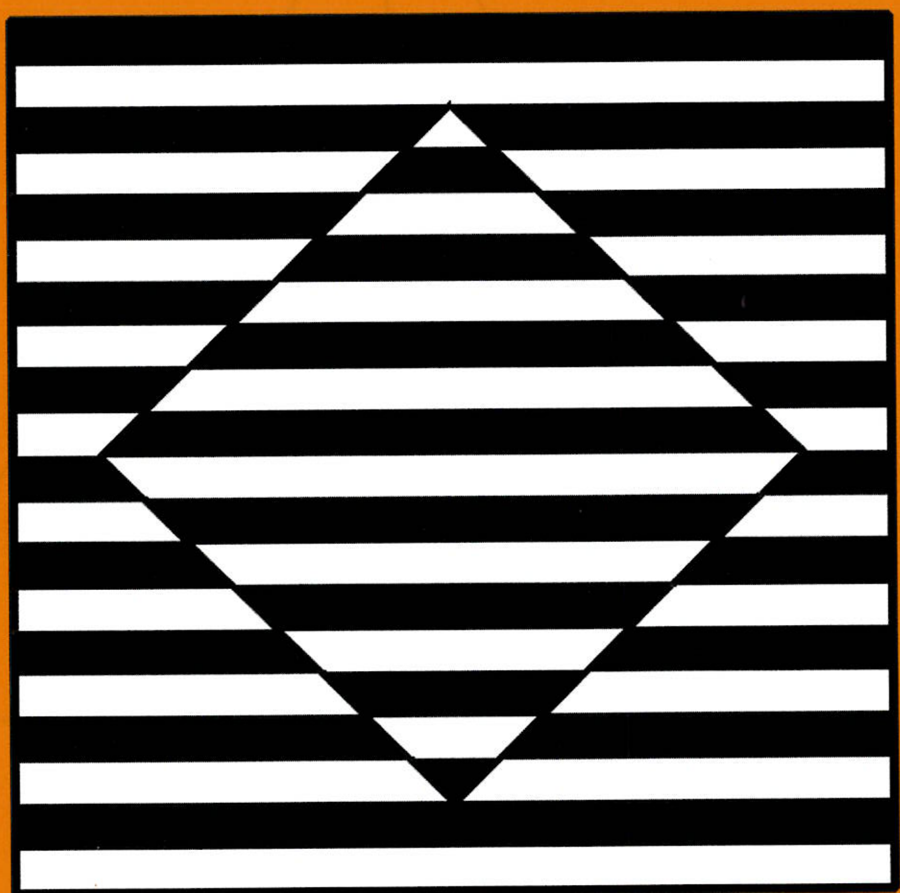
MATH-JEUNES

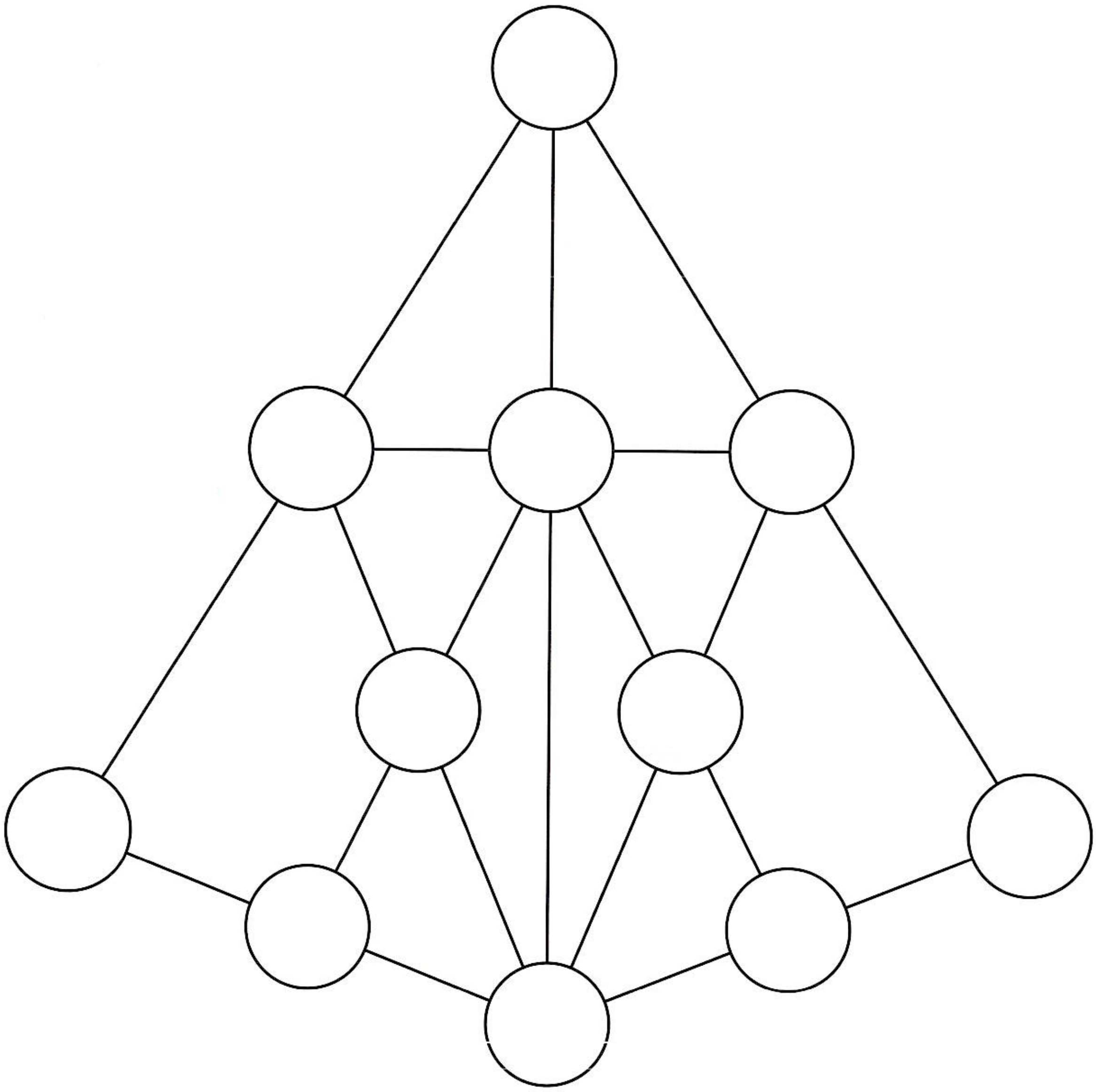


Op-Art!

24^{e} année
Octobre 2002 – n°103 S
Bureau de dépôt : Mons I

Un Magigramme

Complète la grille ci-dessous en utilisant une seule fois chacun des nombres 0, 1, 2, ..., 10, de manière à obtenir une somme égale à 15 pour chacun des triplets alignés.



Solution page 29

D'après *SYMmetry-plus, N°1, 1996*

N°103 Vingt-quatrième année 2002

MATH-JEUNES

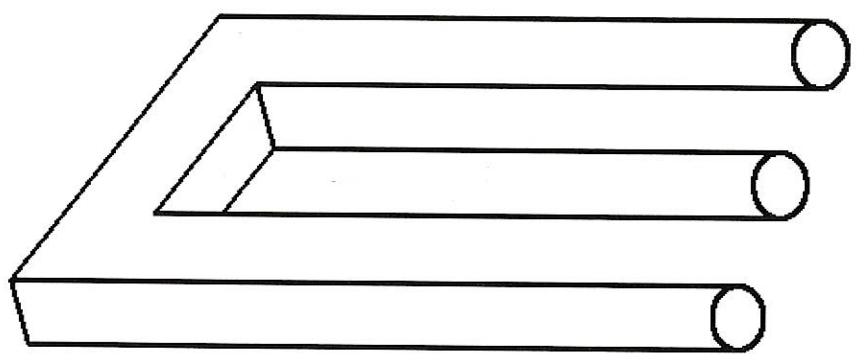
Sommaire

OP-ART ou OPTICAL ART

C. Randour

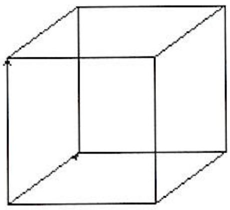
L'art optique est une forme d'art abstrait influencé par les formes mathématiques utilisant la répétition de formes géométriques simples et colorées pour créer des effets de moiré ou pour donner une impression d'espace tri-dimensionnel en utilisant les ombres et les lumières. Les principes qui régissent la vision et qui permettent de donner un sens à l'image font partie de l'oeuvre elle-même.

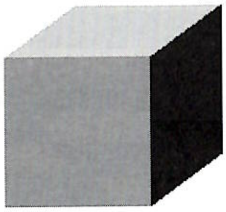
A la fin du XIX^{e} siècle, l'impressionnisme libère involontairement les artistes de la contrainte naturaliste et ouvre les portes à l'art abstrait. La mission de l'art est alors de créer des images quelle que soit leur nature. Certains artistes accordent un intérêt spécial aux effets optiques obtenus en utilisant les formes géométriques et les couleurs ainsi qu'à leur interaction, afin de produire sur la toile des images inattendues qui semblent jouer avec les yeux du spectateur. Les formes géométriques représentées provoquent le regard et invoquent la mémoire pour donner à l'image une signification réaliste et objective, ou pour éveiller des impressions noyées dans l'inconscient. Parfois des formes irréelles ou impossibles sont représentées. Ainsi la figure de Thiéry est lisible à gauche et à droite mais jamais dans son entièreté.

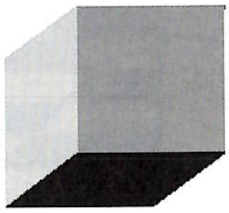


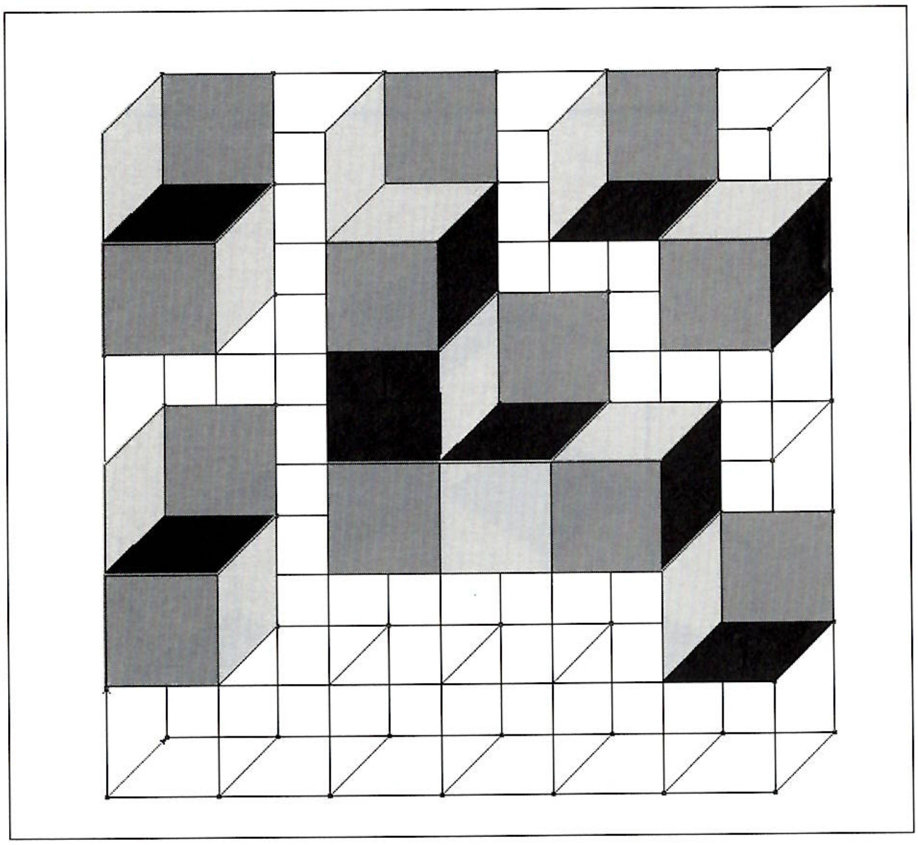
La figure dite de Thiéry appelée aussi broche à trois branches et créée par D.H.Schuster en 1964, est dessinée ici avec Cabri-géomètre.

La représentation en perspective d'un cube permet de le voir de différentes manières qui se bousculent lorsque l'on fixe l'image. Il en est ainsi d'assemblages de cubes où le blanc et le noir alternent. Voici deux visions d'un cube réalisé avec Cabri. En modifiant par des jeux de couleurs les faces de cubes, on peut obtenir des figures impossibles globalement mais qui localement ont une représentation réelle.

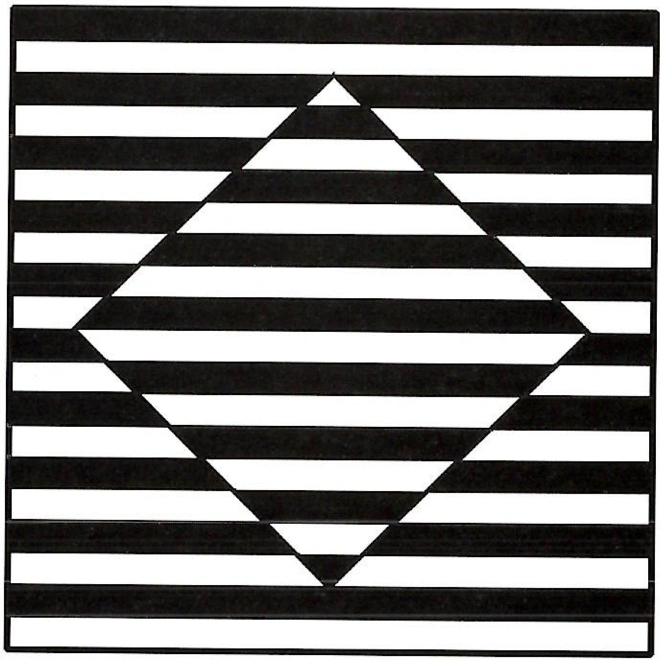


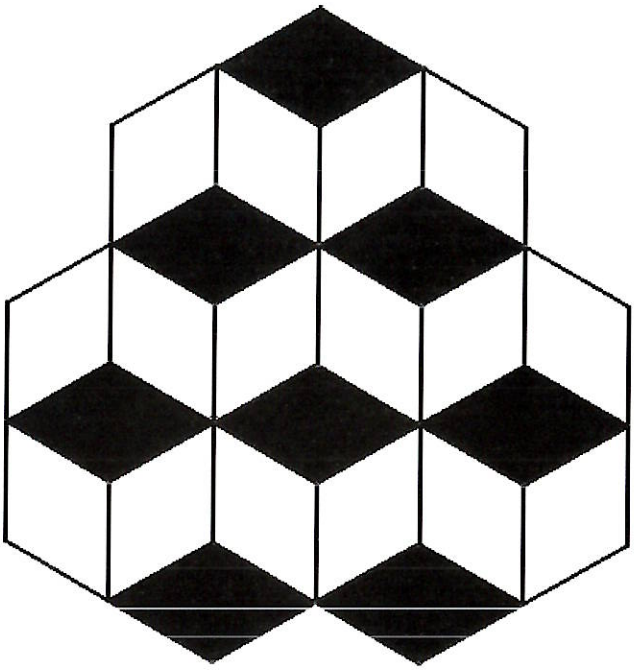






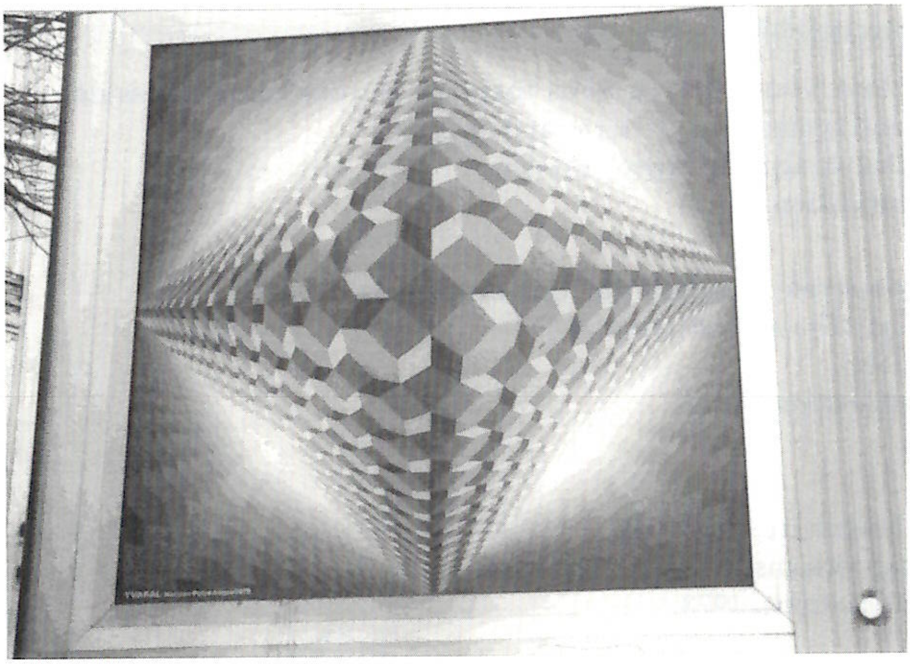
C'est entre 1950 et 1960 que le mouvement artistique Op-Art prend vie. Victor Vasarely (Hongrie 1908–Paris 1997) est l'artiste le plus connu. Il suggère des impressions visuelles par des formes géométriques qui stimulent les réceptions optiques. D'autre artistes participent à ce mouvement artistique, ainsi Josef Albers (Allemagne 1888–1976), Bridget Riley (Londres 1931–) qui utilise notamment les effets géométriques sur de la soie, Yaacov Agam (Israël 1928–), Jesus Rafael Soto (Venezuela 1923–) , Jean-Pierre Yvaral (1934–2002 Paris), le fils de Vasarely. Le mouvement s'étend vers l'art cinétique dont le belge Pol Bury (Haine-St-Pierre 1922–) est un des artisans mondialement connu. Le mouvement d'art cinétique utilise à la fois les effets géométriques et optiques en 3 dimensions. La mode féminine de 2002 a repris certains dessins de l'art optique.





Quelques sites

http ://artcyclopedia.com/history/optical.html
http ://www.vasarely.org/intro.html
http ://www.fondationvasarely.com/cao.htm
http ://venezuelatuya.com/guyana/sotofra.htm

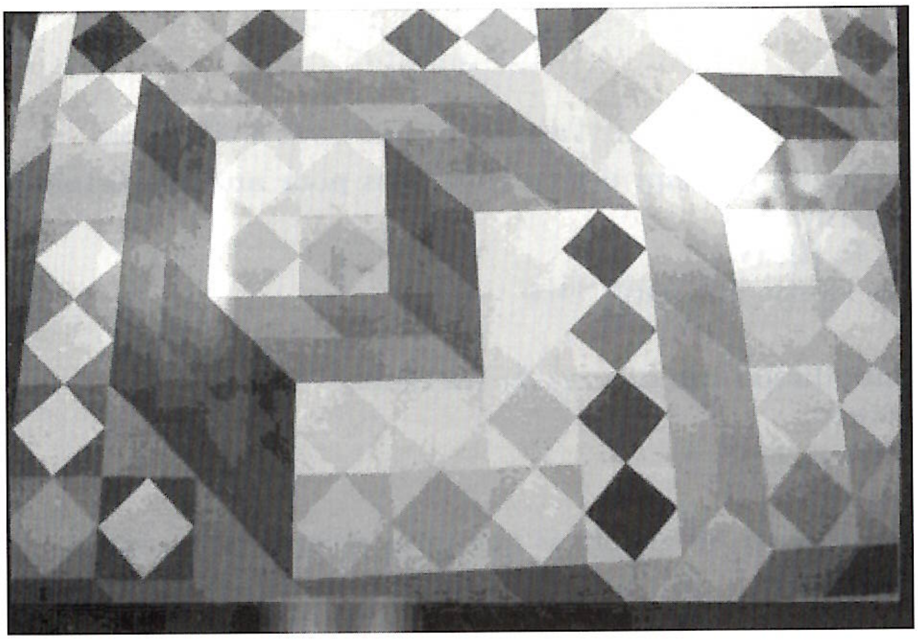


Dessin d'Yvaral à l'arrière d'un panneau publicitaire sur un boulevard parisien, juin 2002

A voir à Bruxelles :

Tapisserie de Vasarely à l'Arts-Center
Gordes, tapisserie tissée à Aubusson 390X780cm ,1970
Avenue des Arts

Voir le détail sur la photo ci-dessous.(réalisée avec la permission du personnel d'accueil).



Quelques références bibliographiques

Des dessins dont vous pouvez vous inspirer si vous aimez dessiner

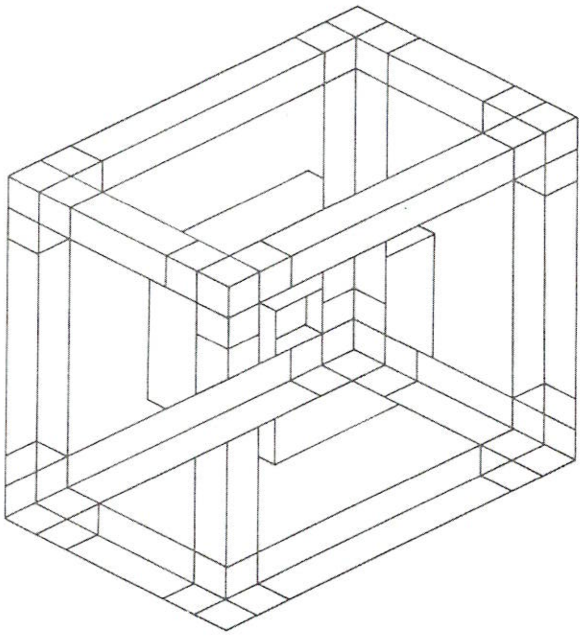
Optical and geometrical patterns and designs
500 original designs by Spyros Horemis
Dover publications, 1970

Une série d'oeuvres réalisées par des étudiants

Optical art, Theory and practice
Rene Parola
Dover publications, 1996

A colorier

Visual illusions coloring book
31 originals designs by Spyros Horemis
Dover publications, 1973



Avec l'autorisation de Dover-Publications

Magnifiques volumes incluant des transparents pour animer certaines images

Une galerie d'oeuvres.
Vasarely I, II, III, IV
Editions du Griffon Neuchâtel, 1979

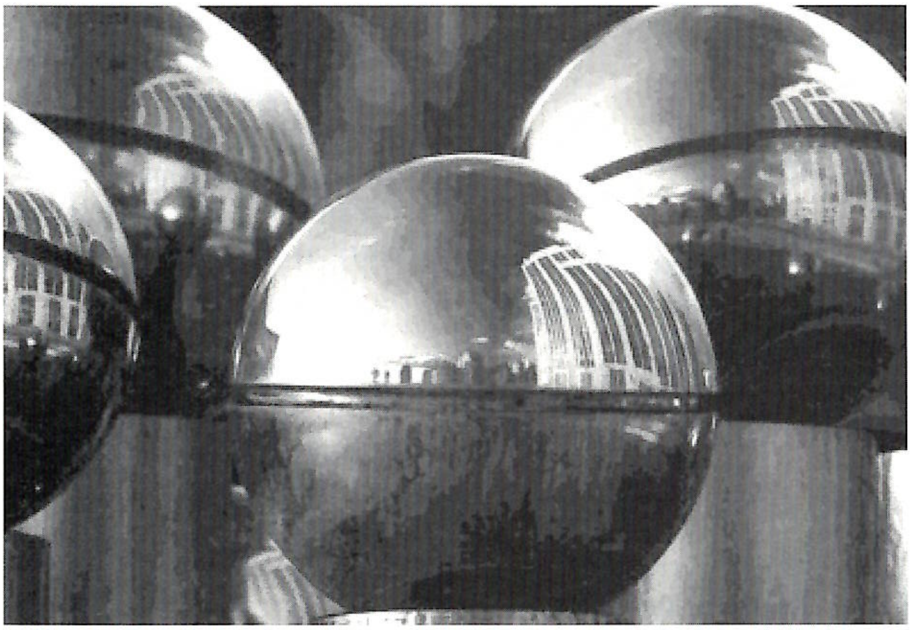
Une bonne compilation des œuvres de l'artiste.

Vasarely "Gea"
Editions Hervas, 1982

Pour en savoir plus sur les surprises que nous réserve notre vue

De l'oeil à la vision
J.Frisby
Nathan, 1981

Fontaine Pol Bury,
Boulevard EmileJacmain, Bruxelles
Colonnes en acier inoxydable surmontées de sphères mobiles pivotant au gré du poids de l'eau qu'elles contiennent.



Carrés magiques et nombres premiers (1)

Y. Noël-Roch

Carré magique

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Carré 1

est un carré magique parce que

$$6+7+2 = 1+5+9 = 8+3+4 = 6+1+8 = 7+5+3 = 2+9+4 = 6+5+4 = 8+5+2$$

- Obtient-on encore un carré magique
  - si on ajoute le même nombre à chacun des neuf nombres du carré 1 ?
  - si on multiplie par le même nombre chacun des neuf nombres du carré 1 ?
- Dans le carré 1, le nombre central est 5 et la somme s sur chacune des lignes, colonnes et diagonales est 15. Comparez le nombre central c et la somme s dans tous les carrés magiques obtenus ci-dessus.

Lien entre c et s

Désignons par c le nombre central d'un carré magique 3×3 et par s la somme obtenue sur chaque ligne, colonne ou diagonale.

Nous venons de voir dans des cas particuliers que $s = 3 \times c$.

Est-ce vrai dans tout carré magique 3×3 ?

Si

x_1	x_2	x_3
y_1	c	y_3
z_1	z_2	z_3

Carré 2

est un carré magique, les deux médianes et les deux diagonales nous donnent

$$(y_1 + c + y_3) + (x_2 + c + z_2) + (x_1 + c + z_3) + (z_1 + c + x_3) = 4s$$

En groupant les termes autrement,

$$(y_1 + c + y_3) + (x_1 + x_2 + x_3) + (z_1 + z_2 + z_3) + 3c = 4s$$

$$s + s + s + 3c = 4s$$

$$\boxed{3c = s}$$

Inventer des carrés

- À partir de $c = 20$, $x_1 = 10$ et $x_3 = -5$, pouvez-vous construire un carré magique ? Pouvez-vous en construire plusieurs ?
- Mêmes questions si on impose seulement $c = 20$ et $x_1 = 10$. Combien de carrés magiques pouvez-vous obtenir ?
- Comment choisir les données pour définir un carré magique 3×3 ?

Que se passe-t-il si $x_1 = c$?

Nous recherchons un — ou des — carré(s) magique(s) à partir de

c		
	c	

La condition $s = 3c$ nous fait compléter la diagonale entamée :

c		
	c	
		c

Par contre, aucune des autres cases n'est déterminée. Pour continuer, nous devons **choisir** un nouvel élément du carré. Soit $x_2 = a$:

c	a	
	c	
		c

La valeur de x_3 est alors connue, puis celles de y_2 et z_1 .... Nous obtenons finalement

c	a	$2c-a$
$2c-a$	c	a
a	$2c-a$	c

Carré 3

Cette dernière grille cache une infinité de carrés différents qui ne font intervenir chacun que **trois** nombres différents.

Que se passe-t-il si $x_2 = c$?

Montrez que, dans ce cas, cinq nombres différents peuvent intervenir dans la construction du carré magique et que celui-ci est nécessairement du type

a	c	$2c-a$
$3c-2a$	c	$2a-c$
a	c	$2c-a$

Carré 4

Nombres en progression arithmétique

♦ Observons les médianes et les diagonales du carré 1 :

Sur M_1, la « médiane horizontale » apparaît l'opérateur $+4$:

$$1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9$$

Sur M_2, la « médiane verticale » le phénomène est analogue :

$$7 \xrightarrow{-2} 5 \xrightarrow{-2} 3$$

Sur la « diagonale descendante » D_1 :

$$6 \xrightarrow{-1} 5 \xrightarrow{-1} 4$$

Sur la « diagonale montante » D_2 :

$$8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{-3} 2$$

Dans les quatre cas, les trois nombres sont **en progression arithmétique**, respectivement de **raison** 4, -2, -1 et -3.

♦ Trois nombres en progression arithmétique (de raison r) peuvent toujours s'écrire

$$x \qquad x+r \qquad x+2r$$

ou

$$y-r \qquad y \qquad y+r$$

Quelle que soit la façon de les noter, il est clair que **si trois nombres sont en progression arithmétique**,

la somme des trois nombres égale le triple du terme central

et

le double du terme central égale la somme des deux autres

Dans le carré 3 (obtenu lorsque $x_1 = c$), les médianes M_1 et M_2 ainsi que les diagonales D_1 et D_2 sont occupées par des nombres en progression arithmétique :

M_1 : $2c-a \xrightarrow{+(a-c)} c \xrightarrow{+(a-c)} a$

D_1 : $c \xrightarrow{+0} c \xrightarrow{+0} c$

M_2 et D_2 : $a \xrightarrow{+(c-a)} c \xrightarrow{+(c-a)} 2c-a$

Conformément aux encadrés ci-dessus, nous avons bien

$$\begin{array}{lcl} (2c-a)+c+a=3c & & 2c=2c-a+a \\ c+c+c=3c & \text{et} & 2c=c+c \\ a+c+(2c-a)=3c & & 2c=a+2c-a \end{array}$$

Dans le carré 4 obtenu lorsque $x_2 = c$, les cinq nombres qui interviennent sont en progression arithmétique puisque

$$2a-c \xrightarrow{+(c-a)} a \xrightarrow{+(c-a)} c \xrightarrow{+(c-a)} 2c-a$$

$$\xrightarrow{+(c-a)} 3c-2a$$

♦ Nous pouvons maintenant récrire les carrés 3 et 4 de manière à mieux expliciter les liens entre les nombres :

c	$c+r$	$c-r$
$c-r$	c	$c+r$
$c+r$	$c-r$	c

Carré 3B

$c-r$	c	$c+r$
$c+2r$	c	$c-2r$
$c-r$	c	$c+r$

Carré 4B

Carré magique 3×3

Après avoir recherché l'aspect des carrés magiques dans les deux cas particuliers précédents, nous pouvons rechercher le cas général en complétant

a	b	
	c	

Nous obtenons

a	b	$3c-a-b$
$4c-2a-b$	c	$2a+b-2c$
$a+b-c$	$2c-b$	$2c-a$

Carré 5

En explicitant les raisons des progressions arithmétiques dans les médianes et les diagonales, nous récrivons le carré 5 sous la forme

$c-r$	$c-t$	$c+r+t$
$c+2r+t$	c	$c-2r-t$
$c-r-t$	$c+t$	$c+r$

Carré 5B

Nous avons vu que le choix de c, x_1 et x_2 dans le carré 2 détermine ce carré. Nous ne pouvons pas en dire autant pour le choix de n'importe quel triplet. Ainsi, le choix de c, x_1 et z_3 par exemple ne définit pas un carré. Parmi les choix déterminants, certains donnent une forme explicite plus « esthétique » que d'autres. C'est le cas en choisissant c, x_1 et x_3 : en posant $x_1 = c-r$ et $x_3 = c-t$, nous obtenons

$c-r$	$c+r+t$	$c-t$
$c+r-t$	c	$c-r+t$
$c+t$	$c-r-t$	$c+r$

Carré 5C

Vous pouvez retrouver le carré 1 à partir du carré 5C en posant $c=5$, $r=-1$ et $t=3$.

Carrés magiques et nombres premiers

Pour rappel, 1 n'est pas premier puisqu'il n'admet qu'un seul diviseur ; 0 ne l'est pas non plus puisqu'il admet une infinité de diviseurs ; 2, 3 et 5 sont **premiers** parce que chacun **admet exactement deux diviseurs**.

Nous pouvons construire des carrés magiques 3×3 en n'utilisant que des nombres premiers. Construisez-en qui ne font intervenir que **trois** nombres premiers différents. Ils sont un peu plus difficiles à trouver mais il en existe qui font intervenir **cinq** nombres premiers différents. Les propriétés démontrées plus haut ainsi qu'une table des « premiers nombres premiers » vous aideront dans vos recherches.

Dans le prochain numéro, nous reviendrons sur les questions posées dans cet article et nous aborderons la recherche de carrés magiques 3×3 écrits à l'aide de **neuf** nombres premiers différents.

Les 670 premiers nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193,
197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421,
431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547,
557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659,
661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,
809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929,
937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039,
1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151,
1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259,
1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373,
1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483,
1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583,
1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697,
1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811,
1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933,
1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053,
2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153,
2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287,
2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389,
2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531,
2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659,
2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741,
2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857,
2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999,
3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121,
3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257,
3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371,
3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511,
3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607, 3613,
3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719, 3727,
3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853,
3863, 3877, 3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989,
4001, 4003, 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099,
4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231,
4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349, 4357,
4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483, 4493,
4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637,
4639, 4643, 4649, 4651, 4657, 4663, 4673, 4679, 4691, 4703, 4721, 4723, 4729, 4733, 4751,
4759, 4783, 4787, 4789, 4793, 4799, 4801, 4813, 4817, 4831, 4861, 4871, 4877, 4889, 4903,
4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957, 4967, 4969, 4973, 4987, 4993, 4999, 5003.

Chimborazo-Everest 1-0

J. Miéwis

La plupart des encyclopédies (et votre professeur de géographie) s'accordent pour désigner le Mont Everest comme le point le plus élevé de la terre. Avec ses 8848 m au-dessus du niveau moyen des mers, il semble ne craindre aucun concurrent ! Les quelques alpinistes qui ont vaincu ce sommet se trouvaient-ils à cet instant privilégié au point de la terre le plus éloigné du centre de la terre ?

