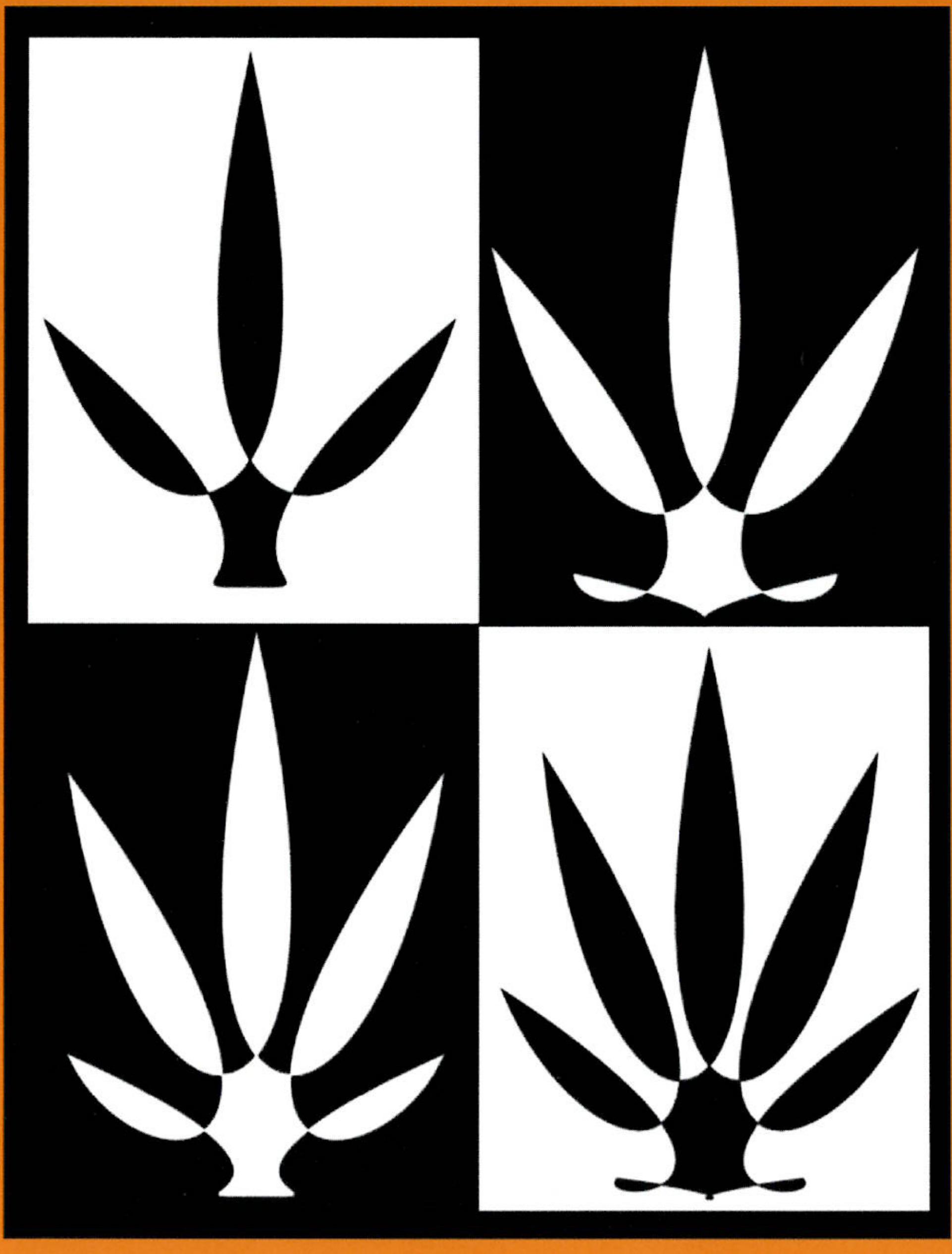
MATH-JEUNES



24[e] année
Janvier 2003 – n°104 S
Bureau de dépôt : Mons I

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	9.92	18.4	20.4	40.8	22.8
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	7.44	12	15.2	30.4	17.2

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12.50 euros pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul, 25 6120 Marbaix la Tour

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°104 Vingt-quatrième année 2003

MATH-JEUNES

Sommaire

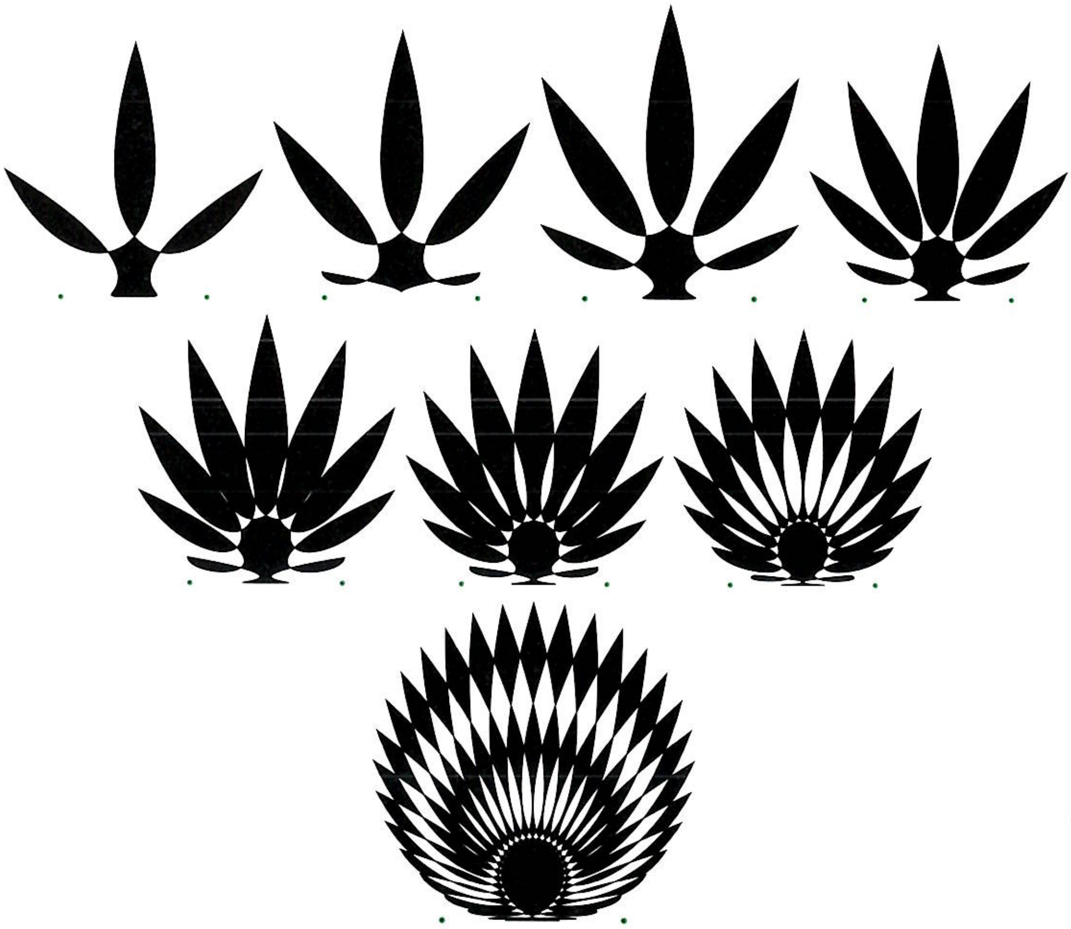
Au sommaire des prochains numéros: *Carrés magiques et nombres premiers (3), Dis Monsieur, calcule-moi un sinus (2), Stabilité d'armée, La Mathématique au Quotidien,... et nos rubriques habituelles.*

À tous et à toutes, la rédaction de Math-Jeunes *souhaite une excellente année 2003.*

Dites-le avec des fleurs !

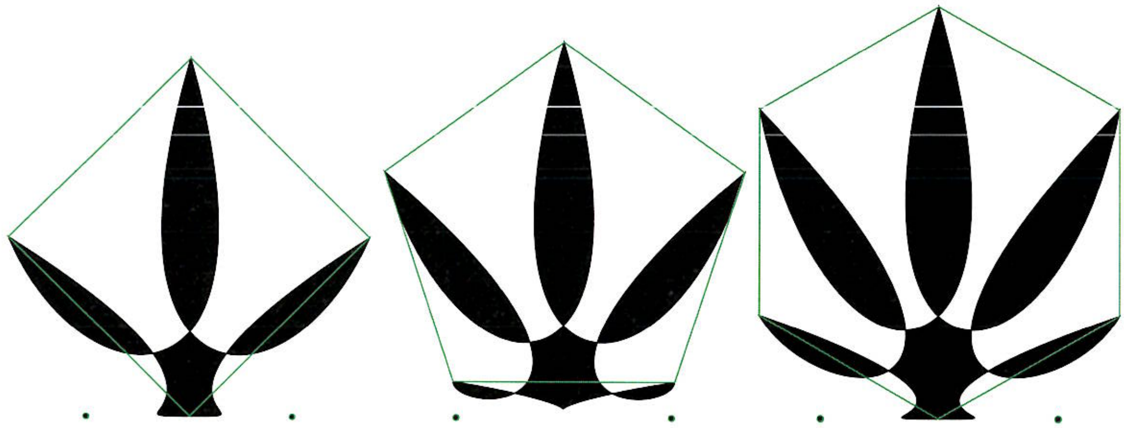
G. Noël

Avez-vous remarqué les fleur qui figurent sur la couverture de votre *Math-Jeunes* ? En voici tout un bouquet !



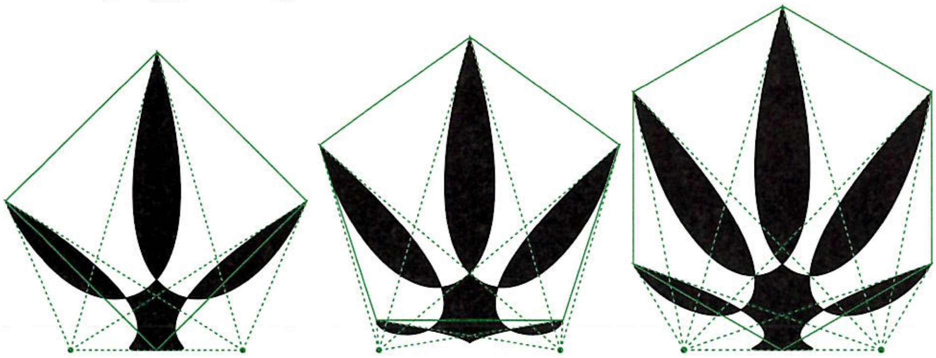
Comment dessiner ces fleurs ? Voici le « secret » de leur fabrication.

1. La figure de base est un polygone régulier. Par exemple la première fleur est construite sur un carré, la seconde sur un pentagone, la troisième sur un hexagone ...

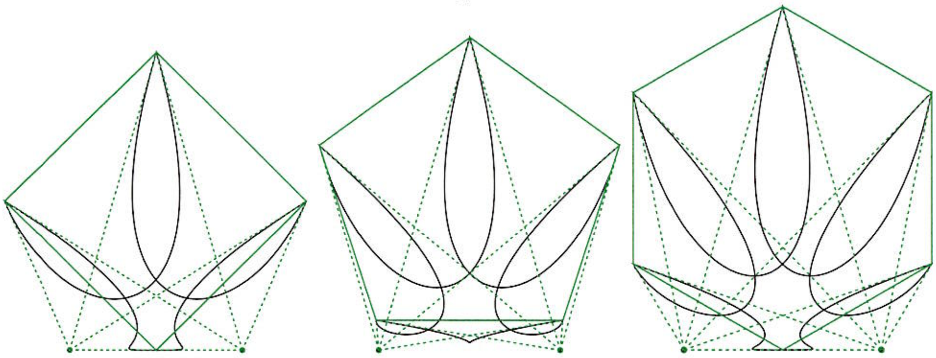


Déterminez les polygones réguliers à utiliser pour les autres fleurs !

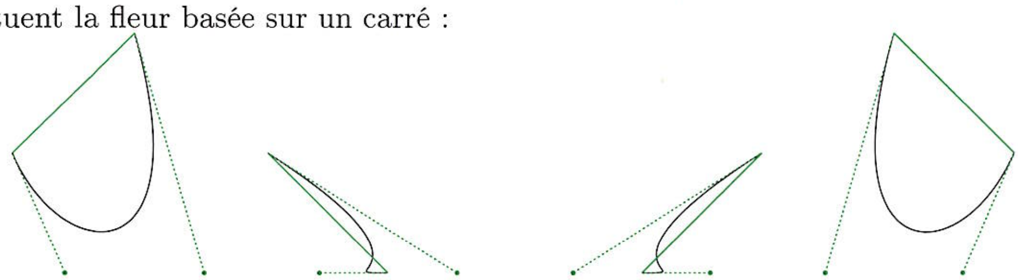
2. Avez-vous remarqué les deux points verts situés en-dessous de chaque fleur ? Joignons-les aux sommets des polygones réguliers :



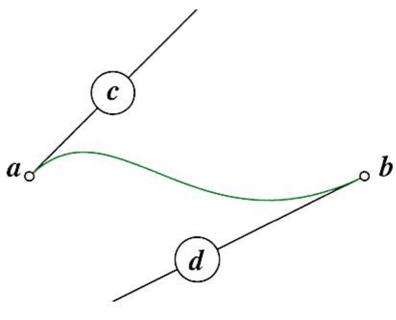
3. Concentrez votre attention sur les courbes qui limitent les fleurs :



4. Détaillons le tracé d'une fleur, par exemple traçons séparément les quatre courbes qui constituent la fleur basée sur un carré :



Chaque courbe est tangente à deux des traits pointillés. Le problème est donc de trouver les *équations paramétriques* d'une courbe allant d'un point a à un point b et tangente en a à une droite ac et en b à une droite db.



Dans la pratique, un problème plus général s'est posé à un ingénieur français, P. Bézier, qui travaillait à la régie Renault, et avait pour tâche, dans les années 1970, de trouver un moyen simple de modéliser des carrosseries de voitures. Comme celles-ci sont constituées de tôles à assembler, Bézier recherchait les équations de morceaux de surfaces se « recollant » sans difficultés. Les fonctions les plus simples étant les fonctions polynomiales, il s'orienta dans cette direction et trouva une solution pas trop difficile à mettre en œuvre.

Les fonctions polynomiales dont Bézier avait besoin étaient des fonctions de deux variables. Quant à nous, nous cherchons des fonctions polynomiales qui permettent de dessiner des *courbes.*

Une variable nous suffira, nous l'appellerons t. Nous cherchons donc deux polynômes p_1 et p_2 tels que la courbe d'*équations paramétriques* $\begin{cases} x = p_1(t) \\ y = p_2(t) \end{cases}$ passe par les points a et b, et soit tangente en a à ac et en b à db. Le moment est sans doute venu de rappeler que la tangente à une courbe s'obtient en dérivant les équations paramétriques de cette courbe. De façon précise :

Si les équations paramétriques d'une courbe sont

$$\begin{cases} x = p_1(t) \\ y = p_2(t) \end{cases}$$

alors la tangente à cette courbe au point $(x_0 = p_1(t_0), y_0 = p_2(t_0))$ ***est la droite d'équations paramétriques***

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1'(t_0)(t - t_0) \\ y = y_0 + p_2'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

Admettons que le point $(p_1(t), p_2(t))$ déterminé par les polynômes p_1 et p_2 que nous cherchons coïncide avec a pour $t = 0$ et avec b pour $t = 1$. Les coordonnées de a, c, b et d étant respectivement (x_a, y_a), (x_c, y_c), (x_b, y_b), (x_d, y_d), les conditions à satisfaire par p_1 et p_2 sont

$$\begin{cases} p_1(0) = x_a \\ p_2(0) = y_a \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1(1) = x_b \\ p_2(1) = y_b \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1'(0) = k(x_c - x_a) \\ p_2'(0) = k(y_c - y_a) \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1'(1) = k(x_b - x_d) \\ p_2'(1) = k(y_b - y_d) \end{cases}$$

La présence d'un coefficient k dans ces conditions s'explique par le fait que nous n'exigeons pas que les vecteurs dérivés en a et b soient les vecteurs $\overrightarrow{ac}$ et $\overrightarrow{db}$, mais seulement qu'ils soient *proportionnels* à ceux-ci. De plus, par souci de symétrie, nous choisissons le même coefficient de proportionnalité.

Les huit conditions à satisfaire constituent un système de huit équations ayant pour inconnues les coefficients des polynômes p_1 et p_2. Par exemple si $p_1(t) = \alpha t + \beta$ et $p_2(t) = \delta t + \varepsilon$, les huit équations seront $\beta = x_a, \ldots, \delta = k(y_b - y_d)$. Mais un système de huit équations en quatre inconnues n'a en général aucune solution ! ! Un polynôme de degré 2 a trois coefficients, de sorte que si p_1 et p_2 sont de degré 2, nous n'avons toujours que six inconnues : c'est encore insuffisant.

Conclusion : Nous devons utiliser des polynômes de degré au moins 3.

L'astuce de Bézier consiste à déterminer directement les fonctions polynomiales p_1 et p_2 à l'aide des points a, c, b et d (appelés pour la circonstance des *points de contrôle*), à l'aide de l'expression suivante :

$$\overrightarrow{op}\ (t) = (1-t)^3 \cdot \overrightarrow{oa} + 3(1-t)^2 t \cdot \overrightarrow{oc} + 3(1-t)t^2 \cdot \overrightarrow{od} + t^3 \cdot \overrightarrow{ob}$$

Cette équation est une *équation vectorielle*. Elle est facile à traduire en équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 x_a + 3(1-t)^2 t x_c + 3(1-t)t^2 x_d + t^3 x_b \\ y(t) = (1-t)^3 y_a + 3(1-t)^2 t y_c + 3(1-t)t^2 y_d + t^3 y_b \end{cases}$$

Vérifions que les contraintes sont satisfaites :

- $\overrightarrow{op}\ (0) = 1 \cdot \overrightarrow{oa} + 0 \cdot \overrightarrow{oc} + 0 \cdot \overrightarrow{od} + 0 \cdot \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa}$

- $\overrightarrow{op}\ (1) = 0\cdot\ \overrightarrow{oa}\ + 0\cdot\ \overrightarrow{oc}\ + 0\cdot\ \overrightarrow{od}\ + 1\cdot\ \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{ob}$

Pour vérifier les contraintes relatives à la tangence en a et b, dérivons l'équation vectorielle de la courbe. (Nous n'avons ainsi à effectuer qu'un seul calcul au lieu de deux si nous utilisions les équations paramétriques.)

Comme

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{op}\right)'(t) &= -3(1-t)^2\cdot\ \overrightarrow{oa}\ - 6(1-t)t\cdot\ \overrightarrow{oc}\ + 3(1-t)^2\cdot\ \overrightarrow{oc}\ - 3t^2\cdot\ \overrightarrow{od}\ + 6(1-t)t\cdot\ \overrightarrow{od}\ + 3t^2\cdot\ \overrightarrow{ob} \\ &= -3(1-t)^2\cdot\ \overrightarrow{oa}\ + 3(3t-1)(t-1)\cdot\ \overrightarrow{oc}\ - 3t(3t-2)\cdot\ \overrightarrow{od}\ + 3t^2\cdot\ \overrightarrow{ob}\end{aligned}$$

il vient

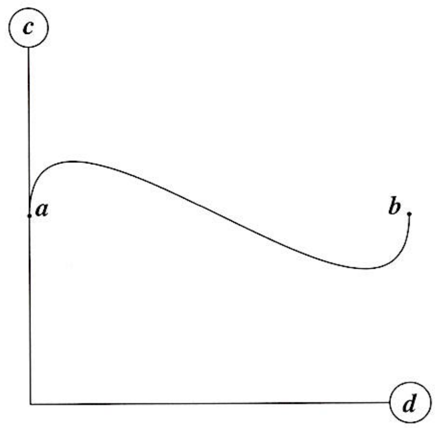
- $\left(\overrightarrow{op}\right)'(0) = -3\cdot\ \overrightarrow{oa}\ + 3\cdot\ \overrightarrow{oc} = 3\cdot\ \overrightarrow{ac}$
- $\left(\overrightarrow{op}\right)'(1) = -3\cdot\ \overrightarrow{od}\ + 3\cdot\ \overrightarrow{ob} = 3\cdot\ \overrightarrow{db}$

Toutes les contraintes sont bien satisfaites.

Exemple

Choisissons $a = (0, 0.5)$, $c = (0, 1)$, $d = (1, 0)$ et $b = (1, 0.5)$. La courbe de Bézier déterminée par ces quatre points de contrôle est donnée par les équations

$$\begin{cases} x(t) = 3(1-t)t^2 + t^3 \\ y(t) = 0,5(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 0,5t^3 \end{cases}$$



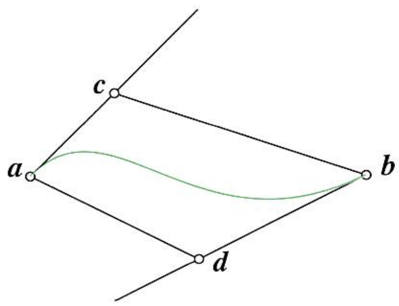
Pour dessiner les fleurs de notre bouquet, nous construisons d'abord les sommets d'un polygone régulier. Ensuite, au lieu de joindre ces sommets par des segments, nous les joignons à l'aide de courbes de Bézier en faisant en sorte que — pour une fleur donnée — les deux points verts situés sous la fleur soient des points de contrôle de toutes les courbes.

Pour terminer, signalons une propriété intéressante des courbes de Bézier. La portion d'une courbe située entre le point de départ a et le point d'arrivée b est obtenue en faisant varier le paramètre t entre 0 et 1. Alors les quatre coefficients du polynôme p sont positifs.

De plus, quel que soit t, leur somme vaut 1 car

$$(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3 = ((1-t)+t)^3 = 1$$

Tous ceux qui ont pratiqué un peu de calcul barycentrique savent que cela a pour conséquence que *l'arc de courbe qui va de a à b est entièrement inclus au quadrilatère convexe de sommets a, c, b et d.*



La fonction du troisième degré (2)

C. Van Hooste

Commençons par apporter une réponse aux deux questions posées à la fin de l'article du numéro précédent.

Nombre de points communs avec une droite

Comme nous l'avons vu dans le corps de l'article, déterminer les abscisses des points d'intersection du graphique d'une fonction du troisième degré avec une droite oblique revient à résoudre une équation du troisième degré :

$$F(x) \equiv Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{avec} \quad A \neq 0.$$

Montrons d'abord qu'une telle équation admet toujours au moins une solution réelle.

Pour de grandes valeurs de x, $F(x)$ a le même signe que A puisque

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} Ax^3 = \begin{cases} +\infty \text{ si } A > 0 \\ -\infty \text{ si } A < 0 \end{cases}$$

Et, à l'opposé, pour des valeurs de x allant vers $-\infty$, $F(x)$ et A sont de signes contraires car

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} Ax^3 = \begin{cases} -\infty \text{ si } A > 0 \\ +\infty \text{ si } A < 0 \end{cases}$$

Ainsi, $F(x)$ prend toujours des valeurs de signes contraires selon que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons alors conclure qu'il existe un réel x_1 pour lequel $F(x_1)$ vaut 0.

Cela étant, $F(x)$ peut être factorisé comme suit :

$$F(x) = (x - x_1)(ax^2 + bx + c).$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors, pour tout nombre u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = u$.

Autrement dit, une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ passe par toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Donc, selon que $ax^2 + bx + c$ admet ou n'admet pas de racine, $F(x)$ a trois solutions réelles (distinctes ou non) ou une seule solution réelle.

En conséquence, **une droite oblique coupe le graphique d'une fonction du troisième degré soit en un seul point, soit en deux points, l'un étant un point de tangence, soit en trois points distincts.**

Math-Jeunes n°104, 6–10, 2003

Extrema locaux

Pour que la fonction du troisième degré $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ admette des extrema locaux, il faut que

$$b^2 - 3ac > 0.$$

Les points du graphique de cette fonction se rapportant à ces extrema ont alors pour abscisses

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

et pour ordonnées correspondantes

$$\frac{27a^2d - 9abc + 2b^3 \pm (6ac - 2b^2)\sqrt{b^2 - 3ac}}{27a^2}.$$

Les calculs pour arriver aux résultats ci-dessus ne sont pas trop amusants ; les résultats eux-mêmes ne sont pas vraiment emballants. Or, le nombre de racines de la fonction du troisième degré dépend étroitement de ces résultats. Si nous voulons arriver à des conclusions simples sur ce sujet, nous devrons procéder à quelques modifications sur la forme de cette fonction.

Nombre de solutions de l'équation du troisième degré

Soit l'équation

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \tag{1}$$

avec a non nul. Elle est équivalente à

$$X^3 + \frac{b}{a}X^2 + \frac{c}{a}X + \frac{d}{a} = 0.$$

Par un changement de variable approprié, nous allons en éliminer le terme en X^2. En effet, pour $X = x - \frac{b}{3a}$, l'équation devient

$$\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

ou

$$x^3 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \frac{1}{a}\left(d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}\right) = 0.$$

Pour plus de commodité, nous récrivons cette équation

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2}$$

D'un point de vue graphique, la division par a revient à remplacer le graphique de la fonction $aX^3 + bX^2 + cX + d$ par celui de la fonction $X^3 + \frac{b}{a}X^2 + \frac{c}{a}X + \frac{d}{a}$. On utilise ainsi une affinité orthogonale d'équations $\begin{cases} X' = X \\ Y' = \frac{1}{a}Y \end{cases}$. Le changement de variable $X = x - \frac{b}{3a}$ applique alors une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0, \dfrac{b}{3a} \end{pmatrix}$ au dernier graphique. La première transformation ne modifie pas la position des points d'intersection du graphique avec l'axe Ox tandis que la seconde ramène le point d'inflexion sur l'axe Oy.

La fonction $f : x \longrightarrow x^3 + px + q$ a pour dérivées première et seconde

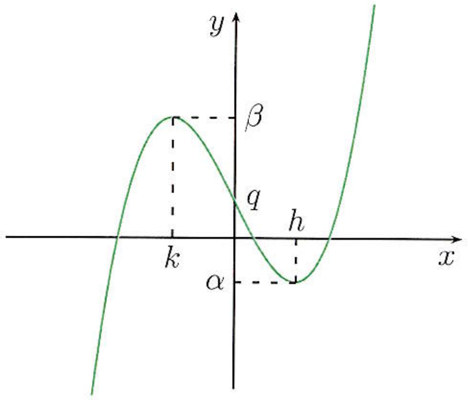
$$f' : x \mapsto 3x^2 + p \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto 6x.$$

Cette fonction possède donc des extrema locaux (maximum et minimum) si et seulement si $p < 0$. Ceux-ci se réalisent pour $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. La fonction f prend alors les valeurs

$$f\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q \pm \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Par ailleurs, le point d'inflexion du graphique a pour coordonnée $(0, q)$.

La figure ci-dessous donne une synthèse de ces résultats.



$$h = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad k = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\alpha = q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\beta = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Cela étant, nous pouvons discuter facilement du nombre de solutions de l'équation (2) en fonction des coefficients p et q.

- **Premier cas :** $p < 0$

  L'équation du troisième degré (2) admet trois solutions réelles distinctes si et seulement si

  $$\alpha = q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} < 0 < \beta = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

  Cette condition est successivement équivalente à

  $$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} < -q < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{ou} \quad q^2 < \frac{4p^2}{9}\left(-\frac{p}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

  Nous désignerons dorénavant par D l'expression écrite dans le premier membre de cette dernière forme de la condition et nous l'appellerons *discriminant* de l'équation (2) :

  $$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

  L'équation (2) admet deux solutions réelles dont une solution double si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, donc si et seulement si $D = 0$.

  L'équation (2) admet une seule solution réelle si et seulement si $\alpha > 0$ ou $\beta < 0$, donc si et seulement si $D > 0$.

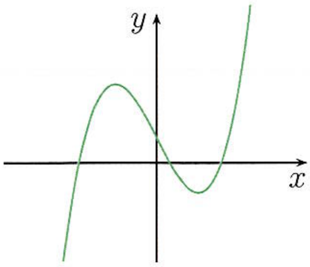
- **Deuxième cas :** $p = 0$ L'équation (2) se réduit alors à

$$x^3 + q = 0.$$

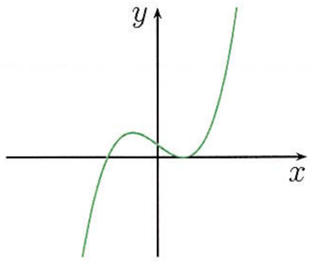
Visiblement, elle n'admet qu'une seule solution réelle : $\sqrt[3]{-q}$; celle-ci est une solution triple si et seulement si $q = 0$.

- **Troisième cas :** $p > 0$ L'équation (2) n'admet alors qu'une seule solution réelle.

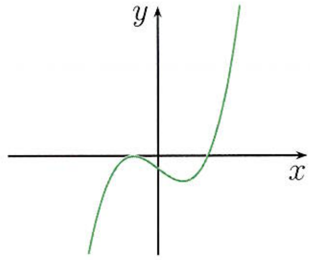
Les graphiques suivants font la synthèse de cette discussion.



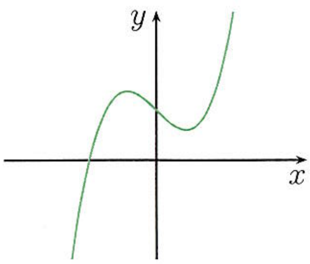
$p < 0$ et $D < 0$



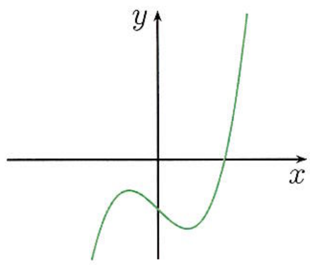
$p < 0$, $D = 0$ et $\alpha = 0$



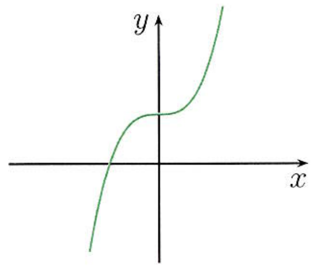
$p < 0$, $D = 0$ et $\beta = 0$



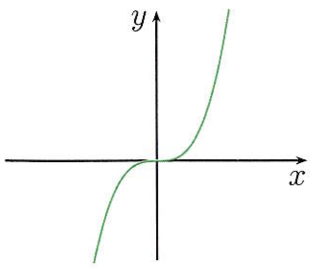
$p < 0$, $D > 0$ et $\alpha > 0$



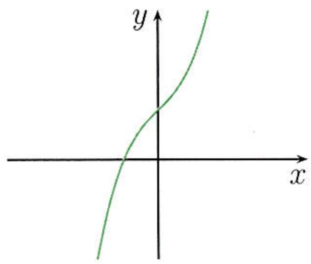
$p < 0$, $D > 0$ et $\beta < 0$



$p = 0$ et $q \neq 0$



$p = 0$ et $q = 0$



$p > 0$

Résolution de l'équation du troisième degré

Nous nous proposons de résoudre l'équation (2) dans le cas où $D > 0$, cas où cette équation n'admet qu'une seule racine réelle.

Pour arriver à résoudre l'équation (2), une petite astuce est nécessaire : nous allons dédoubler l'inconnue x en posant

$$x = u + v.$$

L'équation devient alors

$$(u + v)^3 + p\,(u + v) + q = 0 \tag{3}$$

ou, après avoir distribué et puis regroupé certains termes,

$$(u^3 + v^3 + q) + (u + v)(3uv + p) = 0.$$

L'équation (3) à deux inconnues u et v est satisfaite si

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3\,u\,v + p = 0 \end{cases}$$

donc si

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\,q \\ u^3\,v^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Ceci revient à chercher deux réels u^3 et v^3 dont la somme et le produit sont connus. Ceux-ci sont solutions de l'équation du second degré

$$w^2 + qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4D.$$

Comme D est strictement positif, ses solutions sont

$$w_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D} \quad \text{et} \quad w_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}.$$

Ainsi, nous pouvons choisir

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}.$$

De là, nous tirons

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

et

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}. \tag{4}$$

Exemple : Soit l'équation $x^3 - x + 1 = 0$. Son discriminant est

$$D = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{23}{108} > 0.$$

Cette équation n'a donc qu'une seule solution réelle :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} \approx 1,325.$$

Que se passe-t-il lorsque $D < 0$? L'équation (2) admet alors trois solutions réelles distinctes, mais la formule (4) ne permet apparemment pas de les calculer. De même, lorsque $D = 0$ et $p < 0$, cette formule ne donne qu'une seule solution ($x = -\sqrt[3]{4q}$). Est-ce la solution simple ou la solution double ? Où est passée l'autre solution ? Vous découvrirez tout cela dans le prochain numéro.

Carrés magiques et nombres premiers (2)

Y. Noël-Roch

Carré magique

L'article précédent commençait par quelques questions. Nous allons en tirer quatre propriétés.

Propriété 1

En ajoutant un même nombre à tous les éléments d'un carré magique, on obtient un nouveau carré magique

Nous avons vu que tout carré magique 3×3 peut se mettre sous la forme du carré 5C dans l'article précédent. Il est clair que quelles que soient les valeurs de c, r, t et x

$c-r+x$	$c+r+t+x$	$c-t+x$
$c+r-t+x$	$c+x$	$c-r+t+x$
$c+t+x$	$c-r-t+x$	$c+r+x$

est un carré magique (de somme $3 \times (c+x)$)

Propriété 2

En multipliant par un même nombre tous les éléments d'un carré magique, on obtient un nouveau carré magique.

Une démonstration analogue à la précédente fait apparaître un carré magique de somme $3cx$.

Propriété 3

La somme de deux carrés magiques est un carré magique.

L'égalité suivante contient à la fois la définition de l'addition des carrés et la démonstration de la propriété :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline c_1-r_1 & c_1+r_1+t_1 & c_1-t_1 \\ \hline c_1+r_1-t_1 & c_1 & c_1-r_1+t_1 \\ \hline c_1+t_1 & c_1-r_1-t_1 & c_1+r_1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline c_2-r_2 & c_2+r_2+t_2 & c_2-t_2 \\ \hline c_2+r_2-t_2 & c_2 & c_2-r_2+t_2 \\ \hline c_2+t_2 & c_2-r_2-t_2 & c_2+r_2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline c_1-r_1+c_2-r_2 & c_1+r_1+t_1+c_2+r_2+t_2 & c_1-t_1+c_2-t_2 \\ \hline c_1+r_1-t_1+c_2+r_2-t_2 & c_1+c_2 & c_1-r_1+t_1+c_2-r_2+t_2 \\ \hline c_1+t_1+c_2+t_2 & c_1-r_1-t_1+c_2-r_2-t_2 & c_1+r_1+c_2+r_2 \\ \hline \end{array}$$

Cette égalité montre qu'en additionnant un carré de somme s_1 ($s_1 = 3c_1$) et un carré de somme s_2 ($s_2 = 3c_2$), on obtient un carré magique de somme $s_1 + s_2$.

Propriété 4

> Toute suite de neuf nombres en progression arithmétique permet de définir un carré magique.

Les carrés $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ \hline 7 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ sont magiques.

Par la propriété 2, les carrés $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5r & 6r & r \\ \hline 0 & 4r & 8r \\ \hline 7r & 2r & 3r \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline \end{array}$ le sont aussi, quelles soient les valeurs de r et de a.

Par la propriété 3, la somme de ces deux derniers $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a+5r & a+6r & a+r \\ \hline a & a+4r & a+8r \\ \hline a+7r & a+2r & a+3r \\ \hline \end{array}$ est un carré magique,

Carré 6

quelles que soient les valeurs de r et de a.

Comme Monsieur Jourdain écrivait de la prose sans le savoir, nous venons de raisonner dans l'**espace vectoriel des carrés magiques**.

Carrés magiques et nombres premiers

Nous pouvons maintenant trouver une solution à la question qui terminait l'article précédent : trouver un carré magique composé de neuf nombres premiers différents. Nous venons en effet de constater qu'il « suffit » de trouver *neuf nombres premiers en progression arithmétique.*

La recherche de suites de nombres premiers en progression arithmétique a fait l'objet de records : être le découvreur de la plus longue suite connue ! Avec la liste des 670 nombres premiers dont vous disposez, vous pouvez par exemple trouver une suite de longueur 6 :

11 71 131 191 251 311

Peut-être en trouvez-vous une autre de même longueur ... ou une plus longue ?

Voici par exemple une suite de longueur 13 :

$5635811 + (k \times 120120)$ pour k variant de 0 à 12.

Nous pouvons en tirer plusieurs carrés magiques de neuf nombres premiers, dont voici un exemple :

6236411	6356531	5755931
5635811	6116291	6596771
6476651	5876051	5996171

Carré 6B

Chaque record de longueur de suite de nombres premiers en progression arithmétique est destiné à être battu. Ainsi, on trouve, dans le livre de Paulo Ribenboim « Nombres premiers, mystères et records » (PUF 1994, p. 181) le record de l'époque, une suite de longueur 22 :

$11410337850553 + (k \times 4609098694200)$ pour k variant de 0 à 21

Voici le commentaire de Ribenboim : « *Cette suite a été découverte le 17 mars 1993. Plus de soixante ordinateurs ont collaboré dans cette recherche, qui a été coordonnée par P. Pritchard, de l'université australienne Griffith, dans le Queensland. Pour accentuer le caractère international de ce projet, la découverte a eu lieu à Bergen en Norvège. Les records antérieurs étaient dus à Young et Fry (20 termes), Pritchard (19 termes en 1985, 18 termes en 1982) et à Weintraub (17 termes en 1977). La recherche de premiers en progression arithmétique nécessite de très longs calculs.* »

Le record de 1993 a probablement été battu depuis, mais j'ignore quelle est le dernière performance en la matière ! Actuellement, le problème de savoir s'il existe des suites arithmétiques de nombres premiers de **longueur arbitraire** reste non résolu.

Vous ne pouviez évidemment pas trouver le carré 6B à partir de la liste de nombres premiers publiée dans le numéro précédent ! Par contre, elle vous permettait de trouver

– un carré magique formé de trois nombres premiers. La suite 11 17 23 donne un carré magique conforme au carré 3B :

17	11	23
23	17	11
11	23	17

– un carré magique formé de cinq nombres premiers à partir de la suite 571 631 691 751 811. Cela nous donne, conformément au carré 4B :

631	691	751
811	691	571
631	691	751

Une nouvelle approche

Le carré 6B est un carré magique formé de neuf nombres premiers différents. Peut-on trouver un exemple faisant intervenir des nombres plus petits ? Nous avons utilisé une suite de neuf nombres en progression arithmétique alors que cette condition n'est pas indispensable.

Reportons-nous aux carrés 5B et 5C : aucun lien n'est imposé entre r et t. En posant $t = 2r$, nous obtenons neuf nombres en progression arithmétique. En nous débarassant de cette condition, non obligatoire, nous faisons « éclater » la progression arithmétique en plusieurs progressions. Nous pourrons ainsi construire des carrés magiques de neuf nombres premiers différents plus petits que ceux du carré 6B.

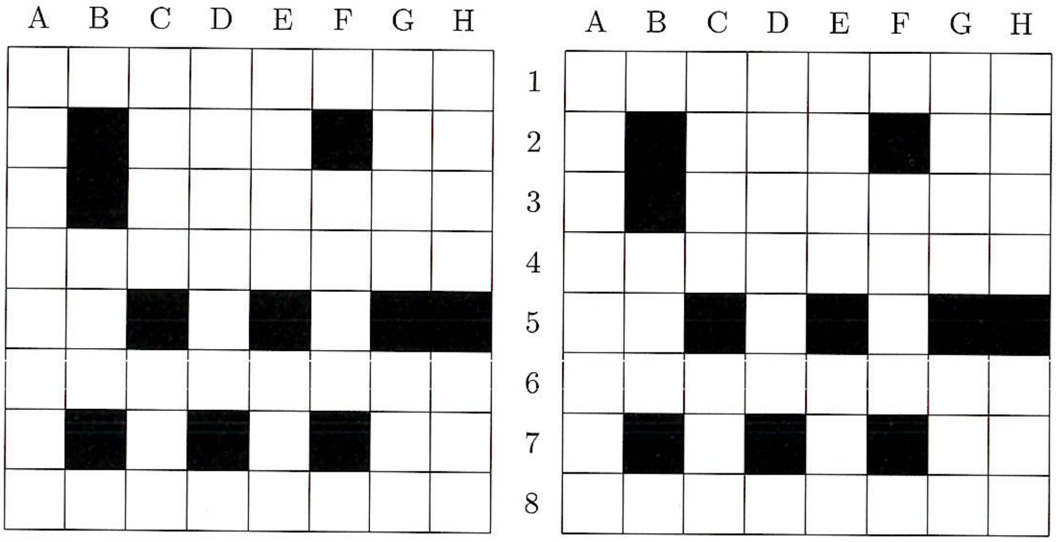
Nous y reviendrons dans le prochain *Math-Jeunes*. Pour vous aider un peu dans cette recherche plus laborieuse, nous vous signalons qu'il existe un carré avec 71 comme valeur centrale et que la liste des nombres premiers dont vous disposez est largement suffisante ! Bon amusement et bon courage !

JEUX

Les mots croisés de Pierre Carré

Dans cette grille de mots croisés, chaque lettre est déterminée par un nombre entier, son numéro d'ordre dans l'alphabet : A = 1, B = 2, C = 3,…, Z = 26. Pêle-mêle, voici les définitions des mots qui composent cette grille :

Partie d'une courbe ;
Régulier, c'est un cube ;
Objet géométrique en forme de bouée ;
Elle s'étudie abondamment en analyse ;
Droites qui n'ont qu'un seul point commun ;
Elles sont les briques d'un calcul algébrique ;
Créés par des logiciels.
Ancienne unité de travail ;
Il porte une charge électrique ;
Direction ;
Commence une condition ;
Diminuer ;
Situé ;
Non dit ;
Non réel ;
Loi ou ordonnance ;
Animal marin qui ressemble à un végétal ;
Fruit sec ;
Ri à l'envers ;
Lune chaotique ;
A l'aspect d'un triple zéro.



Et voici les définitions des nombres qui déterminent les lettres :

A1 Nombre de faces d'un hexaèdre convexe.
A2 Carré parfait.
A3 Égal à A2 − A1.
A4 Dans le plan, nombre d'isométries du carré.
A5 Diviseur non premier de 18.
A6 Son quintuple et son carré son égaux.

A7 Moyenne géométrique de 12 et de 27.
A8 Un premier dont le cube se termine par 9.

B1 Produit de deux premiers consécutifs.
B4 Hypoténuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés valent 3 et 4.
B5 S'écrit 12 en base 16.
B6 Nombre de collines à Rome.
B8 Solution de l'équation $(x-7)(x-11) = (x-8)(x-9)$.

C1 Nombre entier le plus proche de $100(\pi - 3)$.
C2 Puissance de 2, moins 1.
C3 Cercle des... points ou cercle d'EULER.
C4 Possède exactement huit diviseurs.
C6 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
C7 Mesure (en degrés) des angles au centre d'un icosagone régulier.
C8 Premier nombre premier impair.

D1 Nombre d'années complètes écoulées depuis le 30 juin 1999.
D2 Moyenne arithmétique de C2 et de E2.
D3 Somme des chiffres de l'année de décès de FERMAT.
D4 Naturel ni premier, ni composé.
D5 Comme Henri IV sur le Pont...
D6 « Base » utilisée pour compter les œufs.
D8 Un des deux chiffres du système binaire.

E1 On n'a pas tous les jours... ans.
E2 Marignan « divisé » par 101.
E3 20 diminué de 10%.
E4 À la fois, somme et différence de deux carrés.
E6 Preuve par..., pour « vérifier » une division.
E7 Somme des chiffres de l'année de naissance d'EULER.
E8 Terminée en 18, elle commença en ...

F1 Dit la poule : 4 4 4 7 1...
F3 Autant de doigts font une main.
F4 Moyenne des cinq premières décimales de π.
F5 Le plus grand nombre entier à un seul chiffre.
F6 Discriminant de l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$.
F8 Nombre total de doigts d'un être humain.

G1 Très utile en tennis.
G2 Somme de G1 et de G3.
G3 Le tiers de G1.
G4 Âge de la majorité.
G6 M I L − M X L I V.
G7 Partie entière de $\frac{m}{100}$, où m est ton année de naissance.
G8 Somme des solutions de l'équation $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.

H1 Somme de trois carrés.
H2 Selon Stanislas-André STEEMAN, l'assassin y habite.
H3 Nombre de travaux réalisés par Hercule.
H4 ... ans = un lustre.
H6 Ce nombre et ses deux voisins ont une somme égale à 57.
H7 Somme de deux cubes.
H8 Différence de deux cubes.

Des produits à décrypter

Chacun des symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représente un entier compris entre 1 et 10. À droite et sous la grille sont indiquées les produits par ligne et par colonne. Retrouvez la valeur de chacun des symboles.

Grille facile

♥	♥	♠	♥	♥	8
♣	♦	♠	♦	♦	1512
♠	♦	♥	♥	♥	24
♦	♠	♥	♥	♣	168
♠	♣	♦	♦	♦	1512
1344	504	192	9	63	

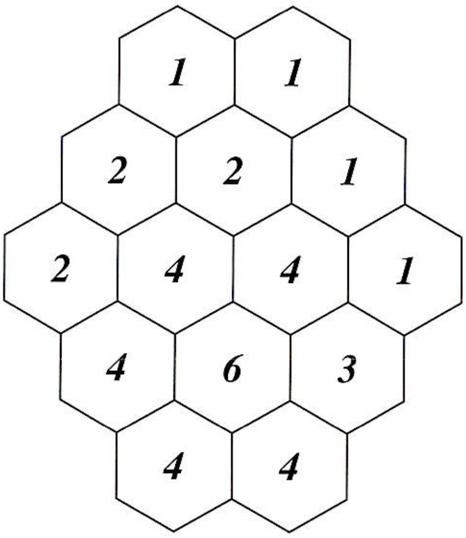
Grille difficile

♦	♣	♠	♦	♦	3072
♥	♠	♣	♦	♠	1536
♥	♠	♥	♠	♣	384
♥	♠	♣	♠	♠	3072
♣	♣	♥	♦	♥	144
24	18432	288	4096	1536	

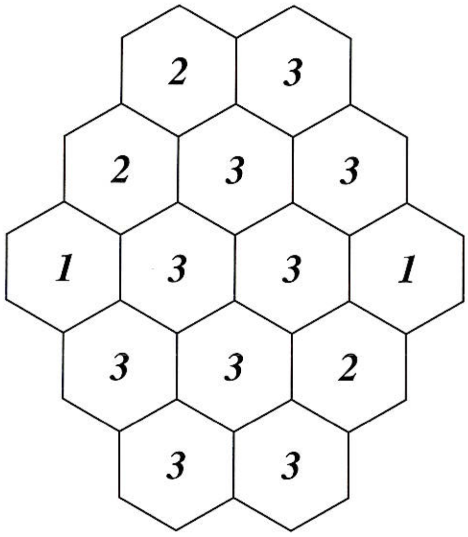
Le jeu des hexagones

Coloriez certains des hexagones des figures suivantes de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : **tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !**

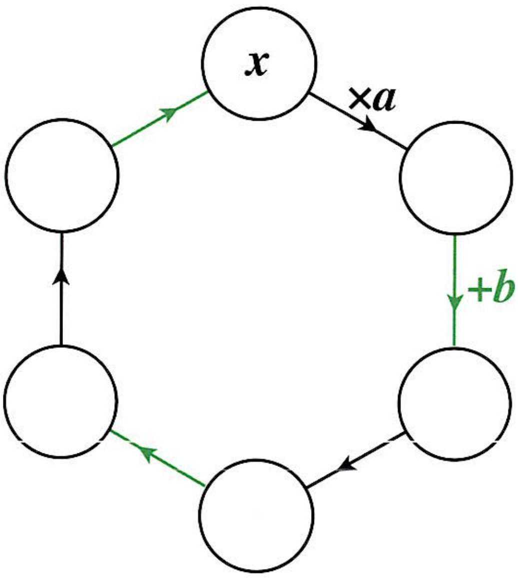
Jeu facile



Jeu difficile



Le tourniquet hexagonal



x, a, et b sont des nombres réels.
En appliquant alternativement les opérateurs $(\times a)$ et $(+b)$, ce tourniquet permet de retrouver la valeur initiale.
Quels sont les couples de réels (a, b) possibles

- lorsque $x = 0$
- lorsque $x = 3$
- si le tourniquet doit fonctionner quelle que soit la valeur de x ?

Solutions des jeux : verso de la couverture arrière.

Nombres premiers et grands mathématiciens

C. Radoux

À la base de toute mathématique, il y a toujours l'espace et/ou le nombre... ou l'un de leurs multiples avatars...

Ma passion spontanée — et mon absence de vision globale — m'ont toujours poussé vers les nombres. Et, parmi ceux-ci, les nombres premiers me fascinent particulièrement. En effet, ils sont un peu aux nombres réels ce que les atomes sont aux molécules.

En outre, le caractère encore mystérieux de leur distribution, globalement très régulière, mais localement très chaotique est une source infinie de réflexion.

Rien d'étonnant donc, me semble-t-il, à ce que tant de grands mathématiciens les aient étudiés, souvent avec passion voire acharnement. C'est ainsi que déjà EUCLIDE (environ 300 av. J.C.) prouve qu'il en existe une infinité. En fait, il démontre (ce qui revient au même pour nous) que, quel que soit le nombre premier p, il en existe un plus grand.

Soit en effet p (en langage d'aujourd'hui) un hypothétique nombre premier maximum.

Le nombre $N = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p$ n'est pas premier puisque plus grand que p. Vous savez peut-être que le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p$ se désigne en abrégé par $p!$ et s'appelle la *factorielle* de p. Par exemple, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,... Donc nous écrivons $N = 1 + p!$.

N n'étant pas premier, doit être divisible par au moins un nombre premier q figurant dans la liste réputée complète 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... p puisque nous avons supposé que p était le PLUS GRAND nombre premier.

Mais alors q divise aussi $p!$ Et par différence, q divise $1 = N - p!$. C'est évidemment absurde.

Cette preuve si limpide est un merveilleux modèle de beauté mathématique.

Signalons que, dans le septième livre de ses « *Éléments* », EUCLIDE frôle la preuve du théorème de factorisation unique des naturels :

Tout nombre naturel admet — à l'ordre des facteurs près — une et une seule décomposition en un produit de nombres premiers pas nécessairement distincts.

Il donne aussi son fameux algorithme de recherche du P.G.C.D., que l'on pourrait croire né plutôt du cerveau d'un informaticien. EUCLIDE n'est pas le seul nom à retenir de l'antiquité grecque en ce domaine.

Songeons par exemple au crible d'ERATOSTHÈNE (274 av. J.C.–194 av. J.C.) filtrant les naturels pour ne laisser survivre que les nombres premiers.

Pour déterminer si un nombre n est premier, on énumère tous les nombres jusqu'à n. Ensuite, on biffe le nombre 1, on ne biffe pas 2, mais on biffe tous les multiples de 2 supérieurs à 2. On va ainsi jusqu'à la fin de la liste. On revient alors au premier nombre non biffé qui suit 2, c'est-à-dire 3. On ne le biffe pas, mais on biffe tous ses multiples qui ne le sont pas déjà. On revient au premier nombre non biffé qui suit 3, c'est-à-dire 5. On ne le biffe pas, mais on biffe tous ses multiples qui ne le sont pas déjà. On continue ainsi tant que c'est possible. Par exemple pour $n = 71$:

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~
41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~ 51 ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ ~~57~~ ~~58~~ 59 ~~60~~
61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~ ~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ 69 ~~70~~ 71

Finalement, les seuls nombres non biffés sont les nombres premiers. 71 n'est pas biffé, il est donc premier.

Après la conquête romaine, la mathématique grecque décline. C'est ainsi qu'au deuxième ou troisième siècle de notre ère — on ne sait pas très bien — DIOPHANTE est surtout un compilateur. Il pose néanmoins de nombreux problèmes à résoudre en nombres entiers, qui seront à la source d'importants travaux... beaucoup, beaucoup plus tard. Car l'Europe occidentale sombre alors dans plus d'un millénaire de ce qu'on peut appeler de l'obscurantisme. Il faudra attendre que la bien nommée Renaissance commence à nous en libérer. Notons ici l'importance de l'influence arabe sur la Renaissance mathématique.

Mais, en ce qui concerne l'arithmétique et, plus particulièrement les nombres premiers, c'est le dix-septième siècle français qui marquera le tournant. C'est d'abord BACHET (1581–1638) qui énonce le théorème suivant :

Si a et b sont premiers entre eux, alors il existe des entiers x et y tels que $ax+by = 1$.

Ce théorème est souvent appelé, à tort, de BÉZOUT (1730–1783). En fait, ce qu'on doit à BÉZOUT c'est un énoncé analogue pour des polynômes.

MERSENNE (1588–1648) laissera son nom aux nombres M_n de la forme $2^n - 1$, déjà considérés par EUCLIDE dans sa théorie des nombres parfaits, c'est-à-dire égaux à la somme de leurs diviseurs propres. Par exemple, les diviseurs propres de 6 sont 1, 2 et 3. Puisque $6 = 1 + 2 + 3$, 6 est parfait. Par contre les diviseurs propres de 8 sont 1, 2 et 4. Or $8 \neq 1 + 2 + 4$, de sorte que 8 n'est pas parfait. À votre avis, qu'appelle-t-on diviseur *impropre* d'un nombre entier n ?

Pour que $M_n = 2^n - 1$ soit premier, il faut que n le soit car $2^{ab} - 1$ est divisible par $2^a - 1$. Pouvez-vous prouver cela ?

MERSENNE pensait que si n est premier, alors M_n l'est nécessairement aussi, mais c'est faux (pourriez-vous le montrer avec un « petit » contre-exemple ? ([1]))

Le plus grand nom pour l'arithmétique, à cette époque et pour longtemps, est FERMAT (1601–1665). On lui doit de très nombreux et superbes théorèmes. En voici deux exemples :

- *Si p est un nombre premier qui ne divise pas x, alors $x^{p-1} - 1$ est divisible par p.*
- *Tout nombre premier p de la forme $4n + 1$ s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme $a^2 + b^2$.*

([1]) Vous pouvez utiliser la liste des 670 premiers nombres premiers publiée dans *Math-Jeunes* n°103.

Et je ne parle pas de son illustre « dernier théorème », enfin démontré par WILES il y a moins de dix ans : on vous a déjà raconté cela.

A partir du dix-huitième siècle, c'est la valse des grands noms, de plus en plus un vrai tourbillon. Les résultats sont nombreux, profonds, frappants, mais aussi de plus en plus techniques.

Voici deux exemples

- L'identité d'EULER (1707–1783) :

  Si s est un réel strictement supérieur à 1,

  $$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots=\frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{3^s}{3^s-1}\cdot\frac{5^s}{5^s-1}\cdot\frac{7^s}{7^s-1}\cdot\frac{11^s}{11^s-1}\cdots$$

  Le premier membre est une somme d'une infinité de nombres. Elle se calcule progressivement : $(((1+\frac{1}{2^s})+\frac{1}{3^s})+\frac{1}{4^s})+\cdots$. Parfois une somme de ce genre se rapproche d'aussi près que l'on veut d'un nombre fixé. On dit qu'elle **converge** vers ce nombre. Au second membre on trouve le produit d'une infinité de nombres. Lui aussi se calcule progressivement : en multipliant successivement par tous les facteurs. Lui aussi peut converger vers un nombre fixé.

  L'identité d'EULER affirme que les deux membres convergent vers le même nombre. Elle fournit des résultats sidérants. Par exemple, pour $s=2$ d'autres outils mathématiques permettent de montrer que le membre de gauche vaut $\frac{\pi^2}{6}$. On a alors

  $$\frac{2^2}{3}\cdot\frac{3^2}{8}\cdot\frac{5^2}{24}\cdot\frac{7^2}{48}\cdot\frac{11^2}{120}\cdots=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

- Le résultat de GAUSS (1777–1855) sur les polygones convexes réguliers que l'on peut construire avec la règle et le compas (non gradués, évidemment) :

  Un polygone régulier est constructible à la règle et au compas si et seulement si son nombre de côtés est soit une puissance de 2, soit le produit d'une puissance de 2 par un nombre fini de nombres premiers de FERMAT distincts.

  Dans cet énoncé, les nombres de FERMAT sont les nombres de la forme $F_t=2^{(2^t)}+1$. Par exemple $F_0=2^{(2^0)}+1=2^1+1=3$, $F_1=2^{(2^1)}+1=2^2+1=5$, $F_2=2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$, $F_3=2^{(2^3)}+1=2^8+1=257$ et $F_4=2^{(2^4)}+1=2^{16}+1=65537$. Les nombres F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers, on les appelle des nombres premiers de FERMAT. Par contre $F_5=2^{(2^5)}+1=2^{32}+1=641\times 6700417$ n'est pas premier.

  On savait depuis l'Antiquité que les triangles équilatéraux et les pentagones réguliers étaient constructibles à la règle et au compas. Ces polygones correspondent à F_0 et F_1. Bien d'autres polygones réguliers constructibles à la règle et au compas étaient déjà connus : carré, hexagone, octogone, décagone, etc. Tous avaient un nombre de côtés égal au produit d'une puissance de 2 par 3, 5 ou 15.

  À la liste déjà connue dans l'antiquité, GAUSS ajoute donc les polygones réguliers correspondant à F_2, F_3 et F_4, soit les polygones réguliers à 17, ou 257 ou 65537 côtés ainsi que tous ceux dont le nombre de côtés est le produit d'une puissance de 2 par un nombre fini de nombres distincts choisis parmi 3, 5, 17, 257 et 65537. De plus, il construit explicitement le polygone à 17 côtés.

  À l'heure actuelle, on ignore toujours s'il existe d'autres nombres premiers de FERMAT F_n que les précédents. Avis aux amateurs...

La technicité des théorèmes de GAUSS, LAGRANGE (1736–1813), LEGENDRE (1752–1833), DEDEKIND (1831–1916), KRONECKER (1823–1891), DIRICHLET (1805–1859), etc. ainsi que l'espace qui m'est imparti rendent quasi impossible leur discussion même superficielle.

Je me contenterai donc d'une seule voie de recherche, celle de RIEMANN (1826–1866). Se basant d'une part sur l'identité d'EULER énoncée plus haut, mais aussi sur des résultats de CAUCHY (1789–1857), il fraie une voie royale au théorème de distribution des nombres premiers, finalement entièrement prouvé par HADAMARD (1865–1963) et DE LA VALLÉE POUSSIN (1866–1962). Voici ce théorème

Soit $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \times \pi(n)}{n} = 1$.

Autrement dit : *plus le nombre n est grand, meilleure est l'approximation de $\pi(n)$ par $\frac{n}{\ln n}$.* ($\ln n$ désigne ici le « logarithme néperien de n »). Ou encore : entre 1 et n, la proportion de nombres premiers — qui est donnée par le quotient $\frac{\pi(n)}{n}$ — est proche de $\frac{1}{\ln n}$. Ce résultat indique une régularité globale de la répartition des nombres premiers parmi les naturels.

En 1949, ERDÖS et SELBERG donneront de ce théorème une preuve « élémentaire » (c'est-à-dire n'utilisant pas les résultats de Cauchy), mais terriblement subtile.

Comme annoncé dès les premières lignes de ce texte, cette régularité globale recouvre une distribution locale chaotique.

Ainsi, l'écart entre deux nombres premiers consécutifs

- vaut très souvent 2. On a même de bonnes raisons de penser qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers « jumeaux » (distants de deux unités, comme 11 et 13, 17 et 19), mais ce n'est toujours pas entièrement prouvé ;
- peut aussi être arbitrairement grand comme le montre l'exemple des factorielles : quel que soit n, aucun des naturels $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, $n!+5$,... $n!+n$ n'est premier (pourquoi ?)

Cela implique évidemment, pour $\pi(n)$ un comportement local très irrégulier.

Ceci se retrouve dans pratiquement tous les problèmes relatifs à des nombres premiers de formes particulières. Voici un exemple.

Appelons $\pi_1(n)$ (resp. $\pi_3(n)$) le nombre des nombres premiers inférieurs à n et de la forme $4k+1$ (resp. $4k+3$).

Globalement, le situation est d'une simplicité idéale : $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_1(n)}{\pi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_3(n)}{\pi(n)} = 1/2$.

Mais par contre, lorsque n varie, la différence $\pi_1(n) - \pi_3(n)$ change de signe une infinité de fois. La localisation, ainsi que l'amplitude de ces oscillations restent très mystérieuses.

L'informatique donnant aujourdhui le laboratoire qui manquait aux mathématiciens du passé, je me suis amusé à programmer deux petits logiciels pour ceux qui aiment expérimenter. Le premier `pi_de_n.exe` calcule, on l'aurait deviné, la fonction $\pi(n)$ pour n inférieur à 10^9. Le second `pn.exe` calcule le n^e nombre premier pour n inférieur à 10^7.

Ces programmes sont téléchargeables, parmi beaucoup d'autres, à l'adresse suivante : `http://www.umh.ac.be/~nombres`.

Vous voyez, quand on commence à explorer le terrain des nombres premiers, derrière chaque porte ouverte, il y a un jardin merveilleux à découvrir. Lui-même recèle des enclos avec des portes dérobées qui, à leur tour...

A la découverte du nombre π

A.Paternottre

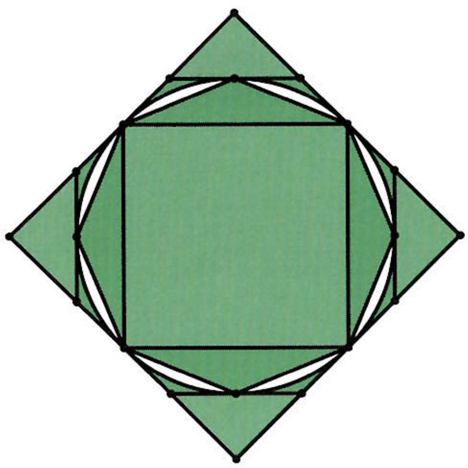
Considérons un cercle dont le rayon r constitue l'unité de longueur choisie. Donc $r = 1$. Désignons par p le périmètre de ce cercle et par A son aire. Chacun sait que $p = 2\pi \times 1 = 2\pi$ et $A = \pi \times 1^2 = \pi$.

L'objectif de cet article est de retrouver ces formules et en particulier une valeur très approchée de π. Comment ? En utilisant d'une part nos connaissances en géométrie et d'autre part le tableur `Excel` qui exécutera rapidement et « excellemment » tous les calculs que nous lui demanderons d'effectuer.

Le procédé utilisé sera le suivant : on part d'un polygone régulier de n côtés, convexe et inscrit à notre cercle de rayon unitaire ainsi que du polygone régulier convexe, circonscrit au même cercle et du même nombre n de côtés. On calcule le périmètre et l'aire de chacun de ces deux polygones. Puis, après avoir doublé le nombre de leurs côtés ($2n$), on refait les mêmes calculs de périmètre et d'aire. En recommençant l'opération de doublement un certain nombre de fois, on aboutira finalement à deux polygones réguliers convexes, l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle mais d'un grand nombre de côtés. On conçoit aisément que ces deux polygones seront pratiquement confondus avec le cercle de départ. Mettons-nous d'accord sur les notations que nous utiliserons :

- Nous appelons n-**gone** un polygone **régulier convexe de n côtés**. Ainsi un 3-gone est un triangle équilatéral, un 4-gone est un carré, un 5-gone un pentagone régulier, etc. Rappelons-nous que tout n-gone est inscriptible et circonscriptible à un cercle.
- A propos d'un n-gone quelconque, nous désignons par :
  - c_n et C_n la longueur de son côté respectivement selon que ce n-gone est **inscrit** ou **circonscrit** au cercle de rayon 1.
  - p_n et s_n respectivement le périmètre et l'aire de ce n-gone s'il est **inscrit** au cercle de rayon 1.
  - P_n et S_n respectivement le périmètre et l'aire de ce n-gone s'il est **circonscrit** au cercle de rayon 1.
- Pour le $2n$-gone, ces mêmes notations seront évidemment c_{2n}, C_{2n}, p_{2n}, s_{2n}, P_{2n}, S_{2n}.

Dans cet article, on a choisi le carré comme polygone régulier de départ. Mais on aurait aussi bien pu partir du triangle équilatéral ou du pentagone régulier ou ...



Bien que ce ne soit pas une évidence, nous n'éprouvons pas trop de difficultés à admettre les inégalités suivantes :

$$p_4 < p < P_4 \text{ et } s_4 < A < S_4$$

Doublons le nombre de côtés. On passe du carré à l'octogone régulier.
Peux-tu justifier qu'on a maintenant :

$$p_4 < p_8 < p < P_8 < P_4$$

et

$$s_4 < s_8 < A < S_8 < S_4$$

Continuons à doubler le nombres de côtés jusqu'à arriver au 16384-gone ! On aura encore :

$$p_4 < p_8 < \cdots < p_{8192} < p_{16384} < p < P_{16384} < P_{8192} < \cdots < P_8 < P_4$$

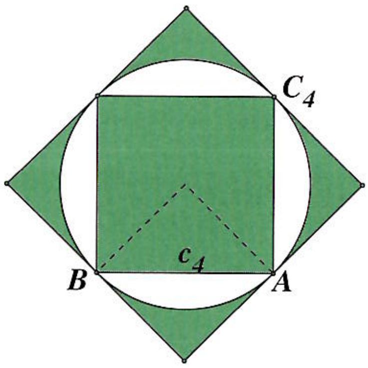
et les mêmes inégalités concernant les aires.

Les périmètres (les aires) des polygones réguliers inscrits croissent en restant inférieurs à p (inférieures à A).

Les périmètres (les aires) des polygones réguliers circonscrits décroissent en restant supérieurs à p (supérieures à A).

Mettons à présent en oeuvre le processus annoncé. Pour cela il faut :
- Calculer la longueur c_n du côté du n-gone inscrit de départ (ici le carré). Il faudra ensuite calculer la longueur C_n du côté du n-gone circonscrit et enfin p_n, P_n, s_n, S_n.
- Calculer les mêmes éléments lorsqu'on passe de n côtés à $2n$ côtés.

Calcul de c_4, C_4, p_4, P_4, s_4, S_4



Si l'angle au centre AOB mesure 90° alors $|AB| = c_4$ et le théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle AOB, donne :

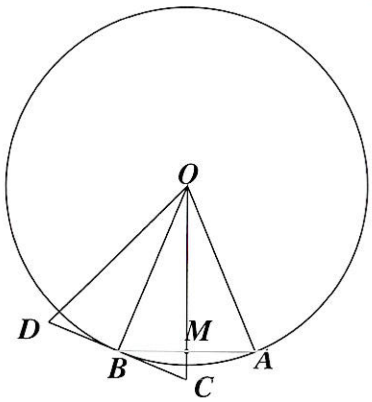
$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 \text{ ou } c_4^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Dès lors $c_4 = \sqrt{2}$.
Ensuite on obtient facilement :

$$C_4 = 2 \times 1 = 2; \quad p_4 = 4 \times c_4 = 4\sqrt{2}$$

$$P_4 = 4 \times C_4 = 8; \quad s_4 = c_4^2 = 2; \quad S_4 = C_4^2 = 4$$

Calcul de C_n en fonction de c_n



AB est le côté d'un n-gone régulier inscrit à un cercle de rayon 1. CD est le côté d'un n-gone régulier circonscrit à ce cercle. CD est tangent au cercle en B. On a $|AB| = c_n$ et $|CD| = C_n$.

Les triangles COD et AOB sont semblables puisqu'ils sont isocèles et $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. La droite OC est la bissectrice du secteur AOB, donc aussi la médiatrice de AB. Le milieu M de AB est situé sur OC.

La similitude des triangles COD et AOB entraîne :

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|OB|}{|OM|}.$$

Donc

$$C_n = \frac{c_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2}} = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}$$

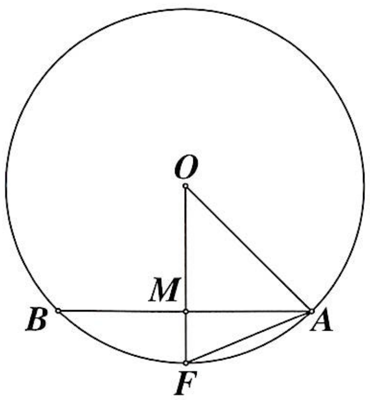
Calcul de p_n, s_n, P_n, S_n

1. $p_n = n.c_n$
2. $s_n = n.\frac{1}{2}.c_n\sqrt{1-\left(\frac{c_n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}n.c_n.\sqrt{1-\frac{c_n^2}{4}} = \frac{1}{2}n.c_n.\sqrt{\frac{4-c_n^2}{4}} = \frac{1}{4}n.c_n.\sqrt{4-c_n^2}$
3. $P_n = n.C_n$
4. $S_n = n.\frac{1}{2}.C_n.1 = \frac{1}{2}.P_n$

Calcul de c_{2n} en fonction de c_n

Soit $|AB| = c_n$. La perpendiculaire au côté AB menée par le centre O divise la corde $[AB]$ en deux segments égaux ainsi que l'arc $\widehat{AB}$. Si M et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de l'arc $\widehat{AB}$, on a :

$$|AM| = \frac{c_n}{2} \text{ et } |AF| = c_{2n}$$



Appliquons encore le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} |AF|^2 &= |AM|^2 + |MF|^2 \\ &= |AM|^2 + |OF - OM|^2 \\ &= |AM|^2 + |OF|^2 + |OM|^2 - 2|OF|.|OM| \\ &= |OA|^2 + |OF|^2 - 2|OF|.|OM| \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} c_{2n}^2 &= 1^2 + 1^2 - 2.1.\sqrt{1-\left(\frac{c_n}{2}\right)^2} \\ c_{2n}^2 &= 2 - \sqrt{4-c_n^2} \\ c_{2n} &= \sqrt{2-\sqrt{4-c_n^2}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$c_8 = \sqrt{2-\sqrt{4-c_4^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 0,765366$$

et

$$c_{16} = \sqrt{2-\sqrt{4-c_8^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \simeq 0,390181$$

Calcul de C_{2n} en fonction de c_n

On peut démontrer que $C_{2n} = \dfrac{C_n \times c_n}{C_n + c_n}$. En remplaçant dans cette égalité C_n par son expression en fonction de c_n (démontrée plus haut), on obtient finalement :

$$C_{2n} = \frac{2c_n}{2+\sqrt{4-c_n^2}}$$

Essaie de vérifier cette dernière égalité.

Calcul de p_{2n}, s_{2n}, P_{2n}, S_{2n}

$\boxed{p_{2n}}$ $p_{2n} = 2n \times c_{2n} = 2n \times \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$

$\boxed{s_{2n}}$

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 2n \times \frac{1}{2} \times c_{2n} \times \sqrt{1 - \left(\frac{c_{2n}^2}{4}\right)} \\
s_{2n} &= n.c_{2n}.\frac{1}{2}\sqrt{4 - c_{2n}^2} \\
s_{2n} &= \frac{1}{2} n \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}.\sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{4 - c_n^2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= \frac{1}{2} n \sqrt{\left(2 - \sqrt{4 - c_n^2}\right).\left(2 + \sqrt{4 - c_n^2}\right)} \\
s_{2n} &= \frac{1}{2} n \sqrt{4 - (4 - c_n^2)} \\
s_{2n} &= \frac{1}{2} n.c_n \\
s_{2n} &= \frac{1}{2} p_n
\end{aligned}$$

$\boxed{P_{2n}}$ $P_{2n} = 2n.C_{2n}$

$\boxed{S_{2n}}$ $S_{2n} = 2n.\frac{1}{2}.C_{2n}.1 = \frac{1}{2} P_{2n}$

Il reste à présent à mettre en œuvre tout ce travail théorique préliminaire dans un tableau `Excel`.

On commence par entrer le nombre n de côtés ainsi que la longueur c_n du polygone régulier de départ. Dans le tableau ci-dessous, ces entrées sont : $n = 4$ et $c_4 = \sqrt{2}$ (en notation `Excel` : RACINE(2)) Si les cases des deux premières lignes sont correctement programmées à l'aide des formules précédentes, la technique `Excel` fera le reste et vous devriez obtenir le tableau de valeurs suivant :

n =	4
cn =	1,414214

	Nbre Côtés	Côté polyg inscrit	Périmètre du polyg inscrit	Aire du polyg inscrit	Côté polyg circonscrit	Périm polyg circonscrit	Aire polyg circonscrit
0	4	1,41421356	5,656854249	2	2	8	4
1	8	0,76536686	6,122934918	2,828427125	0,828427125	6,627416998	3,313708499
2	16	0,39018064	6,242890305	3,061467459	0,397824735	6,365195756	3,182597878
3	32	0,19603428	6,273096981	3,121445152	0,196982807	6,303449815	3,151724907
4	64	0,09813535	6,280662314	3,136548491	0,0982537	6,28823677	3,144118385
5	128	0,04908246	6,282554502	3,140331157	0,049097244	6,28444726	3,14222363
6	256	0,02454308	6,283027602	3,141277251	0,024544925	6,283500738	3,141750369
7	512	0,01227177	6,283145881	3,141513801	0,012272	6,283264161	3,141632081
8	1024	0,00613591	6,283175451	3,14157294	0,006135942	6,283205021	3,14160251
9	2048	0,00306796	6,283182843	3,141587725	0,003067964	6,283190236	3,141595118
10	4096	0,00153398	6,283184691	3,141591422	0,001533981	6,283186539	3,14159327
11	8192	0,00076699	6,283185153	3,141592346	0,00076699	6,283185615	3,141592808
12	16384	0,0003835	6,283185272	3,141592577	0,000383495	6,283185384	3,141592692
			$\downarrow$ 2π	$\downarrow$ π		$\downarrow$ 2π	$\downarrow$ π

C.Festraets

Lorsque tu recevras ce numéro de Math-Jeunes, tu auras certainement participé à l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge. Peut-être seras-tu admis en demi-finale, et dans ce cas, je te félicite. Peut-être ne seras-tu pas aussi chanceux, mais ne t'en fais pas, prends courage et réinscris-toi l'année prochaine. Dans tous les cas, voici quelques énoncés qui te permettront de t'exercer ; ces énoncés sont puisés dans le tome 3 de la brochure "Olympiades", ce tome est épuisé, mais si tu es intéressé, tu peux te procurer les tomes 4 et 5. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela

Olympiades Mathématiques Belges

Tome 4 (1994-1998) : prix 5,50 euros.

Tome 5 (1999-2002) : prix 6 euros

Ajouter 1,50 euros de frais de port pour un exemplaire et 2,70 euros pour deux ou trois exemplaires.

Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

1. Demi-finale 93

Le nombre réel 0,246464646... vaut aussi

(A) $\frac{244}{1010}$ **(B)** $\frac{24}{99}$ **(C)** $\frac{122}{495}$ **(D)** $\frac{46}{99}$ **(E)** $\frac{64}{49}$

2. Eliminatoire 92

Un stade peut recevoir jusqu'à 30 000 spectateurs. Les $\frac{5}{6}$ des personnes désirant assister à une rencontre ont pu trouver place dans ce stade. Combien de personnes n'ont pas pu y trouver place ?

(A) 5000 **(B)** 6000 **(C)** 25000
(D) 36000 **(E)** un autre nombre

3. Eliminatoire 89

La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t) = t^2 + (1-t)^2 - 4(1-t)$

(A) a un minimum en 0
(B) a un minimum en 1
(C) a un minimum en 0 et en 1
(D) a un minimum en $\frac{1}{2}$
(E) n'a pas de minimum dans $[0,1]$

4. Demi-finale 91

Pour trois nombres distincts quelconques a, b, c, définissons $\boxed{a,b,c}$ par $\boxed{a,b,c} = \frac{c+a}{c-b}$. Alors $\boxed{1,-2,-3} =$

(A) -2 **(B)** -$\frac{2}{5}$ **(C)** -$\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)**2

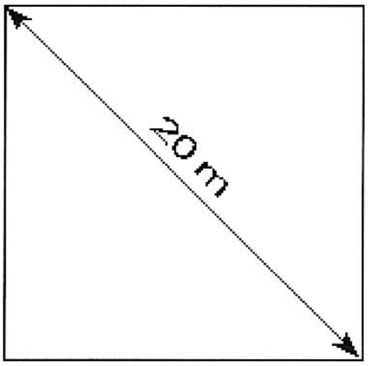
5. Eliminatoire 89

Voici cinq polynômes à coefficients réels. Lequel est divisible à la fois par $(x-3)$ et par $(x+3)$?

(A) $x^3 - 27$
(B) $x^3 - 9$
(C) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
(D)$x^3 + 27$
(E) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$

6. Eliminatoire 88 *(Sans réponse préformulée)*

Sachant qu'il faut un sac de petits pois pour ensemencer 20 m^2, combien de sacs de petits pois faut-il pour ensemencer le terrain carré ci-dessous ?



7. Eliminatoire 91

Un artisan souffle de l'air dans une boule de verre pleine de 10 cm de diamètre, pour fabriquer une boule de verre creuse de 20 cm de diamètre extérieur. En supposant que la bulle d'air est centrale et sphérique, l'épaisseur du verre de la boule creuse est, en cm :

(A) $10(2-\sqrt[3]{7})$ **(B)** $5(2-\sqrt[3]{7})$ **(C)** $\sqrt[3]{15}$ **(D)** $\sqrt[3]{2}$ **(E)** une autre valeur

8. Demi-finale 90

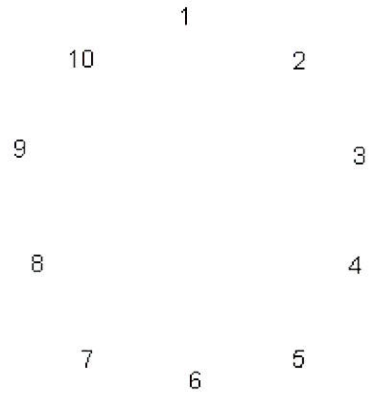
Tous les élèves de l'école Albert et de l'école Baudouin passent un certain examen. Les résultats moyens des garçons, des filles, enfin des garçons et des filles ensemble, pour les deux écoles, sont indiqués dans le tableau ci-dessous, ainsi que le résultat moyen des garçons des deux écoles. Quel est le résultat moyen des filles des deux écoles ?

	Ecole Albert	Ecole Baudouin	Ecoles Albert et Baudouin
Garçons	71	81	79
Filles	76	90	?
Garçons et filles	74	84	

(A) 81 **(B)** 82 **(C)** 83 **(D)** 84 **(E)** 85

9. Demi-finale 90

Dix personnes forment un cercle. Chacune choisit un nombre et le communique à ses deux voisins sur le cercle. Ensuite, chaque personne calcule et annonce la moyenne des nombres de ses voisins. La figure indique les nombres annoncés par chaque personne (*pas* le nombre choisi au départ par cette personne).



Le nombre choisi par la personne qui annonce 6 était

(A) 1 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 10
(E) valeur non déterminée par ces données

10. Eliminatoire 92

Les carrés des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont toujours racines de

(A) $cx^2+bx+a=0$
(B) $ax^4+bx^2+c=0$
(C) $a^2x^2+(b^2-4ac)x+c^2=0$
(D) $a^2x^2+b^2x+c^2=0$
(E) $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	E	C	10	B	D	A	E

Une question en or

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}=?$$

Rallye problèmes

C. Festraets

Voici les problèmes 11 à 20 de ce rallye 2002-2003 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent. Il n'est pas obligatoire d'avoir participé à la première étape du rallye pour participer aux suivantes.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de Math-Jeunes, n'oubliez pas d'affranchir suffisamment vos lettres et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 14 février 2003.

11. Mesure du temps

Je possède deux sabliers : dans l'un, le sable s'écoule totalement en 5 minutes ; dans l'autre, il s'écoule totalement en 3 minutes. Or, il me faut exactement 7 minutes pour réchauffer un plat. Comment dois-je m'y prendre pour mesurer un telle durée ? Il est admis que le temps nécessaire pour retourner un sablier est négligeable.

12. À chacun son aire

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O. Si les aires des triangles OAB, OBC et OCD valent respectivement 60, 108 et 360 cm^2, que vaut l'aire du triangle ODA ?

13. Sur l'autoroute

Sur l'autoroute, les camions roulent tous à la même vitesse constante v ; de plus, une même distance d sépare deux camions qui se suivent. En voiture, à vitesse constante V, je dépasse un camion roulant dans le même sens toutes les 3 minutes et je croise un camion roulant en sens inverse toutes les 30 secondes. Que vaut le rapport

$$\frac{V}{v} \quad ?$$

14. Dodécaèdre

Combien de diagonales un dodécaèdre convexe possède-t-il ? Pour rappel, une diagonale d'un polyèdre convexe est un segment qui joint deux de ses sommets non situés dans une même face.

15. Diviseurs

Soit N un nombre naturel dont les seuls diviseurs premiers sont 2 et 3. Divisé par 36, il perd la moitié de ses diviseurs ; multiplié par 12, il augmente de moitié le nombre de ses diviseurs. Quel est ce nombre N ?

16. Comment voter

Avant une élection, trois amis discutent :
Pierre : « Si Jean vote pour Dubois, je voterai pour Dupont, mais s'il vote pour Durand, je voterai pour Dubois. D'autre part, si Jacques vote pour Dupont, je voterai pour Durand. »
Jean : « Si Pierre vote pour Durand, je ne voterai pas pour Dupont, mais si Jacques vote pour Dubois, alors je voterai pour Dupont. »
Jacques : « Si Pierre vote pour Dupont, je ne voterai pas pour Durand. »
Le jour des élections, ils votent tous les trois différemment et leurs votes correspondent bien à leur discussion. Pour qui ont-ils voté ?

17. Addition anglaise

Voici un nouveau problème de cryptarithmie. Comme dans le numéro précédent, chaque lettre désigne un chiffre et des lettres différentes représentent des chiffres différents.

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ O\ R\ T\ Y} \\ \mathrm{T\ E\ N} \\ \mathrm{T\ E\ N} \\ \hline \mathrm{S\ I\ X\ T\ Y} \end{array}$$

18. Corde

On donne un cercle de centre O et de rayon r et un point P extérieur à ce cercle. Construire une droite passant par P et coupant le cercle en A et B de telle sorte que $|PA| = |AB|$. Cette construction est-elle toujours possible ?

19. Une grande somme

Quelle est la somme de tous les chiffres utilisés pour écrire tous les nombres de 1 à 1 000 000 000 ?

20. Décomposition

Un nombre entier peut être exprimé de plusieurs manières comme une somme de 1, 2 ou plusieurs termes. Par exemple, 3 peut être exprimé de quatre manières différentes : 3, 1 + 2, 2 + 1, 1 + 1 + 1. De combien de manières peut-on exprimer ainsi un nombre n ?

Solutions des problèmes 1 à 10

1. Trapèze

Soient a, b et h les mesures respectives de la grande base, de la petite base et de la hauteur du trapèze demandé. D'après les conditions imposées, nous devons avoir

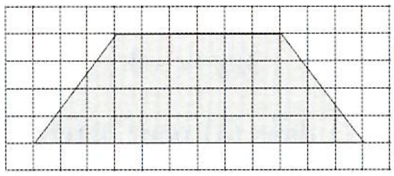
$$\begin{cases} \frac{1}{2}h(a+b) = 36 \\ a = 2b \\ a = 3h \end{cases}$$

En explicitant b et h en fonction de a dans les deux dernières équations et en substituant ensuite dans la première, nous obtenons

$$\frac{a}{3}\left(a + \frac{a}{2}\right) = 72$$

De là, nous tirons $a = 12$, puis $b = 6$ et $h = 4$.

Un trapèze répondant aux conditions est représenté ci-dessous dans un quadrillage montrant l'unité de longueur.



2. Simple addition

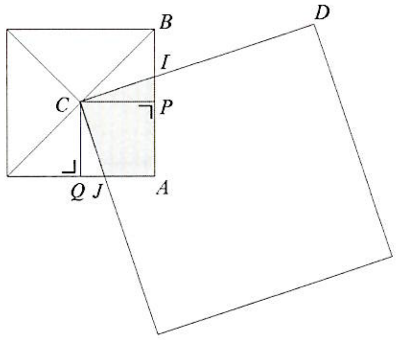
Les 720 nombres composés des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 peuvent être groupés par deux. En effet, à chacun de ces nombres, nous pouvons associer son « complément » à 7, c'est-à-dire le nombre obtenu en le soustrayant de 777 777. Par exemple, le complément à 7 de 215 364 est 562 413.

Dès lors, la somme des 720 nombres est la somme de 360 paires de nombres complémentaires. Or, la somme de deux nombres complémentaires est égale à 777 777. Par conséquent, la somme des 720 nombres vaut

$$360 \times 777777 = 279999720$$

3. Recouvrement

Soient P et Q les projetés orthogonaux de C sur les côtés $[AB]$ et $[AE]$ du petit carré ; soit J le quatrième sommet du polygone ombré (cf. la figure ci-dessous).



Les triangles rectangles PIC et QJC sont isométriques.

En effet, en plus de leur angle droit, ces triangles ont un côté de l'angle droit de même longueur ($|PC| = |QC|$) et l'angle aigu de sommet C de même amplitude (deux angles aigus à côtés perpendiculaires ont la même amplitude).

Par conséquent, ces triangles ont la même aire et, par suite, le polygone ombré a la même aire que le carré $CPAQ$, à savoir un quart de l'aire du carré de 3 cm de côté, donc 2,25 cm^2.

4. Somme des carrés

La seconde équation s'écrit

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 14$$

En tenant compte de la première équation, nous obtenons

$$x^2 - xy + y^2 = 7. \qquad (a)$$

De plus, par élévation au carré, la première équation donne

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4. \tag{b}$$

En soustrayant membre à membre (a) et (b), il vient

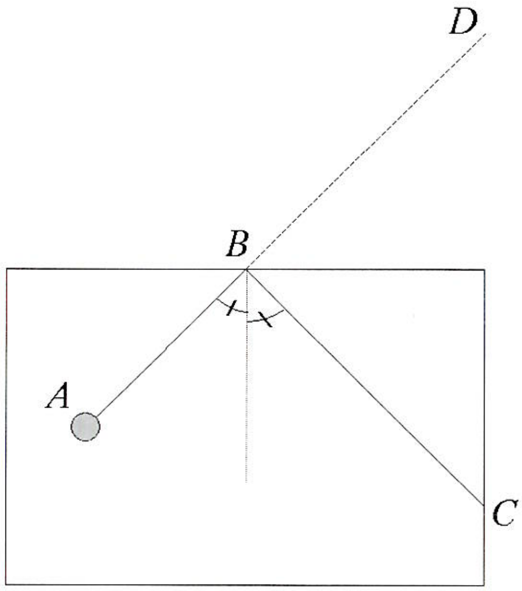
$$3xy = -3.$$

Il suffit donc de remplacer xy par -1 dans (a) pour obtenir la somme demandée :

$$x^2 + y^2 = 6$$

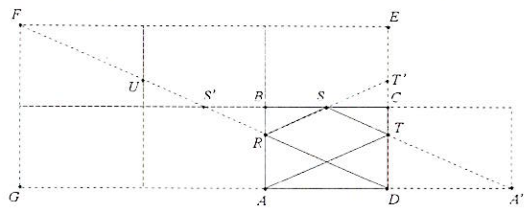
5. Billard

Si aucun effet n'est donné à la boule, la réflexion sur le bord d'un billard se fait de telle manière que « l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion ». Cela étant, la trajectoire $[BC]$ que suit la boule après avoir heurté le bord du billard s'obtient en prenant le symétrique du prolongement $[BD]$ de la trajectoire $[AB]$ qu'elle suivait avant de toucher ce bord (cf. la figure ci-contre).



Dans le problème posé, la boule suit une trajectoire $DRSTA$ (cf. la figure ci-dessous) telle que

- S est le milieu de $[BC]$;
- le prolongement $[RS']$ de $[DR]$ a pour symétrique $[RS]$ par rapport à AB ;
- le prolongement $[ST']$ de $[RS]$ a pour symétrique $[ST]$ par rapport à BC ;
- le prolongement $[TA']$ de $[ST]$ a pour symétrique $[TA]$ par rapport à DA.



Cette trajectoire a la même longueur que la diagonale du rectangle $DEFG$ obtenu en juxtaposant six rectangles isométriques, $[RS]$, $[S'U]$ et $[SF]$ ayant respectivement la même longueur que $[RS]$, $[ST]$ et $[TA]$.

Par conséquent, la distance parcourue par la boule vaut

$$|DF| = \sqrt{|DE|^2 + |EF|^2} = \sqrt{240^2 + 540^2}\ \text{cm} = 60\sqrt{97}\ \text{cm}.$$

6. Visitons Paris

Désignons respectivement par (E), (M), (A), (J) les propositions « nous sommes montés à la tour Eiffel », « nous sommes montés à la tour Montparnasse », nous avons visité l'Arc de Triomphe », « nous avons visité le musée du Jeu de Paume ».

Si (E) était faux, alors, comme André ne ment qu'une seule fois, (A) serait vrai et Claude ne mentirait pas. Donc (E) est vrai. Claude ment donc lorsqu'il dit « nous ne sommes pas montés à la tour Eiffel » et par conséquent (A) est vrai. Dès lors, André ment lorsqu'il dit n'être pas monté à la tour Montparnasse et (M) est vrai. Enfin, Bernard ment losqu'il dit ne pas avoir visité la tour Montparnasse, donc (J) est faux.

Les trois fils ont visité la tour Eiffel, la tour Montparnasse et l'Arc de Triomphe, mais pas le musée de Jeu de Paume.

7. Cryptarithmie

Nous comptons les colonnes de la droite vers la gauche.

Dans la 3^{e} colonne, il y a un report provenant de la 2^{e} colonne, ce report est au maximum 2 car $3U \leqslant 3 \times 9 = 27$.

Dans la 4^{e} colonne, il y a aussi un report et il ne peut être que de 1. Cela nous conduit à $E = 9$, $E + 2 = 11$ ($E + 1 = 10$, mais 0 ne convient pas pour N), $N = 1$ et $O = 2$.

Dans la 1ère colonne, $F + 1 + 1 = 9$, donc $F = 7$.

Il reste à déterminer U et Z : comme $3U$ est compris entre 21 et 27 (puisque le report de la 2^{e} colonne sur la 3^{e} est 2) et comme U ne peut valoir ni 7, ni 9, on a U = 8. Nous trouvons alors $Z = 4$.

8. Connaissances

Supposons que les n personnes du groupe aient toutes un nombre différent de connaissances. Les n nombres possibles seraient 0, 1, 2, 3, ..., $n - 2$, $n - 1$. Il y aurait ainsi un membre du groupe qui ne connaît personne et un autre membre du groupe qui connaît tous les autres membres, ce qui est impossible puisque les connaissances sont mutuelles (si a connaît b, alors b connaît a).

9. Extremum

Soit h une hauteur du triangle équilatéral de côté a. On a : $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, d'où $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ et l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

De même, l'aire du triangle équilatéral de côté b est égale à $\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$. Remplaçons b par $L - a$.

La somme des aires des deux triangles vaut alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}(L-a)^2\sqrt{3} &= \frac{1}{4}\sqrt{3}(a^2 + (L-a)^2) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{3}(a^2 + L^2 - 2La + a^2) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{3}(2a(a-L) + L^2)
\end{aligned}$$

Comme $a \leqslant L$, on a $a - L \leqslant 0$, donc cette expression est maximum pour $a = L$ et alors $b = 0$.

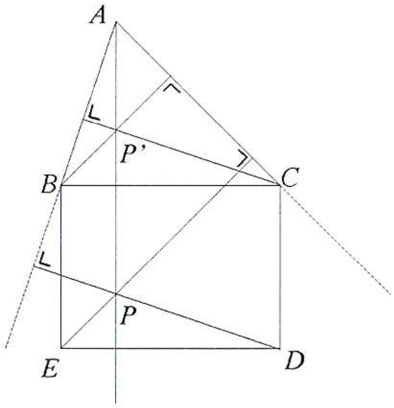
D'autre part, on peut aussi écrire cette somme sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sqrt{3}(a^2 + L^2 - 2La + a^2) &= \frac{1}{4}\sqrt{3}(2(a^2 - La + \frac{L^2}{4}) + \frac{L^2}{2}) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{3}(2(a - \frac{L}{2})^2 + \frac{L^2}{2})\end{aligned}$$

et nous obtenons un minimum pour $a - \frac{L}{2} = 0$, donc $a = b = \frac{L}{2}$.

10. Perpendiculaires

Considérons la translation qui applique D sur C, E sur B et P sur P'.



Dans le triangle ABC, BP' et CP' sont deux hauteurs, car BP' // DP et DP est perpendiculaire à AB, CP' // EP et EP est perpendiculaire à AC. D'où AP' est la troisième hauteur du triangle et est perpendiculaire à BC. Or la direction de la translation est perpendiculaire à BC, donc PP' est perpendiculaire à BC. Il en résulte que les trois points A, P' et P sont sur une même droite perpendiculaire à BC.

Les élèves suivant ont donné de bonnes réponses aux problèmes de la première étape : Thierry CAEBERGS, 5e année, AR de Thuin, Mathilde RADELET, 6e année, AR Vauban à Charleroi.

. . . .

Deux énigmes

1. Quand après-demain sera hier, il nous faudra autant de jours pour atteindre dimanche qu'il nous en a fallu, quand avant-hier était demain, pour que nous soyons aujourd'hui. Quel jour sommes-nous ?
2. Trois amis A, B et C possèdent ensemble 48 euros. Constatant qu'il est plus riche que B, A donne à B une somme qui double le capital de celui-ci. B fait alors de même vis-à-vis de C. Il apparaît à ce moment que A est devenu le plus pauvre mais que si C double l'avoir de A, ils possèderont tous la même somme. Combien chacun avait-il initialement ?

Solutions des jeux

Les mots croisés de Pierre Carré

A	B	C	D	E	F	G	H
F	O	N	C	T	I	O	N
I	■	O	O	O	■	T	U
C	■	I	R	R	E	E	L
H	E	X	A	E	D	R	E
I	R	■	I	■	I	■	■
E	G	A	L	I	T	E	S
R	■	R	■	O	■	S	I
S	E	C	A	N	T	E	S

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	15	14	3	20	9	15	14
2	9	■	15	15	15	■	20	21
3	3	■	9	18	18	5	5	12
4	8	5	24	1	5	4	18	5
5	9	18	■	9	■	9	■	■
6	5	7	1	12	9	20	5	19
7	18	■	18	■	15	■	19	9
8	19	5	3	1	14	20	5	19

Des produits à décrypter

Grille facile

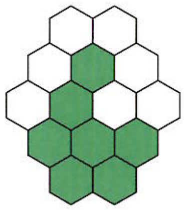
♥	1
♣	7
♠	8
♦	3

Grille difficile

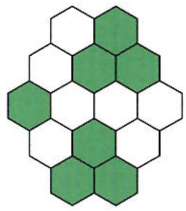
♦	4
♥	1
♣	6
♠	8

Le jeu des hexagones

Jeu facile



Jeu difficile



Le tourniquet hexagonal

Dans tous les cas, a et b doivent satisfaire

$$x = a^3x + a^2b + ab + b$$

- Si $x = 0$, il faut que $(a^2 + a + 1)b = 0$. Comme le premier facteur ne s'annule pour aucune valeur réelle de a, nous devons avoir $b = 0$. Tout couple $(a, 0)$ est donc une solution du problème.
- Si $x = 3$, il faut que $3a^3 + a^2b + ab + b - 3 = 0$ et tout couple (a, b) de la forme $\left(a, \dfrac{3(1-a^3)}{a^2+a+1}\right)$ convient. Cela donne par exemple $(1, 0)$, $(-1, 6)$, ...
- Si x peut prendre n'importe quelle valeur, il faut que

$$\textbf{pour tout réel } x, \quad (a^3 - 1)x + b(a^2 + a + 1) = 0$$

Cela implique

$$a^3 - 1 = 0 \text{ et } b(a^2 + a + 1) = 0$$

La solution unique dans $\mathbb{R}^2$ est donc $(a, b) = (1, 0)$.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124