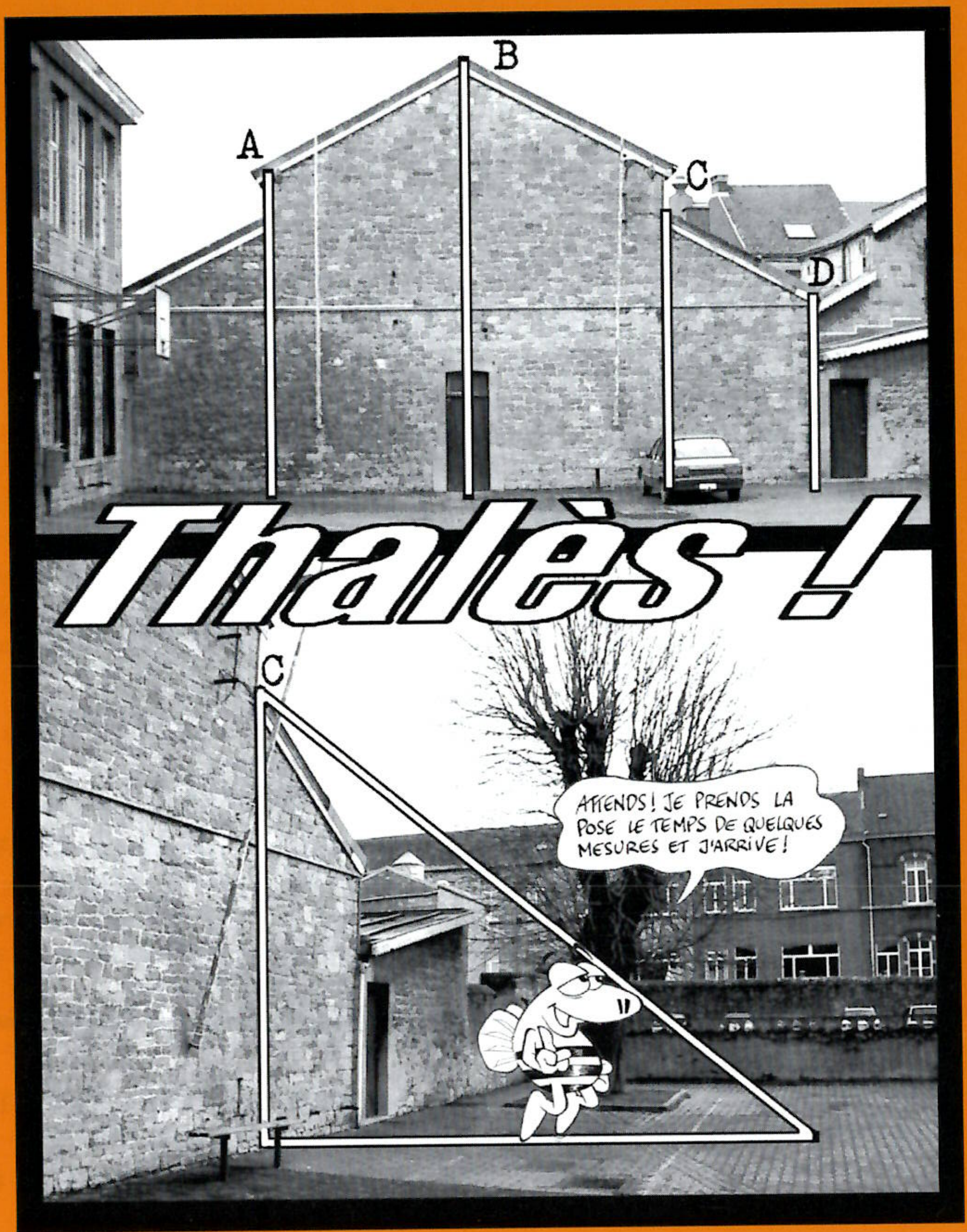
MATH-JEUNES



24e année
Avril 2003 – n°105 S
Bureau de dépôt : Mons I

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Les envois à destination de la Belgique sont d'office effectués au tarif non prioritaire.

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
	✉	⚡✉	✉	⚡✉
Belgique	3,80 €		6,60 €	
Europe	6 €	7,80 €	12,20 €	15,80 €
Autres pays	6,60 €	10 €	15,10 €	22,60 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
	✉	⚡✉	✉	⚡✉
Belgique	5 €		10 €	
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=⚡✉, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :
– pour *Math-Jeunes* : C. Van Hooste, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour
– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°105 Vingt-quatrième année 2003

MATH-JEUNES

Sommaire

Le présent numéro de *Math-Jeunes* est le dernier de l'année scolaire 2002–2003. Vous pouvez dès à présent renouveler votre abonnement pour 2003–2004. Voyez nos tarifs ci-contre.

F. Pourbaix, Thalès sous la pluie 2

Yolande Noël-Roch, Carrés magiques et nombres premiers (3) 4

C. Villers, La mathématique au quotidien 8

Jeux 14

G. Noël, Dis Monsieur, calcule-moi un sinus ! (2) 18

C. Van Hooste, L'équation du troisième degré (3) 21

S. Trompler, L'histoire des nombres complexes 22

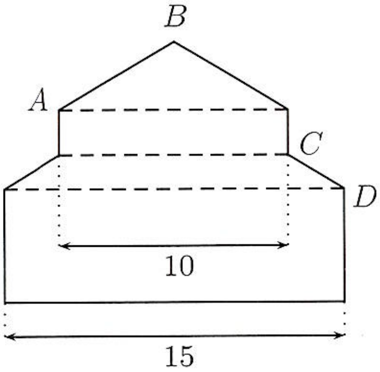
Olympiades 24

Rallye-problèmes 28

Thalès sous la pluie

F. Pourbaix

Avez-vous vu la photo sur la couverture ? Il s'agit du pignon d'un bâtiment dans une cour d'école. On peut décomposer cette surface en un grand rectangle, un trapèze, un petit rectangle et un triangle.



Afin de calculer l'aire du pignon, un groupe d'élèves téméraires (il pleuvait ce jour-là !) a pris les mesures nécessaires.

Les longueurs des rectangles ont pu se mesurer au sol : respectivement 15 et 10 mètres. Pour la mesure des hauteurs des points A, B, C et D, les élèves ont utilisé le célébrissime théorème de Thalès... de deux façons !

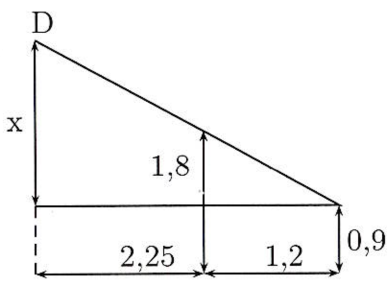
Première Méthode : à la dure

L'hypoténuse du triangle rectangle représente le regard de l'observatrice accroupie.

Celle-ci s'est placée de manière à ce que ses yeux, le point D, et la tête d'un autre élève soient alignés.

Ce que voit l'observatrice (pour B).

On mesure la taille de l'élève debout, la hauteur des yeux de l'observatrice, la distance entre les deux élèves, et la base du triangle.



Les mesures prises (exprimées en mètres) sont reportées sur le schéma ci-contre.
On peut appliquer le théorème de Thalès afin de connaître la hauteur du point D :

$$\frac{x}{2,25+1,2} = \frac{0,9}{1,2}$$

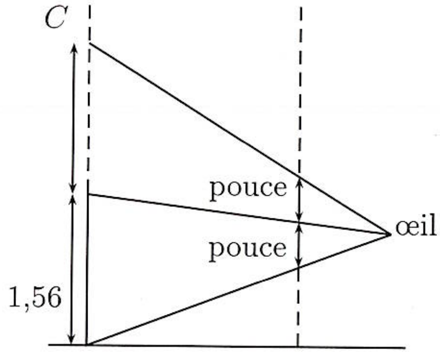
$$\iff \quad x = \frac{0,9 \cdot (2,25+1,2)}{1,2}$$

$$\iff \quad x = 2,5875 \simeq 2,6$$

Ce qui signifie que le point D se trouve à $2,6 + 0,9 = 3,5$ mètres de haut. On peut bien sûr calculer de la sorte la hauteur des autres points.

Seconde Méthode : à la manière du peintre

Un élève tend son pouce devant lui et se place de manière à ce que la taille de son doigt coïncide avec la taille d'une autre élève placée contre le mur sous le point C.



Il reporte son pouce en le laissant dans un plan parallèle au mur jusqu'à atteindre le point C. Dans cet exemple, il a dû reporter son pouce 3 fois.

Sachant que l'élève contre le mur mesure $1,56$ mètre, on calcule donc que le point C se trouve à une hauteur de $3 \cdot 1,56 = 4,68$ mètres.

Ce calcul est de nouveau permis grâce au théorème de Thalès puisque le pouce et l'élève contre le mur sont parallèles. Remarquez que le triangle n'est pas nécessairement rectangle, et que la distance œil–pouce doit s'adapter de manière à ne pas quitter un même plan ...

Le fond de l'aire est frais

Voilà donc comment par un après-midi pluvieux d'automne une quinzaine d'écoliers sont parvenus via l'une ou l'autre des méthodes proposées à calculer les hauteurs des 4 points cruciaux du pignon dans leur cour de récréation.

Voici ce qu'ils obtinrent :

- Hauteur de A = 5,6 m
- Hauteur de B = 7,7 m
- Hauteur de C = 4,68 m
- Hauteur de D = 3,5 m

Et le calcul de l'aire du pignon dont nous vous parlions en début d'article, que devient-il donc, demanderez-vous en lecteur assidu mais néanmoins inquiet ? Vous avez tous les atouts en mains pour le mener à son terme ! Munis des mesures ci-dessus, à vous de trouver la bonne surface...

Il ne vous restera plus qu'à vérifier votre réponse en faisant subir la rotation adéquate à votre magazine favori, et en lisant à l'endroit le contenu de la case que voici :

aire du pignon = 86,95 m^2

Une sortie sous la pluie menée par les élèves de 4e TTr de l'Athénée Royal Jean Rey à Couvin et leur professeur qui pour une fois a pris des photos plutôt que de faire des dessins... ça prend moins de temps, mais ça mouille plus !

Carrés magiques et nombres premiers (3)

Yolande Noël-Roch

Pour construire un carré magique formé de **neuf** nombres premiers **différents**, nous utiliserons

1. le carré 5C obtenu dans le premier article. On y lit en particulier le lien entre le terme central c et la somme s : sur chaque ligne, colonne et diagonale $3c = s$.

$c-r$	$c+r+t$	$c-t$
$c+r-t$	c	$c-r+t$
$c+t$	$c-r-t$	$c+r$

Carré 5C

2. le fait qu'un naturel n étant donné, tout naturel s'écrit d'une façon unique sous la forme $qn + r$, où q et r sont des naturels et $0 \leqslant r < n$.

Quelques propriétés relatives aux nombres premiers

Nous allons maintenant observer les nombres premiers parmi les naturels répartis en six classes selon la valeur du reste r de leur division par 6 :

0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	$\cdots$
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	$\cdots$
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	$\cdots$
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	$\cdots$
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	$\cdots$
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	$\cdots$

Tableau 1

Dans ce tableau des naturels de 1 à 65, nous voyons qu'à l'exception de 2 et 3, les nombres premiers n'apparaissent que dans
- la deuxième ligne : le nombre est du type $6k + 1$
- la sixième ligne : le nombre est du type $6k + 5$

Cela est-il vrai si vous continuez le tableau ? Et pour tous les naturels ?

Pour justifier qu'il en est bien ainsi, il suffit de jouer avec la mise en évidence.
- Pour toute valeur de k, $6k+2 = 2 \times (3k+1)$. Ainsi, tous les nombres de la troisième ligne du tableau 1 sont des multiples de 2. Cette ligne ne contient donc que 2 comme nombre premier.
- Pour toute valeur de k, $6k+3 = 3 \times (2k+1) \ldots$ et tous les nombres de la quatrième ligne du tableau 1 sont des multiples de 3. Cette ligne ne contient donc que 3 comme nombre premier.
- De même $6k+4 = 2 \times (3k+2)$ montre que tous les nombres de la cinquième ligne sont pairs et que cette ligne ne contient aucun nombre premier aussi loin qu'on la prolonge.

Nous venons de prouver que tout nombre premier autre que 2 et 3 peut s'écrire sous la forme $6k+1$ **ou** $6k+5$. C'est la propriété 5, avec un léger changement de notation. Comme

$$6k + 5 = 6k + 6 - 1 = 6(k + 1) - 1$$

tout multiple de 6 augmenté de 5 est aussi un multiple de 6 diminué de 1.

Math-Jeunes n°105, 4–7, 2003

Propriété 5

A l'exclusion de 2 et 3, tout nombre premier est
– soit du type $6k + 1$
– soit du type $6k - 1$

Attention : la propriété réciproque est évidemment fausse ! Ni 25 $(= 24 + 1)$, ni 35 $(= 36 - 1)$ ne sont premiers !