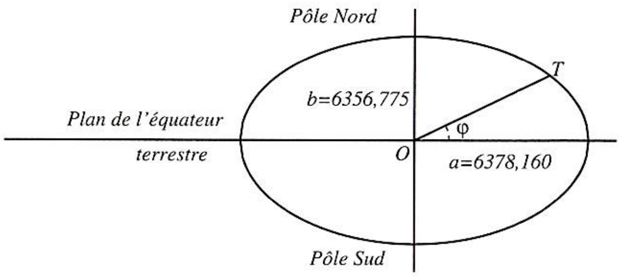
Poser la question en ces termes, c'est je l'espère, vous mettre la puce à l'oreille ! Le point le plus élevé de la terre — par rapport au niveau moyen des mers — ne serait pas forcément le point le plus éloigné du centre de la terre ! Rien d'étrange à cela, puisque la terre n'est pas rigoureusement sphérique : elle est plus proche de l'ellipsoïde de révolution et c'est celui-ci qui sert de repère au niveau moyen des mers qui à son tour détermine les altitudes.

Le niveau « zéro » des altitudes se trouve plus éloigné du centre de la terre lorsque vous êtes proche de l'équateur que lorsque vous vous en éloignez : le sommet d'une montagne proche de l'équateur et d'altitude inférieure à l'imposant 8848 m pourrait donc se retrouver plus loin du centre de la terre que le sommet de l'Everest. Ce candidat existe, c'est un volcan nommé Chimborazo, point culminant à 6267 m dans les Andes équatoriennes.

Nous allons nous rafraîchir la mémoire avec quelques données géographiques, puis nous verrons que la géométrie de l'ellipse nous permet de calculer la distance qui sépare un point d'altitude et de latitude données du centre de la terre. Enfin, nous appliquerons nos résultats à l'Everest et au Chimborazo et trouverons — sans surprise — le vainqueur.

Ce que dit la géographie

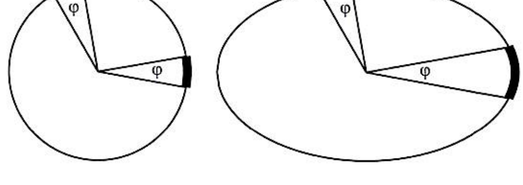
Abordons d'abord quelques concepts géographiques nécessaires à notre propos :



Si la terre — ellipsoïdale — est coupée par un plan comprenant les deux pôles, la section est une ellipse. Cette ellipse admet comme demi grand axe (a) le rayon terrestre équatorial, estimé à 6378,160 km et comme demi petit axe (b) le rayon terrestre aux pôles estimé lui à 6356,775 km.

Un point T d'altitude nulle à la surface terrestre est repéré dans notre section elliptique par l'angle φ de latitude. C'est un angle au centre croissant régulièrement de la latitude zéro à l'équateur jusqu'à la latitude 90° aux pôles.

Si dans un cercle, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, il en va tout autrement dans une ellipse : un angle au centre d'un degré aux alentours de la latitude zéro intercepte un arc plus grand que celui intercepté par un angle au centre d'un degré sous nos latitudes.



L'idée d'une terre ellipsoïdale est en fait assez ancienne : de 1736 à 1746, trois savants

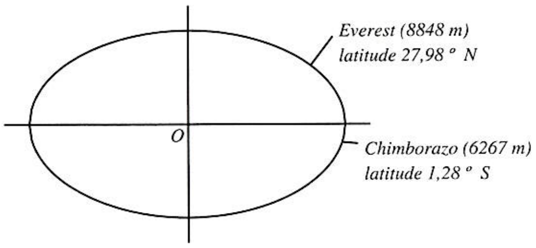
Math-Jeunes n°103, 12–15, 2002

français : Godin, Bouguer et La Condamine avaient mesuré au Pérou un arc équivalent à une variation d'un degré de latitude. De 1792 à 1799, deux autres savants français : Delambre et Méchain mesurèrent l'arc de Dunkerque jusqu'à Barcelone pour établir la première définition du mètre.

Les différences — significatives — observées entre ces deux mesures sont à l'origine de l'hypothèse que la terre n'est pas une sphère, mais plutôt un ellipsoïde de révolution.

L'évolution des techniques et la précision des mesures ont conduit aux actuelles valeurs des rayons (a) et (b).

Par ailleurs, la latitude du Mont Everest est 27,98 ° Nord et celle du volcan Chimborazo est 1,28 ° Sud.



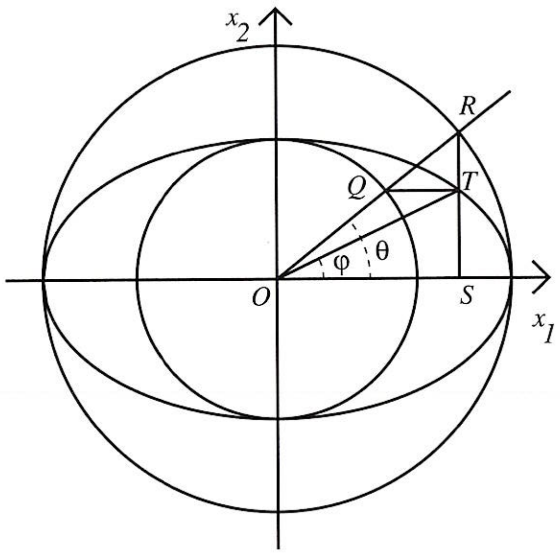
Ce que nous dit la géométrie de l'ellipse

L'équation de l'ellipse par rapport à la latitude

Rapportées à un repère dont l'origine O est au centre de la terre, le premier axe OX_1 dans la direction d'un point quelconque de l'équateur terrestre et le second axe OX_2 en direction du pôle Nord, ses équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x_1 &= a\cos\theta \\ x_2 &= b\sin\theta \end{cases}$$

où θ **n'**est malheureusement **pas** la latitude du point mobile de coordonnée (x_1, x_2) sur l'ellipse, mais un angle au centre des deux cercles qui conduisent à la construction classique de l'ellipse.



Le paramètre θ de ses équations paramétriques est l'angle $\widehat{SOR}$, tandis que φ est l'angle $\widehat{SOT}$ de latitude du point T.

L'abscisse de T peut donc d'exprimer par :

$$x_1 = a\cos\theta \quad \text{et} \quad x_1 = |OT|\cos\varphi$$

L'ordonnée de T s'exprime quant à elle par :

$$x_2 = b\sin\theta \quad \text{et} \quad x_2 = |OT|\sin\varphi.$$

De $b\sin\theta = |OT|\sin\varphi$ et $a\cos\theta = |OT|\cos\varphi$, on tire par division :

$$\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi.$$

Nous avons ainsi trouvé le lien entre la latitude φ et le paramètre θ des équations paramétriques de l'ellipse :

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right) \quad (O \leqslant \theta,\ \varphi < 90^\circ).$$

L'emploi des formules classiques de goniométrie :

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

appliquée à la relation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}\ \operatorname{tg}\varphi$$

permet de trouver :

$$\sin\theta = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$$

et

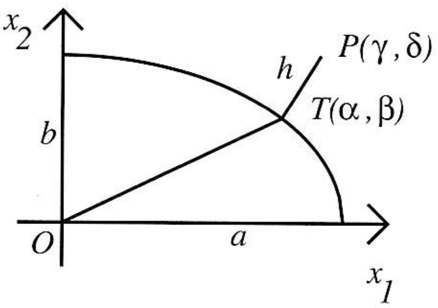
$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$$

et finalement l'équation d'une ellipse rapportée à l'angle φ de latitude :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}} \\ x_2 &= \frac{ab\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}} \end{cases}$$

Le problème de l'altitude

L'altitude d'un lieu P se conçoit mesurée perpendiculairement à un plan localement tangent à la surface terrestre.



Cela signifie pour notre ellipse que l'altitude (h) doit être portée suivant la normale au point T considéré. La distance du sommet P au centre de la terre O n'est donc pas la somme des deux distances $|OT|$ et $|TP|$.

L'équation de la normale au point $T(\alpha, \beta)$ d'une ellipse de paramètres a et b est donnée dans tous les manuels :

$$a^2\beta(x_1 - \alpha) = b^2\alpha(x_2 - \beta).$$

Nous devons avec ces données rechercher la coordonnée du point $P(\gamma, \delta)$ situé à une distance h de T vers l'extérieur de notre quart d'ellipse, ce qui signifie que l'abscisse et l'ordonnée de P sont plus grandes respectivement que celles de T. Cette restriction à un quart d'ellipse permet en effet de lever l'ambiguïté sur P, puisqu'il existe deux points sur la normale à une distance h de T.

Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} (\gamma-\alpha)^2 + (\delta-\beta)^2 = h^2 \\ a^2\beta(\gamma-\alpha) = b^2\alpha(\delta-\beta) \end{cases}$$

la première équation exprimant la distance de T à P, la seconde vérifiant que le point P appartient à la normale.

(α et β sont connus et valent respectivement $a\cos\theta$ et $b\sin\theta$).

La seconde équation donne :

$$\gamma - \alpha = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(\delta - \beta)$$

que l'on reporte dans la première :

$$(\delta-\beta)^2\left(\frac{b^4\alpha^2}{a^4\beta^2} + 1\right) = h^2$$

puis

$$(\delta-\beta)^2 = \frac{h^2a^4\beta^2}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}$$

et en remplaçant α et β :

$$\begin{aligned}(\delta-\beta)^2 &= \frac{h^2a^4b^2\sin^2\theta}{b^4a^2\cos^2\theta + a^4b^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{h^2a^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\delta &= \beta + \frac{ha\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} && (1)\\ \delta &= \sin\theta\left(b + \frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right). && (2)\end{aligned}$$

En isolant le terme $(\delta - \beta)$ dans la seconde équation du système, on obtient en utilisant la même stratégie :

$$\gamma = \cos\theta\left(a + \frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right).$$

La coordonnée de P étant à présent connue, il est facile de trouver la distance $|OP|$ (que nous proposons au carré pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} d^2 &= \cos^2\theta \left(a + \frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \right)^2 \\ &\quad + \sin^2\theta \left(b + \frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \right)^2 . \end{aligned}$$

Cette formule calcule la distance du centre de la terre à un point d'altitude h situé à une latitude (Nord) φ :

$a = 6378,160$ km, $b = 6356,775$ km, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)$

C'est le choix du signe en (1) qui motive la restriction aux latitudes nord : nous n'aurons qu'à supposer que le Chimborazo est à 1,28 ° de latitude nord ; cela ne changera rien aux résultats).

Appliquons notre formule

Les calculs ont été effectués avec une machine d'une capacité de 10 chiffres significatifs et en utilisant au maximum les mémoires pour les valeurs intermédiaires.

EVEREST : $h = 8,848$ km
$\varphi = 27,98°$
$\theta = 28,06°$

$d = 6382,282$ km.

CHIMBORAZO : $h = 6,267$ km
$\varphi = 1,28°$
$\theta = 1,28°$

$d = 6398,416$ km.

D'un certain point de vue mathématique, le Chimborazo mérite donc d'être reconnu : c'est en son sommet que se situe le point terrestre le plus éloigné du centre de la terre : Chimborazo–Everest : 1-0.

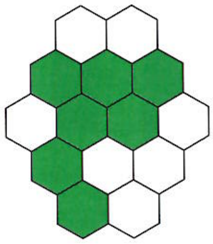
Solutions des jeux

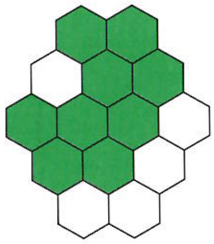
Mots croisés

P	A	R	A	B	O	L	E
T	N	A	R	D	A	U	Q
O	N	C	E	■	S	■	U
L	O	I	N	■	I	■	A
E	■	N	A	■	S	O	T
M	■	E	I	N	■	R	I
E	S	■	R	O	M	E	O
E	U	L	E	R	I	E	N

16	1	18	1	2	15	12	5
20	14	1	18	4	1	21	17
15	14	3	5	■	19	■	21
12	15	9	14	■	9	■	1
5	■	14	1	■	19	15	20
13	■	5	9	14	■	18	9
5	19	■	18	15	13	5	15
5	21	12	5	18	9	5	14

Le jeu des hexagones





Des grilles à décrypter

Grille facile

♦	5
♠	10
♣	7
♥	2

Grille difficile

♣	6
♥	1
♦	3
♠	9

Le tourniquet pentagonal

1. Les cases sont successivement occupées par a, b, $\frac{b+1}{a}$, $\frac{a+b+1}{ab}$, $\frac{a+1}{b}$, a, b, ...
2. Les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (avez-vous déjà entendu parler du nombre d'or ?) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

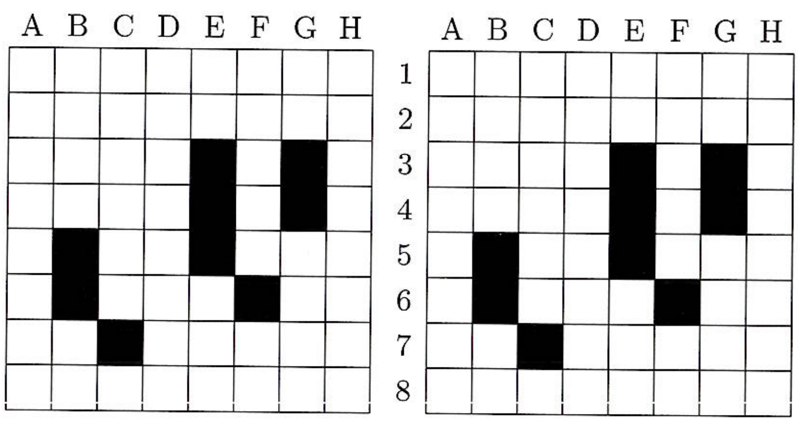
Jeux

Les mots croisés de Pierre Carré

Pêle-mêle, voici les définitions des mots qui composent la grille ci-dessous :

Quart de cercle retourné — Lieu de repos pour Al-Kwarizmi. — Mathématicien de l'Antiquité grecque.— Naturel allemand.— Courbe mathématique.— Caractérise une courbe.— Opérateur logique.— Conçu par Archimède.— Adjectif tiré du nom d'un tout grand mathématicien.— Tout polynôme en possède au moins une.— Douzième partie de la livre romaine.— Inscription latine pour indiquer une date.— Juliette l'aimait.— Vient de savoir.— Vient de lire.— Participe passé gai.— Pas trop près.— Peu intelligent.— Au bord de la forêt.— Note de musique.— Interjection enfantine.— Les enfants de 7 à 77 ans en lisent.

Le contenu des cases de la grille peut également être déterminé par les définitions mathématiques suivantes, qui permettent de calculer un nombre. Ce nombre est le numéro d'ordre dans l'alphabet de la lettre cherchée : $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, …, $Z = 26$. Pour votre facilité, nous vous livrons deux grilles vierges.



A1 Carré parfait.
A2 La somme de ses diviseurs propres est 22.
A3 Les trois quarts de A2.
A4 Nombre de faces d'un dodécaèdre.
A5 Somme de deux carrés parfaits.
A6 Nombre premier.
A7 Nombre premier.
A8 Son inverse a une forme décimale limitée.

B1 Premier naturel non premier et non nul.
B2 Somme du nombre de faces et du nombre de sommets de deux des polyèdres convexes réguliers.
B3 Additionné à son carré donne 210.
B4 Nombre triangulaire.
B7 La moyenne de ce nombre et de 39 vaut 29.
B8 Successeur de B4 parmi les nombres triangulaires.

Math-Jeunes n°103, 16–18, 2002

C1 Égal à F7 + H1.
C2 Il n'est divisible que par lui-même.
C3 Sa racine carrée vaut 1,73 à 0,01 près.
C4 Son double vaut son carré retourné.
C5 Nombre de diagonales d'un heptagone convexe.
C6 Nombre de côtés d'un polygone régulier dont les angles valent 108°.
C8 PGCD de 156 et de 228.

D1 Nombre d'axes de symétrie d'un trapèze isocèle.
D2 Posède exactement six diviseurs naturels.
D3 Nombre de polyèdres platoniciens.
D4 Solution de $2x + 1 < 30 < 3x - 10$.
D5 Différence entre un carré et un cube parfaits.
D6 Nombre impair non premier, entouré de deux naturels composés.
D7 Le double de D6.
D8 En base 4, il s'écrirait 11.

E1 Nombre d'axes de symétrie d'un rectangle non carré.
E2 Dans le plan, nombre de rotations qui transforment un carré en lui-même.
E6 Somme de quatre naturels consécutifs.
E7 Produit de deux impairs consécutifs.
E8 Double du carré d'un naturel.

F1 En base 2, il s'écrirait 1111.
F2 Nonante-septième décimale du rationnel égal à 1/7.
F3 Somme du quotient et du reste de la division de 199 par 16.
F4 Dernier nombre à un chiffre en base 10.
F5 Différence de deux cubes parfaits consécutifs.
F7 Son quintuple vaut treize fois H1.
F8 Moyenne géométrique de 3 et de 27.

G1 Nombre de diviseurs naturels de 72.
G2 Solution de l'équation $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 10$.
G5 Soustrait de G6 donne 3.
G6 Additionné à G5 donne 33.
G7 Compris entre $\sqrt{20}$ et $\sqrt{30}$.
G8 Dixième décimale du nombre π.

H1 Additionné à C1 et à F7 donne 36.
H2 Diminué de 1, il est un carré parfait ; augmenté de 1, il est divisible par 9.
H3 Nombre de Fibonacci.
H4 Égal à son carré.
H5 Nombre de faces d'un icosaèdre.
H6 Abscisse du point d'ordonnée 2 de la droite d'équation $2x - 7y - 4 = 0$.
H7 Somme des termes de la fraction irréductible égale à 0,875.
H8 Sa moitié est égale à la différence de deux cubes parfaits.

Des produits à décrypter

Chacun des symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représente un entier compris entre 1 et 10. À droite et sous la grille sont indiquées les produits par ligne et par colonne. Retrouvez la valeur de chacun des symboles.

Grille facile

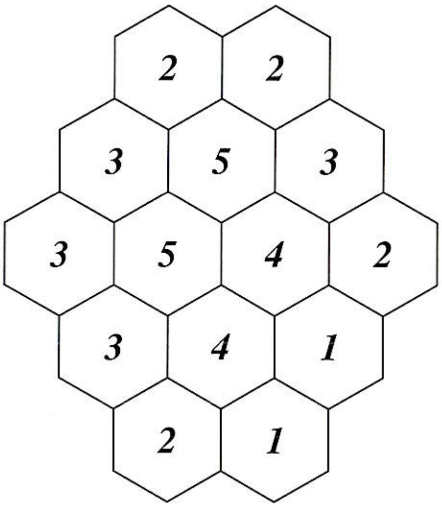
♦	♥	♠	♦	♦	2500
♠	♥	♦	♣	♥	1400
♣	♦	♥	♥	♥	280
♥	♦	♥	♥	♥	80
♣	♣	♣	♠	♣	24010
4900	700	1400	1400	280	

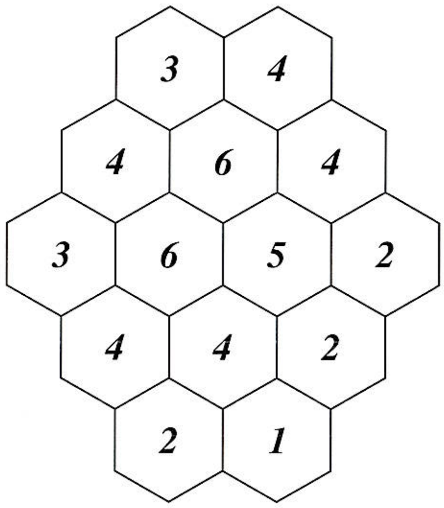
Grille difficile

♣	♣	♥	♦	♠	972
♣	♦	♥	♠	♣	972
♥	♠	♦	♣	♠	1458
♦	♥	♠	♦	♥	81
♦	♣	♣	♦	♠	2916
324	972	162	1458	4374	

Le jeu des hexagones

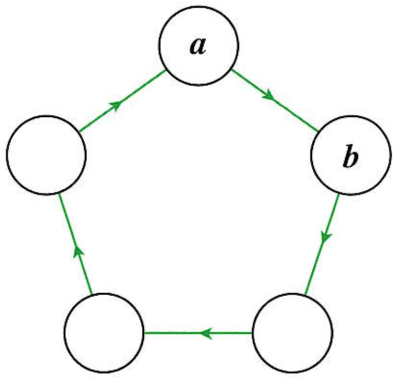
Coloriez certains des hexagones des figures suivantes de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : **tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !**



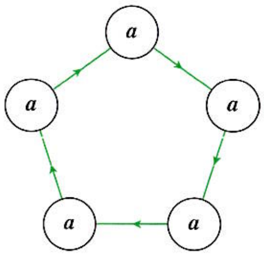


Le tourniquet pentagonal

1. En suivant les flèches, chaque case est calculée à partir des deux précédentes en fonction de a et b.
Le contenu de la n^{e} case est le quotient de la $n-1^{e}$ case augmenté de 1 par le contenu de la $n-2^{e}$ case.
Calculez les 3^{e}, 4^{e} et 5^{e} cases. Dans la foulée calculez le contenu de la première case. Que constatez vous ?



2. Pour quelle valeur de a obtient-on par le même procédé



Solutions des jeux : page 15

La fonction du troisième degré

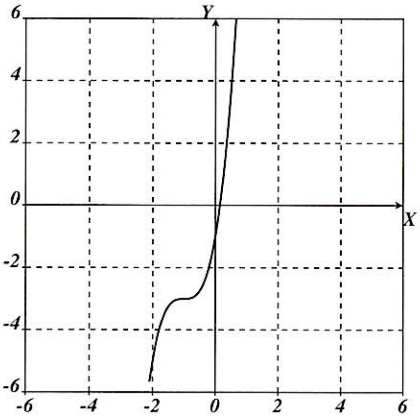
C. Van Hooste

Pour lire de manière dynamique cet article, efforce-toi de justifier par toi-même les propositions encadrées et de répondre aux suggestions qui te sont faites.

Parce qu'elles sont abondamment étudiées en classe, les fonctions du premier et du second degré nous sont bien connues ; la première a pour graphique une droite et la seconde une parabole. Nous ne pouvons évidemment pas contester leur importance. Cependant, cette « importance » est telle que l'étude d'autres fonctions-polynômes est souvent négligée ; notamment, celle du troisième degré qui, pourtant, offre plus de variété que ses deux cadettes. Pour toi, *Math-Jeunes* pallie ce manquement.

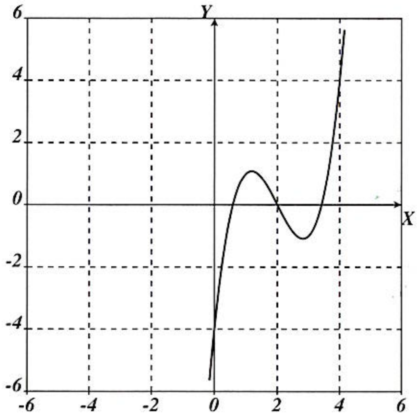
Quelques graphiques

Voici en avant-première quelques graphiques de fonctions du troisième degré.



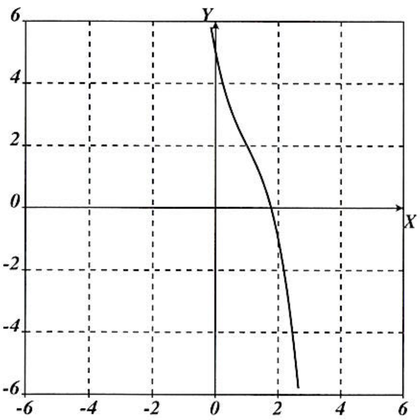
Graph. 1

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 1$$



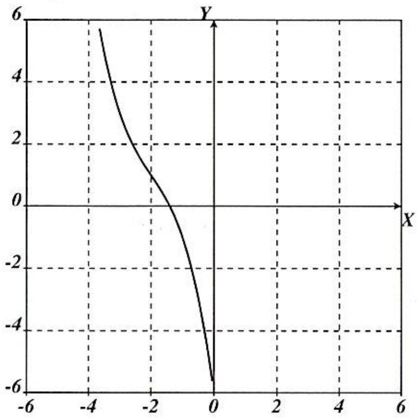
Graph. 2

$$y = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$$



Graph. 3

$$y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 5$$



Graph. 4

$$y = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{15}{2}x - 6$$

Essaie d'analyser leurs différences et leurs ressemblances. Sers-toi d'une machine (calculatrice graphique ou ordinateur) pour en visualiser d'autres.

Forme canonique

Sous sa forme la plus générale, la fonction du troisième degré est

$$f : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

avec a, b, c, d réels et a non nul.

Graphique

Le graphique d'une fonction du troisième degré est une **cubique**, c'est-à-dire une courbe telle qu'une droite quelconque la coupe en trois points au plus.

Évidemment, le graphique de f n'a qu'un seul point d'intersection avec toute droite verticale (parallèle à l'axe Oy). Pour une droite oblique d'équation $y = m\,x + p$, le nombre de points d'intersection avec le graphique de f est égal au nombre de solutions réelles de l'équation aux abscisses

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = m\,x + p.$$

Or, cette équation est du troisième degré ; elle admet donc au plus trois solutions réelles.

Vérifie cette proposition en traçant des droites sur les graphiques présentés en avant-première (cf. graph. 1 à graph. 4).

Point d'inflexion

Le graphique d'une fonction du troisième degré admet un et un seul point d'inflexion.

En effet, les dérivées première et seconde de la fonction f sont

$$f' : x \mapsto 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$$

et

$$f'' : x \mapsto 6\,a\,x + 2\,b.$$

Cette dernière étant du premier degré, le graphique de f admet un unique point d'inflexion d'abscisse $-\dfrac{b}{3\,a}$.

Déterminons quelle(s) condition(s) portant sur les coefficients de f doivent être vérifiées pour que le graphique de f admette l'origine O du repère comme point d'inflexion.
Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$f(0) = 0 \text{ et } -\frac{b}{3\,a} = 0,$$

donc que

$$b = d = 0.$$

Pour la suite, nous désignons par g une fonction satisfaisant à ces conditions, c'est-à-dire de la forme

$$g : x \mapsto a\,x^3 + c\,x.$$

Une telle fonction est impaire. Le graphique de g est donc symétrique par rapport à son point d'inflexion.

Translation

Le graphique d'une fonction du troisième degré est l'image du graphique d'une fonction g par la translation qui applique son point d'inflexion sur l'origine O du repère.

Le point d'inflexion P de la cubique

$$C \equiv y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d,$$

graphique de la fonction du troisième degré f, a pour abscisse $-\frac{b}{3\,a}$; son ordonnée est donc $f(-\frac{b}{3\,a})$. Par conséquent, l'image de cette cubique par la translation de vecteur $\vec{PO}$ est la courbe d'équation

$$y + f(-\frac{b}{3\,a}) = a\,(x - \frac{b}{3\,a})^3 + b\,(x - \frac{b}{3\,a})^2 + c\,(x - \frac{b}{3\,a}) + d.$$

Après simplification, cette équation devient

$$y = a\,x^3 + (c - \frac{b^2}{3\,a})\,x$$

et représente bien une fonction de même type que g.

Affinité orthogonale

Le graphique d'une fonction g est l'image d'un graphique d'une fonction

$$h : x \mapsto x^3 + k\,x$$

par une affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\frac{1}{a}$.

De fait, cette transformation du plan laisse les abscisses des points inchangées, mais divisent leurs ordonnées par a. Ainsi, elle applique la courbe d'équation $y = a\,x^3 + c\,x$ sur celle d'équation

$$y = x^3 + \frac{c}{a}\,x,$$

autrement dit, sur le graphique d'une fonction h en posant $k = \frac{c}{a}$.

En appliquant successivement la translation et l'affinité décrites ci-dessus, le graphique d'une fonction quelconque du troisième degré se transforme en celui d'une fonction particulière du troisième degré

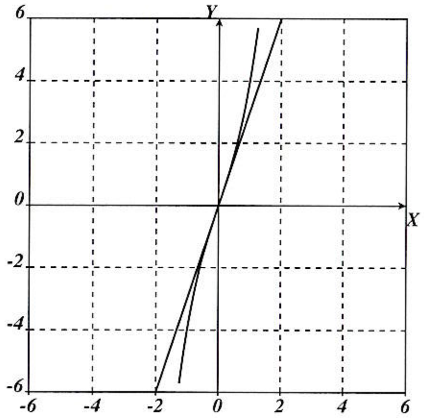
$$h : x \mapsto x^3 + k\,x,$$

dont les principales caractéristiques sont les suivantes :
- le coefficient du terme en x^3 vaut 1 ;
- le point d'inflexion coïncide avec l'origine du repère.

Par conséquent, pour étudier les fonctions du troisième degré, il suffit de restreindre l'analyse à celle de la fonction h.

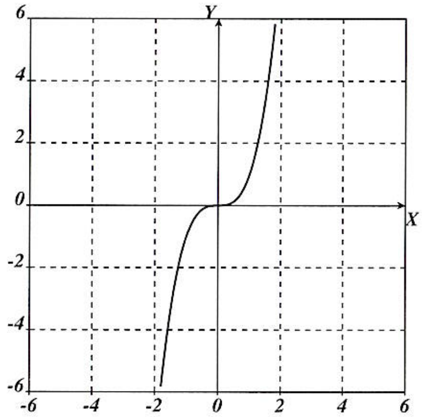
Graphique de la fonction h

La forme du graphique de la fonction h varie selon le signe de k. Voici les graphiques de trois fonctions de type h.



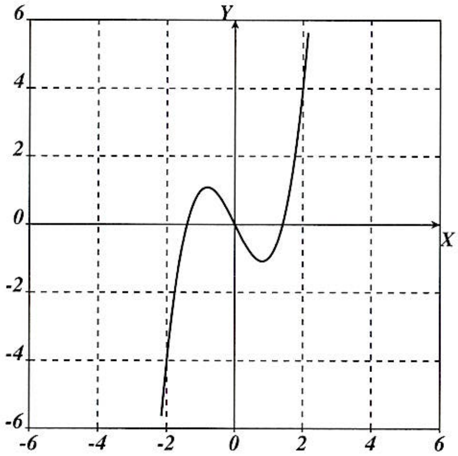
Graph. 5

$$y = x^3 + 3x$$



Graph. 6

$$y = x^3$$



Graph. 7

$$y = x^3 - 2x$$

Pour le graphique de la fonction $x \to x^3 + 3\,x$ (cf. graph. 5), nous avons ajouté la tangente au point d'inflexion, soit la droite d'équation $y = 3\,x$.

La dérivée de la fonction h est
$$h' : x \to 3\,x^2 + k.$$

Si $k > 0$, cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$; la fonction h est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la tangente au graphique de h en son point d'inflexion a pour coefficient angulaire k.

Si $k = 0$, la dérivée de h est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en 0. Aussi, la fonction h est encore strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais la tangente au graphique de h en son point d'inflexion est horizontale.

Si $k < 0$, la dérivée de h s'annule en $-\sqrt{-\frac{k}{3}}$ et en $\sqrt{-\frac{k}{3}}$. Les variations de la fonction h sont alors reprises dans le tableau ci-dessous.

x		$-\sqrt{-\frac{k}{3}}$		$\sqrt{-\frac{k}{3}}$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

En résumé, il y a trois sortes de graphiques pour les fonctions du troisième degré, réduites à la forme h.

- Si $k > 0$, la fonction est strictement croissante et n'admet ni maximum, ni minimum. La tangente au point d'inflexion est oblique (cf. graph 6).
- Si $k = 0$, la fonction est strictement croissante et n'admet ni maximum, ni minimum. La tangente au point d'inflexion est horizontale (cf. graph 5).
- Si $k < 0$, la fonction admet un maximum et un minimum locaux (cf. graph 7).

Racines de la fonction

Toute racine réelle de la fonction h est l'abscisse d'un de ses points d'intersection avec l'axe Ox. D'après l'analyse réalisée au paragraphe précédent, il est clair que la fonction h admet 0 pour unique racine réelle si $k \geq 0$.
Par contre, lorsque $k < 0$, la fonction h possède alors trois racines : $-\sqrt{-k}$, 0 et $\sqrt{-k}$.

Pour préparer la suite

Dans le *Math-Jeunes* 104, nous discuterons du nombre de racines de la fonction f et nous donnerons le moyen de déterminer les solutions réelles de l'équation du troisième degré. Pour t'y préparer, voici deux sujets de réflexion.

1. Le graphique d'une fonction du troisième degré a au plus trois points d'intersection avec une droite, quelle qu'elle soit. Peux-tu préciser ? Pourrait-il avoir 0, 1, 2 ou 3 points d'intersection avec une droite ?
2. En exploitant les éléments de cet article, notamment la translation et l'affinité, détermine quelle(s) condition(s) les coefficients de la fonction

$$f : x \rightarrow a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

doivent vérifier pour que celle-ci admette des extrema locaux. Et, dans ce cas, calcule les coordonnées des points du graphique qui correspondent à ces extrema.

Dis Monsieur, calcule-moi un sinus !

G. Noël

— Calculer un sinus ? Où est le problème ? Je prends ma calculatrice et ...

— Non pas comme cela ! Comment calculait-on un sinus AVANT qu'il y ait des calculatrices ?

— Très simple, on utilisait des tables !

— Des tables ?

— Oui des tables, ce sont des livres dans lesquels les valeurs de la fonction sinus et des autres fonctions trigonométriques sont imprimées.

— Toutes les valeurs ?

— Oui. Enfin, pas tout à fait. On ne pourrait pas imprimer TOUTES les valeurs puisqu'il y en a une infinité. Mais on imprime les sinus, cosinus, tangente et cotangente, par exemple pour des angles variant de $0°$ à $45°$ par accroissements successifs constants d'une minute.

— Autrement dit, on imprimait les valeurs de $\sin 0°$, $\sin 0°1'$, $\sin 0°2'$, etc, jusqu'à $\sin 44°59'$ et $\sin 45°$ et la même chose pour cos, tg et cotg ?

— Exactement.

— Et si on avait besoin de $\sin 67°$?

— On sait bien que $\sin 67° = \cos 23°$, la valeur se trouve donc aussi dans la table. De la même façon, $\sin 126° = \sin 54°$. On peut toujours se ramener à un angle entre $0°$ et $45°$.

— Et si on voulait $\sin 32°5'20''$?

— On procédait par approximation : le résultat cherché est compris entre $\sin 32°5'$, qui vaut $0,53115$ et $\sin 32°6'$, qui vaut $0,53140$. Comme $20''$ est le tiers d'une minute, on ajoute à $0,53115$ le tiers de la différence $0,53140-0,53115$, soit $\frac{1}{3}\times 0,00025 \simeq 0,00008$. On adopte donc $0,53123$ comme valeur de $\sin 32°5'20''$. C'est ce qu'on appelle une interpolation linéaire.

— C'est correct cela ?

— Non, on fait comme si l'arc de sinusoïde entre les points d'abscisse 32°5' et 32°6' était un petit segment de droite. On sait bien que c'est faux. Mais cet arc étant très petit, l'erreur est très faible. En fait, les valeurs $0,53115$ et $0,53140$, pour $\sin 32°5'$ et $\sin 32°6'$ ne sont pas correctes non plus : les vraies valeurs ont une infinité de décimales. Il existait des tables plus ou moins précises, certaines mentionnant 5 décimales, d'autres 7 décimales ou encore plus, mais aucune n'est correcte.

— C'est intéressant tout cela, mais en définitive, cela ne répond pas à ma question de départ : l'imprimeur qui publiait la table, il fallait bien qu'il calcule toutes les valeurs, même si ce n'était qu'approximativement. Comment faisait-il ?

— Il y avait certainement plusieurs méthodes possibles. Je vais essayer d'en expliquer une relativement simple. Elle repose sur l'emploi des formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} \\
\cos x &= \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} \\
\mathrm{tg}\,x &= \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

— Je crois que j'ai déjà vu cela quelque part !

— Normalement oui ! La troisième s'obtient d'ailleurs en divisant les deux premières membre à membre. L'intérêt de ces formules, c'est que si je connais la valeur de $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, je trouve sans grosses difficultés les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$.

— Je vois : il suffit de calculer une table des valeurs de la fonction tangente, les autres s'en

Math-Jeunes n°103, 24–27, 2002

déduisent ! Mais je ne vois pas à quoi va servir la dernière formule.

— Nous pouvons l'utiliser de deux façons : soit calculer $\operatorname{tg} x$ à partir de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, soit le contraire. Posons $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ et $T = \operatorname{tg} x$. Alors la formule peut s'écrire

$$T = \frac{2t}{1-t^2},$$

mais aussi

$$Tt^2 + 2t - T = 0,$$

donc

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+T^2}}{T}$$

et comme nous cherchons des valeurs de $T = \operatorname{tg} x$ avec x entre 0° et 45°, t et T sont positifs. Donc

$$t = \frac{\sqrt{1+T^2}-1}{T}.$$

— Nous ne sommes pas beaucoup plus avancés ! Que l'on trouve t à partir de T ou T à partir de t, dans les deux cas nous devons d'abord calculer une tangente, et je ne sais toujours pas comment !

— N'oublions pas qu'il y a des valeurs particulières de la fonction tangente que nous connaissons.

— C'est vrai : $\operatorname{tg} 0° = 0$ (mais cela ne nous sert pas à grand-chose), $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

— Essayons d'exploiter la valeur de $\operatorname{tg} 45°$ puisque 45° est précisément l'extrémité de l'intervalle $[0°, 45°]$ sur lequel nous voulons tabuler la fonction tg.

— J'ai compris : à partir de $T = \operatorname{tg} 45° = 1$, nous pouvons calculer $t = \operatorname{tg} 22°30'$:

$$\frac{\sqrt{1+1}-1}{1} = \sqrt{2}-1 \simeq 0,41421,$$

et à partir de $T = \operatorname{tg} 22°30' = 0,41421$, nous pouvons calculer

$$t = \operatorname{tg} 11°15' = \frac{\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}-1}{\sqrt{2}-1} \simeq 0,19891.$$

Et rien n'empêche de continuer.

— Parfait, mais à partir d'ici je préfère exprimer les angles en radians plutôt qu'en degrés : la moitié de 11°15', c'est 5°+30'+7'+30"= 5°37'30" ! On risque de se tromper dans les calculs, et en plus, c'est lourd à écrire !

— D'accord pour abandonner cette notation sexagésimale qui nous vient des Babyloniens, mais pourquoi ne pas utiliser des degrés décimaux, comme les calculatrices : la moitié de 45°, c'est 22,5°. Ensuite on trouve 11,25°, puis 5,625° etc.

— Nous pourrions aussi faire cela. Le radian est une unité théorique (les menuisiers ne l'utilisent pas), mais particulièrement bien adaptée à la théorie. Il faut s'habituer à l'utiliser. Généralement, on écrit $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ plutôt que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\text{rad}$. Autrement dit quand l'unité d'angle n'est pas mentionnée, c'est nécessairement le radian. Mais attention, on ne peut quand même pas écrire $45° = \frac{\pi}{4}$: le premier membre est un angle, le second est un nombre.

— Va pour le radian. Nous partons donc de

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41421, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} = 0,19891$$

— Le plus simple est de calculer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$, ... à l'aide d'un tableur : dans la cellule `A1`, nous plaçons la valeur de $\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $0,78539816$ et dans la cellule `B1`, nous plaçons $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Ensuite, nous définissons `A2` comme étant `A1/2` et `B2` comme `(RACINE(1+B1*B1)-1)/B1` et nous recopions les cellules `A2` et `B2` vers le bas.

La cellule `A1` contient $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^2}$, et la cellule `A2` contient $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3}$. D'une façon générale, la cellule `An` contient $\frac{\pi}{2^{n+1}}$, et `Bn` contient toujours la tangente de `An`.

	A	B
1	0,78539816	1
2	0,39269908	0,41421356
3	0,19634954	0,19891237
4	0,09817477	0,0984914
5	0,04908739	0,04912685
6	0,02454369	0,02454862
7	0,01227185	0,01227246
8	0,00613592	0,006136
9	0,00306796	0,00306797
10	0,00153398	0,00153398
11	0,00076699	0,00076699
12	0,0003835	0,0003835
13	0,00019175	0,00019175

— À partir de la ligne 10, il n'y a plus de différence entre x et $\operatorname{tg} x$!

— Effectivement, pour x assez petit, on peut assimiler $\operatorname{tg} x$ à x, $\sin x$ aussi d'ailleurs. Voilà un phénomène que nous n'aurions pas observé si nous avions continué d'exprimer les angles en degrés ! Ici nous ne voyons plus de différence entre x et $\operatorname{tg} x$ pour $x \leqslant 0,00153398$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2^{11}}$. Mais en réalité si on affichait plus de décimales, on verrait une différence réapparaître ... pour disparaître à nouveau pour des valeurs encore plus petites de x.

— C'est bien tout cela, mais il était question de *tabuler* la fonction tg de 0° à 45°, pardon de 0 rad à $\frac{\pi}{4}$ rad, par accroissements successifs constants de la variable. Or les valeurs dont nous connaissons la tangente sont $\frac{\pi}{2^{11}}$ rad, $\frac{\pi}{2^{10}}$ rad, ..., $\frac{\pi}{2^2}$ rad. Il ne s'agit pas là d'accroissements successifs constants !

— Effectivement, mais le plus gros du travail est fait. Imaginons d'abord un accroissement constant de $\frac{\pi}{16}$. Nous construirons ainsi une table de 5 nombres : $\operatorname{tg} 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$, $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{16}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}$ et $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{16}$. De ces cinq nombres, il ne nous manque que $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}$. Or $\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$, et nous pouvons appliquer une autre formule de trigonométrie :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

En effectuant le calcul à partir des valeurs déjà connues, on obtient

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} = 0,66817864.$$

— Si je comprends bien, pour construire une table basée sur un accroissement constant de $\frac{\pi}{32}$, je partirais de la table d'accroissement $\frac{\pi}{16}$ qui vient d'être construite, j'écrirais

$$\frac{3\pi}{32} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{32},$$

puis

$$\frac{5\pi}{32} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{32},$$

et enfin

$$\frac{7\pi}{32} = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{32},$$

et j'appliquerais trois fois la formule donnant $\operatorname{tg}(a+b)$.

— Oui, et en continuant de cette façon, on peut construire une table d'accroissement aussi petit que l'on veut.

— Ce n'est quand même pas du gâteau, tous ces calculs !

— Et ne nous plaignons pas, aujourd'hui nous faisons faire les calculs par un ordinateur, mais n'oublions pas que les premiers mathématiciens effectuaient tous les calculs à la main !

— J'imagine que cela nécessitait beaucoup de soin et une bonne organisation ! A propos d'ordinateurs, ont-ils dans le ventre une table des valeurs des fonctions trigonométriques qu'ils consultent chaque fois que c'est nécessaire !

— Non, les ordinateurs recalculent les valeurs trigonométriques à chaque usage.

— Et ils refont tout ce qui vient d'être décrit ?

— Non. Différentes méthodes sont appliquées, mais elles reviennent toutes à calculer les valeurs d'une fonction polynomiale bien choisie. Ce choix est très délicat : la fonction polynomiale doit être très proche de la fonction sinus (par exemple), mais le degré du polynôme ne peut être très grand sans quoi les calculs prendraient trop de temps et seraient affectés de nombreuses erreurs d'arrondi.

— Peut-on en savoir plus ?

— Ce sera pour la prochaine fois ... peut-être !

Rallye problèmes

C. Festraets

Les lauréats du rallye problèmes 2001-2002 sont Thierry CAEBERGS, élève de 4e année à l'Athénée Royal de Thuin, Anthony TRINH, élève de 5e année à l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles et Vincent MALMEDY, élève de 6e année à l'Institut Notre-Dame du Sacré-Coeur à Beauraing.

Toutes nos félicitations à ces amateurs de problèmes.

Le rallye problèmes 2002-2003 comportera trois étapes publiées dans les numéros 103, 104, 105 de cette revue. A chaque étape, cinq problèmes seront proposés à votre sagacité ; la plupart des problèmes posés ne nécessitent guère que des connaissances mathématiques élémentaires, en outre, il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement. Evidemment, ce n'est pas toujours facile, mais vous pouvez envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu que la première partie d'un problème et estimez que la suite est trop difficile pour votre âge ou encore, si vous aboutissez à une équation dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seront hélas pas pris en considération.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu correctement de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.

Les solutions doivent être envoyées à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 28 novembre 2002 au plus tard.

. . . .

1. Trapèze

Dessine un trapèze isocèle sachant que

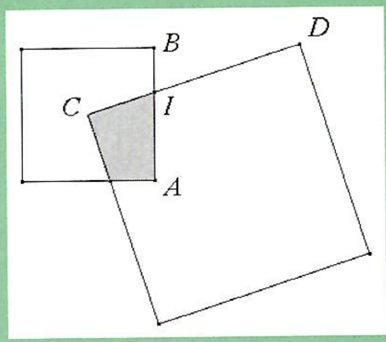
- son aire vaut 36 cm^2 ;
- sa grande base vaut le double de sa petite base ;
- sa grande base vaut le triple de sa hauteur.

2. Simple addition

Il y a 720 nombres naturels (à six chiffres) dont les chiffres sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Que vaut la somme de ces 720 nombres ?

3. Recouvrement

La figure ci-dessous montre deux carrés qui se recouvrent partiellement.
Le côté du petit carré mesure 3 cm ; celui du grand carré mesure 5 cm.



Un des sommets du grand carré est le centre du petit carré. Le point I est situé sur le segment $[CD]$, respectivement à 2 cm de A et à 1 cm de B. Quelle est l'aire de la partie ombrée, commune aux deux carrés ?

4. Somme des carrés

Deux nombres x et y sont tels que

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x^3+y^3 &= 14 \end{cases}$$

Que vaut x^2+y^2 ?

5. Billard

Un billard a la forme d'un rectangle $ABCD$ avec $|AB| = 120$ cm et $|BC| = 180$ cm. Une boule lancée sans effet du coin D arrive en A après avoir heurté les bords $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$. Quelle distance a-t-elle parcourue, son trajet étant composé de segments rectilignes ?

6. Visitons Paris

Trois frères André, Bernard et Claude sont allés visiter Paris et chacun en fait le récit à ses parents :
André : « Nous sommes montés à la tour Eiffel, mais pas à la tour Montparnasse ; nous avons aussi visité l'Arc de Triomphe ».
Bernard : « Nous sommes montés à la tour Eiffel et à la tour Montparnasse, mais nous n'avons visité ni l'Arc de Triomphe, ni le musée du Jeu de Paume ».
Claude : « Nous ne sommes pas montés à la tour Eiffel, mais nous avons visité l'Arc de Triomphe ».
Les parents sont d'abord perplexes devant ces récits, mais en se rappelant que chaque enfant ment une et une seule fois, ils rétablissent la vérité. Pouvez-vous en faire autant et trouver ce que les trois frères ont réellement visité ?

7. Cryptarithmie

L'addition ci-dessous est correcte, mais chaque lettre représente un chiffre et deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. Pouvez-vous retrouver les nombres qui sont additionnés et leur somme ?

$$\begin{array}{cccc} N & E & U & F \\ & & U & N \\ & & U & N \\ \hline O & N & Z & E \end{array}$$

8. Connaissances

Dans un groupe de n personnes, certaines se connaissent mutuellement. Prouver qu'il y a au moins 2 personnes du groupe qui ont le même nombre de connaissances.

9. Extremum

Un segment de longueur donnée L est partagé en deux segments de longueurs a et b, avec $a+b=L$. On construit deux triangles équilatéraux, l'un de côté a et l'autre de côté b.

Pour quelle valeur de a et de b la somme des aires des deux triangles est-elle (1) maximum, (2) minimum ?

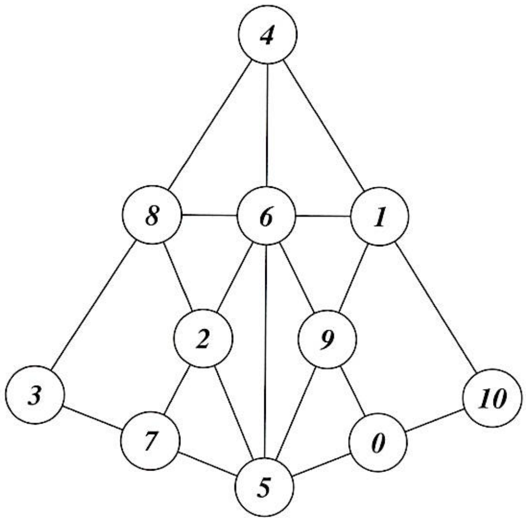
10. Perpendiculaires

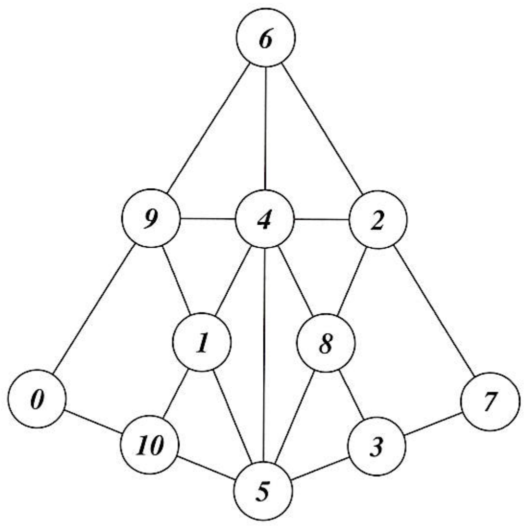
On considère un triangle ABC et un rectangle $BCDE$. Par D, on mène la perpendiculaire à la droite AB et par E, on mène la perpendiculaire à la droite AC ; ces deux perpendiculaires se coupent en P. Démontrer que AP est perpendiculaire à BC.

....

Solution du magigramme

On montre que le nombre 5 occupe toujours la même place. Voici deux solutions parmi d'autres.





Olympiades

C. Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-huitième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis sept ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur.

Le calendrier de la vingt-huitième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

Éliminatoire : le mercredi 15 janvier 2003
Demi-finale : le mercredi 26 février 2003
Finale : le mercredi 30 avril 2003
Proclamation : le samedi 17 mai 2003

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « préformulée », elles sont notées « *srp* ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$, autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a tout de même un minimum de connaissance à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là, tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé.

Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis parmi les énoncés « maxi »dans le tome 3 de l'OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome ainsi que les précédents ne sont plus en vente, ils sont épuisés. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela

Olympiades Mathématiques Belges

Tome 4 (1994-1998) : prix 5,50 euros.

Tome 5 (1999-2002) : prix 6 euros

Ajouter 1,50 euros de frais de port pour un exemplaire et 2,70 euros pour deux ou trois exemplaires.

Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

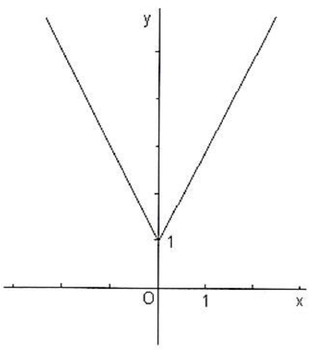
Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. Eliminatoire 89 - 4

A quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ correspond le graphe



(A) $f(x) = -2x+1$ **(B)** $f(x) = -2\sqrt{x^2}+1$
(C) $f(x) = \sqrt{4x^2}+1$
(D) $f(x) = \sqrt{(-2x+1)^2}$ **(E)** $f(x) = 2x+1$

2. Demi-finale 93 - 11

Si $\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$, combien de chiffres comprend l'écriture décimale de x ?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 13

3. Eliminatoire 90 - 8 *(srp)*

Pour augmenter de 44 % la surface d'un cube, on augmente de x % la longueur de chaque côté. Que vaut x ?

4. Demi-finale 88 - 17

Si $|x| + x + y = 10$ et $x + |y| - y = 12$, que vaut $x + y$?

(A) -2 **(B)** 2 **(C)** $\frac{18}{5}$ **(D)** $\frac{22}{3}$ **(E)** 22

5. Demi-finale 89 - 26

Un octaèdre régulier est obtenu en joignant les centres de faces adjacentes d'un cube. Le rapport du volume de l'octaèdre au volume du cube vaut :

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **(B)** $\frac{\sqrt{6}}{16}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

6. Eliminatoire 93 - 21

Quel est le plus grand nombre de facteurs polynomiaux (non triviaux) en lesquels se factorise $a^8 + a^4b^4 + b^8$, si selement des coefficients réels sont admis ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** un autre nombre

7. Eliminatoire 91 - 23

Dans un triangle équilatéral de côté 4 sont tracés trois cercles de même rayon, tangents deux à deux et chacun tangent à deux côtés du triangle. Leur rayon vaut :

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $-1+\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{4}{3}$ **(E)** $\sqrt{2}$

8. Demi-finale 91 - 18

Si S est l'ensemble des points z du plan complexe tels que $(3+4i)z$ est un nombre réel, alors S est

(A) un triangle rectangle **(B)** un cercle
(C) une hyperbole **(D)** une droite
(E) une parabole

9. Eliminatoire 88 - 8

Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

(A) Si tu triches, j'abandonne le jeu.

(B) Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.

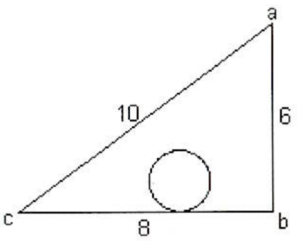
(C) Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.

(D) Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.

(E) Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

10. Demi-finale 93 - 27

Les côtés du triangle abc mesurent respectivement 6, 8 et 10. Un cercle de rayon 1 roule à l'intérieur du triangle abc en restant toujours tangent à au moins un côté du triangle. Lorsque le centre p du triangle revient à sa position de départ, quelle distance a-t-il parcourue ?



(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 14
(D) 15 **(E)** 17

11. Eliminatoire 92 - 28 *(srp)*

Le propriétaire d'un manège estime qu'avec x chevaux, son revenu mensuel est de $100 \times (96\sqrt{x} - 8x)$ francs. Quel serait alors le nombre de chevaux qui lui assure le revenu le plus élevé ?

12. Eliminatoire 89 - 23 *(srp)*

Combien de chiffres 1 contient l'écriture décimale du nombre $9+99+999+\cdots+\underbrace{999999...99}_{89 \text{ chiffres}}$?

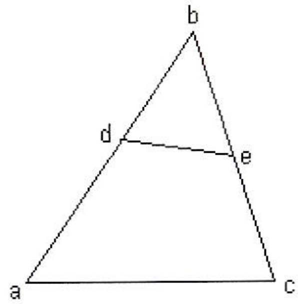
13. Eliminatoire 92 - 27

Un dé est tellement pipé que la probabilité d'avoir une face est proportionnelle au nombre écrit sur cette face (ces nombres sont 1, 2, 3, 4, 5, 6). Quelle est la probabilité d'obtenir, en jetant ce dé, une face portant un nombre premier ?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{10}{21}$
(D) $\frac{11}{21}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

14. Demi-finale 93 - 2

Dans le triangle abc, $\widehat{a} = 55°$, $\widehat{c} = 75°$, d appartient au côté $[ab]$ et e au côté $[bc]$. Si de plus $|db| = |be|$, alors $\widehat{bed}$ mesure



(A) 50° **(B)** 55° **(C)** 60°
(D) 65° **(E)** 70°

15. Demi-finale 88 - 13

Si $\sin x = 3\cos x$, que vaut $\sin x . \cos x$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{2}{9}$
(D) $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{3}{10}$

16. Eliminatoire 93 - 30 *(srp)*

J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 119 ans. Quel est mon âge ? (Tous les âges sont ici des nombres entiers).

Solutions

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C	A	20	C	C	C	B	D
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
B	B	36	88	C	D	E	51

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	9.92	18.4	20.4	40.8	22.8
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	7.44	12	15.2	30.4	17.2

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12.50 euros pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul, 25 6120 Marbaix la Tour

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée