plan parallèle au plan équatorial, il nous suffit de chercher le point de percée de la droite  $EQ_\delta(H)$  dans  $\pi$ , où la lettre  $E$  désigne l'extrémité du style.

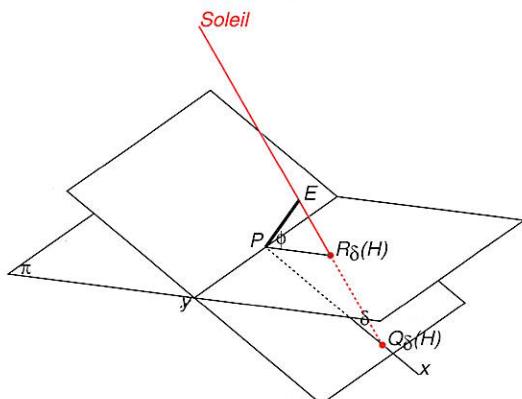


Figure 14

Nous aurons besoin de l'équation du plan horizontal  $\pi$  de cette table.

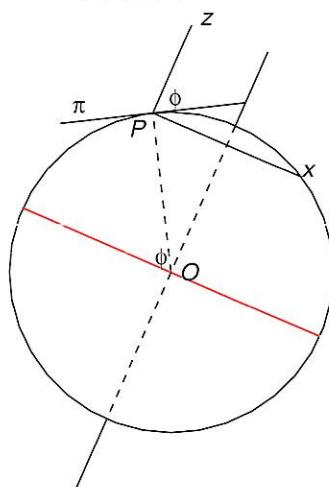


Figure 15



Le système d'axes  $PXYZ$  est celui qui a été choisi précédemment :  $PZ$  est parallèle à l'axe de la terre,  $XPZ$  est le plan méridien et  $PY$  est situé dans le plan horizontal. L'angle de l'axe  $PZ$  avec le plan  $\pi$  est la latitude  $\phi$  du lieu. Pouvez-vous trouver l'équation de  $\pi$  ?

La figure 15 représente en vraie grandeur le plan  $PXZ$ , qui est le plan méridien du point  $P$ . L'intersection du plan  $\pi$  et du plan  $PXZ$  est une droite de ce plan d'équation  $z = x \cotg \phi$ . Comme le plan  $\pi$  est parallèle à  $PY$ , dans l'espace  $PXYZ$ , l'équation de  $\pi$  est aussi

$$z = x \cotg \phi$$

Nous pouvons encore l'écrire

$$x \cos \phi - z \sin \phi = 0$$

Cette équation reste valable si  $\phi = 0$ .

Cherchons à présent le point de percée  $R_\delta(H)$  de  $EQ_\delta(H)$  dans le plan  $\pi$ . Nous connaissons les coordonnées de  $E$  et de  $Q_\delta(H)$  :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\delta(H) = \begin{pmatrix} \cotg \delta \cdot \cos H \\ \cotg \delta \cdot \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur

$$Q_\delta(H) - E = \begin{pmatrix} \cotg \delta \cdot \cos H \\ \cotg \delta \cdot \sin H \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de la droite  $EQ_\delta(H)$  qui supporte le rayon de soleil, et l'équation vectorielle de cette droite est

$$X = E + \lambda(Q_\delta(H) - E)$$

(où  $\lambda$  est un paramètre réel). Nous avons donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cotg \delta \cdot \cos H \\ \lambda \cotg \delta \cdot \sin H \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Le point de percée cherché,  $R_\delta(H)$  est donné par la condition

$$\lambda \cotg \delta \cdot \cos \phi \cdot \cos H = (1 - \lambda) \sin \phi$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{\sin \phi}{\sin \phi + \cotg \delta \cdot \cos \phi \cdot \cos H}$$

et par conséquent

$$R_\delta(H) = E + \lambda(Q_\delta(H) - E) = \frac{\cotg \delta}{\sin \phi + \cotg \delta \cdot \cos \phi \cdot \cos H} \begin{pmatrix} \sin \phi \cdot \cos H \\ \sin \phi \cdot \sin H \\ \cos \phi \cdot \cos H \end{pmatrix}$$

Cette formule comprend un terme en  $\cotg \delta$ . Elle n'a donc pas de sens si  $\delta = 0$ . Mais nous pouvons facilement la transformer en une formule qui ait un sens dans ce cas :

$$R_\delta(H) = \frac{1}{\sin \phi \cdot \tg \delta + \cos \phi \cdot \cos H} \begin{pmatrix} \sin \phi \cdot \cos H \\ \sin \phi \cdot \sin H \\ \cos \phi \cdot \cos H \end{pmatrix}$$

Nous pouvons encore atteindre une forme plus simple (mais dépourvue de sens pour  $\phi = 90^\circ$ , c'est-à-dire si le point  $P$  est le pôle nord) :

$$R_\delta(H) = \frac{1}{\tg \phi \cdot \tg \delta + \cos H} \begin{pmatrix} \tg \phi \cdot \cos H \\ \tg \phi \cdot \sin H \\ \cos H \end{pmatrix}$$

Si cette formule a un sens pour  $\delta = 0$ , elle n'a pas encore été prouvée dans ce cas. Le rayon solaire passant par  $E$  à l'heure  $H$  a alors pour équation vectorielle

$$X = E + \lambda \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

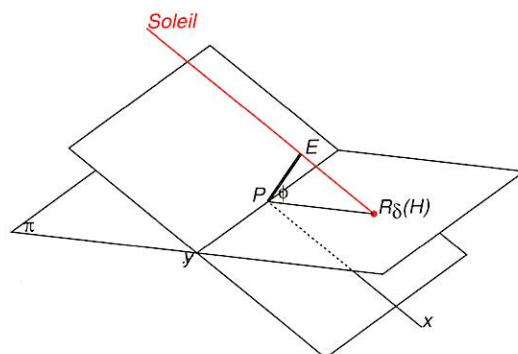


Figure 16

Vous pouvez procéder comme ci-dessus et aboutir au résultat

$$R_0(H) = \frac{1}{\cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \phi \cdot \cos H \\ \operatorname{tg} \phi \cdot \sin H \\ \cos H \end{pmatrix}$$

qui démontre que la formule générale est encore valable dans le cas particulier.

Avant de pouvoir tracer notre cadran solaire, introduisons un système d'axes dans le plan horizontal  $\pi$  et traduisons la valeur de  $R_\delta(H)$  dans le nouveau système de coordonnées planes.

Un repère orthonormé  $PUV$  de  $\pi$  est défini comme suit :

- l'origine  $P$  est placée à la base  $E$  du style,
- l'axe  $PV$  est superposé à l'axe  $PY$  du repère de l'espace,
- l'axe  $PU$  est placé dans  $\pi$  perpendiculairement à  $PV$  et orienté vers le nord géographique. Cet axe est dans le plan méridien.

Vu que d'une part les axes  $PY$  et  $PV$  coïncident et que d'autre part les plans  $PXZ$  et  $PUV$  coïncident, pour les points du plan  $\pi$ , le passage des coordonnées  $u, v$  aux coordonnées  $x, y, z$  est assez simple :

$$\begin{cases} x = u \sin \phi \\ y = v \\ z = u \cos \phi \end{cases}$$

Au pôle nord on a  $\phi = 90^\circ$ , le plan horizontal  $\pi$  est parallèle au plan de l'équateur :

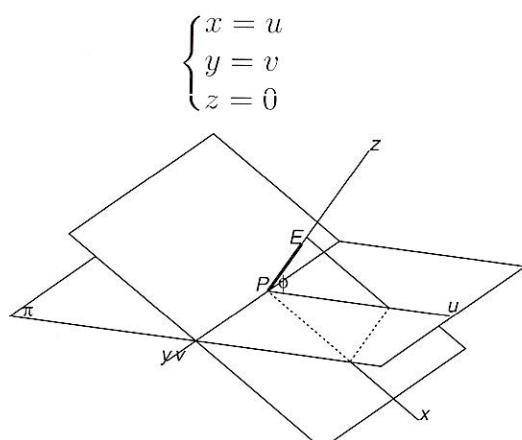


Figure 17

De plus, et toujours pour les points de  $\pi$ , les abscisses  $u$  et  $x$  ont toujours le même signe. La transition réciproque est donc

$$\begin{cases} u = \operatorname{sign}(x) \sqrt{x^2 + z^2} \\ v = y \end{cases}$$

au pôle nord :  $\begin{cases} u = x \\ v = y \end{cases}$ .

Par rapport au repère  $PUV$ , nous pouvons désormais écrire (pour les points de l'hémisphère nord, on a  $\operatorname{tg} \phi > 0$ )

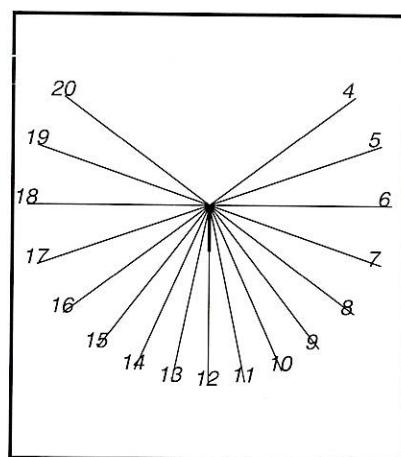
$$R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \phi} \\ \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} H \end{pmatrix}$$

au pôle nord :

$$R_\delta(H) = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \end{pmatrix}.$$

Ces formules confirment — si besoin était — que la direction de l'ombre du style en un moment déterminé de la journée ne dépend pas de la déclinaison du soleil : la pente de la droite joignant l'origine à  $R_\delta(H)$  vaut  $\frac{v}{u} = \sin \phi \cdot \operatorname{tg} H$ . Elle ne dépend donc pas de  $\delta$ .

Ainsi, en joignant les points  $R_\delta(H)$  à l'origine, pour  $H$  variant de 0 à 23 et pour une valeur quelconque de  $\delta$ , nous pouvons déjà tracer un cadran horizontal permettant de lire l'heure en les points de latitude  $\phi$ .



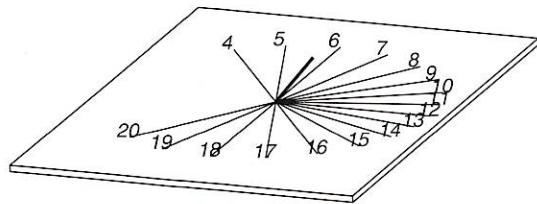


Figure 18

Pour la latitude  $\phi = 50^\circ$ , nous obtenons ainsi la figure 18, sur laquelle les droites correspondant aux heures de nuit n'ont pas été tracées, les ombres étant rarement observables lorsque le soleil est couché! Comme dans le cas des cadrans équatoriaux, les indications 12, 13, ... sont placées sur les traits correspondant à  $H = 0\text{h}$ ,  $H = 1\text{h}$ , ... Ce sont donc les heures usuelles qui sont lues sur le cadran, plutôt que les angles horaires. Cette figure peut être utilisée pour connaître l'heure solaire vraie en observant la direction de l'ombre du style.

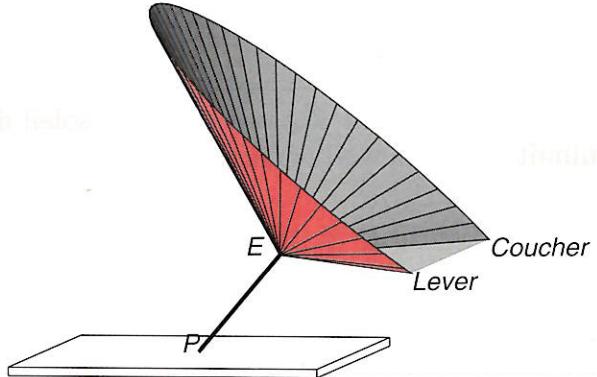


Figure 19

Or nous connaissons un vecteur directeur de la droite  $EQ_\delta(H)$  qui supporte le rayon de soleil :

$$Q_\delta(H) - E = \begin{pmatrix} \cotg \delta \cdot \cos H \\ \cotg \delta \cdot \sin H \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les rayons solaires sont dans le plan horizontal lorsque

$$\cotg \delta \cdot \cos H \cdot \cos \phi - (-1) \sin \phi = 0$$

ce que nous pouvons aussi écrire

$$\cos H = -\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \phi$$

Notons que si cette égalité est satisfaite, le point  $R_\delta(H)$  n'existe effectivement pas.

Les solutions éventuelles de l'équation  $\cos H = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta$  sont donc les heures de lever et de couche astronomiques du soleil à l'emplacement du cadran solaire.

Par exemple, à la latitude  $\phi = 50^\circ$  (latitude approximative des Ardennes belges), le jour du solstice d'été ( $\delta = 23^\circ 27'$ ), les heures de lever et de couche du soleil sont données par l'équation  $\cos H = -0.51696788$ , d'où  $H_1 = -8,07527213$  et  $H_2 = 8,07527213$ . Après conversion de ces heures décimales en heures-minutes-secondes (et en tenant compte de ce que  $H = 0$  correspond à midi), nous constatons que le soleil se lève ce jour-là (qui est le plus long de l'année) à 3 heures 55 minutes 29 secondes et se couche à 20 heures 4 minutes 31 secondes. Rappelons qu'il s'agit ici

## Quand le soleil se lève-t-il ?

Sur la figure 18, nous n'avons pas représenté les droites correspondant aux ombres du style aux heures comprises entre 21h et 3h parce qu'à ce moment, le soleil est couché. Mais comment savoir quand le soleil se lève et se couche ?

Quand le soir tombe, les ombres s'allongent, le soleil descend vers l'horizon. Au moment où il disparaît derrière celui-ci, les rayons solaires sont tangents au globe terrestre, donc dans un plan horizontal. Ils sont ensuite en-dessous du plan horizontal et interceptés par la terre. Déterminer le moment du couche du soleil en  $E$ , ou celui de son lever, c'est déterminer quand les rayons solaires sont dans le plan horizontal en  $E$ .

de l'heure solaire vraie et non de l'heure officielle.

Comment expliquer le phénomène du **soleil de minuit**? Reprenons l'équation

$$\cos H = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

Pour qu'elle ait des solutions, il faut que  $\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta$  soit compris entre  $-1$  et  $+1$ . La condition peut s'écrire  $|\operatorname{tg} \phi| \leq |\operatorname{cotg} \delta|$ , ou encore  $|\operatorname{tg} \phi| \leq |\operatorname{tg}(90^\circ - \delta)|$ .

Par exemple, en un point de l'hémisphère nord, pour que le soleil soit visible durant une journée complète, il faut avoir

$$\delta \geq 90^\circ - \phi$$

Au pôle nord, on a  $\phi = 90^\circ$ , de sorte que la condition  $\delta \geq 90^\circ - \phi$  est vraie si et seulement si  $\delta$  est positif, c'est-à-dire tant que le soleil est à la verticale d'un point de l'hémisphère nord : la période diurne dure six mois!

Quand on s'écarte du pôle nord, la valeur de  $\phi$  diminue donc celle de  $90^\circ - \phi$  augmente. La condition est donc satisfaite moins longtemps.

A la latitude du cercle polaire arctique, on a  $\phi = 90^\circ - 23^\circ 27'$ . Alors, la condition n'est plus satisfaite qu'un jour par an : le jour du solstice d'été où on a précisément  $\delta = 23^\circ 27'$ . Ce jour là, aux points du cercle polaire arctique, le soleil vient raser l'horizon à minuit.

## Le tracé du cadran

Notons  $C_\delta$  la courbe parcourue par l'ombre  $R_\delta(H)$  de l'extrémité du style lorsque  $H$  varie de 0 à 24. Nous connaissons les équations paramétriques de  $C_\delta$  dans le plan  $PUV$ :

$$\begin{aligned} R_\delta(H) &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\cos \phi}{\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} H} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$



Si  $|\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta| < 1$ , nous avons vu que le dénominateur  $\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H$  de  $R_\delta(H)$  s'annule pour deux valeurs  $H_1$  et  $H_2$  de  $H$ , de sorte que la courbe admet deux directions asymptotiques. Le soleil n'est levé que pour  $H_1 < H < H_2$ , c'est donc la portion de la courbe  $C_\delta$  déterminée par cette inéquation qui doit être tracée sur la table du cadran solaire. Remarquons aussi que si  $\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta = 1$ , l'équation  $\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H = 0$  n'a qu'une seule solution,  $H = 180^\circ = 12h$  : c'est bien, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, à minuit que le soleil vient éventuellement raser l'horizon et est de ce fait visible durant 24 heures consécutives.

Dans ce cas, la courbe  $C_\delta$  n'admet qu'une direction asymptotique, mais elle reste non bornée (elle ne se ferme pas dans le plan). Enfin, si  $\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta > 1$ , la courbe  $C_\delta$  se ferme dans le plan, elle n'a pas de directions asymptotiques. Comme nous savons depuis longtemps que  $C_\delta$  est une conique, nous pouvons dès à présent affirmer que

- $C_\delta$  est une hyperbole si  $|\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta| < 1$ ,
- $C_\delta$  est une parabole si  $|\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta| = 1$ ,
- $C_\delta$  est une ellipse si  $|\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta| > 1$ .

Pour trouver une équation cartésienne de  $C_\delta$ , éliminons  $H$  entre les équations

$$\begin{cases} u = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H} \cdot \frac{1}{\cos \phi} \\ v = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos H} \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} H \end{cases}$$

En divisant membre à membre, on obtient  $\frac{v}{u} = \sin \phi \cdot \operatorname{tg} H$ , d'où

$$\operatorname{tg} H = \frac{v}{u \sin \phi}$$

De la première équation, on tire aussi  $\cos H = u \sin \phi \cdot \operatorname{tg} \delta + u \cos \phi \cdot \cos H$ , d'où

$$\cos H = \frac{u \sin \phi \cdot \operatorname{tg} \delta}{1 - u \cos \phi}$$

En exploitant l'identité  $1 + \operatorname{tg}^2 H = \frac{1}{\cos^2 H}$ , on obtient alors

$$\frac{u^2 \sin^2 \phi + v^2}{u^2 \sin^2 \phi} = \frac{(1 - u \cos \phi)^2}{u^2 \sin^2 \phi \cdot \operatorname{tg}^2 \delta}$$

puis

$$\begin{aligned} u^2 \sin^2 \phi \cdot \operatorname{tg}^2 \delta + v^2 \operatorname{tg}^2 \delta &= \\ &= 1 - 2u \cos \phi + u^2 \cos^2 \phi \end{aligned}$$

Si nous ne sommes pas en un pôle<sup>(8)</sup>, nous pouvons diviser par  $\cos^2 \phi$  :

$$u^2(\operatorname{tg}^2 \phi \operatorname{tg}^2 \delta - 1) + v^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\cos^2 \phi} + 2 \frac{u}{\cos \phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi}$$

L'étude de cette équation (voir l'encadré ci-dessous) confirme immédiatement les résultats obtenus plus haut à propos de la nature de cette conique.

En particulier, en un lieu et un jour qui vérifient la condition

$$\operatorname{tg}^2 \phi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$$

la courbe  $C_\delta$  est une hyperbole. Mais entre le lever et le coucher du soleil, seule une branche de l'hyperbole est parcourue par

l'ombre de l'extrémité du style du cadran. L'autre branche de l'hyperbole sera cependant parcourue par cette ombre lorsque la déclinaison du soleil vaudra  $-\delta$  car les cônes de soleil correspondant à  $\delta$  et  $-\delta$  coïncident. On constate que, de plus, les hyperboles  $C_\delta$  et  $C_{-\delta}$  ont la même équation.

Il reste à appliquer les techniques usuelles pour réaliser la figure ??, représentant la table d'un cadran solaire horizontal pour les lieux de latitude  $50^\circ$ .

Sur cette table, sont d'abord dessinées les droites indiquant la direction de l'ombre, heure par heure. On y trouve aussi des portions des hyperboles  $C_\delta$  correspondant aux valeurs  $\delta = \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 20^\circ$  et  $\pm 23^\circ 27'$ , ainsi que la droite correspondant à  $\delta = 0^\circ$  (sur laquelle figure la mention « équinoxe »). Ces courbes ne peuvent être dessinées entièrement puisqu'elles s'étendent jusqu'à l'infini. Il en résulte que les points d'intersections des hyperboles  $C_\delta$  avec les droites indiquant l'heure sont parfois en dehors de la figure.

## Bibliographie

- [1] F.W. Cousins, *Sundials*, Pica Press, New York City, 1970.
- [2] J. Hourrière, *Le cadran solaire du domaine de Clairmont*, L'Astronomie, octobre 1983.
- [3] A. Koeckelenbergh, *Chronologie astronomique, Théorie et construction de cinq cadrants solaires*, ULB, 1989.
- [4] G. Oudenot, *Les cadrants solaires classiques*, L'Astronomie, octobre 1983.

<sup>(8)</sup> Et si nous sommes en un pôle, le cadran horizontal est identique à un cadran équatorial, la courbe  $C_\delta$  a pour équation  $u^2 + v^2 = \operatorname{cotg}^2 \delta$ , ce que nous savions.

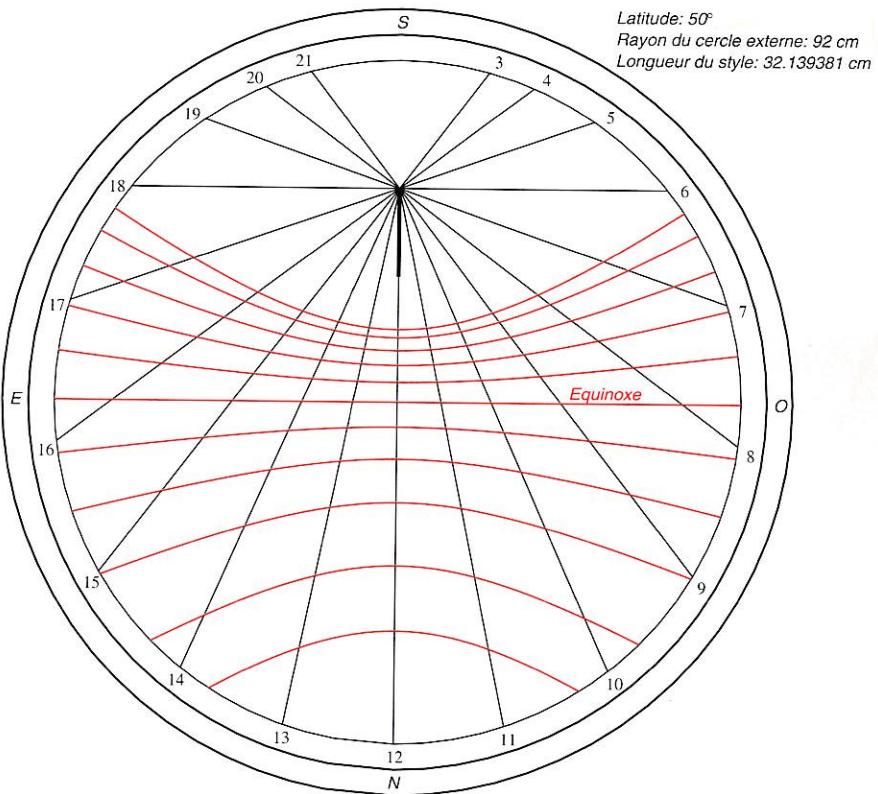


Figure 20 : Un cadran solaire horizontal pour un lieu de latitude 50°.

## À propos des coniques centrées

Donnons-nous trois nombres réels  $a, b, c$ .

- Si ces trois nombres sont de même signe, l'équation  $ax^2 + by^2 = c$  est celle d'une **ellipse centrée en l'origine**.
- Si  $a$  et  $b$  sont de signes différents, cette équation est celle d'une **hyperbole centrée en l'origine**.
- Si  $a$  et  $b$  sont de même signe mais  $c$  du signe opposé, l'équation ne représente aucune courbe réelle. Que représenterait l'équation  $ax^2 + by^2 + a'x = c$ ? Pour le savoir, groupons les termes en  $x$  et mettons  $a$  en évidence :  $a \left( x^2 + \frac{a'}{a}x \right) + by^2 = c$ .

Ajoutons  $\frac{a'^2}{4a^2}$  aux deux membres de l'équation :  $a \left( x^2 + \frac{a'}{a}x + \frac{a'^2}{4a^2} \right) + by^2 = c + \frac{a'^2}{4a^2}$ .

Constituons un carré parfait au premier membre :  $a \left( x + \frac{a'}{2a} \right)^2 + by^2 = c + \frac{a'^2}{4a^2}$ .

Un changement de variable va nous permettre de conclure. En posant  $\begin{cases} x' = x + \frac{a'}{2a} \\ y' = y \end{cases}$ , l'équation devient  $ax'^2 + by'^2 = c + \frac{a'^2}{4a^2}$ .

Par conséquent :

- Si  $a, b$  et  $c + \frac{a'^2}{4a^2}$  sont de même signe, l'équation est celle d'une ellipse centrée en  $(x' = 0, y' = 0)$ , soit  $(x = -\frac{a'}{2a}, y = 0)$ .
- Si  $a$  et  $b$  sont de signes différents, l'équation est celle d'une hyperbole centrée au même point.
- Si  $a$  et  $b$  sont de même signe mais  $c + \frac{a'^2}{4a^2}$  est du signe opposé, l'équation ne représente aucune courbe réelle.



vous offre une page de carrés parfaits.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761, 4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056, 7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801, 10000, 10201, 10404, 10609, 10816, 11025, 11236, 11449, 11664, 11881, 12100, 12321, 12544, 12769, 12996, 13225, 13456, 13689, 13924, 14161, 14400, 14641, 14884, 15129, 15376, 15625, 15876, 16129, 16384, 16641, 16900, 17161, 17424, 17689, 17956, 18225, 18496, 18769, 19044, 19321, 19600, 19881, 20164, 20449, 20736, 21025, 21316, 21609, 21904, 22201, 22500, 22801, 23104, 23409, 23716, 24025, 24336, 24649, 24964, 25281, 25600, 25921, 26244, 26569, 26896, 27225, 27556, 27889, 28224, 28561, 28900, 29241, 29584, 29929, 30276, 30625, 30976, 31329, 31684, 32041, 32400, 32761, 33124, 33489, 33856, 34225, 34596, 34969, 35344, 35721, 36100, 36481, 36864, 37249, 37636, 38025, 38416, 38809, 39204, 39601, 40000, 40401, 40804, 41209, 41616, 42025, 42436, 42849, 43264, 43681, 44100, 44521, 44944, 45369, 45796, 46225, 46656, 47089, 47524, 47961, 48400, 48841, 49284, 49729, 50176, 50625, 51076, 51529, 51984, 52441, 52900, 53361, 53824, 54289, 54756, 55225, 55696, 56169, 56644, 57121, 57600, 58081, 58564, 59049, 59536, 60025, 60516, 61009, 61504, 62001, 62500, 63001, 63504, 64009, 64516, 65025, 65536, 66049, 66564, 67081, 67600, 68121, 68644, 69169, 69696, 70225, 70756, 71289, 71824, 72361, 72900, 73441, 73984, 74529, 75076, 75625, 76176, 76729, 77284, 77841, 78400, 78961, 79524, 80089, 80656, 81225, 81796, 82369, 82944, 83521, 84100, 84681, 85264, 85849, 86436, 87025, 87616, 88209, 88804, 89401, 90000, 90601, 91204, 91809, 92416, 93025, 93636, 94249, 94864, 95481, 96100, 96721, 97344, 97969, 98596, 99225, 99856, 100489, 101124, 101761, 102400, 103041, 103684, 104329, 104976, 105625, 106276, 106929, 107584, 108241, 108900, 109561, 110224, 110889, 111556, 112225, 112896, 113569, 114244, 114921, 115600, 116281, 116964, 117649, 118336, 119025, 119716, 120409, 121104, 121801, 122500, 123201, 123904, 124609, 125316, 126025, 126736, 127449, 128164, 128881, 129600, 130321, 131044, 131769, 132496, 133225, 133956, 134689, 135424, 136161, 136900, 137641, 138384, 139129, 139876, 140625, 141376, 142129, 142884, 143641, 144400, 145161, 145924, 146689, 147456, 148225, 148996, 149769, 150544, 151321, 152100, 152881, 153664, 154449, 155236, 156025, 156816, 157609, 158404, 159201, 160000, 160801, 161604, 162409, 163216, 164025, 164836, 165649, 166464, 167281, 168100, 168921, 169744, 170569, 171396, 172225, 173056, 173889, 174724, 175561, 176400, 177241, 178084, 178929, 179776, 180625, 181476, 182329, 183184, 184041, 184900, 185761, 186624, 187489, 188356, 189225, 190096, 190969, 191844, 192721, 193600, 194481, 195364, 196249, 197136, 198025, 198916, 199809, 200704, 201601, 202500, 203401, 204304, 205209, 206116, 207025, 207936, 208849, 209764, 210681, 211600, 212521, 213444, 214369, 215296, 216225, 217156, 218089, 219024, 219961, 220900, 221841, 222784, 223729, 224676, 225625, 226576, 227529, 228484, 229441, 230400, 231361, 232324, 233289, 234256, 235225, 236196, 237169, 238144, 239121, 240100, 241081, 242064, 243049, 244036, 245025, 246016, 247009, 248004, 249001, 250000, 251001, 252004, 253009, 254016, 255025, 256036, 257049, 258064, 259081, 260100, 261121, 262144, 263169, 264196, 265225, 266256, 267289, 268324, 269361, 270400, 271441, 272484, 273529, 274576, 275625, 276676, 277729, 278784.

**Math-Jeunes**

Périodique trimestriel  
15, rue de la Halle – 7000 Mons  
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU  
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture  
Sluitings toelating

7000 Mons 1  
5/156

Belgique - Belgïe  
P.P.  
7000 Mons 1  
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu  
Refusé  
Décédé  
Adresse insuffisante  
N'habite plus à l'adresse  
indiquée