Revenons à notre étude des carrés magiques.

Propriété 6

Les nombres premiers 2 et 3 ne peuvent pas intervenir dans un carré magique de neuf nombres premiers différents.

C'est immédiat pour 2. S'il est placé dans un carré, la somme des éléments de sa ligne sera paire tandis que la somme des éléments d'une autre ligne sera impaire ... et le carré ne saurait être magique.

C'est moins immédiat pour 3 mais un dessin peut aider. Si 3 est dans le carré, il est dans une ligne, supposons que ce soit dans le première.

3		

Comme s est multiple de 3, la première ligne doit être complétée par un multiple de 3 diminué de 1 et un multiple de 3 augmenté de 1. Supposons

3	$3k-1$	$3i+1$

Utilisons maintenant le fait que s est multiple de 3 dans les deuxième et troisième colonnes. Nous avons

3	$3k-1$	$3i+1$
	$3j-1$	$3\ell+1$
	$3m-1$	$3n+1$

Pour compléter la première colonne, nous devrions utiliser plusieurs fois le nombre 3 alors que nous cherchons un carré formé de neuf nombres *différents*.

Propriété 7

Tout carré magique de neuf nombres premiers différents s'écrit avec neuf nombres du même type. Soit tous du type $6k - 1$, soit tous du type $6k + 1$.

Supposons qu'un des neuf nombres soit un multiple de 6 augmenté de 1 et regardons la ligne dans laquelle ce nombre se trouve. Soit $p = 6k+1$, q et r les deux autres nombres de la ligne. En utilisant le fait que s est multiple de 3, nous allons prouver qu'on ne peut avoir
– ni $q = 6i - 1$
– ni $r = 6j - 1$
Dans le premier cas, $p+q$ est un multiple de 6, donc un multiple de 3 et $s = p+q+r$ (avec r premier différent de 3) n'est pas multiple de 3. Le deuxième cas s'élimine de manière analogue.

Donc, si un des premiers est du type $6k+1$, ils le sont tous.

Vous pouvez prouver de manière analogue que si un des éléments du carré est du type $6k-1$, alors ils le sont tous.

Pour écrire un carré magique de neuf nombres premiers, nous devons donc puiser
– soit uniquement dans la ligne 2 du tableau 1
– soit uniquement dans la ligne 6 du tableau 1.

Propriété 8

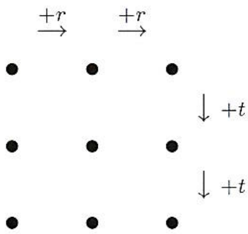
Reprenons les nombres du carré 5C. Cette fois, nous ne les disposons pas en carré magique mais de manière à mieux percevoir une structure des neuf éléments en trois familles. Nous appelons p le nombre central pour nous rappeler qu'il est premier.

$$\begin{array}{cccc} p-r-t & p-t & p+r-t & (F_1) \\ p-r & p & p+r & (F_2) \\ p-r+t & p+t & p+r+t & (F_3) \end{array}$$

Constatons une double liaison.

– Les trois familles F_1, F_2 et F_3 sont toutes en progression arithmétique et de même raison r.
– Le passage d'une famille à la suivante se fait par un même écart t.

Voici le schéma qui va nous permettre de trouver des solutions au problème initial :



Propriété 9

Les écarts r et t sont des multiples de 6.

Dans le tableau 1, l'écart entre deux nombres d'une même ligne est toujours un multiple de 6. Comme les neuf nombres recherchés dans le tableau 2 appartiennent
– soit tous à la deuxième ligne
– soit tous à la sixième ligne du tableau 1
le schéma ci-dessus montre que les nombres r et t sont des multiples de 6.

Un carré magique de nombres premiers

Nous suggérions dans l'article précédent de chercher à partir de 71 comme nombre central. En prenant $r = 6$ et $t = 12$, nous aurions le triplet 65, 71, 77 ... pas la peine de continuer ! Par contre $r = 12$ produit un triplet de nombres premiers : 59, 71 et 83. Adoptons cette famille F_2 et choisissons $q = 30$. Cela donne les triplets $F_1 = (29, 41, 53)$ et $F_3 = (89, 101, 113)$ formés exclusivement de nombres premiers.

Il reste à les placer dans un carré magique tant attendu :

59	53	101
113	71	29
41	89	83

Vous pouvez en trouver d'autres, ... nous vous en laissons tout le plaisir !

Bibliographie

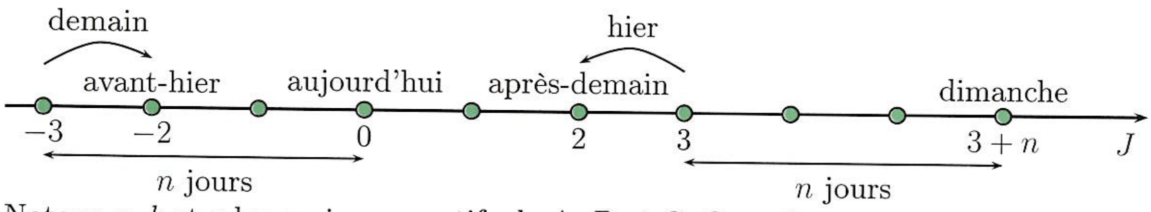
[1] A. Calame, *Carrés primo-magiques*, Math-Ecole, 155, 7–12, (1992).

Solution des énigmes du *Math-Jeunes* n°104.

1. **Dates**

   Numérotons les jours à l'aide d'une variable J et, pour fixer les idées, décidons que $J = 0$ pour le jour d'aujourd'hui.
   Alors,
   - après-demain correspond au jour $J = 2$;
   - « lorsque après-demain sera hier », nous mène au jour $J = 3$;
   - le dimanche qui suit est le jour $J = 3 + n$;
   - avant-hier correspond au jour $J = -2$;
   - « lorsqu'avant-hier était demain », nous fait remonter au jour $J = -3$.

   Comme n représente le nombre de jours qui se sont écoulés entre $J = -3$ et aujoud'hui, nous obtenons $n = 3$. Dès lors, le dimanche qui suit correspond au jour $J = 6$. En conséquence, nous sommes **lundi**.

2. Notons a, b et c les avoirs respectifs de A, B et C. On sait que

   $$a + b + c = 48€$$

   On peut résumer comme suit les différentes étapes de l'énigme :

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a' = a - b \\ b' = 2b \\ c' = c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a'' = a' \\ b'' = b' - c' \\ c'' = 2c' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a'' = 16€ \\ b'' = 16€ \\ c'' - a'' = 16€ \end{pmatrix}$$

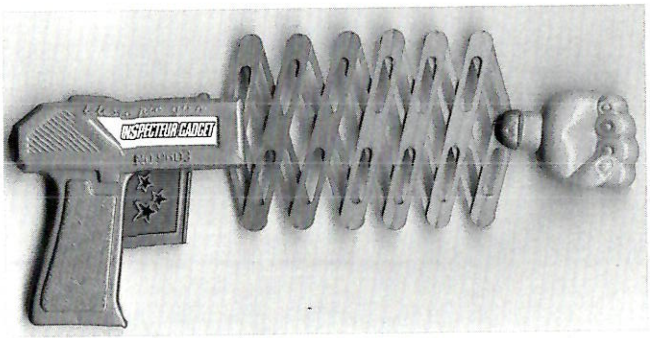
   En remontant la filière, on obtient $a = 22€$, $b = 14€$ et $c = 12€$.

La mathématique au quotidien

C. Villers

K.O… mais c'est O.K.

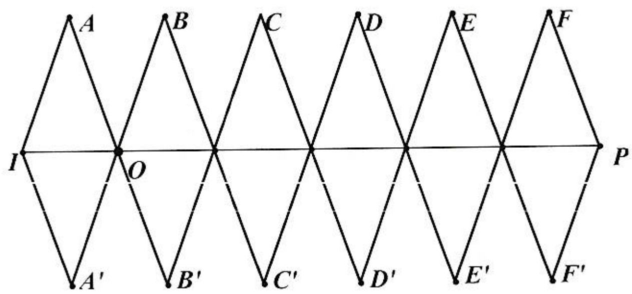
Le coup… je n'ai pas eu le temps de l'esquiver. Je l'ai reçu par surprise et juste à la pointe du menton, encore bien. Tout cela avec un grand éclat de rire chez ce jeune membre de la famille qui manipulait de façon experte l'arme infernale tenant à la fois du revolver et du coup de poing, et que vous pouvez voir illustrée ci-contre.



C'était assurément amusant pour celui qui manipulait la gâchette de ce « telescopic-gun » et il lui a été beaucoup pardonné vu son jeune âge. Mais nous pouvons aussi sortir du simple cadre de ce « jouet » amusant et essayer ensemble d'analyser son fonctionnement et d'y trouver matière à « faire des maths ».

Quand on examine diverses situations présentées par cet engin, on voit vite que la poignée révolver et le poing ne sont qu'un habillage de circonstance et que la partie intéressante est essentiellement celle composée par les losanges articulés donc déformables.

Nous pouvons donc idéaliser l'objet et en donner une représentation schématique comme celle que voici.



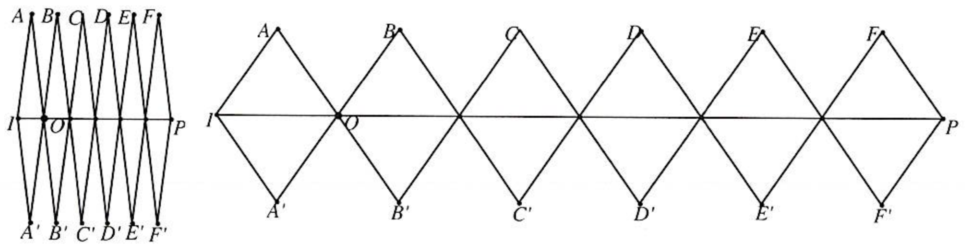
Le point I représente la gâchette.

Le point P représente le poing.

O peut être considéré comme point fixe et I et P comme mobiles sur un axe fixe.

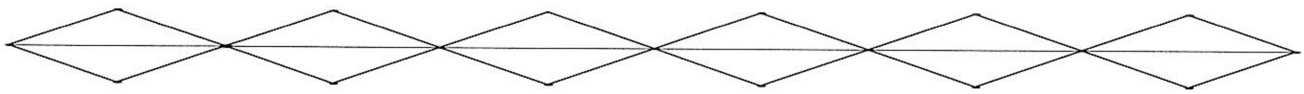
$[AB']$, $[A'B]$, $[BC']$, $[B'C]$, etc… sont des segments tous de même longueur et articulés autour de points communs situés sur $[IP]$.

Des déplacements de I entraînent automatiquement des déplacement de P. Je vous invite à représenter par dessins quelques situations de I donc aussi de P. (N.B : Cabri-géomètre peut vous aider de manière spectaculaire dans ce domaine.) Voici quelques-unes de ces représentations.



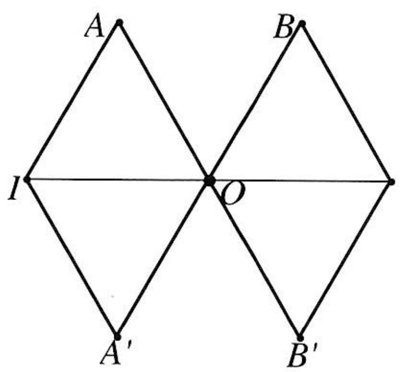
Il n'est pas difficile de se persuader de ce que, dans le cas de notre schéma, $|OP|$ vaut toujours $5|OI|$ puisque tous les losanges sont chaque fois isométriques au losange $IAOA'$. Un déplacement du point I d'une certaine longueur ℓ entraîne un déplacement de P d'une longueur 5ℓ.

Nous pouvons, pour des raisons de simplification, considérer que la longueur de chacun des côtés des losanges vaut 1 donc que $|AB'| = |A'B| = |BC'| = |B'C| = \cdots = 2$. La longueur maximum de $[OI]$ vaut donc aussi 2 et alors celle de $[OP]$ vaut 10. Pendant que $|OI|$ passe de 0 à 2, $|OP|$ passe de 0 à 10 ce qui explique l'impression de *« jaillissement » de* P.



On peut maintenant s'interroger sur ce que décrivent les autres points A, B, C, D, E et F quand I est déplacé (nous dirons de 0 à 2).

N.B. : A', B', C', D' et E' sont les symétriques de A, B, C, D et E par rapport à l'axe IP, donc leurs « trajets » seront aussi les symétriques de ceux de A, B, C, D et E par rapport à l'axe IP.



Pour A et B, c'est assez simple car ils possèdent une propriété de distance par rapport au point fixe O.

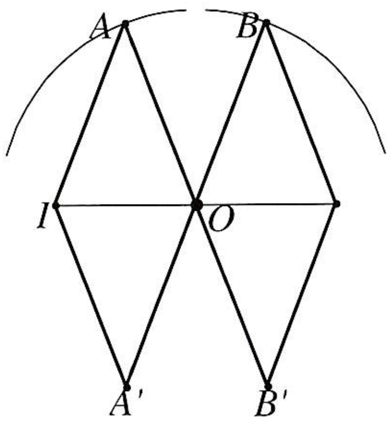
Voyez-vous quelle est cette caractéristique ?

C'est que $|OA| = |OB| = 1$ dans les transformations des losanges.

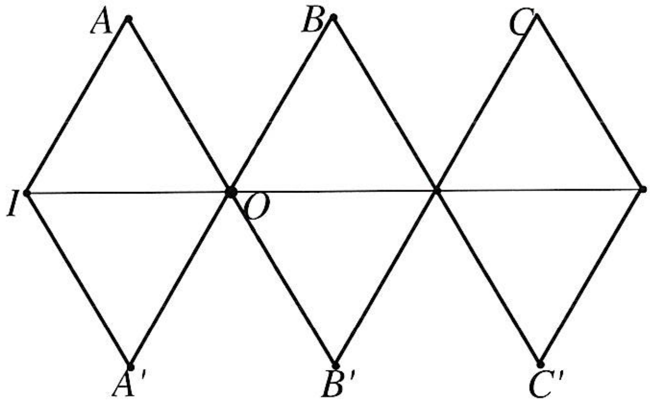
Dès lors A et B décrivent chacun un quart du cercle $C(O, 1)$

En voici une illustration ([1]) !

([1]) Les arcs de courbe dessinés par *Cabri géomètre* sont parfois incomplets (N.D.L.R.).



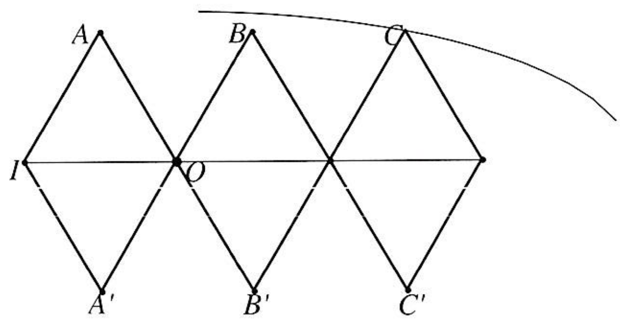
Intéressons-nous au trajet (nous dirons dorénavant « au lieu ») du point C.



Pour s'en faire une idée, il faut tracer quelques figures représentant l'évolution de la situation et, notamment, en envisageant des positions particulières de I.

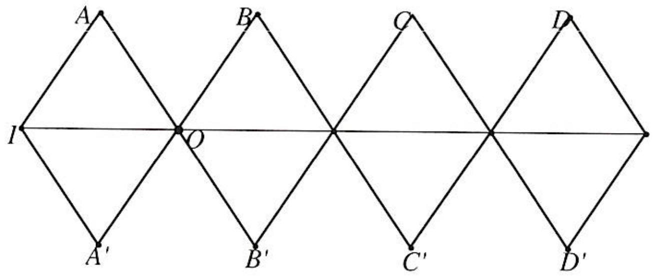
Si les losanges sont totalement « refermés » alors I coïncide avec O donc C coïncide avec B (et A) et se trouve « à la verticale » de O à distance 1. Si les losanges sont totalement « étirés » alors C se trouve sur l'axe IO à distance 3 de O. Essayez d'imaginer où peut se trouver C pour les configurations intermédiaires des losanges.

Voici une illustration du lieu de C obtenue avec Cabri-Géomètre.



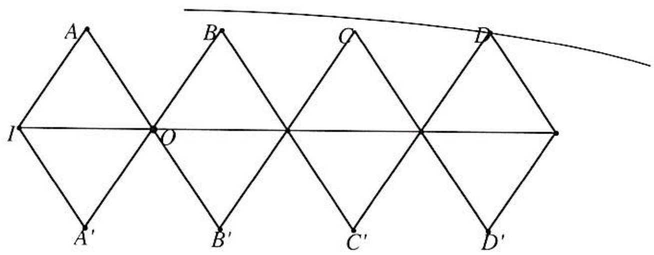
Le lieu de C est une courbe. Avec plus de connaissances mathématiques, on montre que c'est une partie d'une ellipse.

Intéressons-nous maintenant au lieu du point D. Pour s'en faire une idée, il faut également tracer quelques figures représentant l'évolution de la situation et, toujours, en envisageant des positions particulières de I.



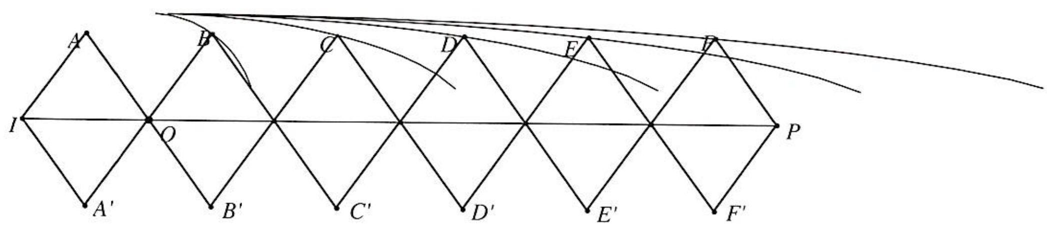
Si les losanges sont totalement « refermés » alors I coïncide aussi avec O donc D coïncide avec B (et A) et se trouve aussi « à la verticale » de O à distance 1. Si les losanges sont totalement « étirés » alors D se trouve sur l'axe IO à distance 5 cette fois, de O. Essayez d'imaginer où peut se trouver D pour les configurations intermédiaires des losanges.

Voici une illustration du lieu de D obtenue avec Cabri-Géomètre.

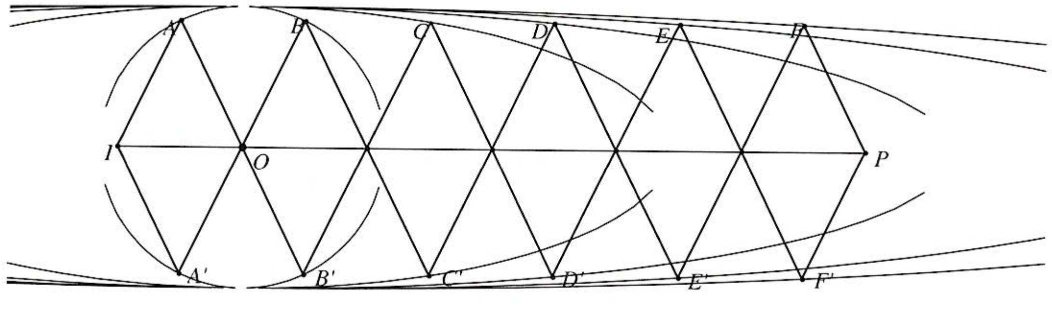


Le lieu de D est une courbe du même genre que celle du lieu de C. C'est aussi une partie d'une ellipse. Il en sera de même pour les points E et F.

Voici une illustration de tous ces lieux qui ont donc un certain lien de « parenté ».



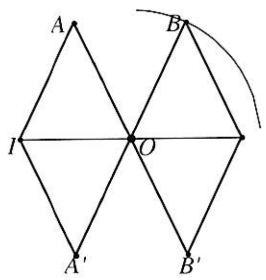
Et voici ce que cela donne en faisant apparaître les traces de A, A', B', C', D', E' et F'.



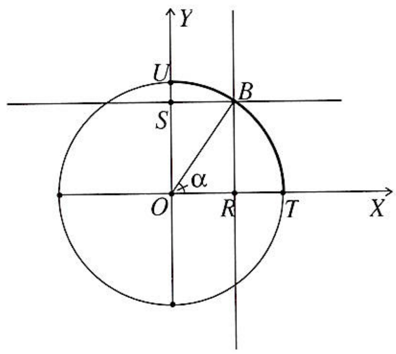
Pour ceux qui veulent en savoir plus !

À propos du lieu de B.

Reprenons une partie du tracé illustré précédemment. Le lieu est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.



Voici maintenant (à droite) une illustration plus « mathématique » de ce cercle où nous avons tracé des axes OX et OY qui vont nous permettre de repérer chaque point du plan donc chaque point du cercle par sa coordonnée (x, y).



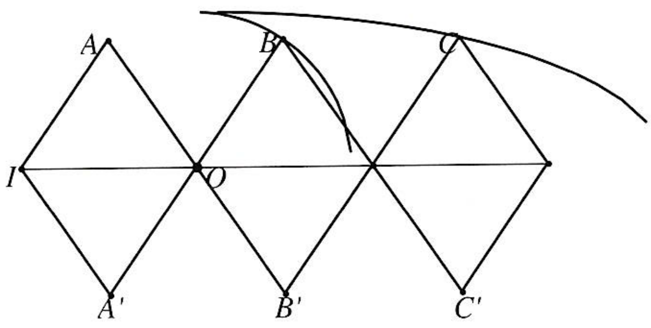
Nous savons que B de coordonnée (x, y) est caractérisé par trois faits : $x = \cos(\alpha)$, $y = \sin(\alpha)$ et « α varie entre 0° et 90° ». Ces trois contraintes simultanées s'écrivent sous la forme d'un **système**.

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha) \\ y = \sin(\alpha) \\ 0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ \end{cases}$$

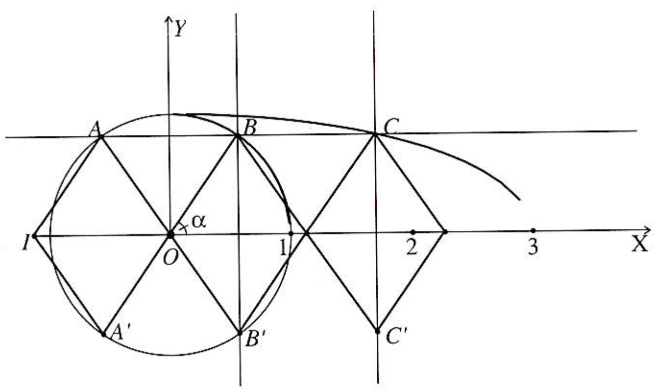
Ces trois équations définissent le quart de cercle que parcourt B. Elles dépendent de la variable α encore appelée paramètre. Ce sont des **équations paramétriques** du quart de cercle.

Et à propos du lieu de C !

La figure illustre les lieux de B et de C. Nous savons que ces lieux coupent la droite IO en des points situés respectivement à distances 1 et 3 de O.



Illustrons cette situation en y traçant les axes des abscisses et des ordonnées.



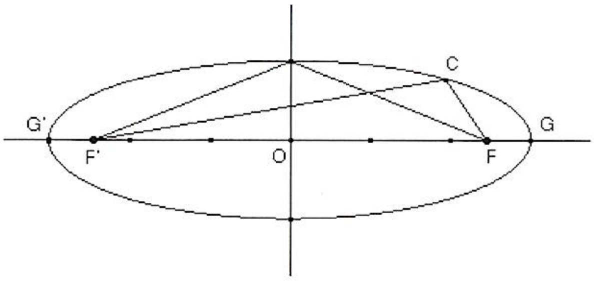
Il est immédiat que l'abscisse de C vaut trois fois celle de B et que l'ordonnée de C vaut celle de B. Rappelez-vous que les équations paramétriques de B sont : $\begin{cases} x = \cos(\alpha) \\ y = \sin(\alpha) \\ 0° \leqslant \alpha \leqslant 90° \end{cases}$.

Donc celles de C sont $\begin{cases} x = 3\cos(\alpha) \\ y = \sin(\alpha) \\ 0° \leqslant \alpha \leqslant 90° \end{cases}$.

Peut-on obtenir une équation cartésienne de l'ellipse dont une partie est parcourue par C ? Oui car les égalités précédentes donnent $\cos(\alpha) = \frac{x}{3}$ et $\sin(\alpha) = y$. Et la formule fondamentale de trigonométrie $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ fournit l'équation cherchée. C'est $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ ou encore $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Remarquons encore que 2×3 et 2×1 sont les longueurs des grand et petit axes de l'ellipse.

Peut-être avez-vous déjà entendu parler de l'ellipse et plus particulièrement de **l'ellipse du jardinier !** Elle s'obtient en cherchant tous les points du plan de travail dont la somme des distances à deux points fixes est une constante. Le jardinier la réalise en s'aidant de deux piquets plantés en terre et d'un cordeau qui les relie et qui reste tendu pendant le tracé. Ceci est illustré ci-après. Sachez que les deux définitions s'appliquent bien au même objet.



$|CF'| + |CF|$ est constante. F et F' sont appelés foyers de l'ellipse.
Mais où sont situés ces foyers de l'ellipse parcourue (en partie) par C ?

Imaginons que C soit en B. Alors $|CF'| + |CF| = |BF'| + |BF| = 2|BF|$.

Imaginons que C soit en G. Alors $|CF'| + |CF| = |GF'| + |GF| = |GO| + |OF'| + |GO| - |OF| = 2|GO|$.

Dès lors : $2|BF| = 2|GO|$ ou encore $|BF| = |GO| = 3$

Le triangle BOF est un triangle rectangle en O. Nous pouvons donc appliquer la relation de Pythagore. $|OF|^2 + |OB|^2 = |BF|^2$ d'où $|OF|^2 = |BF|^2 - |BO|^2$ ou $|OF|^2 = 3^2 - 1^2$.

Le foyer F relatif à l'ellipse de C est tel que $|OF| = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. De même, le foyer de l'ellipse de D sera tel que $|OF| = \sqrt{5^2 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Le foyer de l'ellipse de E sera tel que $|OF| = \sqrt{7^2 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Dernière remarque (et dernier effort)

Les distances $|OF|$ valent donc, dans l'ordre : $\sqrt{3^2 - 1}$, $\sqrt{5^2 - 1}$, $\sqrt{7^2 - 1}$, $\sqrt{9^2 - 1}$, $\sqrt{11^2 - 1}, \ldots$ expressions dans lesquelles 3, 5, 7, 9,... sont les distances à O des points d'intersection des ellipses avec le grand axe.

Si on applique cela au lieu de B (cercle $(O, 1)$) on obtient $|OF| = \sqrt{1^2 - 1}$ soit 0. Les foyers sont alors confondus avec O et le cercle apparaît bien comme un cas particulier d'une ellipse. Et, après tout, qu'est-ce qui peut bien empêcher un jardinier de tracer un cercle comme il trace une vraie ellipse c'est-à-dire en plantant ses deux piquets au même endroit ?

Jeux

Les mots croisés de Pierre Carré

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2				■						
3					■		■	■		
4				■						
5										
6				■						■
7		■		■				■		
8					■					
9	■			■					■	
10							■			

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2				■						
3					■		■	■		
4				■						
5										
6				■						■
7		■		■				■		
8					■					
9	■			■					■	
10							■			

Chaque lettre de cette grille est déterminée par son numéro d'ordre dans l'alphabet : A = 1, B = 2… Z = 26. Pêle-mêle, voici d'abord les définitions des mots qui composent la grille :

Qualifie certains secteurs ;
En logique, elle est toujours vraie ;
Ensemble des opérations conduisant à la solution ;
Transformer en produit ;
Objets géométriques tels que la courbe de PEANO et le flocon de VON KOCH ;
Utilisées pour exprimer que deux expressions représentent un même objet mathématique ;
Précède dix ;
Est nul lorsque la division se fait exactement ;
Mathématicien brugeois ;
π retourné ;
Moment de la quantité de mouvement d'une particule en rotation ;
Métal parfois radioactif ;
Métal précieux ;
Ensemble de lois ;
Variété de plant de vigne ;
Foyer ;
Dans l'édredon ;
Champion ;
On en prend en vieillissant ;
Se boit entre amis ;
Langue du Midi ;
Engendrée par FLAUBERT ;
Est resté trop longtemps dans l'eau ;
Lettre grecque ;
Agile ;
A pris de toutes les couleurs ;
D'un astre ;
Pronom ;
Adjectif possessif ;
Conjonction ;
Tout anglais ;
Anglais agité ;
Phonétiquement, « c'est hersé » ;
Vie agitée ;
Négation.

Math-Jeunes n° 105, 14–17, 2003

Et voici les définitions des lettres :

A1 Nombre de sommets d'un octaèdre convexe.
A2 Numéro du siècle durant lequel vécut EULER.
A3 Chiffre le plus fréquemment utilisé pour composer les entiers allant de 1 à 100.
A4 Valeur de π dans la bible.
A5 Sa moitié et son double ont pour somme 50.
A6 Ne sera jamais égal à la fraction $\frac{x}{x+1}$, quel que soit le réel x.
A7 Premier naturel ayant 6 diviseurs.
A8 Il est premier et la somme de ses chiffres vaut 10.
A10 Exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise 23!.

B1 Entier le plus proche de $\frac{\pi}{6}$.
B2 Somme des âges, dans quatre ans, de trois enfants qui ont actuellement 1, 2 et 4 ans.
B3 Ajouté à C9 et à G5 donne 53.
B4 Double du carré d'un nombre premier impair.
B5 Nombre de face(s) du ruban de MÖBIUS.
B6 Entouré de deux entiers dont la somme vaut 24.
B8 Somme des chiffres du plus grand nombre premier inférieur à 100.
B9 Au tennis, trois fois ce nombre donne 40.
B10 Nombre de pourcents de réduction lorsque le prix passe de 35 à 28 euros.

C1 Rapport du volume d'un cynidre à celui d'un cône de même base et de même hauteur.
C2 Numéro de la symphonie, célèbre pour son « Hymne à la Joie ».
C3 Somme des chiffres de l'année de naissance de Bertrand RUSSELL.
C4 Nombre d'axes de symétrie d'un triangle équilatéral.
C5 Nombre triangulaire.
C6 Nombre composé précédé de 5 nombres premiers exactement.
C7 Valeur maximale de la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$.
C8 Nombre de termes du polynôme résultant du développement de $(x+1)^8$.
C9 Ajouté à G5 donne 33.
C10 Nombre de chiffres de 2^{16}.

D1 Nombre de siècles écoulés depuis la naissance du Christ.
D3 Reste de la division de 509182736 par 9.
D5 Nombre de longueurs à effectuer dans un bassin de 50 m pour nager 1 km.
D8 Nombre de faces d'un prisme droit à base dodecagonale.
D10 Sert à prévenir lorsque la police approche.

E1 Waterloo moins 1800.
E2 Ordonnée à l'origine de la droite d'équation $x + 2y - 6 = 0$.
E4 Nombre de directions différentes déterminées par les arêtes d'un cube.
E5 Soixante-... en France vaut septante-cinq en Belgique.
E6 ... à ... on dévale les escaliers.
E7 Nombre de provinces francophones en Belgique.
E9 Valeur du neuf d'atout à la belote.
E10 Vérifie le système d'inéquations $67 \leqslant x^2 \leqslant 93$.

F1 Élément central d'un carré magique d'ordre 3 dont la somme de tous les éléments vaut 162.
F2 Nombre de cartes dans une quinte.
F3 Égal à $|x+y|$ si $x^2 + y^2 = 205$ et $xy = 78$.
F4 Égal à n si $4^n = (2^2 \cdot 2^3)^6$.
F5 Somme des termes de la fraction irréductible égale à $\frac{70}{98}$.
F6 Mesure (en cm) de la longueur d'une feuille de papier de format A5.
F7 Nombre de consonnes de notre alphabet.
F8 Carré impair.
F9 S'écrit F en base 16.
F10 Numéro du Roi Soleil.

G1 Reste de la division de 2003^2 par 10.
G2 Numéro du cabinet du premier ministre belge à la rue de la Loi.
G4 Écart entre deux nombres premiers jumeaux.
G5 Ajouté à B3 donne 35.
G6 Égal à $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$.
G7 Nombre de diviseurs premiers communs à 18 et à 27.
G8 Longueur de la période dans l'écriture décimale du rationnel $\frac{17}{19}$.
G9 Égal à la partie entière de $\frac{100! + 99!}{4 \times 99!}$.

H1 Égal à un multiple de 4, plus 3, mais aussi à un multiple de 3, plus 4.
H2 Seul naturel non nul qui n'est ni premier, ni composé.

H4 Numéro de l'Ain.
H5 Nombre de fois qu'il faut tourner sa langue dans sa bouche avant de parler.
H6 Abscisse du point d'ordonnée 3 de la droite d'équation $y = 13 - 2x$.
H8 Solution de $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$.
H9 Nombre de solutions réelles de l'équation $x^3(x^2 - 1) = 4x(x^2 - 1)$.
H10 Son carré est inférieur à 500, mais son cube est supérieur à 10 000.

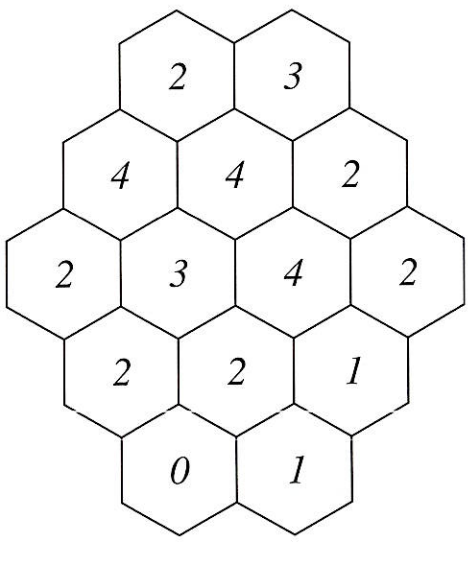
I1 Le plus grand diviseur premier de 100^3.
I2 Nombre de merveilles dans le monde antique.
I3 Nombre de degrés Celsius correspondant à une température de $33,8°$ F.
I4 Nombre de diagonales d'un hexagone convexe.
I5 Égal à $|3 \cdot |5 - 6| - 6 \cdot |3 - 5||$.
I6 Valeur du valet d'atout à la belote.
I7 Valeur numérique du polynôme $x^3 - 3x + 7$ pour $x = -2$.
I8 Le... est le troisième lundi du mois lorsque le premier est un jeudi.
I10 Solution de l'équation $\sqrt{x - 1} = 2\sqrt{2}$.

J1 Troisième élément d'un triplet pythagoricien dont les deux autres sont 80 et 82.
J2 La somme de son carré et de son cube vaut 150.
J3 Égal à $f(10)$ si $f(2x) = x^2 - x$.
J4 Reste de la division du polynôme $x^4 - 5x^2 - 3x - 1$ par le binôme $x - 3$.
J5 Nombre de provinces néerlandophones en Belgique.
J7 Numéro du siècle que les Italiens dénomment « trecento ».
J8 Nombre minimum de triangles en lesquels un heptagone convexe peut être décomposé.
J9 Somme des points des faces d'un dé cubique.
J10 Premier naturel ayant deux diviseurs premiers différents.

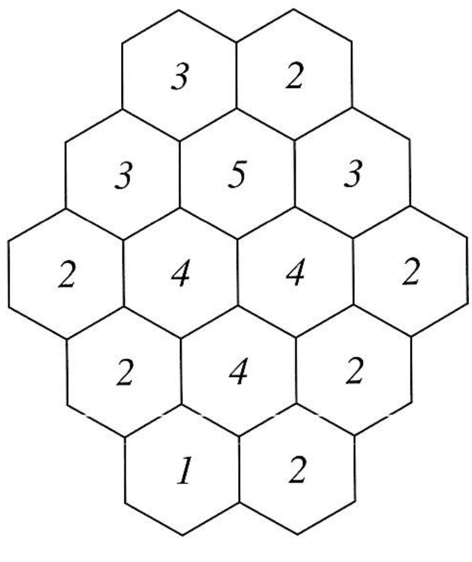
Le jeu des hexagones

Coloriez certains des hexagones des figures suivantes de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : **tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !**

Jeu facile



Jeu difficile



Chacun des symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représente un entier compris entre 1 et 10. À droite et sous la grille sont indiquées les produits par ligne et par colonne. Retrouvez la valeur de chacun des symboles.

Grille facile

♦	♥	♣	♥	♥	20
♦	♣	♠	♥	♣	800
♠	♣	♠	♠	♦	10240
♣	♥	♠	♠	♥	320
♣	♦	♥	♦	♦	320
3200	100	2560	256	80	

Grille difficile

♦	♠	♥	♠	♦	1296
♥	♦	♠	♥	♣	216
♣	♥	♣	♦	♥	144
♥	♣	♠	♦	♦	864
♠	♠	♦	♠	♠	26244
216	1944	1944	1296	864	

$27x-12$		
	$10x$	
$4x+2$		$12-7x$

$1-2x$		1
	$x+2$	

Comme d'habitude, ces carrés seront magiques si les huit sommes obtenues (trois horizontalement, trois verticalement et deux en diagonale) sont égales. Les deux carrés magiques n'ont pas nécessairement la même somme !

Solutions des jeux : verso de la couverture arrière.

Dis Monsieur, calcule-moi un sinus ! (2)

G. Noël

— La fois précédente ([1]), nous en sommes restés au fait qu'un ordinateur n'avait pas en mémoire une table de valeurs des fonctions trigonométriques, mais qu'il recalcule ces valeurs chaque fois qu'il en a besoin.

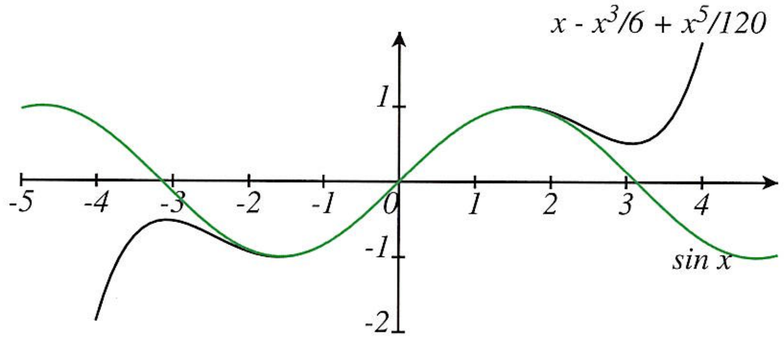
Mon grand frère — qui est en première candidature « ingénieur » — me dit qu'une certaine formule « de Taylor-Mac Laurin » permet de calculer un polynôme, ou même plusieurs polynômes, dont les valeurs seraient des approximations acceptables pour celles de $\sin x$. Par exemple, $\sin x$ pourrait être approché valablement par $x - \frac{x^3}{6}$ ou $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, ou encore $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$. Plus le degré est élevé, meilleure serait l'approximation. Le polynôme général serait

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où, le symbole $(2n+1)!$ désigne le produit

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$$

— Ton grand frère a à la fois tort et raison. Pour comprendre ce que je veux dire, regarde, sur une même figure, le graphique de la fonction $\sin x$ et celui du polynôme $p(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$:



Qu'en penses-tu ?

— Cela a l'air bon quand x est proche de 0, mais évidemment lorsque x est plus grand que 2 ou plus petit que -2, l'approximation n'est vraiment pas bonne.

— Tu as parfaitement raison : nous dirons que l'approximation est bonne au voisinage de zéro. L'ennui, c'est que les ordinateurs ne peuvent pas se permettre de ne donner une bonne approximation que pour x proche de zéro. Ils doivent fournir une approximation aussi bonne lorsque x est plus grand.

— Je comprends, mais ne peut-on procéder comme nous l'avons déjà fait : il suffit d'avoir une bonne approximation des valeurs de $\sin x$ pour x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. À partir de celles-là, on peut calculer facilement les approximations des autres valeurs de la fonction. Or, entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le graphique du polynôme et celui de la fonction sinus se superposent remarquablement !

([1]) Voir *Math-Jeunes* n°103.

— À première vue, tu as encore raison. Mais on ne peut se limiter à un graphique, il faudrait préciser ce que l'on entend par une « bonne approximation ». Pour voir plus clair, voici une table comparative des valeurs numériques de la fonction $\sin x$ et de celles du polynôme $p(x)$. Que penses-tu de ces approximations ?

x	$\sin x$	$p(x)$
0	0	0
0,1	0,09983342	0,09983342
0,2	0,19866933	0,19866933
0,3	0,29552021	0,29552025
0,4	0,3894183	0,3894187
0,5	0,4794255	0,4794271
0,6	0,5646425	0,564648
0,7	0,6442177	0,6442339
0,8	0,7173561	0,7173973
0,9	0,7833269	0,7834208
1	0,841471	0,8416667
1,1	0,8912074	0,8915876
1,2	0,9320391	0,932736
1,3	0,9635582	0,9647744
1,4	0,9854497	0,9874853
1,5	0,997495	1,0007813
1,6	0,9995736	1,0047147

— Quelque chose me gêne : pour $x < 0,3$, les valeurs fournies par le polynôme $p(x)$ sont identiques à celles de la fonction $\sin x$: les huit premières décimales de $p(x)$ sont les mêmes que celles de $\sin x$...

— Disons que les valeurs sont quasi-identiques, car à partir de la neuvième décimale, nous ignorons s'il y a encore coïncidence !

— D'accord, mais ce qui cloche, c'est que plus x s'écarte de 0, plus le nombre de décimales identiques diminue, au point que pour $x = 1,4$, il n'en reste que deux et que pour $x = 1,5$ ou 1,6, il n'y en a plus du tout. De plus, les valeurs figurant aux deux dernières lignes de la colonne de titre « $p(x)$ » ne peuvent être des sinus puisqu'elles sont supérieures à 1.

— Bref, nous constatons que la précision de l'approximation de $\sin x$ par $p(x)$ passe du très bon au très mauvais lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Clairement, les calculs informatisés ne seraient pas très fiables si les ordinateurs nous fournissaient des approximations d'une précision aussi variable !

— Puisque nous pouvons utiliser le polynôme $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ avec n aussi grand qu'on veut, je suppose que pour améliorer la situation, il suffira de choisir n plus grand.

— Effectivement, nous pourrions utiliser le polynôme $q(x)$ de degré 11 :

$$\begin{aligned} q(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} \\ &\simeq x - 1,66666666 \times 10^{-1}x^3 + 8,33333333 \times 10^{-3}x^5 - 1,984126984 \times 10^{-4}x^7 \\ &\quad +2,755731922 \times 10^{-6}x^9 - 2.505210839 \times 10^{-8}x^{11}. \end{aligned}$$

Nous constaterions alors que jusqu'à $x = 1,6$, les huit premières décimales des valeurs de $q(x)$ coïncident avec celles de $\sin x$. Mais quel que soit le degré utilisé, le défaut constaté précédemment sera toujours présent : la précision des calculs n'est pas la même pour toutes les valeurs de x. Cela provient de ce que le polynôme donné par la formule de Taylor-Mac Laurin est une approximation *locale*, au voisinage de 0 : sa précision décroît lorsque x s'écarte de 0.

Ce que nous voulons c'est une approximation *uniforme* : l'erreur commise en remplaçant $\sin x$ par une valeur approchée ne peut varier fortement. On peut alors utiliser des polynômes d'approximation d'un autre type que celui rencontré par ton grand frère. Cela met en branle des théories mathématiques plus élaborées dont il n'est pas possible de parler ici. (2)

— Est-il au moins possible d'avoir un exemple ?

(2) Il s'agit de ce qu'on appelle un développement en polynômes de Tchebychev.

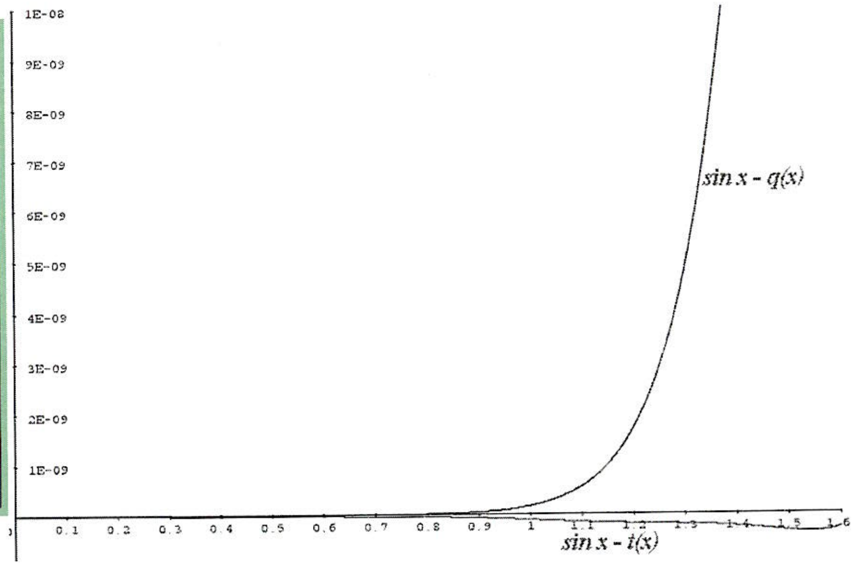
— Bien sûr ! Voici le polynôme qui était incorporé dans l'interpréteur `BASIC` utilisé par l'`APPLE II` (l'ancêtre du `Mac Intosh`) :

$$\begin{aligned} t(x) \;=\; & x - 1,66666666 \times 10^{-1}x^3 + 8,33333072 \times 10^{-3}x^5 - 1,98408328 \times 10^{-4}x^7 \\ & + 2,75239711 \times 10^{-6}x^9 - 2,38683464 \times 10^{-8}x^{11} \end{aligned}$$

— Les coefficients des polynômes $t(x)$ et $q(x)$ n'ont pas l'air très différents !

— C'est vrai. Aussi, pour faire apparaître la différence entre les deux types d'approximation, nous allons dessiner sur un même graphique les deux fonctions d'erreur : $\sin x - q(x)$ et $\sin x - t(x)$. Nous dressons également la table des valeurs de ces deux fonctions (rappelons que la notation « scientifique » $6.776264\,E - 21$ désigne le nombre $6,776264 \times 10^{-21}$).

x	$\sin x - q(x)$	$\sin x - t(x)$
0	0	0
0.1	$6.776264E-21$	$-6.4096700E-13$
0.1	$6.776264E-21$	$-6.4096700E-13$
0.2	$1.3552527E-19$	$-4.5513250E-12$
0.3	$2.5532961E-17$	$-1.2541842E-11$
0.4	$1.0769109E-15$	$-2.2240990E-11$
0.5	$1.9580041E-14$	$-2.9855639E-11$
0.6	$2.0938318E-13$	$-3.3608830E-11$
0.7	$1.5523208E-12$	$-3.6648820E-11$
0.8	$8.8017100E-12$	$-4.6829970E-11$
0.9	$4.0662950E-11$	$-7.2047100E-11$
1	$1.5982853E-10$	$-1.1286709E-10$
1.1	$5.5122150E-10$	$-1.5810823E-10$
1.2	$1.7064887E-09$	$-1.9123173E-10$
1.3	$4.8249840E-09$	$-2.1114803E-10$
1.4	$1.2628187E-08$	$-2.5256196E-10$
1.5	$3.0921919E-08$	$-3.4680920E-10$
1.6	$7.1450080E-08$	$-2.7821874E-10$



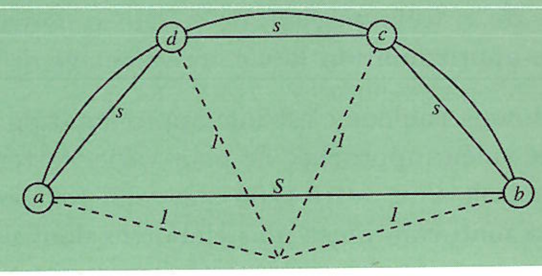
— Maintenant, c'est clair : on voit bien sur le tableau que le polynôme $q(x)$ approche beaucoup mieux la fonction $\sin x$ au voisinage de 0 que ne le fait le polynôme $t(x)$. Mais le tableau et le graphique montrent tous deux que, globalement, c'est $t(x)$ qui approche le mieux $\sin x$.

— Existe-t-il encore d'autres méthodes de calcul des fonctions trigonométriques ?

— Bien sûr ! Nous pourrions par exemple parler des algorithmes « CORDIC », mais pour l'instant, contentons-nous d'un algorithme très simple pour le calcul de $\sin x$:

1. Choisir un nombre d'itérations N
2. Calculer $s_0 = \frac{2x}{3^N}$
3. Calculer la suite $s_1 \ldots s_N$ définie par $s_k = s_{k-1}(3 - s_{k-1}^2)$
4. Alors $\sin x \simeq \frac{1}{2} s_N$.

Essaye de justifier cet algorithme en te basant sur le résultat suivant :
***Si** $abcd$ **est un trapèze isocèle, inscrit à un cercle de rayon 1 et tel que** $|ad| = |dc| = |cb| = s$ **et si** $|ab| = S$, **alors** $S = 3s - s^3$*



Peux-tu inventer un algorithme analogue qui utiliserait la formule $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$?

L'équation du troisième degré (3)

C. Van Hooste

Résumons d'abord ce qui a été dit dans le numéro précédent à propos de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

La recherche des solutions passe par la résolution des équations résolvantes

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}, \qquad (2)$$

où

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Lorsque $D > 0$, ces équations résolvantes permettent de trouver la solution réelle

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

De plus, nous savons que l'équation (1) admet

- une seule solution réelle si $D > 0$;
- deux solutions réelles dont une double si $D = 0$ et $p < 0$;
- trois solutions réelles distinctes si $D < 0$.

Pour ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas où $D \leqslant 0$ et nous écartons d'emblée l'équation triviale $x^3 = 0$ qui admet 0 pour solution triple.

La méthode développée pour résoudre l'équation (1) lorsque $D > 0$ est exploitable pour $D \leqslant 0$ à condition de ne pas rester confiné à l'ensemble des nombres réels.

Pour le montrer, rappelons que, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, une équation du troisième degré a toujours trois solutions (distinctes ou non). Entre autres, l'équation

$$z^3 = Z \quad (\text{avec } Z \in \mathbb{C})$$

admet pour solutions les nombres [1]

$$z_k = \sqrt[3]{r} \ \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{3} \ (\text{avec } k = 0, 1, 2)$$

où r et α sont respectivement le module et l'argument de Z.

De plus, lorsque $D < 0$, l'expression $\sqrt{D}$ ne représente plus un nombre réel. Mais, les équations résolvantes (2) s'écrivent alors

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}$$

Ainsi, ces équations ont chacune trois solutions complexes :

$$u_k = \sqrt[3]{r} \ \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{3} \ \text{et } v_k = \sqrt[3]{r} \ \operatorname{cis} \frac{-\alpha + 2k\pi}{3}$$

(avec $k = 0, 1, 2$). r et α sont respectivement le module et l'argument de

$$Z = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}. \qquad (3)$$

Est-ce à dire que l'équation (1) admettrait $3 \times 3 = 9$ solutions :

$$u_0 + v_0, \ u_0 + v_1, \ \ldots, u_2 + v_2 \ ?$$

Non, bien entendu ! Il faut en effet tenir compte que les solutions doivent être réelles. Dès lors, celles-ci sont nécessairement

$$\begin{aligned}
x_0 &= u_0 + v_0 = \sqrt[3]{r}\left(\operatorname{cis}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{cis}\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\alpha}{3} \\
x_1 &= u_1 + v_2 = \sqrt[3]{r}\left(\operatorname{cis}\frac{\alpha + 2\pi}{3} + \operatorname{cis}\left(\frac{-\alpha + 4\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\alpha + 2\pi}{3} \\
x_2 &= u_2 + v_1 = \sqrt[3]{r}\left(\operatorname{cis}\frac{\alpha + 4\pi}{3} + \operatorname{cis}\left(\frac{-\alpha + 2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3}
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $D = 0$, les solutions de l'équation (1) sont

$$x_0 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad (\text{solution simple}),$$

[1] Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'écriture $\operatorname{cis}\theta$ condense l'expression $\cos\theta + i\sin\theta$.

$$x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{(solution double).}$$

Exemples

- Soit à résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$. Nous avons $D = 0$. Les solutions de l'équation sont

$$x_0 = -2\sqrt[3]{1} = -2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = \sqrt[3]{1} = 1.$$

- Soit à résoudre l'équation $x^3 - 6x + 2 = 0$. Nous avons $D = -7$. Le nombre complexe, défini en (3), $Z = -1 + i\sqrt{7}$ a pour module $r = \sqrt{8}$ et pour argument $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

Les solutions de l'équation sont donc

$$x_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{3} \approx 2,262,$$

$$x_1 = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha + 2\pi}{3} \approx -2,602$$

et

$$x_2 = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3} \approx 0,340.$$

Fabuleux, ces nombres complexes ! Ils nous sortent du cadre des nombres réels pour mieux nous y ramener.

L'histoire des nombres complexes

S. Trompler

Lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ est négatif, la résolution de l'équation du troisième degré est bloquée. Ce cas était appelé « cas irréductible ». L'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif fut l'objet de vives discussions entre les mathématiciens du 16e siècle. Les nombres négatifs eux-mêmes étaient encore acceptés de mauvaise grâce. On les appelait nombres « faux » ou « fictifs ». Nous pouvons imaginer dès lors leur malaise à l'idée d'en extraire la racine carrée, puisque la règle des signes, bien connue, montrait que le produit d'un nombre négatif par un nombre négatif était positif !

Girolamo Cardano ou Jérôme Cardan (1501-1576), médecin et mathématicien italien, dans son œuvre *Ars Magna*, se risqua pourtant à travailler avec ces nombres, car dans certains cas, des opérations sur eux aboutissaient à des nombres « propres » : en étudiant les systèmes

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 16 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 20 \end{cases}$$

il donna comme solution $3 + \sqrt{-7}$, $3 - \sqrt{-7}$ et $3 + \sqrt{-11}$, $3 - \sqrt{-11}$.

Mais il ajouta la remarque : « la racine de (-9) n'est pas $(+3)$ ni (-3), mais une certaine troisième nature cachée ».

C'est Raffaele Bombelli (1526-1572), célèbre mathématicien, italien lui aussi, qui franchit le cap dans son *Algebra* : devant le cas irréductible, où $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ est négatif, il explique que sa racine « *ne peut s'appeler ni plus ni moins mais je l'appellerai plus de moins quand il faut l'ajouter et moins de moins quand il faut la soustraire.* »

C'est pour lui un nombre d'une espèce nouvelle qu'il écrit en abrégé « p.de m » et « m.de m ». Il énonce les règles de multiplication :

d'abord, je traiterai de la multiplication, en posant la règle des plus et moins :

plus fois plus de moins fait plus de moins ;

moins fois plus de moins fait moins de moins

plus fois moins de moins fait moins de moins

moins fois moins de moins fait plus de moins.

plus de moins fois plus de moins fait moins

plus de moins fois moins de moins fait plus

moins de moins fois plus de moins fait plus

moins de moins fois moins de moins fait moins

Il définit ensuite la somme :

«*plus de moins avec plus de moins s'additionne et fait plus de moins ; mais plus avec* *plus de moins ne peut s'additionner, plus soustrait de plus de moins ne peut se faire, etc »*

Bombelli applique ses règles et travaille avec ces nouveaux « nombres », Il trouve ainsi que les équations du deuxième degré ont toujours deux solutions, distinctes ou confondues.

Bombelli semble donc bien le fondateur des nombres que nous appelons complexes. Après lui, pendant un siècle, son œuvre fut étudiée et méditée par les mathématiciens et à tous la théorie de ces nombres parut extravagante. Cardan, qui fut parmi les premiers à la connaître, se demandait quelles grandeurs seraient représentées par ces nombres. Comme le malaise persistait, les mathématiciens utilisèrent une autre méthode pour résoudre l'équation du troisième degré dans le cas irréductible.

Albert GIRARD (1595-1632) mathématicien français qui vécut aux Pays-Bas, comme réfugié religieux, considéra cependant les racines carrées de nombres négatifs, les appelant « racines indicibles ». Il adopta pour elles le signe commun $\sqrt{-}$. C'est lui qui énonça pour la première fois le Théorème Fondamental de l'Algèbre, sur le nombre de solutions d'une équation ; parmi celles-ci, il appela « solutions enveloppées » celles qui impliquent une racine de nombre négatif.

René DESCARTES (1596-1650), mathématicien et philosophe que vous connaissez bien, lui aussi, dans sa Géométrie, énonce ce théorème : « *Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires* ». C'est la première fois que le terme imaginaire apparaît, en opposition au terme réel.

Leonhard EULER (1707-1783), célèbre mathématicien suisse, auteur d'une œuvre très étendue, introduit en 1777 le signe i pour $\sqrt{-1}$. Désormais, les nombres imaginaires s'écrivent $a + bi$.

Abraham DE MOIVRE (1667-1754), mathématicien français protestant, émigré en Angleterre écrit sa célèbre formule, qui complète les opérations sur les nombres imaginaires. Mais ceux-ci restaient des signes, avec un ensemble d'algorithmes, on ne savait toujours pas par quelles grandeurs les représenter, ce qui paraissait indispensable à tous les mathématiciens. Pour arriver à une représentation géométrique des nombres imaginaires, il aurait fallu passer de la considération d'un ordre à une dimension (cas des nombres réels) à celle d'un ordre à deux dimensions.

Caspar WESSEL (1745-1818), géomètre expert, mathématicien amateur, fut le premier à publier cette représentation en 1797, mais son œuvre resta inconnue pendant 100 ans.

Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) mathématicien allemand, un des plus célèbres de son époque, publia aussi cette interprétation géométrique, en 1799. C'est lui qui employa la dénomination de nombre complexe, (1811) utilisée depuis.

Jean Robert ARGAND (1768-1822), comptable français, mathématicien amateur, publia à son tour un mémoire sur la même question. un peu plus tard, en 1806, mais son nom ne figurait même pas sur la publication.

Ces trois mathématiciens ont eu l'idée de ce « plan complexe » pendant plusieurs années avant de la publier. Il est difficile, dès lors de trouver la priorité de l'un sur l'autre. Nous avons l'habitude de parler du plan de Gauss, d'autres parlent du diagramme d'Argand, et certains encore du diagramme d'Argand-Wessel !

Une étape importante avait été franchie en 1748 par Euler dans son *Introductio in analysin infinitorum*, dans lequel il donne la formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ avec, comme cas particulier : $e^{2i\pi} = 1$.

Cette relation unit les trois nombres les plus étranges des mathématiques et donne comme résultat le plus simple ! N'est-ce pas merveilleux ?

C. Festraets

Vous avez sûrement participé à l'éliminatoire et peut-être à la demi-finale de l'Olympiade Mathématique Belge. C'est un grand jeu qui vous intéresse et vous amuse. Pour prolonger cet intérêt et vous exercer en prévision de votre prochaine participation, voici quelques-unes des questions posées à l'éliminatoire 2003. Essayez de les résoudre sans regarder la solution.

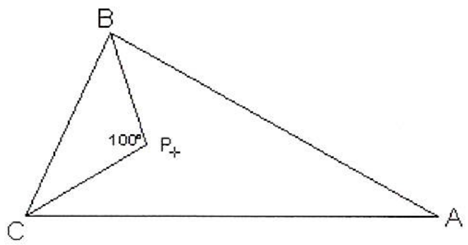
Les grilles des réponses de toutes les questions de l'élliminatoire se trouvent à la page 32.

Midi 13

Dans un triangle ABC, les bissectrices intérieures issues des sommets B et C forment un angle de $100°$. Que vaut l'angle de sommet A de ce triangle ?

(A) 15° **(B)** 20° **(C)** 25° **(D)** 30° **(E)** 40°

Solution



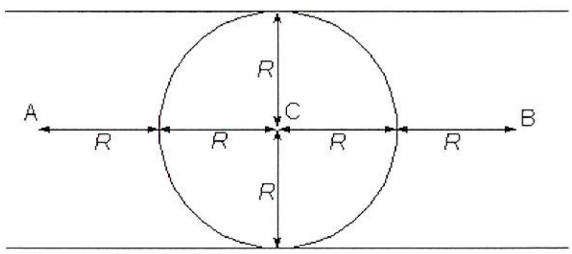
Dans le triangle BPC, la somme des angles vaut $180°$: $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + 100° = 180°$; d'où $B + C = 2 \times 80° = 160°$ et $A = 180° - B - C = 180° - 160° = 20°$. La réponse est **B**.

Midi 15 – *Sans réponse préformulée*

Combien y a-t-il de points équidistants d'un cercle et de deux droites parallèles, tangentes à ce cercle ?

Solution

Soit R le rayon du cercle. La distance entre les deux tangentes parallèles est alors $2R$ et tout point équidistant à la fois du cercle et des deux tangentes se trouve donc à une distance R de chacune de ces trois lignes. La figure ci-dessous montre qu'il n'y a que trois positions possibles en A, B ou C.



La réponse est donc 3.

Midi 17 et maxi 5

Le tableau ci-dessous comporte 2003 lignes, composées uniquement avec les nombres 2 et -2. Chaque ligne comporte un élément de plus que la précédente, commence par 2, puis alterne les 2 et -2.

2
2 -2
2 -2 2
2 -2 2 -2
2 -2 2 -2 2
... ...

Quelle est la somme des nombres qui remplissent le tableau ?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 2002 **(D)** 2004 **(E)** 4004

Math-Jeunes n°105, 24–27, 2003

Solution

Dans chaque ligne de rang pair, il y a autant de 2 que de -2, la somme des éléments de toutes les lignes de rang pair est donc 0.

Dans chaque ligne de rang impair, le nombre de 2 est égal à 1 plus le nombre de -2, la somme des éléments d'une ligne de rang impair est 2 et la somme des éléments de toutes les lignes de rang impair est 2 fois le nombre de ces lignes.

Combien y a-t-il de lignes de rang impair ? Ce sont les lignes 1, 3, 5, ..., 2003, il y en a 1002.

La somme des éléments de toutes les lignes de rang impair vaut donc $2 \times 1002 = 2004$ et c'est aussi la somme de tous les nombres du tableau. La réponse est **D**.

Midi 18

Partant de la fraction $\frac{1}{x}$, on exécute trois fois de suite la substitution qui consiste à remplacer x par $1 + \frac{1}{x}$. Quelle fraction obtient-on finalement ?

(A) $\frac{2x+1}{3x+2}$ **(B)** $\frac{2x+1}{3x+4}$ **(C)** $\frac{5}{3x+4}$ **(D)** $\frac{5x+1}{x+1}$ **(E)** $\frac{5}{x}$

Solution

1^er^ remplacement : $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$

2^e^ remplacement : $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \frac{x+1}{2x+1}$

3^e^ remplacement : $\frac{1+\frac{1}{x}+1}{2(1+\frac{1}{x})+1} = \frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{3x+2}{x}} = \frac{2x+1}{3x+2}$

La réponse est **A**.

Midi 24 – *Sans réponse préformulée*

Dans un triangle acutangle (triangle dont tous les angles sont aigus), le plus petit des trois angles vaut le sixième du plus grand ; de plus, la mesure en degrés de chacun des angles du triangle est un nombre entier. Quelle est la mesure (en degrés) de la somme des deux plus grands de ces angles ?

Solution

Désignons par x le plus petit des trois angles, le plus grand est alors $6x$ et le troisième angle vaut $180° - 7x$.

On a : $x < 180° - 7x < 6x < 90°$.

L'inégalité $180° - 7x < 6x$ est équivalente à $13x > 180°$, d'où $x > 13°, 84\dots$ et comme la mesure de x est un nombre entier, la plus petite valeur possible pour x est $14°$.

De l'inégalité $6x < 90°$, on tire $x < 15°$.

La seule valeur possible pour x est donc $14°$ et la somme des deux autres angles est $166°$. La réponse est donc 166.

Midi 28

Combien y a-t-il de couples d'entiers (a, b) tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{12}$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 11 **(E)** 13

Solution

On sait déjà que a et b sont des entiers positifs inférieurs ou égaux à 12 et qu'ils ne peuvent être simultanément carrés parfaits car sinon $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est un entier et n'est pas égal à $\sqrt{12}$. Elevons au carré l'égalité donnée.

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= \sqrt{12} \Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} = 12 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} = 6 - \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

De cette nouvelle égalité, on peut déduire que $a+b$ doit être pair (la racine carrée d'un entier ne peut être la moitié d'un entier impair) et que ab doit être un carré parfait strictement inférieur à 36. Les valeurs possibles pour ab sont donc 0, 1, 4, 9, 16 et 25.

Si $ab = 0$, alors $(a, b) = (0, 12)$ ou $(a, b) = (12, 0)$.

Si $ab = 1$, alors a et b valent 1 et sont carrés parfaits, ce qui ne convient pas.

Si $ab = 4$, alors $(a, b) = (2, 2)$, ou $(a, b) = (4, 1)$ ou $(a, b) = (1, 4)$; les deux dernières valeurs sont à rejeter car a et b sont carrés parfaits, la première aussi car $\sqrt{4} \neq 6 - \frac{2+2}{2} = 4$.

Si $ab = 9$, alors $(a, b) = (1, 9)$ ou $(a, b) = (9, 1)$ ou $(a, b) = (3, 3)$; les deux premières valeurs sont à rejeter car a et b sont carrés parfaits ; la troisième valeur convient : $\sqrt{3.3} = 3 = 6 - \frac{3+3}{2}$.

Si $ab = 16$, alors $(a, b) = (1, 16)$ ou $(a, b) = (16, 1)$ ou $(a, b) = (4, 4)$ ou $(a, b) = (2, 8)$ ou $(a, b) = (8, 2)$; les trois premières valeurs sont à rejeter car a et b sont carrés parfaits ; les deux dernières ne conviennent pas non plus car $\sqrt{2.8} = 4 \neq 6 - \dfrac{2+8}{2} = 1$.

Si $ab = 25$, alors $(a,b) = (1,25)$ ou $(a,b) = (25,1)$ ou $(a,b) = (5,5)$; les deux premières valeurs sont à rejeter car a et b sont carrés parfaits ; la troisième ne convient pas non plus car $\sqrt{5.5} = 5 \neq 6 - \dfrac{5+5}{2} = 1$.

Il y a donc trois couples satisfaisant l'égalité donnée : $(0,12)$, $(12,0)$ et $(3,3)$. La reponse est **C**.

Midi 30 et maxi 10 – *Sans réponse préformulée*

Quel est le nombre entier N à trois chiffres différents, si la somme de tous les nombres à deux chiffres formés avec deux chiffres distincts de N vaut le double de N ?

Solution

Posons $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Les nombres formés avec deux chiffres distincts de N sont $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{ba} = 10b + a$, $\overline{ac} = 10a + c$, $\overline{ca} = 10c + a$, $\overline{bc} = 10b + c$ et $\overline{cb} = 10c + b$. Leur somme est égale à $22a + 22b + 22c$ et vaut $2N$, on a donc l'égalité :

$11a + 11b + 11c = 100a + 10b + c$

D'où $89a - b - 10c = 0$.

Mais a, b et c sont des chiffres, les seules valeurs qui vérifient l'égalité précédente sont $a = 1$, $b = 9$ et $c = 8$. Le nombre cherché est 198.

Maxi 6

Si $-2 < x < 6$ et $-4 < y < -2$, alors $x^2 - y^2$ est strictement compris entre

(A) 12 et 20 **(B)** -16 et 32 **(C)** 0 et 20 **(D)** -4 et 20 **(E)** -12 et 32

Solution

Si $-2 < x < 6$, alors $0 \leqslant x^2 < 36$ (1) ; si $-4 < y < -2$, alors $4 < y^2 < 16$ et $-16 < -y^2 < -4$ (2).

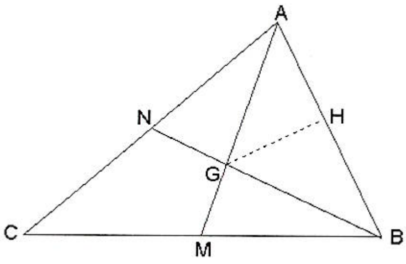
Additionnons les inégalités (1) et (2), on obtient : $-16 < x^2 - y^2 < 32$. La réponse est **B**.

Maxi 9

Dans un triangle ABC, les médianes $[AM]$ et $[BN]$ sont perpendiculaires et mesurent respectivement 12 cm et 9 cm. La distance entre leur point d'intersection et la droite AB, mesurée en cm, vaut

(A) $3+\sqrt{3}$ **(B)** 4,75 **(C)** 4,80 **(D)** $2+\sqrt{2}$ **(E)** $2\sqrt{6}$

Solution



Soit G le point d'intersection des deux médianes et soit $|GH|$ la distance de G à AB.

$|AG| = \frac{2}{3}|AM| = 8$ cm et $|BG| = \frac{2}{3}|BN| = 6$ cm.

Dans le triangle rectangle AGB, $|AB|^2 = |AG|^2 + |BG|^2 = 64\ \text{cm}^2 + 36\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$, d'où $|AB| = 10$ cm.

L'aire du triangle rectangle AGB vaut d'une part $\frac{1}{2}|AG|\,.\,|BG| = 24\ \text{cm}^2$, d'autre part $\frac{1}{2}|AB|\,.\,|GH| = 5|GH|$, d'où $|GH| = \frac{24}{5}$ cm $=$ 4,80 cm. La réponse est **C**.

Maxi 11

Dans l'ensemble des réels strictement positifs, si l'opérateur $\diamondsuit$ est défini par $a \diamondsuit b = \dfrac{a-b}{a+b}$, quelle est alors la solution de l'équation $2 \diamondsuit x = -\dfrac{3}{5}$?

(A) -7 **(B)** $-\dfrac{3}{8}$ **(C)** $-\dfrac{3}{10}$ **(D)** 3 **(E)** 8

Solution

L'équation $2 \diamondsuit x = -\dfrac{3}{5}$ est équivalente à $\dfrac{2-x}{2+x} = -\dfrac{3}{5}$, d'où $10 - 5x = -6 - 3x$. De là $16 = 2x$ et $x = 8$. La réponse est **E**.

Maxi 13 - *Sans réponse préformulée*

De combien de pourcents faut-il augmenter le rayon d'un cercle pour que son aire augmente de 96 % ?

Solution

Soit R le rayon initial du cercle. L'aire initiale est πR^2 et si elle augmente de 96 %, elle devient $\dfrac{196}{100}\pi R^2$.

Si on augmente de x % le rayon du cercle, le nouveau rayon vaut $\frac{100+x}{100}R$ et l'aire vaut alors $\pi\left(\frac{100+x}{100}R\right)^2$.

On obtient l'équation :

$$\begin{aligned}\pi\left(\frac{100+x}{100}R\right)^2 &= \frac{196}{100}\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{(100+x)^2}{100} = 196\\ &\Leftrightarrow 10000+200x+x^2=19600\\ &\Leftrightarrow x^2+200x-9600=0\end{aligned}$$

La racine positive de cette équation est : $x = -100+\sqrt{10000+9600} = -100+140 = 40$. Il faut donc augmenter le rayon du cercle de 40 %.

Maxi 16

Si la somme des coefficients d'un polynôme à une seule variable est nulle, alors nécessairement

(A) ce polynôme n'a pas de racine positive ;

(B) ce polynôme n'a pas de racine négative ;

(C) le nombre -1 est racine de ce polynôme ;

(D) le nombre 0 est racine de ce polynôme ;

(E) le nombre 1 est racine de ce polynôme.

Solution

Rappelons-nous que si le nombre a est racine du polynôme $P(x)$, alors $P(a) = 0$, autrement dit quand dans le polynôme on remplace x par a, on obtient 0. La somme des coefficients d'un polynôme s'obtient en remplaçant x par 1 et ici cette somme est nulle, c'est donc que 1 est racine du polynôme. La réponse est **E**.

Maxi 18

Quel est le nombre formé par les deux derniers chiffres de la somme

$$1!+2!+3!+\cdots+30!$$

Pour information : si n est un naturel non nul, la notation $n!$ représente le produit de tous les naturels depuis 1 jusqu'à n.

(A) 13 **(B)** 33 **(C)** 53 **(D)** 73 **(E)** 93

Solution

Les termes $10!$, $11!$, $12!$, ..., $30!$ comprennent tous les facteurs 2, 5 et 10, donc ce sont des multiples de 100 et leurs deux derniers chiffres sont 00. Il suffit donc de regarder quels sont les deux derniers chiffres de $1!+2!+3!+\cdots+9!$.

Calculons cette expression : $1+2+6+24+120+720+5040+40320+362880$.

Les derniers chiffres sont donnés par $1+2+6+24+20+20+40+20+80 = 213$; les deux derniers chiffres sont 13. La réponse est **A**.

Maxi 22 – *Sans réponse préformulée*

La somme de 17 nombres naturels distincts et non nuls vaut 153. Quel est le plus grand de ces nombres ?

Solution

$1+2+3+\cdots+16+17 = \frac{17.(1+17)}{2} = 17.9 = 153$.

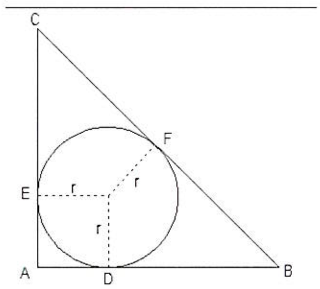
C'est la seule somme possible puisque les nombres doivent être distincts et non nuls. Le plus grand est donc 17.

Maxi 26

Quelle est la mesure (en cm^2) de l'aire du disque inscrit dans un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm ?

(A) $\frac{\pi(3-2\sqrt{2})}{2}$ **(B)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ **(C)** $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{8}$ **(E)** $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}$

Solution



Dans le triangle rectangle BAC, $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 2$, d'où $|BC| = \sqrt{2}$ et $|BF| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si r désigne le rayon du cercle inscrit, remarquons que $|AD| = r$, donc $|BD| = 1-r$.

Or $|BD| = |BF|$ car les segments de tangentes issus d'un même point ont même longueur. Dès lors $1-r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $r = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'aire du cercle vaut alors : $\pi.\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi.\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = \pi\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$. La réponse est **A**.

Rallye problèmes

C. Festraets

Voici les solutions des problèmes 11 à 20 de ce rallye 2002–2003 parus dans le numéro précédent.

11. Mesure du temps

Notons sous la forme d'un couple de nombres (a, b) l'état d'un sablier à un moment donné, a désignant respectivement le temps que mettra le sable qui se trouve au niveau supérieur pour passer au niveau inférieur et b ayant la même signification à la condition de retourner le sablier à ce moment-là.

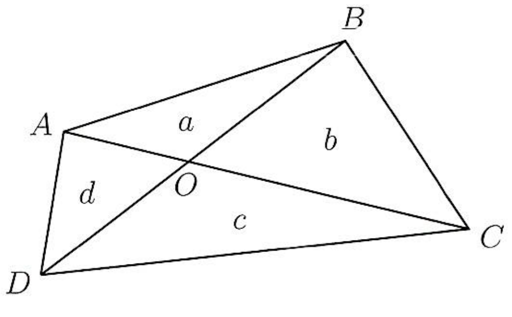
Le tableau ci-dessous donne alors la marche à suivre pour mesurer exactement 7 minutes avec les deux sabliers.

Temps	Sablier 1 (5 min)	Sablier 2 (3 min)	Commentaire
$t = 0$	$(0, 5)$	$(0, 3)$	Le sable se trouve au niveau inférieur dans les deux sabliers.
$t = 0$	$(5, 0)$	$(3, 0)$	Les deux sabliers sont alors retournés.
$t = 3$	$(2, 3)$	$(0, 3)$	Le sable du second sablier s'est entièrement écoulé.
$t = 3$	$(2, 3)$	$(3, 0)$	Le second sablier est alors retourné.
$t = 5$	$(0, 5)$	$(1, 2)$	Le sable du premier sablier s'est entièrement écoulé.
$t = 5$	$(0, 5)$	$(2, 1)$	Le second sablier est alors retourné.
$t = 7$	$(0, 5)$	$(0, 3)$	Le sable du second sablier s'est entièrement écoulé.

12. À chacun son aire

Désignons respectivement par a, b, c et d les aires des triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Les triangles OAB et OBC ont la même hauteur relativement à leur sommet commun B ; leurs aires sont donc dans le même rapport que leurs bases correspondantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{|OA|}{|OC|}.$$



De même, les triangles OCD et ODA ont la même hauteur relativement à leur sommet commun D ; ainsi, nous avons aussi

$$\frac{c}{d} = \frac{|OC|}{|OA|}.$$

Math-Jeunes n° 105, 28–32, 2003

En multipliant membre à membre les deux égalités obtenues ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1$$

ou

$$a \cdot c = b \cdot d.$$

Comme $a = 60$ cm^2, $b = 108$ cm^2 et $c = 360$ cm^2, nous obtenons $d = 200$ cm^2.

13. Sur l'autoroute

Supposons que je suis à hauteur d'un camion roulant dans le même sens. Je dois alors mettre trois minutes pour arriver à hauteur du camion qui précède. Pendant ces trois minutes, ce camion aura parcouru une distance égale à $3v$ (le temps étant mesuré en minutes) et moi j'aurai parcouru une distance égale à $3V$. Comme ces deux camions sont séparés par une distance d, nous avons

$$3V = d + 3v.$$

Supposons maintenant que je suis à hauteur d'un camion roulant en sens inverse. Il me faut alors 30 secondes pour croiser le camion suivant. Pendant ces 30 secondes, ce camion aura parcouru une distance égale à $\frac{1}{2}v$ (le temps étant toujours mesuré en minutes) et moi j'aurai parcouru une distance égale à $\frac{1}{2}V$. Comme ces deux camions sont aussi séparés par une distance d, nous avons

$$\frac{V}{2} = d - \frac{v}{2}.$$

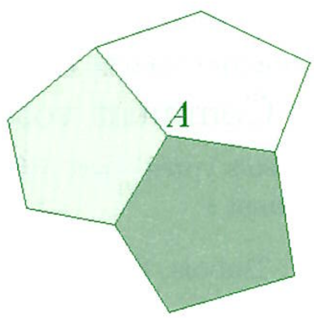
En soustrayant membre à membre les deux égalités obtenues ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{5V}{2} = \frac{7v}{2}.$$

D'où,

$$\frac{V}{v} = \frac{7}{5}.$$

14. Dodécaèdre



Un dodécaèdre **régulier** (ce mot manque dans l'énoncé) a 12 faces, 30 arêtes et 20 sommets. Chaque sommet du dodécaèdre est un sommet commun à 3 faces (cf. la figure ci-contre) ; il ne peut donc être joint qu'à $(20 - 10)$ autres sommets pour créer des diagonales. Ainsi, il y a 10 diagonales partant de chaque sommet.
Comme il y a 20 sommets, le nombre total de diagonales est égal à

$$\frac{20 \times 10}{2} = 100,$$

la division par 2 s'expliquant par le fait que chaque diagonale joint 2 sommets.

15 Diviseurs

Voici d'abord la base théorique sur laquelle repose la résolution du problème.

Le nombre de diviseurs d'un naturel N dont la décomposition en facteurs premiers est

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$$

vaut

$$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1).$$

Ainsi, par exemple, le nombre de diviseurs de $72 = 2^3 \cdot 3^2$ est $4 \times 3 = 12$. Passons maintenant à la résolution du problème.

Le nombre cherché N s'écrit

$$N = 2^p \cdot 3^q \quad (\text{avec } p, q \in \mathbb{N}_0).$$

Nous avons alors

$$M = \frac{N}{36} = \frac{2^p \cdot 3^q}{2^2 \cdot 3^2} = 2^{p-2} \cdot 3^{q-2}$$

et

$$P = 12N = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^p \cdot 3^q = 2^{p+2} \cdot 3^{q+1}.$$

Le nombre de diviseurs de N, M et P sont donc respectivement

$$d(N) = (p+1)(q+1), \quad d(M) = (p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad d(P) = (p+3)(q+2).$$

Or, d'après l'énoncé, nous devons avoir

$$d(M) = \frac{1}{2}d(N) \quad \text{et} \quad d(P) = \frac{3}{2}d(N),$$

ce qui nous conduit aux équations

$$\begin{cases} 2(p-1)(q-1) = (p+1)(q+1) \\ 2(p+3)(q+2) = 3(p+1)(q+1) \end{cases}$$

Après distribution et réduction des termes semblables, ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} pq - 3p - 3q + 1 = 0 \\ pq - p - 3q - 9 = 0 \end{cases}$$

En les soustrayant membre à membre, nous obtenons $2p - 10 = 0$; d'où $p = 5$. Puis, en remplaçant p par 5 dans une des deux équations, nous trouvons $q = 7$.

Le nombre cherché est donc $N = 2^5 \cdot 3^7 = 69984$.

16. Comment voter ?

Les trois votes étant différents, les seules possibilités sont pour Pierre, Jean et Jacques respectivement :

(A) : Dubois, Dupont, Durand

(B) : Dubois, Durand, Dupont

(C) : Dupont, Dubois, Durand

(D) : Dupont, Durand, Dubois

(E) : Durand, Dubois, Dupont

(F) : Durand, Dupont, Dubois

(B) est impossible car Pierre dit « si Jean vote pour Durand, je voterai pour Dubois et si Jacques vote pour Dupont, je voterai pour Durand », d'où Pierre devrait voter à la fois pour Dubois et Durand.

(C) est impossible car Jacques dit « si Pierre vote pour Dupont, je ne voterai pas pour Durand ».

(D) est impossible car Jean dit « si Jacques vote pour Dubois, alors je voterai pour Dupont ».

(E) est impossible car Pierre dit « si Jean vote pour Dubois, je voterai pour Dupont et si Jacques vote pour Dupont, je voterai pour Durand », d'où Pierre devrait voter à la fois pour Dupont et Durand.

(F) est impossible car Jean dit « si Pierre vote pour Durand, je ne voterai pas pour Dupont ».

D'où Pierre a voté pour Dubois, Jean pour Dupont et Jacques pour Durand.

17. Addition anglaise

$EN+EN$ doit se terminer par 00 et il n'y a pas de report de la 1$^{\text{re}}$ colonne dans la 2$^{\text{e}}$ et $E \neq N$, donc $EN = 50$.

$T + E + E = T + 10$, donc il y a un report de 1 dans la 3$^{\text{e}}$ colonne.

Dans la 5$^{\text{e}}$ colonne, F devient S, donc il y a un report de 1 dans le 5$^{\text{e}}$ colonne et $F + 1 = S$.

Dans la 4$^{\text{e}}$ colonne, O devient I et $I \neq 0$, donc on a $O = 9$, $I = 1$ et le report de la 3$^{\text{e}}$ colonne dans la 4$^{\text{e}}$ est de 2. Ce qui signifie que $1 + R + T + T > 20$, la valeur maximum de R étant 8, on a $2T > 11$, donc $T \geqslant 6$.

Les seuls cas possibles sont alors :

$T = 6$, $R = 8$ et $1 + R + T + T = 21$ d'où $X = 1$, ce qui est à rejeter car $I = 1$.

$T = 7$, $R = 6$ et $1 + R + T + T = 21$ d'où $X = 1$, ce qui est à rejeter car $I = 1$.

$T = 7$, $R = 8$ et $1 + R + T + T = 23$ d'où $X = 3$.

$T = 8$, $R = 4$ et $1 + R + T + T = 21$ d'où $X = 1$, ce qui est à rejeter car $I = 1$.

$T = 8$, $R = 6$ et $1 + R + T + T = 23$ d'où $X = 3$.

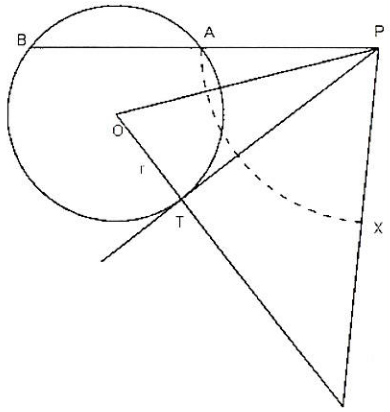
$T = 8$, $R = 7$ et $1 + R + T + T = 24$ d'où $X = 4$.

Mais F et S sont consécutifs et les seules valeurs possibles sont alors 2 et 3. Donc $T = 8$, $R = 7$ et $X = 4$. Et dans ce cas, on trouve $Y = 6$.

18. Corde

Soient T le point de contact d'une tangente menée de P au cercle, A et B des points répondant à la question.
D'après une propriété bien connue, nous avons

$$|PA| \cdot |PB| = |PT|^2.$$



De plus, $|PB| = 2|PA|$. Nous avons donc $2|PA|^2 = |PT|^2$, ce qui nous donne $|PA| = \frac{\sqrt{2}}{2}|PT|$.
Par conséquent, pour obtenir les points A et B, il suffit de pouvoir construire un segment de longueur égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}|PT|$, c'est-à-dire la demi-diagonale $[PX]$ d'un carré de côté $[PT]$.
Le cercle de centre P et de rayon $|PX|$ coupe le cercle donné en A ; il ne reste plus alors qu'à tracer la droite PA qui recoupe le cercle en B.

Cette construction n'est possible que si les deux cercles se coupent effectivement, donc si

$$|PO| \leqslant |PX| + r = \frac{\sqrt{2}}{2}|PT| + r.$$

Cette inégalité est équivalente successivement à

$$\begin{aligned}
|PO| - r &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|PT| \\
(|PO| - r)^2 &\leqslant \frac{1}{2}|PT|^2 = \frac{1}{2}(|PO|^2 - r^2) \\
|PO| - r &\leqslant \frac{1}{2}(|PO| + r) \\
2|PO| - 2r &\leqslant |PO| + r \\
|PO| &\leqslant 3r
\end{aligned}$$

Ainsi, la construction n'est possible que si la distance de P au centre du cercle donné est inférieure au triple du rayon du cercle.

19. Une grande somme

Formons toutes les paires de nombres naturels inférieurs à 1 000 000 000 et dont la somme vaut 999 999 999 :

(0, 999 999 999)

(1, 999 999 998)

(2, 999 999 997)

$\vdots$

(499 999 998, 500 000 001)

(499 999 999, 500 000 000)

Dans chacune de ces 500 000 000 paires, la somme des chiffres vaut toujours 81 et nous avons écrit tous les nombres de 1 à 999 999 999. Il y manque 1 000 000 000 dont la somme des chiffres vaut 1.

D'où la réponse : $81 \times$ 500 000 000 + 1 = 40 500 000 001.

20. Décomposition

Considérons la suite 111 ...11 de n chiffres 1. Si nous insérons dans cette suite des barres de séparation, par exemple : 1|111|11|11111|111...11, à ce schéma, correspond une expression de n comme somme : $n = 1 + 3 + 2 + 5 + (n - 11)$.

Dans la suite, il y a $n - 1$ places où mettre une barre de séparation et comme on a le choix de placer ou de ne pas placer de barre, cela nous donne 2^{n-1} expressions de n comme somme.

....

Olympiade mathématique belge

Grille des réponses de l'éliminatoire midi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	13	D	B	C	E	625	A	E	C	B	E	B	C	D
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	A	B	B	D	A	C	166	A	C	D	C	D	198

Grille des réponses de l'éliminatoire maxi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	C	C	C	D	B	B	A	C	198	E	A	40	C	D
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	C	A	B	A	E	17	D	B	D	A	C	A	155	D

Solutions des jeux

Les mots croisés de Pierre Carré

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
F	A	C	T	O	R	I	S	E	R
R	S	I		C	E	P	A	G	E
A	T	R	E		S			A	S
C	R	C		C	O	B	A	L	T
T	A	U	T	O	L	O	G	I	E
A	L	L		D	U	V	E	T	
L		A		E	T	A		E	N
S	P	I	N		I	R	I	S	E
	O	R		N	O	Y	E		U
S	T	E	V	I	N		V	I	F

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	06	01	03	20	15	18	09	19	05	18
2	18	19	09		03	05	16	01	07	05
3	01	20	18	05		19			01	19
4	03	18	03		03	15	02	01	12	20
5	20	01	21	20	15	12	15	07	09	05
6	01	12	12		04	21	22	05	20	
7	12		01		05	20	01		05	14
8	19	16	09	14		09	18	09	19	05
9		15	18		14	15	25	05		21
10	19	20	05	22	09	14		22	09	06

Des produits à décrypter

Grille facile

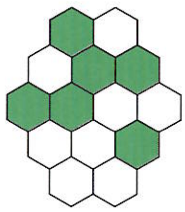
♥	1
♣	5
♠	8
♦	4

Grille difficile

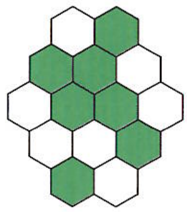
♦	4
♥	1
♣	6
♠	9

Le jeu des hexagones

Jeu facile



Jeu difficile



Carrés magiques

$27x - 12$	$14 - 13x$	$16x - 2$
$10 - x$	$10x$	$21x - 10$
$4x + 2$	$33x - 14$	$12 - 7x$

$1 - 2x$	$5x + 4$	1
$3x + 2$	$x + 2$	$2 - x$
$2x + 3$	$-3x$	$4x + 3$

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud