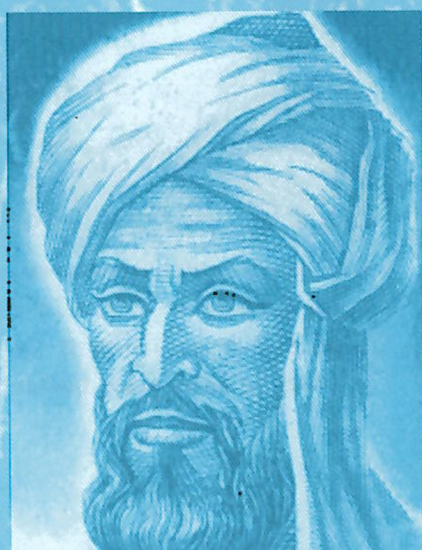
MATH-JEUNES

L'ALGEBRE

25ème année
Novembre 2003 - n° 106 S



Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-fax 32-(0)65-373729,
e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte IBAN BE 26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60€	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

Sommaire

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°106 Vingt-cinquième année 2003

MATH-JEUNES

3000 ans d'algèbre

F. Viète

De François Viète, dont on commémore cette année le 400^e anniversaire du décès, le petit Larousse écrit qu'il *créa l'algèbre, ouvrit la voie à la géométrie analytique, en appliquant l'algèbre à la géométrie et présuma l'incommensurabilité du nombre* π. L'affirmation concernant la création de l'algèbre est quelque peu exagérée, car des raisonnements de type algébrique existaient dès l'antiquité. Les mérites de Viète dans le développement de la pensée algébrique sont néanmoins incontestables. La formalisation du système de notations a entraîné un progrès rapide dans la formation et le développement de nouveaux concepts abstraits, amenant ainsi les mathématiciens de l'époque — à commencer par Viète lui-même — à résoudre des problèmes jusqu'alors inaccessibles. Dans une rubrique « Anniversaire », Simone Trompler donne quelques détails concernant l'œuvre et la vie de Viète.

Mais quels étaient donc les concepts et les techniques algébriques qui existaient avant Viète ? depuis quand existaient-ils ? et en définitive qu'est-ce que l'algèbre ? *Math-Jeunes* a confié à son ancien rédacteur en chef, Michel Ballieu, par ailleurs spécialiste des mathématiques dites « arabes », le soin de répondre à ces questions. Dans « L'art de l'algèbre » il nous entraîne à la recherche des premières activités algébriques, chez les Égyptiens d'abord, (un petit exercice sur les « fractions égyptiennes » figure également dans « Curiosités et calcul littéral » de Y. Noël-Roch) puis chez les Babyloniens, et enfin dans ce monde arabe dont on sait souvent qu'il nous a transmis l'héritage des Grecs, mais dont ignore parfois la contribution originale au développement mathématique. M. Ballieu nous parle en particulier d'AL-KHWĀRIZMĪ qui, au IX^e siècle, élabore une classification des équations de degré 2 et les résout. Au XI^e siècle, AL-KHAYYĀM effectuera le même travail pour les équations de degré 3, dont il ramènera la résolution à la détermination des points d'intersection de coniques.

al-Khwārizmī

al-Khayyām

En Europe, au moyen-âge, l'activité mathématique est réduite mais non totalement inexistante. On peut mentionner l'école des « abacistes » italiens dont le plus connu est Leonardo DA PISA dit FIBONACCI. Dans « Une suite en Italie », Nadège Vandenabeele adopte un point de vue informatique pour revisiter son jardin extraordinaire.

Avec la Renaissance, l'algèbre est l'objet de nouveaux développements importants. Ce sont d'abord les Italiens, notamment TARTAGLIA, CARDAN, BOMBELLI, FERRARI, qui résolvent les équations générales des degré 3 et 4. Peu après, l'action unificatrice de Viète ouvre de nouvelles portes, ainsi que nous l'avons dit plus haut. À côté de l'application de l'algèbre à la géométrie, qui débouche sur la mise au point de la géométrie analytique, les algébristes continuent de s'intéresser à la résolution d'équations. La petite note « Miettes » de G. Noël repose sur un résultat de LAGRANGE qui s'inscrit dans ce cadre.

E. Galois

Le mouvement aboutira au XIX^e siècle aux travaux de GALOIS qui explique pourquoi les équations générales de degré supérieur à 4 ne sont pas résolubles par radicaux. Les idées nouvelles mises en œuvre par Galois entraînent la formation des concepts fondamentaux de l'algèbre moderne.

Dans la même période, l'algèbre linéaire se développe. J. SYLVESTER introduit la notion de matrice, A. CAYLEY en élabore la théorie. Dans « À quoi ça sert ? Le calcul matriciel », P. Tilleuil rappelle les principes de base de ce calcul et en donne une jolie application au problème de la datation en archéologie. J. Miewis utilise le même calcul dans « Stabilité d'armée » pour établir une propriété de point fixe. L'algèbre linéaire ne se limite pas au calcul matriciel, mais comporte aussi l'étude du « phénomène linéaire » général. Des analogies apparaissent. Elles permettent de transférer des résultats d'un domaine à un autre. On trouvera donc une introduction au concept d'isomorphisme dans « À propos de vecteurs ». Une petite application en est faite dans l'article « Une suite en Italie » déjà mentionné.

À nos lecteurs

L'année scolaire 2003–2004 a déjà commencé depuis plus de deux mois. Cependant, nous tenons à souhaiter à tous nos lecteurs qu'elle leur soit favorable dans tous les domaines et — bien sûr— particulièrement dans le domaine scolaire.

Notre petite revue n'a que des ambitions modestes : susciter l'intérêt pour des activités de type mathématique, fournir des sitautons qui permettent au lecteur de tester ses connaissances, ouvrir des fenêtres sur des sujets que l'on ne rencontre pas souvent dans les classes... Une innovation est l'organisation des articles de chaque numéro autour d'un thème donné. Bien entendu, nous conservons aussi les rubriques usuelles. Comme vous l'avez lu plus haut, le présent numéro est consacré à l'algèbre. Le prochain numéro devrait paraître au lendemain des vacances de Noël. Vous y ferez la connaissance de plusieurs courbes particulières, planes et spatiales. Le dernier numéro de cette année scolaire paraîtra en mars et aura comme thème « Les probabilités ».

Nous ne voulons pas d'une revue « à sens unique ». Nous invitons chaque lecteur, élève ou professeur, jeune ou moins jeune, à collaborer à cette revue qui doit être la sienne. Faites-nous parvenir votre contribution, sous quelque forme que ce soit : réponse au « Rallye Problèmes », commentaires ou questions à propos d'un article qui vous a intéressé ou interpellé. Et pourquoi ne pas nous soumettre des projets d'articles ou des idées de sujets à traiter ?

En même temps que ce numéro de *Math-Jeunes* vous avez normalement reçu un CD-Rom édité par la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* [1] à l'occasion du cinquantième anniversaire de cette Société.

Le CD comporte environ 500 méga-octets de documents divers. Certains sont extraits de la revue *Mathématique et Pédagogie*, qui est la revue destinée aux professeurs membres de la Société. Une autre section est constituée de textes publiés dans *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior* au cours des dernières années. À signaler aussi, des jeux, des problèmes, des bandes dessinées qui ont égayé *Math-Jeunes* au fil de ses vingt-quatre années d'existence ainsi que de nombreux logiciels mathématiques. Ces logiciels sont « freeware » ou « shareware ». Certains sont des versions de démonstration bridées. Quoi qu'il en soit, nous espérons que ce CD sera utile à tous ceux d'entre vous qui ont accès à un ordinateur, chez eux ou à l'école.

[1] Les membres de la SBPMef ont trouvé leur CD dans le dernier numéro de *Mathématique et Pédagogie*.

ANNIVERSAIRE

S. Trompler

Il y a 400 ans mourait François VIÈTE. Sa ville natale, Fontenay-Le-Comte, en Vendée, commémore activement cet anniversaire par un colloque, des conférences, des expositions, un musée.

François Viète est souvent considéré comme le « *père de l'algèbre*», mais c'est sans compter l'apport des Arabes.

En réalité, Viète n'était pas un « vrai » mathématicien. Pendant toute sa vie, il a partagé son activité entre la politique et la recherche mathématique. À son époque, en effet, les jeunes gens brillants de bonne famille étaient le plus souvent dirigés par leur père vers une carrière militaire ou une carrière juridique et politique. Il en fut ainsi pour François Viète, qui fit ses études de Droit à l'Université de Poitiers où il fut diplômé en 1560. Mais dès 1564 il abandonna la profession de juriste et devint le précepteur de la fille d'Antoinette d'Aubeterre.

C'est très heureux pour la Science car, prenant sa tâche très au sérieux, il préparait des leçons pour son élève dans de nombreux domaines, dont les sciences, et en particulier l'astronomie et la cosmologie. Ces sujets le passionnaient ainsi que les mathématiques qui s'y rapportaient et il continua de s'y intéresser jusqu'à la fin de sa vie. Ses premiers travaux scientifiques datent de cette période.

En 1573, Viète fut nommé conseiller au Parlement de Bretagne par le Roi Charles IX.

Il y resta jusqu'en 1580 et devint conseiller royal privé. Très proche des Huguenots, sans qu'on sache exactement s'il en faisait partie, il avait la *Ligue* pour ennemie. Ses ennemis politiques et religieux l'obligèrent à s'éloigner de la politique, de 1584 à 1589.

Cette période fut la plus féconde de sa vie. Il fut rappelé par le roi Henri III, comme conseiller au Parlement à Tours, puis il servit Henri IV, notamment en décryptant des messages codés pendant la guerre d'Espagne. Le roi d'Espagne Philippe II, persuadé que ses messages cryptés étaient indéchiffrables se plaignit au Pape, accusant le Français d'avoir usé de sorcellerie contre lui !

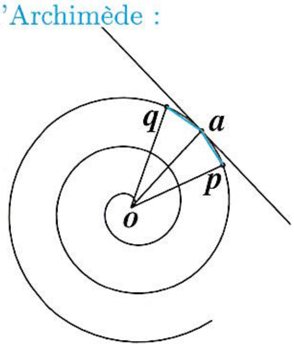
En 1593, le mathématicien néerlandais Adriaan ROOMEN proposa un problème « à tous les mathématiciens du Globe » (comme cela se faisait souvent à cette époque) et l'ambassadeur des Pays-Bas prétendit au Roi qu'aucun mathématicien français n'était capable de relever le défi. Le problème était la recherche de

François VIÈTE
(1540–1603)

« Moi qui ne fais pas profession de mathématicien, mais que l'étude des mathématiques charme quand j'ai du temps libre »

Viète resta au service de Henri IV par intermittence jusqu'en 1602. Il mourut en 1603.

Viète construit une approximation de la tangente en un point a d'une spirale d'Archimède :



Il choisit sur la spirale des points p et q tels que $\widehat{qoa} = \widehat{aop}$, et dessine la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{paq}$. Plus les angles $\widehat{qoa}$ et $\widehat{aop}$ sont petits, meilleure est l'approximation.

la solution d'une équation (très particulière) du 45^e degré !

Viète en donna une solution le jour même et, mieux, il en trouva vingt-deux autres le lendemain. Par un trait de génie, Viète avait reconnu que l'équation était satisfaite par la corde d'un cercle de rayon 1 qui sous-tend un angle au centre de $\frac{2\pi}{45}$. Comme il connaissait les relations entre les sinus et cosinus d'un angle et ceux d'un angle multiple et que $45 = 3 \times 3 \times 5$, il arriva de proche en proche à calculer le sinus de $\frac{\pi}{45}$ dont le double est la corde cherchée. Roomen fut émerveillé et une amitié se lia entre les deux mathématiciens, qui continuèrent à se proposer mutuellement des problèmes jusqu'à la fin de leur vie.

Que peut-on dire de son œuvre ?

Voici quelques exemples de ce que les mathématiques lui doivent, mais il y en a d'autres. Son travail le plus important sur l'algèbre est « *In artem analyticem isagoge* » (1591). C'est le premier écrit sur l'algèbre symbolique.

Viète introduit dans cet ouvrage le premier système de notation algébrique, (qui ne ressemble que de loin aux notations modernes). C'est aussi lui qui introduit le terme « *coefficient* ». Une innovation capitale est l'emploi de lettres pour les quantités connues.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Jusqu'alors, seules les inconnues étaient désignées par des lettres. Grâce à ce symbolisme, on dépasse le stade de l'étude d'équations particulières. Viète utilise des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les données.

Pour Viète, une inconnue au premier degré représente une ligne, au deuxième degré une aire, au troisième degré un volume, et au quatrième degré un « survolume », de sorte qu'il ne conçoit pas qu'on additionne des quantités de degrés différents. Il rend donc ses équations homogènes, c'est à dire que tous les termes ont le même degré. Il donne aussi, pour résoudre des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés, des méthodes différentes de celles des mathémamticiens italiens (mais il ne donnait que les racines positives car les nombres négatifs n'étaient pas encore acceptés à son époque). De plus, Viète connaît l'expression des coefficients d'une équation en fonction des racines de celle-ci. Cette propriété apparaît à l'équation (2) de l'article « Miettes » qui suit dans ce numéro.

Viète s'intéressa aussi à la géométrie et à la trigonométrie. Ainsi il calcula le nombre π avec 10 décimales en utilisant un polygone de 6×2^{16} côtés et il le représenta par le produit infini qui figure dans l'encadré ci-dessous, ce qui semble bien la première représentation infinie de ce nombre. Ses résultats dans ce domaine figurent dans son livre « *Supplementum geometriae* » (1593).

Miettes

G. Noël

— Mon professeur exagère : pour trouver la réponse au problème posé en classe, je dois calculer $a^2 + b^2 + c^2$, sachant que a, b et c sont les racines de l'équation

$$70x^3 + 43x^2 - 26x - 15 = 0 \qquad (1)$$

Je suis incapable de résoudre cette équation !

— Est-ce bien nécessaire ?

— ? ? ?

— Procédons à l'envers : peux-tu écrire une équation dont les solutions sont a, b et c ?

— J'écrirais $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$.

— Eh bien, calcule cette expression !

— Avec des lettres ?

— Oui.

— $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$ (ouf).

— Donc a, b et c sont racines de

$$x^3 - sx^2 + dx - p = 0 \qquad (2)$$

où $s = a + b + c$, $d = ab + bc + ca$ et $p = abc$.

— Et alors ?

— Si a, b et c sont racines des deux équations (1) et (2), peux-tu trouver s, d et p ?

— Bien sûr, en divisant l'équation (1) par 70, on trouve $s = -\dfrac{43}{70}$, $d = -\dfrac{26}{70}$, $p = \dfrac{15}{70}$. Mais à quoi cela va-t-il servir ? C'est $a^2+b^2+c^2$ que je dois calculer !

— Exact. À ton avis, que vaut $(a + b + c)^2$?

— C'est $s^2 = \left(-\frac{43}{70}\right)^2$, et c'est aussi

$$(a + b + c)(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

... Donc

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2d = s^2$$

— Conclusion ?

—

$$a^2 + b^2 + c^2 = s^2 - 2d = \left(-\frac{43}{70}\right)^2 + \frac{52}{70} = \frac{43^2 + 52 \times 70}{4900} = \frac{5489}{4900}$$

— Et voilà !

Au XIX$^{\text{e}}$ siècle les algébristes essaient de trouver des formules permettant de résoudre les équations générales de degré supérieur à 4.

C'est à cette occasion que J.-L. Lagrange met en évidence la propriété exploitée dans le dialogue ci-contre.

Il s'intéresse en effet aux valeurs que peut prendre une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ des racines d'une équation. Il constate que si cette fonction est *symétrique* c'est-à-dire si sa valeur ne dépend pas de l'ordre des racines, alors elle peut s'exprimer directement en fonction des coefficients. (Dans notre cas, la fonction $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$ est bien symétrique : $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + b^2 = \cdots$. Elle s'exprime en fonction de s et d : $a^2 + b^2 + c^2 = s^2 - 2d$).

Ces réflexions sont à la base de l'étude des permutations d'un ensemble d'objets et de l'introduction du concept de *groupe*, étude menée notamment par N. Abel et E. Galois.

L'art de l'algèbre

M. Ballieu

« Il est puéril d'affirmer que la science commença en Grèce : le "miracle" grec fut préparé par des millénaires de travail en Égypte, en Mésopotamie et peut-être dans d'autres régions. La science grecque fut moins une invention qu'une renaissance ».

Georges SARTON

Georges SARTON (1884-1956), historien des sciences, d'origine gantoise, auteur de l'ouvrage *Introduction to the History of Science*, réédité par Krieger Publishing en 1975.

1. Préambule

Au sens moderne, l'algèbre est aussi l'étude des structures, telles que groupes, ...

Même si on se limite au « sens classique », les mathématiciens semblent très partagés sur ce que veut dire le mot « algèbre ». Dans le *Petit Larousse*, édition 2003, on peut lire « Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution d'équations par des formules explicites, ... ». Dans le *Mathematics Dictionary* [6], on apprend que l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Stella BARUK, dans son *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* [2], signale que le mot date de 1554 et qu'il est issu du latin médiéval *algebra*, venant lui-même de l'arabe... « L'algèbre est l'art ou la science de résoudre des problèmes en généralisant les méthodes de l'arithmétique par l'emploi de lettres qui représentent des grandeurs ou des nombres inconnus et permettent d'établir des formules »...

Les Arabes n'ont jamais considéré l'algèbre comme une science, mais comme un art : l'art de l'algèbre, fille de la science du calcul.

Tout comme Jacques SESIANO [8], on dira simplement que, au « sens classique », l'algèbre est « l'art » qui s'occupe de trouver des solutions d'équations et de systèmes d'équations. S'il faut vraiment qu'il y ait des lettres pour pouvoir parler d'algèbre, alors pourquoi presque tous les auteurs s'accordent-ils à dire que les Babyloniens faisaient de l'algèbre deux millénaires avant Jésus-Christ ? Il y a là confusion entre ce qu'est l'algèbre et... ce qu'elle est devenue de nos jours. Comme le dit fort bien G. G. JOSEPH, dans son ouvrage *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics* [7], « It is taking too narrow a view to equate the term "algebra" just with symbolic algebra. »

C'est une vue trop étroite que de prendre le mot « algèbre » seulement dans le sens d'algèbre symbolique.

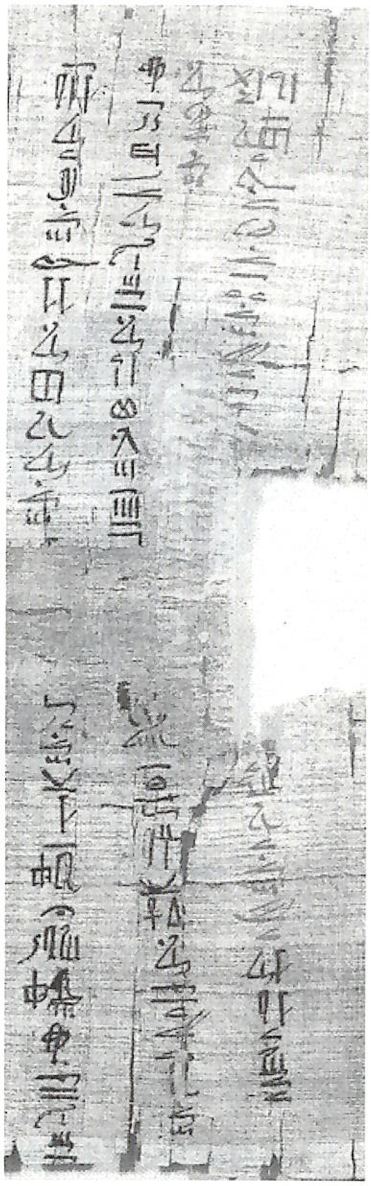
Il vaut mieux qualifier l'algèbre au moyen d'attributs qui donnent une information soit sur l'époque soit sur la manière de la pratiquer. Ainsi, on parle d'*algèbre rhétorique* qui est un mode de résolution d'équations ou de systèmes sans aucun formalisme, par utilisation d'une langue écrite ou parlée, qu'elle soit savante ou vernaculaire.

On peut considérer que cette manière de procéder a perduré plus ou moins jusqu'au milieu du quinzième siècle. C'est à ce moment qu'on voit naître les premiers formalismes, comme par exemple, p̃ pour *plus* (latin) ou *più* (italien) et m̃ pour *minus* ou *meno*. L'algèbre, ainsi enrichie de ces premières tentatives de symbolisme, est souvent qualifiée d'*algèbre syncopée*.

Bien entendu, le stade que nous connaissons aujourd'hui, où l'inconnue est désignée par x, avec emploi de symboles tels que $+$, $-$, $=$, ..., est celui de l'*algèbre symbolique*.

Si l'on consulte le livre II des *Éléments* d'EUCLIDE [5], on trouve également une forme d'algèbre. L'interprétation de ce livre est d'ailleurs fort discutée. Certains historiens des mathématiques n'hésitent pas à parler d'*algèbre géométrique*, en ce sens que les solutions de certaines classes d'équations particulières sont obtenues par des manipulations géométriques. Ainsi, par exemple, la proposition 11 de ce livre II, d'un point de vue algébrique moderne, revient à résoudre l'équation du second degré $x^2 = a(a-x)$...

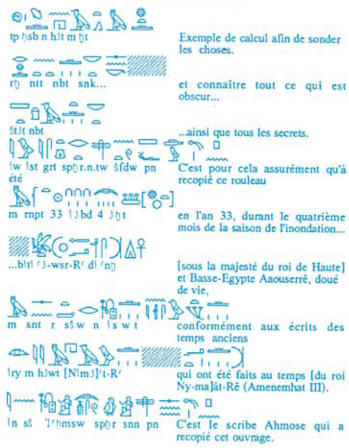
Dès qu'on pratique une discipline scientifique, même à un niveau relativement bas, le problème qui se pose très souvent et très concrètement, est de trouver des solutions d'équations. C'est une situation à laquelle l'humanité a été très tôt confrontée. Ainsi, l'algèbre est une discipline fort ancienne.



2. L'Égypte

C'est un des pays où se développent les premières mathématiques écrites. Il nous reste très peu de témoignages. La raison en est évidente : le support d'écriture utilisé par le scribe, le papyrus, est très fragile. Les documents les plus importants sont le *papyrus Rhind* [1] et le *papyrus de Kahun*, tous deux conservés au British Museum, le *papyrus de Berlin* et le *papyrus de Moscou*.

Titre du Papyrus Rhind.



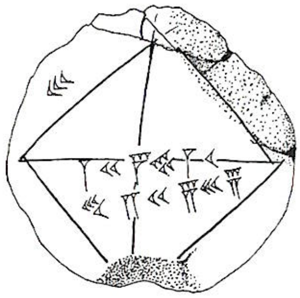
Le scribe égyptien AHMES, par exemple, qui a recopié le *papyrus Rhind* vers le milieu du seizième siècle avant Jésus-Christ, utilise, comme tous ses « collègues scribes égyptiens », un système de numération décimal non positionnel. Ce système n'est pas plus commode que la numération romaine, par exemple, surtout pour effectuer des multiplications ou des divisions.

Les difficultés qu'entraîne son utilisation n'ont pas permis aux Égyptiens de développer de bons algorithmes de résolution d'équations ou de systèmes, qui d'ailleurs sont tous du premier degré. La méthode de recherche de la valeur des inconnues repose sur le principe de fausse position, qui s'enseignait encore dans nos classes primaires au début du vingtième siècle. C'est une technique qui s'appuie sur la théorie des proportions (voir par exemple [3]). On trouve l'une ou l'autre équation

(1) La traduction du titre du papyrus Rhind est extraite de *Mathématiques égyptiennes. Recherche sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, par S. Couchoud, Le Léopard d'Or, Paris 1993.

ou système du deuxième degré dans les papyrus de Berlin et Kahun, mais ce sont des problèmes très simples.

3. La Mésopotamie



C'est un autre pays où se développent les premières mathématiques écrites, plus ou moins à la même époque qu'en Égypte. Le Mésopotamien dispose, lui, d'un système de numération positionnel, mélange de base 60 et 10, plus performant que le système égyptien et il va donc développer des méthodes de résolutions d'équations. En fait, il résout les équations du deuxième degré de la même façon que nous. Mais, il ne se sert pas de lettres et décrit avec des mots les opérations à effectuer, dans le style « Prends tel nombre, multiplie-le par tel autre... » C'est un exemple type d'algèbre rhétorique. Il faut cependant remarquer que, sur l'ensemble de toutes les tablettes d'argile recensées à ce jour, on ne trouve jamais de résolution d'une classe de problèmes, mais toujours de problèmes particuliers.

4. L'algèbre comme « science constituée »

Un des Abbassides (voir *Le Monde Musulman* en page ١١), le calife *al-Ma'mūn* qui règne à Baġdād de 813 à 833 envoie des missions à Byzance pour ramener des manuscrits grecs de philosophie et de science afin de les faire traduire en arabe. Il fonde à Baġdād la *Bayt al-ḥikma* ou Maison de la Sagesse, une espèce d'Académie de traduction à laquelle il attache une bibliothèque. C'est dans cette Académie qu'a travaillé le mathématicien qui a fait de l'algèbre une « science constituée ».

Ce surnom est à l'origine du mot « algorithme ».

Certains historiens des mathématiques pensent qu'il est né dans une région de l'Iraq actuel et que ce sont ses ancêtres qui étaient originaires du Khwārizm.

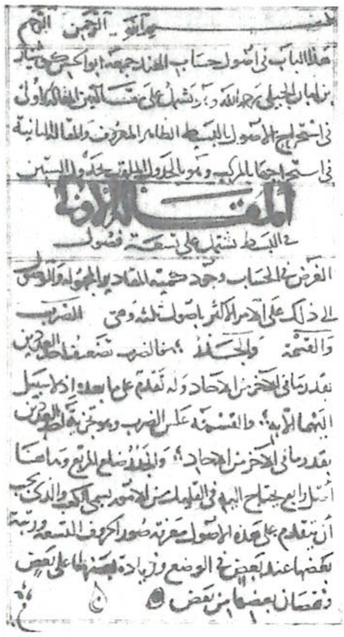
Comme son surnom semble l'indiquer, MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-KHWĀRIZMĪ (v. 780 - v. 850) viendrait du Khwārizm mais il a été appelé à travailler à la Maison de la Sagesse à Baġdād. On sait qu'il a écrit entre autres, un livre d'arithmétique, le *Livre du calcul indien*, le premier livre connu à ce jour où sont décrites les « figures indiennes » et les opérations qu'on fait au moyen de celles-ci.

L'expression « calcul indien » mérite une petite explication. Les mathématiciens arabes ont toujours reconnu explicitement que les chiffres et la numération décimale de position qu'ils utilisent leur viennent des Indiens. Aussi l'expression « chiffres indo-arabes » est-elle préférable à « chiffres arabes ». De nos jours, il y a deux formes de chiffres indo-arabes, ceux d'Occident et ceux d'Orient. Ce sont deux déformations des « figures indiennes » d'origine ; il n'est d'ailleurs pas difficile de leur trouver certaines ressemblances :

Occident	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Orient	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Avant le livre arithmétique cité plus haut, AL-KHWĀRIZMĪ a composé un opuscule intitulé الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة, c'est-à-dire *al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr w-al-muqābala*, ce qui signifie le *Livre abrégé sur le calcul par le jabr et la muqābala* [1].

Dans sa préface, l'auteur fait la traditionnelle louange à *Allah*, il loue également tous ceux qui ont écrit des ouvrages de science avant lui, il remercie le calife qui l'a encouragé à écrire et donne le contenu de l'opuscule : tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, ce dont on a besoin dans les cas d'héritages, de legs, de partages, d'actions en justice, de commerce, dans les relations entre les hommes, la mesure des terres, le creusement des canaux, le calcul géométrique et d'autres choses variées...



Ceci est le folio 267b du manuscrit MS Istanbul, Aya Sofya Library, 4857.
Il contient la première « page » d'un ouvrage de KŪSHYĀR IBN LABBĀN (vers 971 - vers 1029), intitulé *al-kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind*, c'est-à-dire *Le livre sur les principes du calcul indien.*
La première ligne est la traditionnelle louange à Allah.

Pour donner un ordre de grandeur, le traité hors préface – dans l'édition arabe de ROSEN – commence à la page 3 et, en ce qui concerne l'algèbre proprement dite, se termine à la page 48 ! Ensuite viennent les transactions commerciales, héritages, ... Le tout fait 122 pages. Eh oui... C'est un opuscule.

Quel est le rôle exact d'AL-KHWĀRIZMĪ dans l'évolution de l'algèbre ? On a déjà dit que l'équation du second degré était résolue en Mésopotamie de la même façon que chez nous à l'heure actuelle, mais sans le formalisme mathématique. Toutes ces pratiques calculatoires étaient donc bien connues et répandues à l'époque au Proche et Moyen Orient, mais les résolutions de problèmes se faisaient au coup par coup. AL-KHWĀRIZMĪ a analysé les différents cas et a réussi à donner une règle générale pour résoudre tous les problèmes d'équations de degré au plus 2. Ne disposant pas des nombres négatifs — les quantités négatives n'auront réellement le statut de nombres qu'au XVIIᵉ siècle —, il parvient à ramener toute équation de degré au plus 2 à six formes canoniques qui sont, avec notre notation à nous

$$\begin{array}{ccc} ax^2 = bx, & ax^2 = c, & bx = c, \\ ax^2 + bx = c, & ax^2 + c = bx, & bx + c = ax^2, \end{array}$$

Le mot arabe *māl* signifie la richesse, le bien ; le mot *jiḏr* signifie racine.

où x^2 est appelé le *māl*, x le *jiḏr* et a, b, c sont des nombres strictement positifs. Pour ramener toute équation de degré au plus 2 à l'une de ces six formes, il utilise deux opérations. La première est *al-jabr* – qui a donné naissance à notre vocable algèbre. Ce mot vient de la racine *jabara* qui signifie restaurer, réparer, redresser. La seconde opération est *al-muqābala* ; le *mu* est un préfixe passif, quant à la racine *qābala*, elle donne l'idée d'opposition, de comparaison. Par exemple, soit l'équation que nous écririons $4x^2 - 9x + 5 = 3x^2 + 2x + 4$. AL-KHWĀRIZMĪ dirait « quatre *māl* diminués de neuf *jidr* et augmentés de cinq *dirhams* sont égaux à trois *māl* augmentés de deux *jiḏr* et de quatre *dirhams* ». Nous allons faire agir la première opération pour restaurer les quantités négatives (qui ennuient les gens de cette époque, rappelons-le). Cela peut se faire en ajoutant, en langage moderne, $9x$ aux deux membres.

L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

Il vient alors $4x^2 + 5 = 3x^2 + 11x + 4$. S'il y a d'autres quantités négatives à restaurer, on procède de la même manière. Ensuite, on fait agir la deuxième opération. On compare l'espèce des *māl* et on enlève $3x^2$ de chaque membre (il faut n'avoir que des nombres positifs). Il vient $x^2 + 5 = 11x + 4$. On compare enfin l'espèce des *dirhams* et on ôte 4 de chaque côté, ce qui donne $x^2 + 1 = 11x$ qui est bien une des six formes canoniques, la cinquième, en l'occurrence.

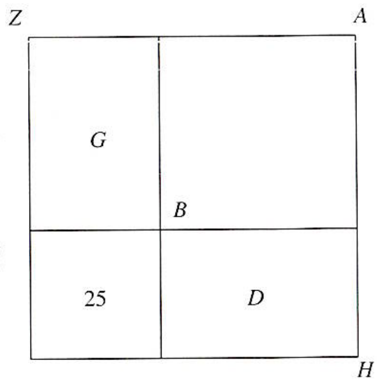
Dans son petit ouvrage, AL-KHWĀRIZMĪ fournit alors l'algorithme de résolution de chacun de ces six types d'équations. Il annonce la forme canonique qu'il va traiter et donne un exemple pratique. Il décrit alors chaque étape du raisonnement sur la forme générale et l'illustre aussitôt à l'aide de l'exemple.

L'algèbre va encore évoluer au cours des siècles. Petit à petit, le formalisme va s'introduire dans les calculs. À la Renaissance, on va obtenir des formules de résolution pour les équations de degrés trois et quatre. Au début du dix-neuvième siècle, on démontrera l'impossibilité de formules pour les équations générales de degrés cinq ou plus, et ce faisant, on « inventera » la théorie des groupes, … mais cela est un autre morceau de l'histoire de l'algèbre…

À titre d'exemple, regardons la démonstration du cas « un *māl* et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams ». AL-KHWĀRIZMĪ dit

« … *Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat et c'est la surface <carrée>* $\overline{AB}$ *qui représente le* māl. *Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces* $\overline{G}$ *et* $\overline{D}$ *sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface* $\overline{AB}$. *Il nous reste le carré dans l'angle de la surface* $\overline{AB}$ *et c'est cinq par cinq, et ce <cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutée sur les flancs de la première surface.*

Nous savons donc que la première surface est le māl, *et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.*



Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, *et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface* $\overline{AB}$, *qui est le* māl, *et c'est sa racine. Et le* māl *est neuf. Voici sa figure.* »

Ce qui précède est évidemment de l'algèbre rhétorique. Dans notre formalisme actuel, l'équation résolue ci-dessus s'écrit $x^2 + 10x = 39$.

Pour en savoir plus

[1] AL-ḪWĀRIZMĪ, sans date. *The Algebra of Mohammed ben Musa.* G. Olms, Hildesheim. Ed. and translated by F. ROSEN, Rééd. 1986.

[2] S. BARUK, 1992. *Dictionnaire des mathématiques élémentaires.* Seuil, Paris.

[3] CREM, 2002. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques.* Rouche, N. coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[4] A. DJEBBAR, 2001. *Une histoire de la science arabe.* Seuil, Paris.

[5] EUCLIDE, sans date. *The Thirteen Books of the Elements.* Dover, New York. Rééd. 1956. Transl. by Sir Thomas L. HEATH.

[6] G. JAMES et R. C. JAMES, éditeurs, 1949. *Mathematics Dictionary.* Van Nostrand, New York.

[7] G. G. JOSEPH, 1994. *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics).* Penguin Books, London.

[8] J. SESIANO, 1999. *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.

AL-KHWĀRIZMĪ ajoute le carré de côté 5, soit 25 ; il vient donc $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$, c'est-à-dire $(x+5)^2 = 64$ ou $x + 5 = \sqrt{64}$ ou encore $x = -5 + \sqrt{64}$. Ami lecteur, compare avec ta formule... et n'oublie pas que si AL-KHWĀRIZMĪ ne considère pas la deuxième racine de l'équation du deuxième degré, c'est parce que c'est une quantité négative !

Le monde musulman

L'année 622 voit l'avènement, dans la péninsule d'Arabie, d'une religion, l'Islam, prônée par le *Prophète Muḥammad*, religion qui va totalement changer la face du monde. Les armées bien entraînées et conduites par d'habiles généraux, qui ont permis d'imposer la nouvelle religion, vont rapidement envahir la Perse, l'Iraq, l'ancienne Mésopotamie, la Syrie, Jérusalem, l'Égypte, ...

En un siècle, l'Empire arabe s'étend des côtes de l'Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus et aux frontières de la Chine, avec aussi le Khwārizm, la Transoxiane, l'Afrique du Nord et l'Espagne. Entre-temps, à la mort de *Muḥammad le Prophète* survenue vers 629, le problème de sa succession comme chef religieux, législateur, commandant de l'armée, ... se sera posé. Dans un premier temps, un consensus aboutit assez rapidement. Le choix du calife se fait parmi ses premiers compagnons et membres de sa famille. Ce seront les quatre premiers califes appelés « orthodoxes ». En 661, la lutte pour le pouvoir provoque l'apparition d'une première dynastie (succession par hérédité) de califes, les Umayyades. En 750, ils sont chassés par les Abbassides dont la dynastie perdurera jusqu'en 1258, date de la (première) prise de Baġdād, par les Mongols.

Dès le califat umayyade, un premier mouvement d'appropriation des savoirs voit le jour : traductions en arabe des ouvrages scientifiques et philosophiques des pays conquis (textes en grec, en persan, en syriaque, ...). Cela provoque l'enrichissement de la langue arabe qui va devenir la langue savante en Orient, tout comme le latin l'était chez nous. Qui sont les traducteurs ? Pas seulement des Arabes, ni des Musulmans, mais aussi des Juifs, Chrétiens, savants pratiquant d'autres religions, qui parlent l'arabe et qui habitent l'Empire arabe ou y transitent. Comme le dit fort bien DJEBBAR [4], « En pays d'Islam, les hommes de science venaient de tous les horizons et ils n'avaient, pour la plupart, aucun lien avec les théologiens ou les religieux au sens large ». Sous la dynastie suivante, les Abbassides, le pouvoir favorise encore plus le mouvement de traductions et on en arrive même à une période fertile en créations.

Le Khwārizm est la région située au sud de la mer d'Aral ; elle correspond aujourd'hui au Turkmenistan et à l'Uzbekistan. La Transoxiane était la région d'Asie centrale au nord-est de l'Oxus ; Samarqand en fut la ville principale. Le fleuve Oxus est l'actuel Amou-Daria.

Le mot arabe *khālīfa* signifie successeur.

Le timbre ci-dessus a été émis en ex-URSS et est censé représenter le visage d'AL-KHWĀRIZMĪ.

Math-Jeunes n°106, 12–15, 2003

Curiosités et calcul littéral

Y. Noël-Roch

1. Fractions et équations

Trouver des chiffres qui remplacent les étoiles tout en respectant les égalités données.

$$\frac{2*}{*5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{2**}{**5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{2***}{***5} = \frac{2}{5}$$

Autres exemples

$$\frac{4*}{*8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4**}{**8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4**\cdots*}{**\cdots*8} = \frac{1}{2}$$

En désignant par x le nombre $**\cdots*$ formé de n étoiles, nous ramenons l'égalité

$$\frac{2**\cdots*}{**\cdots*5} = \frac{2}{5}$$

à l'équation

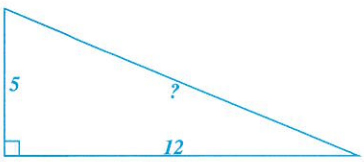
$$5(2.10^n + x) = 2(10x + 5)$$

Sa résolution donne $x = \frac{10(10^n-1)}{15}$. Le numérateur est le nombre $99\cdots90$ comportant n chiffres 9. Il est donc multiple de 5 et de 3 et nous trouvons pour x un entier de n chiffres ! Plus exactement $x = 66\cdots6$ et

$$\frac{266\cdots6}{66\cdots65} = \frac{2}{5}$$

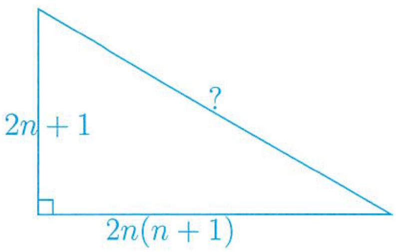
Vous pouvez par contre vérifier que $\frac{2**\cdots*}{**\cdots*8} = \frac{1}{4}$ n'admet aucune solution.

2. Fractions et triangles rectangles



- $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont 3 et 4 a une hypoténuse de mesure 5 ... donc entière !
- $2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$.
- $3 + \frac{3}{7} = \frac{24}{7}$. Un triangle rectangle dont ...
- $4 + \cdots$
- $n + \frac{n}{2n+1} = ?$

Plus généralement, la somme $n + \frac{n}{2n+1}$ fournit-elle une fraction dont le numérateur et le dénominateur donnent les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse entière ?



$$n + \frac{n}{2n+1} = \frac{n(2n+1)+n}{2n+1} = \frac{n(2n+2)}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

La somme des carrés du numérateur et du dénominateur est-elle un carré parfait ?

$$\begin{aligned}(2n(n+1))^2 + (2n+1)^2 &= 4n^2(n+1)^2 + 4n^2 + 4n + 1\\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1\\ &= (2n^2 + 2n + 1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, l'hypoténuse de longueur $2n^2+2n+1$ a bien une mesure entière.

Cette curiosité peut être rapprochée d'une méthode souvent rencontrée dans la recherche de tous les triples pythagoriciens. Elle consiste à utiliser trois naturels a, b, c avec $b > c$. Quels que soient $a > 0$ et $b > c > 0$, le triplet (x, y, z) avec $x = a(b^2 - c^2)$, $y = 2abc$ et $z = a(b^2 + c^2)$ fournit les mesures entières x et y des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a la mesure entière z. Dans les trois premières lignes du tableau ci-contre, nous retrouvons les triples Pythagoriciens déjà rencontrés dans le calcul des fractions.

b	c	b^2-c^2	$2bc$	b^2+c^2
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
...	...			

3. Fractions égyptiennes

De nombreux problèmes et leur résolution par les Égyptiens vers 1900 avant Jésus-Christ nous sont connus grâce au Papyrus de Rhind. Utiliser des fractions était nécessaire et peu aisé. Certaines fractions étaient plus commodes que d'autres : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$. Si ces fractions ne suffisaient pas, ils décomposaient la fraction à traiter en plusieurs fractions différentes, toutes de numérateur 1. Par exemple

Ce document est conservé au *British Museum* à Londres. Vous en trouverez une illustration à la page 7.

$$\frac{47}{60} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Nous appelons dans la suite « fraction unitaire » toute fraction de numérateur 1.

Nous disposons du calcul littéral, inconnu des Égyptiens, et allons en profiter ! Partant de

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \qquad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \qquad \frac{2}{7} = \frac{1}{?} + \frac{1}{?}$$

nous pouvons trouver la décomposition de toute une famille de fractions en somme de deux fractions unitaires. En effet

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier cette égalité !

D'autres familles de fractions peuvent être traitées à partir d'autres égalités, par exemple

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{7}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{26}$$

Des décompositions de fractions en fractions unitaires différentes ne sont pas toujours faciles. Par exemple, comment trouver les trois dénominateurs dans $\frac{5}{13} = \frac{1}{?} + \frac{1}{?} + \frac{1}{?}$?

Concernant FIBONACCI, voyez l'article *Une suite en Italie* dans le présent numéro.

Certains résultats acquis ont attendu longtemps leur validation. Citons par exemple une proposition connue de Fibonacci dès 1202 :

> Toute fraction inférieure à 1 est une somme d'un nombre fini de fractions unitaires distinctes.

L'algorithme de Fibonacci-Sylvester appliqué à $\frac{5}{13}$:

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{2}{39}$$

$$\frac{1}{20} < \frac{2}{39} < \frac{1}{19}$$

$$\frac{2}{39} - \frac{1}{20} = \frac{1}{780}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$$

C'est donc le cas de $\frac{5}{13}$ ... mais combien faut-il de fractions et quels sont les dénominateurs ?

Ce n'est qu'en 1880 que Sylvester a démontré la propriété et donné un algorithme de calcul des fractions unitaires. Cet algorithme de *Fibonacci-Sylvester* (appelé aussi *algorithme gourmand*) s'applique à toute fraction $\frac{a}{b} < 1$. Il consiste à

- chercher la plus grande fraction unitaire inférieure ou égale à $\frac{a}{b}$,
- retrancher cette fraction de $\frac{a}{b}$,
- recommencer le processus avec la différence obtenue
- continuer jusqu'à obtenir une fraction unitaire comme différence. (Nous ne justifions pas ici que l'algorithme s'arrête effectivement.)

Actuellement, la possibilité d'écrire toute fraction à dénominateur impair comme somme d'un nombre fini de fractions unitaires distinctes et dénominateurs *tous impairs* reste un *problème non résolu*.

4. Une fraction toute simple !

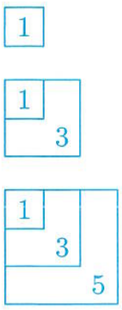
$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots$$

Peut-on continuer ainsi ?

Autrement dit, l'égalité suivante est-elle vraie pour tout naturel $n > 0$?

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(2n+2n+3)}$$

Que montre ce film ?



1^2 2^2 3^2

La somme des premiers naturels impairs est un carré parfait. Plus précisément, pour tout naturel $n > 0$,

$$1+3+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$$

Appelons N le numérateur et D le dénominateur et appliquons la propriété donnée en marge :

$$\begin{aligned} N &= (n+1)^2 \\ D &= 1+3+5+\cdots+(2(2n+1)+1) - (1+3+5+\cdots+(2n+1)) \\ &= (2n+1+1)^2 - (n+1)^2 \end{aligned}$$

De sorte que

$$\frac{N}{D}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)^2-(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2}{4(n+1)^2-(n+1)^2}=\frac{1}{3}$$

De manière analogue vous pouvez partir de

$$\frac{1+3+5}{5+7+9}=\frac{3}{7} \qquad \frac{1+3+5+7+9}{9+11+13+15+17}=\frac{5}{13}\dots$$

généraliser et démontrer que pout tout naturel pair

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n+1)}=\frac{n+1}{3n+1}$$

5. Factorielles et récurrence

$$\begin{aligned} 1.1!+2.2! &= 3!-1 \\ 1.1!+2.2!+3.3! &= 4!-1 \end{aligned}$$

Peut-on continuer ?

Autrement dit, est-il vrai que pour tout naturel $n>3$, l'égalité suivante est vraie ?

$$1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!=(n+1)!-1$$

La démonstration par récurrence consiste à prouver que si l'égalité est vraie pour **un certain naturel**, elle l'est aussi pour **le naturel suivant** :

SI $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+k.k!=(k+1)!-1$

ALORS

$$\begin{aligned} &1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+k.k!+(k+1).(k+1)! \\ &= (k+1)!-1+(k+1).(k+1)! \\ &= (k+1)!(1+k+1)-1 \\ &= (k+2)!-1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité étant vraie pour $n+2$ et tous les naturels suivants, l'égalité générale est démontrée.

Voici d'autres égalités dont une démonstration relève du même processus récursif :

$$1.2+2.3+3.4+\cdots n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3}{4}$$

... et vous pouvez continuer en augmentant le nombre de facteurs par terme dans la somme du premier membre ...

Pour rappel :
On appelle « factorielle » d'un nombre naturel $n>0$, et on note $n!$ le produit

$$1\times2\times3\times\cdots\times n$$

Exemples : $5!=120$,
$8!=40320$.
La factorielle de 0 est définie par $0!=1$.

Je me suis largement inspirée de l'ouvrage de Gérard Charrière, *L'Algèbre, Mode d'Emploi*, édité en Suisse en 1995 et distribué en Belgique par les éditions Labor (ISBN 2-606-00528-7). Vous pouvez y trouver un tas de sujets intéressants !

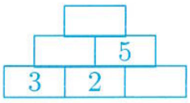
 Math-Jeunes n°106, 16–17, 2003

À propos de vecteurs

G. Noël

Pour rappel

a) Dans un mur de nombres, le nombre inscrit sur chaque brique est la somme des nombres inscrits sur les deux briques immédiatement inférieures. Complétez le mur suivant :



b) Un carré magique est un tableau carré de nombres tel que toutes les lignes, colonnes et diagonales ont la même somme. Complétez le carré magique suivant :

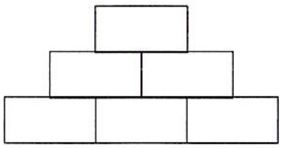
	5	
3	2	

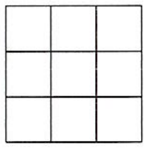
Avez-vous examiné les *Jeux de Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior* sur le CD-Rom annexé à cet exemplaire de *Math-Jeunes* ? Si oui, essayez de répondre à la question suivante. Si non, lisez d'abord le rappel ci-contre.

Qu'y a-t-il de commun à

$\boxed{1.}$ *un vecteur* $\overrightarrow{op}$ *d'un espace de dimension 3,*

$\boxed{2.}$ *un mur de nombres* $(3+2+1)$*,* $\boxed{3.}$ *un carré magique* (3×3) *?*

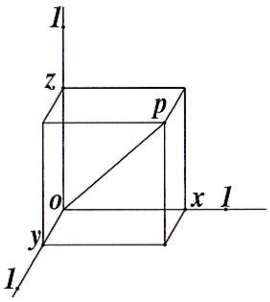




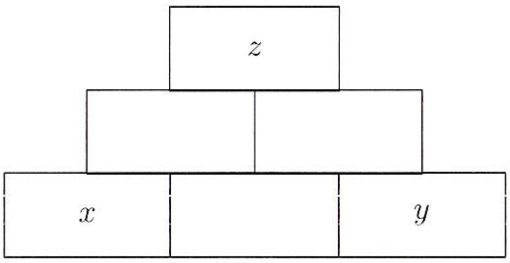
Réponse : Trois nombres suffisent à déterminer

$\boxed{1.}$ un vecteur de l'espace de dimension 3

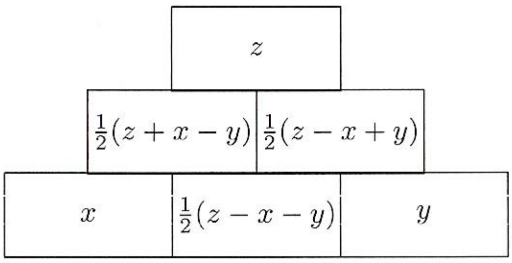
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



$\boxed{2.}$ un mur de nombres



$\longleftrightarrow$



$\boxed{3.}$ un carré magique

x		y
	z	

$\longleftrightarrow$

x	$2x+2y$ $-3z$	y
$2y-z$	$x+y$ $-z$	$2x-z$
$2x+y$ $-2z$	z	$x+2y$ $-2z$

Pouvez-vous *démontrer* que le carré de droite est bien le complété de celui de gauche ? Ne vous contentez pas de le vérifier à partir des formules indiquées, mais *découvrez* vous-même ces formules.

Attention : Tant dans le mur de nombres que dans le carré magique, les nombres x, y, z peuvent être placés en différents endroits, mais pas n'importe où. En effet pour certaines dispositions, il n'est pas possible de compléter le mur ou le carré.

À tout vecteur, nous pouvons associer un mur et un carré magique.

Complétez les murs et les carrés magiques ci-contre.

$$\overrightarrow{oe_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow m_1 = \begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{}\boxed{}\\ \boxed{1}\boxed{}\boxed{0}\end{array} \leftrightarrow c_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 0\\ \hline & & \\ \hline & 0 & \\ \hline\end{array}$$

$$\overrightarrow{oe_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow m_2 = \begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{}\boxed{}\\ \boxed{0}\boxed{}\boxed{1}\end{array} \leftrightarrow c_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & 1\\ \hline & & \\ \hline & 0 & \\ \hline\end{array}$$

$$\overrightarrow{oe_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow m_3 = \begin{array}{c}\boxed{1}\\ \boxed{}\boxed{}\\ \boxed{0}\boxed{}\boxed{0}\end{array} \leftrightarrow c_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & 0\\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

Pour en savoir plus : *Isomorphisme et dimension*, Dossier d'exploration didactique n°3, publié par la SBPMef, (1996).

Cette correspondance permet de réaliser des calculs analogues dans les trois situations.

Exemples

$\boxed{1.}$ À la somme

$\overrightarrow{oe_1}+\overrightarrow{oe_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ correspondent

a)
$$\begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{}\boxed{}\\ \boxed{1}\boxed{}\boxed{1}\end{array} = \begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{0}\boxed{0}\\ \boxed{1}\boxed{-1}\boxed{1}\end{array}$$

qui est la somme de m_1 et m_2,

b)
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\ \hline & & \\ \hline & 0 & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 1\\ \hline 2 & 2 & 2\\ \hline 3 & 0 & 3\\ \hline\end{array}$$

qui est la somme de c_1 et c_2.

$\boxed{2.}$ De même au produit

$k\cdot\overrightarrow{oe_1}=\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}$ correspondent

a)
$$\begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{}\boxed{}\\ \boxed{k}\boxed{}\boxed{0}\end{array} = \begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{k/2}\boxed{-k/2}\\ \boxed{k}\boxed{-k/2}\boxed{0}\end{array}$$

qui est le produit de m_1 par k,

b)
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline k & & 0\\ \hline & & \\ \hline & 0 & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & 2k & 0\\ \hline 0 & k & 2k\\ \hline 2k & 0 & k\\ \hline\end{array}$$

qui est le produit de c_1 par k.

De façon générale,

1. à la somme de deux vecteurs correspondent la somme des deux murs associés et la somme des deux carrés magiques associés.
2. au produit d'un vecteur par un nombre correspondent le produit du mur associé par ce nombre ainsi que le produit du carré magique associé par ce nombre.

Ainsi, tout calcul effectué avec des vecteurs peut être traduit dans le langage des murs ou celui des carrés magiques :

$$4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\12\end{pmatrix}$$

$$4\cdot\begin{array}{c}\boxed{3}\\ \boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\end{array} - 5\cdot\begin{array}{c}\boxed{0}\\ \boxed{0}\boxed{0}\\ \boxed{1}\boxed{-1}\boxed{1}\end{array} = \begin{array}{c}\boxed{12}\\ \boxed{4}\boxed{8}\\ \boxed{-1}\boxed{5}\boxed{3}\end{array}$$

$$4\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -3 & 2\\ \hline 1 & 0 & -1\\ \hline -2 & 3 & -1\\ \hline\end{array} - 5\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 1\\ \hline 2 & 2 & 2\\ \hline 3 & 0 & 3\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -32 & 3\\ \hline -6 & -10 & -14\\ \hline -23 & 12 & -19\\ \hline\end{array}$$

Les mathématiciens utilisent le mot « isomorphisme »(du grec « iso », même et « morphos », forme) pour désigner des situations identiques, au vocabulaire et aux notations près. Nous nous trouvons ici dans des situations « isomorphes ». On l'exprime aussi en disant que l'ensemble des murs de nombres $(3+2+1)$ et celui des carrés magiques (3×3) ont « même structure » que l'ensemble des vecteurs de l'espace de dimension 3. On dit encore que ces trois ensembles sont des « espaces vectoriels de dimension 3 ».

 Math-Jeunes n°106, 18–21, 2003

À quoi ça sert ?

Le calcul matriciel

P. Tilleuil

Les matrices à remonter le temps

Le mathématicien anglais James SYLVESTER est le premier à avoir utilisé — de façon informelle — le mot « matrice » dans une publication de 1850. Il appelle ainsi un *arrangement oblong de termes* dont il extrait des déterminants.

C'est Arthur CAYLEY qui montre ensuite l'intérêt du nouveau concept et construit le calcul matriciel en définissant notamment l'addition, la multiplication et l'inversion des matrices.

Depuis lors, le calcul matriciel s'est imposé comme un outil essentiel de l'algèbre linéaire.

Une matrice est constituée de nombres disposés en un tableau rectangulaire. Une matrice comporte donc des « lignes » et des « colonnes ». Une matrice comportant m lignes et n colonnes est appelée « une matrice $m \times n$ ».

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Une matrice 3×5.

a_{ik} est le nombre situé à l'intersection de la i^e ligne et de la k^e colonne.

Le calcul matriciel peut se révéler utile... jusqu'en archéologie ; en voici un exemple assez simple !

Une des préoccupations essentielles d'un archéologue est de situer sur une échelle du temps le résultat de ses fouilles, et de justifier cette situation à partir d'un nombre suffisant d'arguments scientifiques. Pour fixer les idées, supposons qu'un archéologue ait fouillé 5 tombes dans un site déterminé, qu'il se soit plus particulièrement intéressé aux bijoux qu'il y découvrait, et qu'en fonction de différents caractères particuliers de ces bijoux, il soit parvenu à réaliser une classification en 7 types principaux des bijoux retrouvés. Les questions que l'archéologue doit alors se poser sont : quelle est la tombe la plus ancienne, quelle est la plus récente, comment les autres tombes se situent-elles chronologiquement par rapport à ces deux-là, etc ? Ce qui nous intéresse ici, c'est la manière dont la seule présence de tel ou tel type de bijou dans telle ou telle tombe permet de proposer un classement chronologique de ces tombes.

L'hypothèse de travail de l'archéologue est la suivante : deux tombes peuvent être considérées comme chronologiquement proches si elles contiennent toutes deux un nombre suffisant de types de bijoux communs. Plus précisément, une tombe T_1 est plus proche chronologiquement de la tombe T_2 que de la tombe T_3 s'il y a un plus grand nombre de types de bijoux communs à T_1 et T_2 qu'à T_1 et T_3. Cette hypothèse se base sur l'idée que, dans une culture primitive, le type d'un bijou n'évolue que lentement dans le temps. C'est cette hypothèse de travail qui donne lieu à une méthode de classification chronologique des tombes à l'aide du calcul matriciel. Comment ?

Notons $T_1, T_2, \dots T_5$: les différentes tombes situées sur le site et $B_1, B_2, \dots B_7$: les différents types de bijoux trouvés sur ce même site. Notons alors $\mathcal{A}$ la matrice 5×7 définie par la condition suivante :

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si la tombe } T_i \text{ contient au moins un bijou de type } B_k \\ 0 \text{ si la tombe } T_i \text{ ne contient pas de bijou de type } B_k. \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons imaginer que les fouilles aient permis de déterminer la matrice $\mathcal{A}$ sous la forme ci-contre. Cette matrice, qui ne comporte donc que des 0 et des 1, résume toute l'information disponible. Elle nous permet de déterminer combien de types de bijoux sont communs à deux tombes données, par exemple les tombes B_1 et B_2 :

$$T_1 \text{ comporte un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{11} = 1$$
$$T_2 \text{ comporte un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{21} = 1$$

Donc

$$T_1 \text{ et } T_2 \text{ comportent toutes deux un bijou de type } B_1 \Leftrightarrow a_{11}.a_{21} = 1$$

Dans notre cas, $a_{11} = 1$ et $a_{21} = 0$ donc $a_{11}a_{21} = 0$.

Notons n_{12} le nombre de types de bijoux communs à T_1 et T_2. En considérant successivement les sept types de bijoux, nous constatons que n_{12} est donné tout simplement par la formule

$$a_{11}a_{21} + \cdots + a_{17}a_{27}$$

On reconnaît là le produit (matriciel) de la ligne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \end{pmatrix}$$

par la colonne

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{26} \\ a_{27} \end{pmatrix}$$

Mais, direz-vous, cette colonne ne figure pas dans la matrice $\mathcal{A}$!

Effectivement, elle n'y figure pas. Par contre, ces nombres $a_{21}, \ldots, a_{27}$ constituent une ligne de $\mathcal{A}$. Nous allons donc construire une nouvelle matrice, que nous appellerons la *transposée* de $\mathcal{A}$, que nous noterons $\mathcal{A}^t$ et dont les colonnes seront les lignes de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule $n_{12} = a_{11}a_{21} + \cdots + a_{17}a_{27}$ établie plus haut se généralise en

$$n_{ij} = a_{i1}a_{j1} + \cdots + a_{i7}a_{j7}$$

Tout ce qui vient d'être établi peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Le produit matriciel

On ne définit le produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $p \times q$ que si $n = p$: le nombre de colonnes du premier facteur doit valoir le nombre de lignes du second.

Considérons, par exemple, une matrice 3×4,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et une matrice 4×2,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces deux matrices est une matrice 3×2, notée ici $\mathcal{C}$, dont l'élément c_{ij} situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne est donné par la formule

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{i4}b_{4j}$$

c_{ij} est donc le produit (matriciel) de la i^e ligne de la matrice $\mathcal{A}$ par la j^e colonne de la matrice $\mathcal{B}$.

Nous pouvons écrire

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 57$$

$c_{21} = \ldots$

$\ldots$

Effectuant tous les calculs, on obtient la matrice 3×2

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 57 & 67 \\ 85 & 105 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Théorème archéologico-matriciel
Si $\mathcal{N}$ est la matrice carrée d'ordre 5 dont les termes sont définis par la condition
« n_{ij} est le nombre de types de bijoux présents à la fois dans les tombes T_i et T_j »
alors
$$\mathcal{N} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^t,$$
où $\mathcal{A}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\mathcal{A}$.

Remarquons que n_{11} est le nombre de types de bijoux présents dans la tombe n°1, n_{22} est le nombre de types de bijoux présents dans la tombe n°2, etc.
Remarquons aussi que la matrice $\mathcal{N}$ est *symétrique*, c'est-à-dire que, quels que soient les indices i et j, on a $n_{ij} = n_{ji}$. C'est évident, tant d'après la définition des nombres n_{ij} figurant dans l'énoncé du théorème, que d'après la formule qui permet de les calculer.

Nous pouvons alors attaquer nos questions de chronologie. On calcule

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \mathcal{N}$$

L'hypothèse de travail de l'archéologue – qui, pour mémoire, consiste à supposer que deux tombes sont chronologiquement proches si elles contiennent un nombre suffisant de types de bijoux communs – peut maintenant être exploitée au départ de la matrice $\mathcal{N}$.

Concentrons-nous par exemple d'abord sur la tombe T_5. Elle contient 6 types de bijoux, puisque $n_{55} = 6$. La tombe T_3 est, parmi toutes les autres tombes, celle qui contient le plus grand nombre de types de bijoux en commun avec la tombe T_5. En effet, $n_{53} = 4$ est le plus grand des nombres n_{51}, n_{52}, n_{53}, n_{54}. Nous en déduisons que, parmi toutes les tombes, la tombe T_3 est celle qui est chronologiquement la plus proche de la tombe T_5. Pareillement, la tombe T_2 doit être considérée comme chronologiquement plus proche de la tombe T_3 que de la tombe T_5, puisque

T_3 est la plus proche de T_5

T_2 est plus proche de T_3 que de T_5

$$n_{23} = 3 > 2 = n_{25}.$$

De même, la tombe T_1 doit être considérée comme chronologiquement plus proche de la tombe T_5 que de la tombe T_3, puisque $n_{15} = 3 > 2 = n_{13}$, et elle est plus éloignée encore de la tombe T_2, puisque $n_{12} = 1$. Ainsi, la comparaison des cœfficients de la matrice symétrique $\mathcal{N}$ permet déjà de suggérer que les tombes T_1, T_2, T_3 et T_5 devraient être classées dans l'un des deux ordres chronologiques :

T_1 est plus proche de T_5 que de T_3

T_1 est plus éloignée de T_2 que de T_5 et de T_3

$$T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1 \qquad \text{ou} \qquad T_1 \to T_5 \to T_3 \to T_2.$$

Pour décider lequel de ces deux ordres est le bon, l'archéologue va abandonner un instant les mathématiques et, sur base de caractéristiques propres à chaque bijou trouvé dans les tombes T_1 et T_2, il va essayer de déterminer laquelle est la plus ancienne ; comme ces deux tombes sont les plus éloignées l'une de l'autre sur l'échelle du temps, c'est relativement facile.

Afin de voir aussi quelles sont les limites de la méthode matricielle, supposons un instant qu'il ait accumulé suffisamment d'arguments pour en conclure que la tombe T_2 est effectivement la plus ancienne, et que l'ordre chronologique à retenir est donc $T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1$. Mais comment situer alors la tombe T_4 ?

En se fondant toujours sur la même hypothèse de travail, la tombe T_4 doit être (très) éloignée chronologiquement de la tombe T_1, puisque $n_{14} = 0$, et elle doit l'être un peu moins de la tombe T_2, puisque $n_{24} = 1$. Et comme $n_{43} = n_{45} = 2$, elle devrait être assez proche des tombes T_3 et T_5. Il y a donc deux possibilités :

$$T_4 \to T_2 \to T_3 \to T_5 \to T_1 \quad \text{ou} \quad T_2 \to T_4 \to T_3 \to T_5 \to T_1.$$

Or, la première possibilité impliquerait que la tombe T_4 soit plus éloignée chronologiquement de la tombe T_3 que de la tombe T_2 et donc qu'on devrait avoir $n_{24} > n_{34}$, alors qu'en fait, on a : $n_{24} = 1$ et $n_{34} = 2$. Et la seconde possibilité impliquerait que la tombe T_1 soit plus éloignée chronologiquement de la tombe T_2 que de la tombe T_4 et donc qu'on devrait avoir $n_{12} < n_{14}$, alors qu'en fait, on a : $n_{12} = 1$ et $n_{14} = 0$. Avec l'hypothèse de travail retenue jusqu'ici, il n'y a donc pas moyen de trancher entre les deux possibilités. Heureusement, l'archéologue dispose d'autres méthodes que celles du calcul matriciel ...

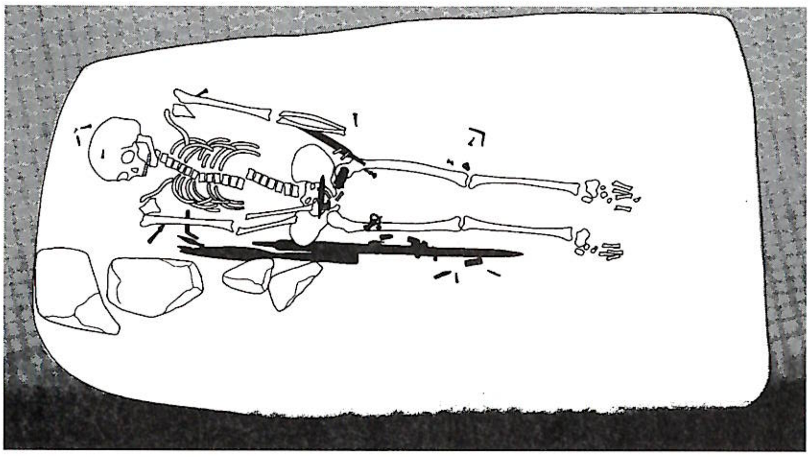
Pour ce qui nous importe ici, il faut donc retenir que cette méthode matricielle fournit rapidement – sur base de la seule hypothèse de travail proposée plus haut – une conjecture (parfois partielle, comme dans l'exemple précédent) quant à la situation chronologique des différentes tombes. L'archéologue doit s'employer ensuite à dégager de l'ensemble des résultats de ses fouilles les éléments de preuve qui permettent d'étayer – ou de corriger – cette conjecture, et il dispose de suffisamment de méthodes et de techniques spécifiques pour y arriver au mieux.

Etonnant ce qu'on peut faire avec des 0 et des 1, non ?

Sortons un peu notre nez de la poussière des tombes. Qu'est-ce qui fait que le calcul matriciel puisse être utile en archéologie ? Le théorème démontré plus haut, et qualifié d'archéologico-matriciel, n'a évidemment pas un caractère strictement archéologique. C'est un théorème général de comptage ou de dénombrement, concernant les matrices d'incidence, c'est-à-dire les matrices $n \times m$ qui ne comportent comme termes que des 0 ou des 1. La structure d'ordre (partiel) sur les lignes qui a été définie et étudiée ensuite est un exemple de ce qui est parfois appelé un problème de sériation. Et comme l'exemple traité l'a suggéré, une matrice d'incidence quelconque n'admet une structure d'ordre sur ses lignes (en un sens analogue à celui considéré dans l'hypothèse de travail de notre archéologue) que si cette matrice d'incidence vérifie certaines conditions. Mais c'est là une autre histoire, à laquelle la référence ci-dessous constitue une excellente introduction.

Pour en savoir plus

A. Schuchat – *Matrix and Network Models in Archaeology.* Mathematics Magazine, vol. 57 (1984), 3–14.



 Math-Jeunes n°106, 22–26, 2003

Une suite en Italie

N. Vandenabeele

Toto aime les mathématiques et adore être devant l'écran de son ordinateur. Mais il a l'impression que l'informatique n'utilise guère de mathématique. Il rencontre Algo un ami étudiant en informatique. Ils vont étudier ensemble un problème. Chacun utilisera son langage et ses notations.

Leonardo da Pisa

Mois	1	2	3	4
Couples de bébés lapins	1	0	1	1
Couples de jeunes lapins	0	1	0	1
Couples de lapins adultes	0	0	1	1
Total	1	1	2	3

Algo : Je viens de programmer un problème posé jadis par un certain LÉONARD DE PISE (ou *Leonardo da Pisa*), le connais-tu ?

Toto : Oui, on le connaît mieux sous le surnom de FIBONACCI, né à Pise vers 1170, mort en 1250. Ses principaux travaux traitent d'algèbre et d'arithmétique. Il a écrit notamment le « *Liber Abaci* », au début du XIII^e siècle. C'est un recueil de problèmes. Lequel as-tu programmé ?

Algo : Tu m'as dit que des lapins venaient grignoter dans ton jardin.

Toto : Effectivement, ça ne s'est pas arrangé depuis ! Et en plus tout le monde sait que les lapins se reproduisent très rapidement !

Algo : Et bien justement, à propos de reproduction... voici le problème de Fibonacci : tous les mois, un couple de lapins (adultes) met au monde un couple de lapins (bébés). Le nouveau couple grandit durant un mois, et devient un couple de jeunes lapins. À la fin du deuxième mois après sa naissance, il est en âge de procréer à son tour. Possédant au départ un couple de bébés-lapins, combien de couples de lapins y aura-t-il en douze mois ?

Toto : Je crains fort que la réponse ne m'effraie !

Algo : Je tiens à préciser que Fibonacci prend comme hypothèse que tout couple de lapins comprend un mâle et une femelle et qu'aucun lapin ne meurt. Il construit un modèle et, comme toujours dans ce cas, il fait des hypothèses simplificatrices.

Le premier mois, un jeune couple de bébés lapins se promène tranquillement dans le jardin. Le deuxième mois, les bébés ont grandi mais ne sont pas encore en âge de procréer. Ainsi, le deuxième mois, il n'y a toujours qu'un seul couple.

Ce n'est qu'au début du troisième mois que le premier couple donne naissance à un nouveau couple bébé. Deux couples « hantent » donc ton jardin.

Le 4^e mois, le premier couple est parent d'un nouveau couple de bébés. Ainsi, il y a maintenant 3 couples de lapins.

Au fil des mois, on a successivement 1, 1, 2, 3... couples de lapins. Cette suite porte le nom de suite de Fibonacci. On note F_n le n^e terme de la suite : $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ etc. Peux-tu continuer cette suite ?

Toto : Il faut découvrir l'algorithme qui calcule les termes successifs. En tout cas, ce n'est pas une suite arithmétique : on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre ; et ce n'est pas non plus une suite géométrique puisqu'on ne multiplie pas toujours par un même nombre...

Algo : Je te propose d'allumer l'ordinateur et de « programmer » cela avec un tableur. Nous allons utiliser le logiciel `Excel`®.

La colonne `B` indique le numéro du mois, les colonnes `C`, `D` et `E` dénombrent respectivement les couples de bébés-lapins, jeunes-lapins et lapins adultes et la colonne `F` comptabilise le nombre total de couples de lapins pendant le mois considéré. La première ligne du tableau ci-contre indique la situation initiale. Le tableau indique la situation des quatre premiers mois.

Le point de vue de l'informaticien...

B	C	D	E	F
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3

La question que l'on doit se poser est la suivante : « *Connaissant la situation au quatrième mois, comment déterminer celle du cinquième mois ?* »

Le 5ᵉ mois, il y aura deux couples de lapins adultes : celui qui l'était déjà au cours du quatrième mois et le jeune couple qui est devenu adulte. Autrement dit, on additionne le nombre de couples de lapins adultes et le nombre de couples de jeunes lapins du quatrième mois. Pour notre tableur, cela signifie que la cellule `E5` doit contenir la somme des cellules `D4` et `E4` : nous encoderons `E5 = D4 + E4`.

B	C	D	E	F
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5

Toto : Moi, j'aurais écrit $E_5 = D_4 + E_4$.

Algo : Sur un tableur, on ne peut pas écrire d'indices ! Le nombre de jeunes couples de lapins est identique au nombre de couples de bébés lapins du mois précédent. Ainsi, `D5 = C4`.

Enfin, le nombre de couples de bébés-lapins est égal au nombre de couples adultes du même mois. Ainsi, `C5 = E5`. Et le nombre total de couples est bien entendu `F5=C5+D5+E5`.

Notre raisonnement est valable pour tous les mois, à partir du troisième. Ainsi, d'une manière générale, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \texttt{Ei} &= \texttt{E(i-1)+D(i-1)} && (1)\\ \texttt{Di} &= \texttt{C(i-1)} && (2)\\ \texttt{Ci} &= \texttt{Ei} && (3)\\ \texttt{Fi} &= \texttt{Ci+Di+Ei} && (4) \end{aligned}$$

Voici le tableau, prolongé jusqu'au 18ᵉ mois, tel qu'on l'obtient après avoir encodé les formules.

B	C	D	E	F
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5
6	3	2	3	8
7	5	3	5	13
8	8	5	8	21
9	13	8	13	34
10	21	13	21	55
11	34	21	34	89
12	55	34	55	144
13	89	55	89	233
14	144	89	144	377
15	233	144	233	610
16	377	233	377	987
17	610	377	610	1597
18	987	610	987	2584

Observons attentivement ce tableau et essayons de déduire l'évolution du nombre total de couples, `Fi` au fil des mois.

La formule (4) nous dit que `Fi = Ci + Di + Ei`. Or en utilisant les formules (1), (2) et (3), on obtient

$$\begin{aligned} \texttt{Fi} &= \texttt{Ei + C(i-1) + E(i-1)+D(i-1)}\\ &= \texttt{Ei + F(i-1)}\\ &= \texttt{E(i-1) + D(i-1) + F(i-1)} \end{aligned}$$

Comme `E(i-1)+D(i-1)=E(i-2)+D(i-2)+D(i-1)` et `D(i-1)=C(i-2)`, on a finalement

`Fi = F(i-1)+F(i-2)`

pour $i > 2$

Toto : Très bien tout ça, Algo... ton raisonnement est parfait.

Algo : N'exagère pas, un peu de réflexion et tout le monde peut comprendre cela !

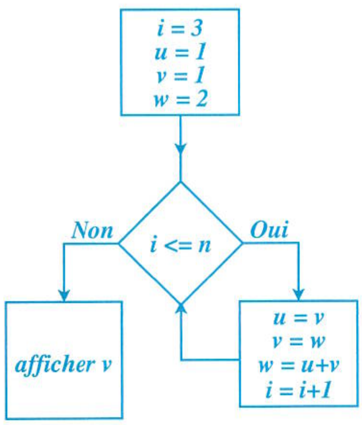
Grâce à la relation $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, les deux premiers termes de la suite déterminent tous les autres.

Toto : En programmant ton tableur, tu as montré qu'à partir du troisième, chaque terme F_i (moi, je mets des indices !) de la suite de Fibonacci est égal à la somme des deux termes qui le précèdent. Comme on connaît $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$, la formule $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ permet finalement de calculer tous les termes.

Algo : La question que je me pose maintenant est la suivante : avec un tableur, c'est relativement facile mais pourrait-on écrire un programme dans un autre langage de programmation, qui calcule successivement les nombres de Fibonacci. Comment procèderais-tu ?

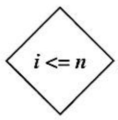
Toto : Je n'en ai aucune idée !

Algo : Le principe à appliquer est qu'au fur et à mesure du calcul, il suffit de garder en mémoire les deux derniers nombres calculés pour calculer le suivant. On s'arrête quand l'indice du terme recherché est atteint.



Notons `i` l'indice du terme que l'ordinateur est occupé à calculer, Si nous cherchons la valeur du terme `Fn`, la variable `i` devra varier de `3` à `n`.

L'organigramme ci-contre représente l'algorithme. Je t'explique.

On remarque d'abord le test 

.

- Si n vaut 1 ou 2, comme au départ $i = 3$, le test n'est pas satisfait et l'ordinateur affiche la valeur initiale de `v`, c'est-à-dire 1. Effectivement `F1`=1 et `F2`=1.

i	u	v	w
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21

- Supposons n plus grand que 2. Par exemple `n`=7.
  - Au premier passage dans le test, on a `i=3`, `u=1`, `v=1` et `w`=2. C'est la première ligne du tableau ci-contre.
  - Le test étant satisfait, `u` prend la valeur de `v`, `v` prend la valeur de `w`, `w` prend la valeur de `u+v` et `i` augmente de 1.
  - Au deuxième passage dans le test, on a donc `i=4`, `u=1`, `v=2` et `w`=3. C'est la deuxième ligne du tableau ci-contre.
  - On poursuit de la sorte jusqu'à ce que le test ne soit plus satisfait, c'est-à-dire jusqu'à ce que `i` soit égale à 8. À ce moment, on a donc `i=8`, `u=8`, `v=13` et `w`=21.

– On affiche alors la valeur de v: F7=13.

Toto : C'est génial ! On voit bien sur le tableau le décalage des valeurs successives de v et w d'une colonne vers la gauche.

Algo : Dans le programme, il y a une boucle... on doit répéter plusieurs fois les mêmes instructions. C'est ce qu'on appelle en informatique une « *instruction répétitive* » ou boucle.

Le point de vue du mathématicien...

Toto : Nous avons dit plus haut que les lapins étaient immortels, donc au fil des mois le nombre total de lapins croît sans cesse... Je te propose d'étudier de plus près la croissance de cette suite. Essayons de déterminer rapidement pour chaque F_i une valeur qui lui soit inférieure.

On sait que $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Comme $F_{i-1} > F_{i-2}$, on a $F_i > 2F_{i-2}$ Autrement dit, un terme est deux fois plus grand que le terme qui précède le précédent. Ainsi, on peut écrire

$$F_7 > 2 \times F_5 > 2 \times 2 \times F_3 > 2 \times 2 \times 2 \times F_1$$

Comme $F_1 = 1$, on a

$$F_7 > 2^3$$

Tu peux recommencer le raisonnement pour n'importe quel F_i, $(i > 2)$. On peut alors montrer la formule suivante :

$$F_i > 2^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$$

La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel x. Par exemple $\lfloor 8.75 \rfloor = 8$ et $\lfloor -8.75 \rfloor = -9$. Pour tout i entier pair, $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor = \frac{i}{2}$.

Ainsi, après le 20e mois, on aura plus de $2^{10} = 1024$ couples de lapins.

Algo : Cette inégalité n'est pas très « précise » : d'après mon tableur, F20 = 6765 ! !

Toto : Oui, je sais. Tu pourrais peut-être m'aider à affiner cette minoration ?

Algo : Je crois que j'ai une idée... Le tableau ci-contre (que l'on pourrait prolonger) montre que la suite définie par le quotient de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci a des chances d'être convergente.

i	F_i	F_{i+1}/F_i
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1,666...
5	5	1,6
6	8	1,625
7	13	1,61538462...
8	21	1,61904762...
9	34	1,61764706...

Mais peut-on déterminer la valeur exacte de cette limite ?

Toto : On recherche donc $x = \lim_{i\to\infty} \frac{F_{i+1}}{F_i}$. Je vais essayer... laisse-moi réfléchir ! On a $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$. Donc $\frac{F_{i+2}}{F_i} = \frac{F_{i+1}}{F_i} + 1$. Ici, une astuce peut nous être utile : si j'écris $\frac{F_{i+2}}{F_i} = \frac{F_{i+2}}{F_{i+1}} \cdot \frac{F_{i+1}}{F_i}$, je constate que si la suite $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ converge vers x, alors $\frac{F_{i+2}}{F_i}$ converge vers x^2.

Et par conséquent, si $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ converge vers x, on a $x^2 = x+1$, ce qui est une équation dont les solutions sont les nombres $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La valeur de la limite est donc $x = \varphi$ puisque les termes sont tous positifs.

Toto et Algo ne montrent pas que la suite $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ converge, mais uniquement que si elle converge, alors sa limite vaut φ. Faisons confiance à leur intuition !

Algo : Tu vois que ce n'est pas si difficile... ! Tu l'as reconnu : c'est le nombre d'or... De plus, on sait qu'il vérifie l'équation et donc que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Mais cela ne donne toujours pas une valeur précise de F_n !

La relation de récurrence $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ permet de faire correspondre une suite $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ à tout couple (a_0, a_1), ou, si l'on préfère, à tout vecteur $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ du plan.
De plus, il est facile de voir que si la suite a correspond au vecteur $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, et la suite b au vecteur $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$, alors la suite $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$ correspond au vecteur $\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}$.
De même, quel que soit le nombre k, la suite $k \cdot a = (ka_0, ka_1, \dots)$ correspond au vecteur $\begin{pmatrix} ka_0 \\ ka_1 \end{pmatrix}$.
L'association entre vecteurs du plan et suites vérifiant la relation $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ est un isomorphisme analogue à ceux rencontrés dans l'article « À propos de vecteurs ».
Par conséquent, si on trouve deux nombres α et β tels que

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \varphi'^0 \\ \varphi'^1 \end{pmatrix}$$

on aura automatiquement

$$F_n = \alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n$$

pour tout n.

Pour en savoir plus

Math-Jeunes a publié :
- *Application des nombres de Fibonacci*, par J. Bair, n°54, (1992).
- *Ne cherchez pas trop loin le pgcd de deux éléments de la suite de Fibonacci : il est dedans*, par M. Lardinois, n°55, (1992).
- *Et ainsi de suite*, par C. Villers, n°66, (1997).
- *Encore les lapins de Léonard*, par M. Ballieu, n°79, (1997).

Toto : Attends ! Calculons les puissances successives de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
\varphi^3 &= \varphi(\varphi^2) = \varphi(\varphi+1) = \varphi^2 + \varphi = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} \\
\varphi^4 &= \varphi(\varphi^3) = \varphi(\varphi^2+\varphi) = \varphi^3 + \varphi^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Algo : C'est remarquable : la suite des puissances de φ et la suite de Fibonacci vérifient la même formule de récurrence : $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$. Je parie que c'est aussi vrai pour φ' !

Toto : Évidemment puisqu'on a aussi $\varphi'^2 = \varphi' + 1$. Ainsi, intuitivement, on peut soupçonner un lien entre F_i, φ^i et φ'^i. Mais d'abord, remarquons que la formule $\varphi^2 = \varphi + 1$ peut aussi s'écrire $\varphi^2 = \varphi^1 + \varphi^0$. Nous pouvons donc adjoindre des termes d'exposants 0 aux suites (φ^n) et (φ'^n). Dès lors, adjoignons aussi un terme F_0 à la suite de Fibonacci. En prenant $F_0 = 0$, on a bien $F_2 = F_1 + F_0$.

De cette façon, nous pourrons facilement calculer F_n en fonction de φ^n et φ'^n : puisque les trois suites vérifient la même formule de récurrence $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, si nous trouvons deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} \alpha\varphi^0 + \beta\varphi'^0 = F_0 \\ \alpha\varphi^1 + \beta\varphi'^1 = F_1 \end{cases}$$

alors nous aurons $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n$ pour n'importe quelle valeur de n. Il suffit donc de résoudre le système en α et β

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = 1 \end{cases}$$

Algo : Pas besoin d'ordinateur : on trouve immédiatement $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Toto : Et voilà le travail (c'est la formule de BINET) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Donc en calculant le nombre de couples de lapins dans le courant du 20e mois à l'aide de cette formule, on doit obtenir le résultat 6765 fourni par le tableur.

Algo : Oui, bien sûr ! Fais le calcul si tu veux...

Toto : Et bien je trouve cela génial, c'est magique, mathématique, ... Je crois que j'ai trouvé ma vocation et que plus tard je combinerai mes passions pour l'informatique et la mathématique. Un grand merci pour tout... Ciao !

Algo : A bientôt j'espère !

Stabilité d'armée

J. Miewis

Considérons l'ensemble des militaires qui composent une armée. Nous pourrions à un moment donné « classer » tous ces militaires suivant leur grade. Ainsi, il serait possible de remplir un tableau où se correspondraient les grades et les effectifs de ce grade. Ce classement évolue évidemment dans le temps, suite essentiellement aux trois facteurs que sont les démissions, les promotions et les engagements de tout ordre qui agitent cette armée. Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une répartition stable des différents grades en jouant astucieusement sur ces trois facteurs.

Ce fait se vérifie dans toute société où règne une certaine hiérarchisation ; nous avons simplement choisi l'exemple d'une armée car il est parlant à tout un chacun.

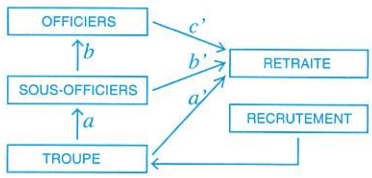
Pour introduire notre problème et y réfléchir, nous imaginerons que l'armée est seulement ventilée en trois catégories : la troupe, les sous-officiers et les officiers.

Fixons-nous un laps de temps pour examiner l'évolution numérique de chacune des composantes de cette armée : par exemple le mois. Mathématiquement un vecteur de dimension 3, (x_n, y_n, z_n) représentera le nombre d'hommes de troupe (x), le nombre de sous-officiers (y) et le nombre d'officiers (z) qui composent l'armée durant le mois n.

	1	2	...
Troupe	x_1	x_2	...
Sous-officiers	y_1	y_2	...
Officiers	z_1	z_2	...

Chaque mois, un pourcentage $(c', 0 \leqslant c' \leqslant 1)$ d'officiers est admis à la retraite tandis qu'un pourcentage (b) de sous-officiers rejoint le grade supérieur. Ainsi le nombre d'officiers d'un mois $(n+1)$ est donné par :

$$z_{n+1} = by_n + (1 - c')z_n$$



Chaque mois aussi, un pourcentage (b') de sous-officiers est admis à la retraite tandis qu'un pourcentage (a) d'hommes de troupe est admis au grade supérieur.

$0 \leqslant a \leqslant 1$
$0 \leqslant b \leqslant 1$
$0 \leqslant a' \leqslant 1$
$0 \leqslant b' \leqslant 1$
$0 \leqslant c' \leqslant 1$

En n'oubliant pas le pourcentage (b) de sous-officiers montés en grade, on obtient le nombre de sous-officiers d'un mois $(n+1)$ par :

$$y_{n+1} = ax_n + (1 - b - b')y_n$$

Chaque mois enfin, un pourcentage (a') de la troupe est admis à la retraite, un pourcentage (a) devient sous-officier et, au niveau de la troupe, on organise un recrutement qui compense exactement les départs de l'armée ; soit $a'x_n$ (pour remplacer les retraites de la troupe), $b'y_n$ (pour remplacer les retraites de sous-officiers) et $c'z_n$ (pour remplacer les retraites des officiers). Le nombre d'hommes de troupe du mois $(n+1)$ est donc donné par :

$$x_{n+1} = (1 - a - a')x_n + a'x_n + b'y_n + c'z_n$$

qui se simplifie en :

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + b'y_n + c'z_n$$

Nous supposons qu'aucune des valeurs de a, b, b' et c' n'est nulle.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-a)x_n + b'y_n + c'z_n \\ y_{n+1} &= ax_n + (1-b-b')y_n \\ z_{n+1} &= by_n + (1-c')z_n \end{aligned}$$

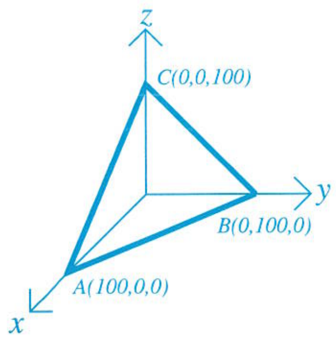
Un rappel concernant le calcul matriciel figure dans l'article « À quoi ça sert ? Le calcul matriciel » présent dans ce numéro.

Vous l'aurez compris, nous allons présenter cette évolution sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & b' & c' \\ a & 1-b-b' & 0 \\ 0 & b & 1-c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

En notant $P = \begin{pmatrix} 1-a & b' & c' \\ a & 1-b-b' & 0 \\ 0 & b & 1-c' \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, nous pouvons écrire cette relation sous la forme

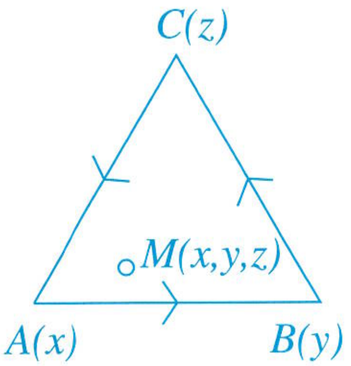
$$X_{n+1} = P \cdot X_n$$



X_0 est la répartition initiale des grades dans l'armée. Si cette répartition est connue, la formule ci-dessus permet de calculer X_n pour n'importe quelle valeur de n.

Il est tentant de représenter l'état de l'armée à un instant donné par un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Comme nous prenons soin de garder constant l'effectif total de l'armée, par exemple égal à 100, l'armée se représente dans le plan d'équation : $x + y + z = 100$.

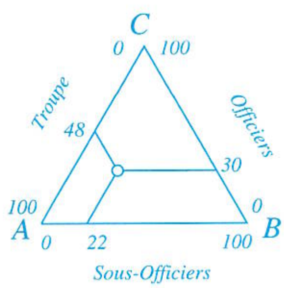
Le triangle ABC est susceptible de servir de support à un graphique triangulaire.



Les trois axes sont gradués de 0 à 100. Le côté de gauche est gradué du haut (C) vers le bas (A) et représente le pourcentage d'hommes de troupe. La base est graduée de gauche (A) à droite (B) et représente le pourcentage de sous-officiers. Le côté droit est gradué du bas (B) vers le haut (C) et représente le pourcentage d'officiers.

Le point de coordonnée $(48, 22, 30)$ se positionne :

- par une parallèle à BC issue du point 48 du premier axe de la troupe,
- par une parallèle à CA issue du point 22 du deuxième axe des sous-officiers,
- par une parallèle à AB issue du point 30 du troisième axe des officiers.



Chaque mois, l'évolution de l'armée peut ainsi être reportée sur ce type de graphique. Lorsque nous relions les points successifs, nous gardons une trace de cette évolution. Voici par exemple des courbes obtenues en posant

$$a = 0,2 \qquad b = 0,1 \qquad b' = 0,2 \qquad c' = 0,3$$

On a alors

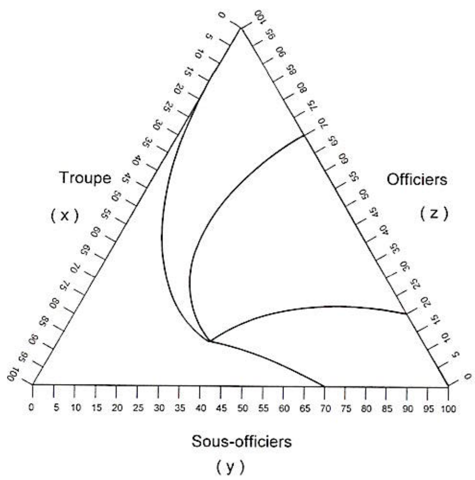
$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Chaque courbe est obtenue à partir d'un point de départ X_0 choisi un peu au hasard.

Les quatres courbes représentées ci-dessous correspondent successivement aux valeurs initiales X_0 :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Le plus simple pour le calcul est de disposer d'une calculette programmable. Nous introduisons la matrice P et nous écrivons un programme simple qui calcule $P \cdot X$ et recopie le résultat dans X. Donnant alors à X la valeur initiale X_0, par exécution successive du programme, nous voyons s'afficher les triples.



ÉTRANGE ! Ces quatres courbes semblent « converger » vers un même point. Ce qui signifierait que, quelle que soit la répartition initiale des grades dans l'armée, le respect scrupuleux d'une politique de promotion et de mise à la pension conduirait immanquablement à un état d'équilibre précis entre les différents grades. Nous allons essayer de vérifier ce fait.

Appelons $X_\infty = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$ l'eventuel vecteur limite d'équilibre. Si ce vecteur existe, on doit avoir

$$P \cdot X_\infty = X_\infty \text{ ou } P \cdot X_\infty = I \cdot X_\infty$$

La matrice unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$I \cdot X = X$$

pour tout vecteur X.

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1-a & b' & c' \\ a & 1-b-b' & 0 \\ 0 & b & 1-c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & b' & c' \\ a & -b-b' & 0 \\ 0 & b & -c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système homogène n'est jamais impossible ; il admet une AUTRE solution que la solution triviale nulle si le déterminant de la matrice des coefficients du système est nul. Ce qui est bien le cas puisqu'il existe une combinaison linéaire nulle entre les lignes de cette matrice : $L_1 + L_2 + L_3 = 0$. Et puisque $L_2 = -L_1 - L_3$, le système se réduit à

$$\begin{cases} -ax_\infty + b'y_\infty + c'z_\infty &= 0 \\ by_\infty - c'z_\infty &= 0 \end{cases}$$

Puisque $b \neq 0$, nous pouvons poser $z_\infty = \lambda$. D'où $y_\infty = \frac{c'\lambda}{b}$. En remplaçant y_∞ et z_∞ par ces valeurs dans la première équation, on obtient

$$x_\infty = \frac{b'y_\infty + c'z_\infty}{a} = \frac{b'c'\lambda + bc'\lambda}{ab}$$

Les vecteurs-solutions sont du type

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c'(b+b')\lambda}{ab} \\ \frac{ac'\lambda}{ab} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

ou encore, en posant $\frac{\lambda}{ab} = \mu$

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'(b+b')\mu \\ ac'\mu \\ ab\mu \end{pmatrix}$$

Parmi cette infinité de vecteurs, celui qui nous intéresse est celui dont la somme des composantes vaut 100 (ce qui nous permet de calculer μ).

Revenons à notre exemple : nous calculons

$$\begin{aligned} (0,3 \cdot (0,2 + 0,1))\mu + 0,2 \cdot 0,3\mu + 0,2 \cdot 0,1\mu &= 100 \\ 0,09\mu + 0,06\mu + 0,02\mu &= 100 \\ 0,17\mu &= 100 \end{aligned}$$

Donc

$$\mu = 588,23529\ldots$$

$$\begin{cases} x_\infty = 0,09 \cdot 588,23529\ldots = 52,94118\ldots \\ y_\infty = 0,06 \cdot 588,23529\ldots = 35,29412\ldots \\ z_\infty = 0,02 \cdot 588,23529\ldots = 11,76471\ldots \end{cases}$$

C'est le point de convergence de toutes les courbes ; c'est le point d'équilibre entre les différents grades de notre petite armée.

Dans la réalité, le point de convergence est déterminé par les besoins du service. On adapte alors les constantes a, b, a', b', c' pour pouvoir rejoindre ce point. Dans la réalité aussi, il y a beaucoup plus de grades, mais mathématiquement cela revient seulement à utiliser des matrices d'ordre plus grand.

Pour en savoir plus :

- Fisher and Ziebur, *Calculus and Analytic Geometry*, 1965.
- A. Deledicq, *Mathématiques buissonnières*, 1975.
- Bosson - Evrard, *Des outils pour apprendre en Sciences humaines*, 1977.
- http ://www.treasure-troves.com/math/TrilinearCoordinates.html

Apprenez les Mathématiques avec la TI-83 Plus, la calculatrice graphique de Texas Instruments !

Dans cet article et ceux qui suivront, nous t'offrons l'aide de spécialistes de la TI-83·Plus qui vont te faire découvrir quelques instructions destinées à exploiter cette calculatrice avec un maximum d'efficacité. De surcroît, dans chaque numéro de *Math-Jeunes*, il y aura un petit concours avec des calculatrices à gagner !

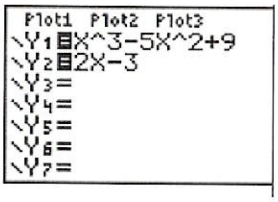
Découvrir les Mathématiques avec la TI-83 Plus

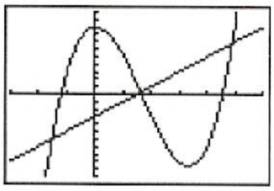
La calculatrice graphique est souvent accusée de réduire l'apprentissage des vraies mathématiques. Avec l'activité suivante, nous allons essayer d'infirmer cette conviction. Cette activité est basée sur une présentation de Gert SCHUMACHER, instructeur T³ au Danemark. Elle montre que la TI-83 Plus peut être utilisée pour

- faire des mathématiques de façon active,
- découvrir de nouveaux résultats mathématiques,
- et fournir une preuve mathématique rigoureuse.

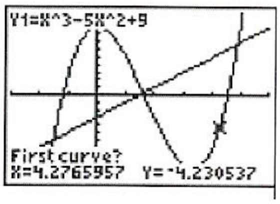
Une singularité algébrique

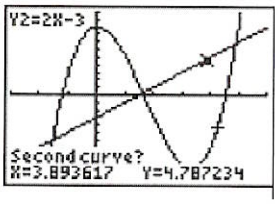
Entrons la fonction du troisième degré **Y1** $= x^3 - 5x^2 + 9$, ainsi qu'une fonction linéaire quelconque (par exemple, **Y1** $= 2x - 3$) telle que les graphiques de ces deux fonctions aient trois points d'intersection.

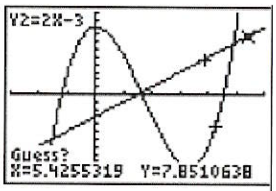


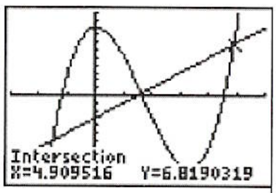


A l'aide de la commande d'intersection **(2nd[TRACE] 5:intersect)**, nous pouvons calculer les abscisses des points d'intersection des deux graphiques.









Après chaque calcul, l'abscisse est stockée dans une variable. (Pour ce faire, il faut quitter le mode graphique et puis utiliser la séquence de touches suivante : **X STO▶ A**). De la sorte, les abscisses des trois points d'intersection pourront être stockées dans des variables A, B et C.

Additionnons alors ces abscisses en effectuant la somme des 3 variables A, B et C.

L'avantage d'utiliser une calculatrice telle que la TI-83 Plus réside dans le fait que des calculs analogues avec d'autres fonctions linéaires peuvent être recommencés très rapidement. Essaie par exemple avec les fonctions linéaires suivantes : **Y2** $= 3x + 2$ et **Y2** $= x + 1$.

```
X→A
     -1.518816693
X→B
      1.609300727
X→C
      4.909515966
```

```
     -1.518816693
X→B
      1.609300727
X→C
      4.909515966
A+B+C
                5
```

```
X→A
     -1.392344346
X→B
      1.674603228
X→C
      4.717741117
```

```
     -1.392344346
X→B
      1.674603228
X→C
      4.717741117
A+B+C
                5
```

Que constatons-nous ? La somme obtenue reste inchangée quelle que soit la fonction linéaire utilisée. Qui plus est : cette somme est égale à l'opposé du coefficient du terme du second degré figurant dans la fonction du troisième degré. Une question se pose alors : est-ce une coïncidence ? Autrement dit, ce résultat est-il indépendant de la fonction du troisième degré choisie ? Des essais avec d'autres fonctions de ce type peuvent nous apporter une certaine certitude à ce sujet, mais pas une certitude absolue. Un calcul algébrique simple en donne cependant une preuve irréfutable.

Considérons une fonction du troisième degré définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$) et une fonction linéaire définie par $g(x) = px + q$ dont les graphiques ont trois points d'intersection. La fonction h définie par

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + ax^2 + (b-p)x + c - q \tag{1}$$

possède alors trois zéros.

Si nous nommons ces trois zéros k, l et m, nous pouvons écrire :

$$h(x) = (x-k)(x-l)(x-m) = x^3 - (k+l+m)x^2 + (kl+km+lm)x - klm. \tag{2}$$

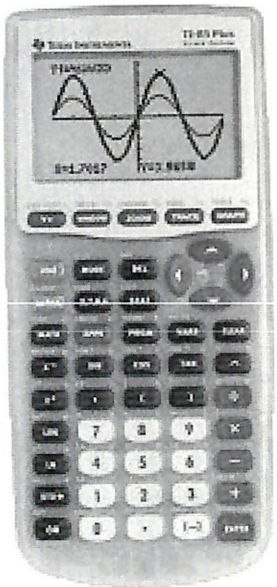
En comparant les expressions (1) et (2), il vient :

$$\boxed{k + l + m = -a}$$

Ce résultat apporte la preuve que ce que nous avions induit par l'expérience était correct.

Concours

Participe et gagne !



Dans chaque numéro de *Math-Jeunes*, il y aura un concours réservé aux élèves de l'enseignement secondaire, abonnés à *Math-Jeunes*. Le (la) gagnant(e) recevra une **TI-83 Plus Silver Edition**, la meilleure et plus belle calculatrice graphique de la famille TI-83 ! Le nom du (de la) gagnant(e) sera publié dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

Bonne chance à tous !

Sujet : Donne un bon exemple qui montre que les mathématiques jouent un rôle important dans la vie de tous les jours. Fais une description précise de la situation envisagée.

Envoie ta réponse par courrier (électronique ou postal) avant le 30 novembre. Veuille à y joindre tes coordonnées personnelles (nom, prénom, âge, adresse, niveau scolaire, etc.), ainsi que celles de ton établissement scolaire.

Texas Intruments • M. Mark de Hiep • Jules Bordetlaan 11 • 1140 Bruxelles

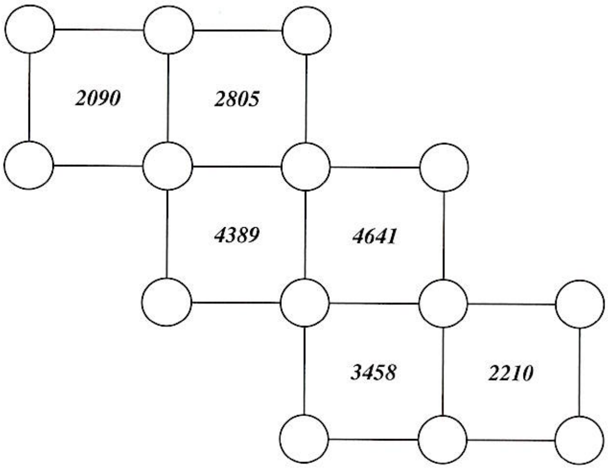
E-mail : m-dehiep@ti.com

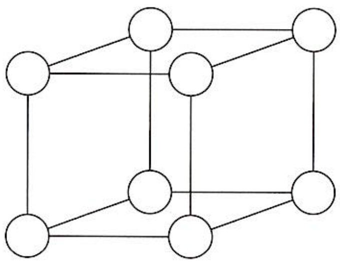
Y. Noël-Roch

Des polyèdres numérisés

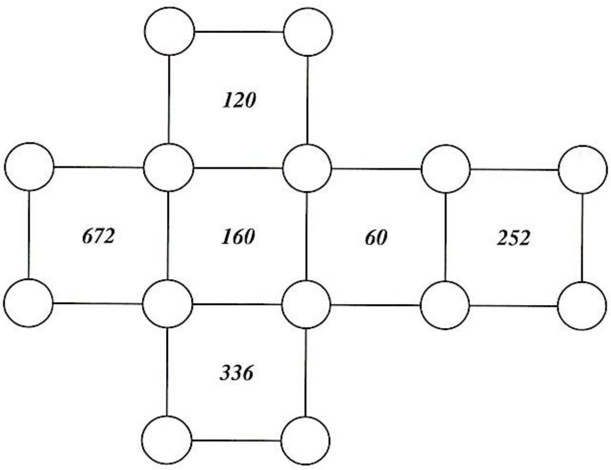
Sommets et faces (***D'après une idée de B. Honclaire***)

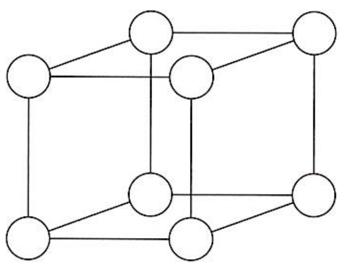
Les huit premiers nombres premiers ont été attribués aux sommets d'un cube. Sur un développement du cube, on a marqué pour chacune des faces le produit des nombres attribés à ses quatre sommets. Placez les nombres aux sommets du cube.





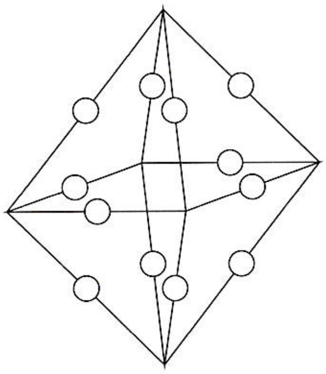
Cette fois, les nombres à placer aux sommets du cube sont les nombres de 1 à 8.





Arêtes et sommets

Les douze arêtes d'un octaèdre ont été étiquetées par les nombres de 1 à 12. En chaque sommet on a calculé le total des étiquettes affectées aux quatre arêtes qui y aboutissent. Placez ces étiquettes de manière à ce que les totaux en les six sommets soient identiques.

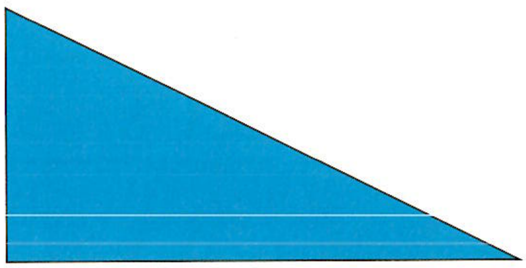


Pourquoi ne posons-nous pas ce problème pour un cube ?

Assembler des triangles en un carré

Voici un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 10 et 5.

Reproduisez ce triangle en 20 exemplaires et assemblez-les en un carré.



Si vous voulez assembler des triangles rectangles de mesures entières (3 – 4 – 5), quel est le nombre minimum d'exemplaires nécessaires pour obtenir un carré ?

Calcul nébuleux

(*Math-Jeunes* n°12, nov-déc 1981 – Cl. Festraets)

Décryptez cette division, sachant que des lettres différentes représentent des chiffres différents.

```
T R O U V E | Q U I
* * *       |--------
-----       | C E C I
  * * *
  * * *
  -----
    * * *
    * * E
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          0
```

Pair-impair et magie

Le magicien vous propose de penser un nombre. Il vous demande ensuite de

- révéler si le nombre est pair ou impair ; s'il est pair, de le diviser par 2 ; s'il est impair, d'en soustraire 1 puis de diviser le reste par 2 ;
- procéder de la même façon avec le quotient obtenu ;
- continuer jusqu'au moment où vous obtenez 1 comme quotient.

Le magicien est alors capable de vous donner le nombre auquel vous avez pensé.

Si par exemple vous avez pensé 54, voici les informations que vous fournissez au magicien :

pair — impair — impair — pair — impair — quotient 1

Le magicien vous dit 54.

Comment expliquer ce pouvoir magique ?

Solutions des jeux : page 39

C. Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-neuvième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Le calendrier de cette OMB est le suivant :

Éliminatoire : le 14 janvier 2004
Demi-finale : le 3 mars 2004
Finale : le 21 avril 2004
Proclamation : le 8 mai 2004

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire. Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 3 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges
Tome 4 (1994-1998) : 5 €
Tome 5 (1999-2002) : 6 €
Tome 4 + tome 5 : 10 €
Ajouter 1,60 € de port pour un tome et 2,30 € de port pour deux tomes.
Adressez vos commandes à la SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons.
Compte : 000-0728014-29
Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. **Puissances de 6** (demi-finale - 1992)

   $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

   (A) 6^6 (B) 6^7 (C) 36^6 (D) 6^{36} (E) 36^{36}

2. **Valeurs d'une fonction** (éliminatoire - 1989)

   Si $f(x+2) = x^3 + 5x^2 + 10x + 12$, alors $f(0) + f(1)$ vaut

   (A) -28 (B) -16 (C) 10 (D) 36 (E) 54

3. **Basse-cour** (éliminatoire - 1991)

   Sans réponse préformulée - Dans une basse-cour, il n'y a que des poules et des lapins, avec en tout 70 pattes et 24 têtes. Quel est le nombre de poules ?

4. **Polynômes** (demi-finale - 1989)

   Pour combien de naturels n entre 1 et 100 le polynôme $x^2 + x - n$ est-il le produit de deux polynômes du premier degré à coefficients entiers ?

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 10

5. **Minimum** (éliminatoire - 1990)

Si x est un nombre réel, l'expression $(x-p)^2+(x-q)^2$, où p et q sont deux constantes réelles quelconques, prend une valeur minimum pour x égal à

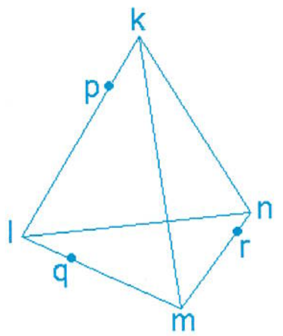
Ⓐ $p+q$ Ⓑ $\sqrt{pq}$ Ⓒ $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}$ Ⓓ $\frac{p+q}{2}$ Ⓔ $\frac{p+q}{4}$

6. **Anniversaire** (éliminatoire - 1991)

Sans réponse préformulée - Le lendemain de son anniversaire en 1991, une personne constate que son âge (en années) égale la somme des chiffres de son année de naissance. Quel est son âge ?

7. **Section d'une pyramide** (éliminatoire - 1992)

Les points p, q et r sont des points quelconques des arêtes $[kl]$, $[lm]$, $[mn]$ de la pyramide $klmn$; de plus, aucun d'entre eux n'est un sommet de cette pyramide.



Le plan déterminé par les points p, q et r coupe cette pyramide suivant

Ⓐ un triangle
Ⓑ un quadrilatère
Ⓒ un pentagone
Ⓓ un hexagone
Ⓔ un heptagone

8. **Cercle et sphère** (éliminatoire - 1990)

Sans réponse préformulée - Un cercle de rayon 39 cm est tracé sur une sphère de rayon 65 cm. Que vaut, en cm, la distance du centre du cercle au centre de la sphère ?

9. **Coloriage** (demi-finale - 1990)

Chaque arête d'un cube est coloriée en rouge ou en noir. Chaque face du cube a au moins une arête noire. Le plus petit nombre possible d'arêtes noires est

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ 6

10. **Régions de l'espace** (Eliminatoire - 1988)

Sans réponse préformulée - Quel est le nombre minimum de régions en lesquelles trois plans deux à deux distincts partagent l'espace ?

11. **Négation logique** (éliminatoire - 1989)

Quelle est la négation de l'affirmation « *Tous les guichets sont ouverts tous les jours de la semaine* » ?

Ⓐ Aucun guichet n'est ouvert tous les jours de la semaine
Ⓑ Un seul guichet est ouvert au moins un jour de la semaine
Ⓒ Un guichet au moins est fermé tous les jours de la semaine
Ⓓ Un seul guichet est ouvert tous les jours de la semaine
Ⓔ Un guichet au moins est fermé au moins un jour de la semaine

12. **Palindromes** (éliminatoire - 1992)

Un nombre naturel est un palindrome si, lu à l'envers, il reste le même (par exemple : 77, 131, 28 082). Combien de nombres entre 10 et 1 000 sont-ils des palindromes ?

Ⓐ 18 Ⓑ 90 Ⓒ 99 Ⓓ 100 Ⓔ 109

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	13	D	D	19	B	52	B	4	E	C

Rallye problèmes

N. Miewis

Les lauréats du rallye-problèmes 2002–2003 sont

pour *Math-Jeunes Junior* :

Numa Couniot, CES Saint-Joseph, Chimay,
Adrien Depresseux, A.R. Til Lorrain, Verviers
Thomas Radelet, A.R. Vauban, Charleroi

pour *Math-Jeunes* :

Thierry Caebergs, A.R. de Thuin
Mathilde Radelet, A.R. Vauban, Charleroi
Olivier Van Hamme, Institut Saint-Louis, Namur

Toutes nos félicitations à ces amateurs de problèmes.

Le rallye problèmes senior 2003-2004 comportera trois étapes publiées dans les numéros 106, 107 et 108 de cette revue. À chaque étape, cinq problèmes seront proposés à votre sagacité : à vous de trouver le bon raisonnement et d'avoir l'esprit logique. Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas ; il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Par contre vous pouvez nous envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu qu'une partie du problème et estimez que la suite est trop difficile pour votre âge, ou si vous aboutissez à des équations dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Certains problèmes rapporteront plus de points que d'autres car ils demandent un raisonnement un peu plus long. Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé. L'essentiel est de participer : plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances de gagner un prix.

Vous trouverez ci-dessous les cinq problèmes de la première étape. Envoyez vos solutions à Nicole Miewis, avenue de Péville, 150, 4030 - Grivegnée, munies de la mention « Rallye Math-Jeunes » avant le 10 décembre 2003. Les solutions les plus élégantes seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

1 — Les nappes (5 points)

Peut-on recouvrir entièrement une table carrée de 90 cm de côté en posant dessus deux nappes rondes de 1 m de diamètre ?

2 — Les assiettes (7 points)

2004 assiettes identiques sont réparties en 3 piles de hauteurs différentes. Quel nombre minimum d'assiettes peut contenir la plus haute pile ?

3 — L'escargot (5 points)

Pour signaler des travaux sur le bord d'une route, on y a placé des cônes. À la base de l'un d'eux, représenté ci-dessous, se prélasse un escargot.

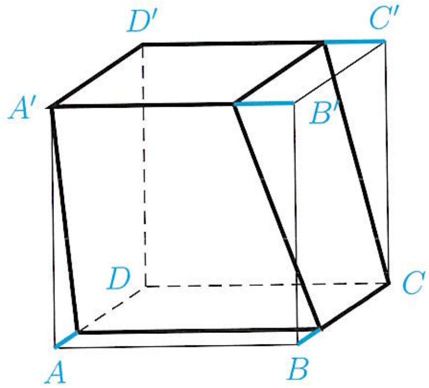
Diamètre 50 cm

Le soleil devenant trop ardent, il décide de rejoindre le point de la base diamétralement opposé en parcourant sur le cône la plus courte distance possible.

Calculer, à un mm près, la longueur réelle de sa trace.

4 — L'axe de symétrie (10 points)

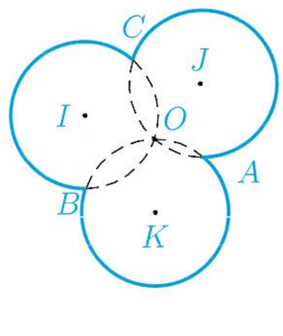
$ABCDA'B'C'D'$ est un cube. Les points I, J, K, L sont respectivement sur les arêtes $[AD]$, $[BC]$, $[D'C']$, $[A'B']$. Les distances AI, BJ, $C'K$ et $B'L$ sont égales.



Le solide $A'LKD'IJCD$ possède-t-il un axe de symétrie ? Justifier la réponse.

5 — Les arcs (10 points)

Soient 3 cercles de rayon r, de centres respectifs I, J, K, et ayant un point commun O. On appelle A, B et C les trois autres points d'intersection de ces cercles.

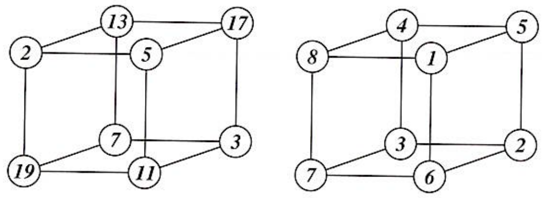


- Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Que représente le point O pour le triangle ABC?
- Calculer la somme des longueurs des trois arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ ne contenant pas le point O, en fonction du rayon r.

Solutions des jeux

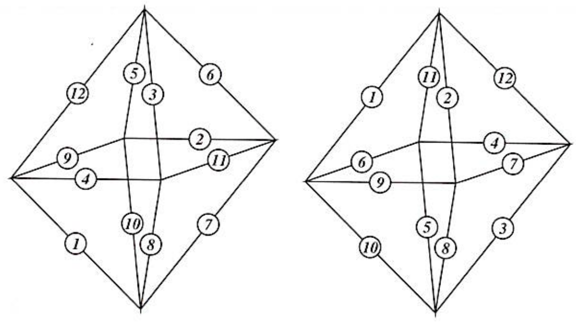
Des polyèdres numérisés

1. Sommets et faces



2. Arêtes et sommets

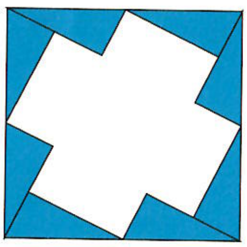
   a) Voici deux solutions :



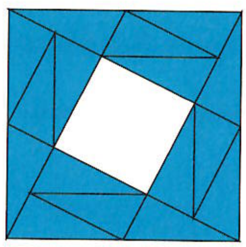
b) La somme des nombres de 1 à 12 vaut 78. Chaque nombre est compté en deux sommets. Le total général vaut donc 156. Pour un octaèdre, la somme en chaque sommet doit valoir $\frac{156}{6} = 26$. Pour un cube, il n'y a pas de solution puisque 156 n'est pas multiple de 8.

Assembler des triangles en un carré

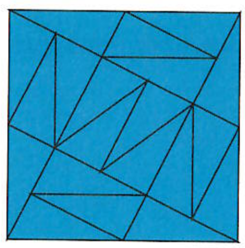
1. L'aire du carré formé des 20 triangles assemblés vaut 500. Le côté du carré mesure donc $10\sqrt{5}$. Ainsi, les côtés du carré doivent être formés de deux hypoténuses de triangles. Le fait que les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires permet d'obtenir les angles droits du carré !



Une rotation apparaît.



Nous continuons en utilisant cette rotation.



Mais nous ne pouvons pas remplir le carré central sans briser la régularité.

2. Soit n le nombre de triangles. L'aire du carré vaut $6n$, donc la mesure de son côté est $\sqrt{6n}$. Comme ce côté doit être obtenu en mettant bout à bout des segments de longueurs entières, il FAUT que $6n$ soit un carré parfait donc que n soit du type $6k^2$.

   Pour $k = 1$, nous disposons de 6 triangles... Ils ne permettent pas un assemblage en carré.

   Pour $k = 2$, nous disposons de 24 triangles et cette fois, un assemblage en carré de côté 12 est immédiat.

   Le nombre minimum de triangles 3–4–5 est donc 24.

Calcul nébuleux

```
9 8 6 3 0 4 | 1 3 2
9 2 4       | 7 4 7 2
  6 2 3
  5 2 8
    9 5 0
    9 2 4
      2 6 4
      2 6 4
          0
```

Pair-impair et magie

Si la numération en base 2 vous est familière, le jeu était dépourvu de toute magie.

Sinon, il faut savoir que la numération en base DEUX fonctionne exactement comme la numération décimale que nous utilisons constamment... mais le rôle du nombre DIX est joué par le nombre DEUX.

En numération décimale, $35073 = 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. Les chiffres utilisés sont 0, 1,..., 9. Toute unité d'un rang vaut dix unités du rang situé immédiatement à sa droite.

En numération binaire, toute unité d'un rang vaut deux unités du rang situé immédiatement à sa droite. Les seuls signes nécessaires pour écrire les nombres sont 0 et 1 puisque deux unités d'un rang valent une unité du rang situé immédiatement à sa gauche. Voici donc les nombres de UN à DIX :

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010

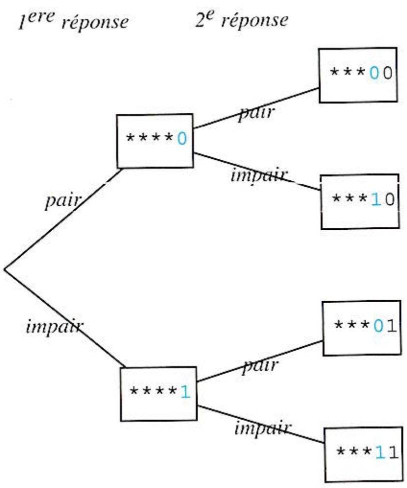
Le nombre qui s'écrit 11101 en binaire vaut $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ et s'écrit 29 en décimal.

En base DEUX,
- tout nombre multiple de DEUX s'écrit avec 0 comme chiffre des unités
- tout nombre multiple de QUATRE s'écrit avec deux zéros à droite (0 comme chiffre des unités et comme chiffre des « deuzaines »)
- tout multiple de HUIT s'écrit avec trois zéros à sa droite
- ...

Ainsi,

- si la première réponse du magicien est "pair", le nombre s'écrit $*\,*\,*\,*\,*0$, sinon il s'écrit $*\,*\,*\,*\,*1$,
- si la deuxième réponse du magicien est "pair", le nombre s'écrit $*\,*\,*\,*\,0*$, sinon il s'écrit $*\,*\,*\,*\,1*$.

Considérons les deux premières réponses simultanément :



Le magicien construit ainsi progressivement (de droite à gauche) le nombre en numération binaire. Il ne lui reste plus qu'à le convertir en numération décimale.

Liste des noms cités dans ce numéro

Abel, Niels. 1802–1827.

al Khayyam, Omar. 1024–1123.

al-Khwārizmī, Muhammad Ibn Mūsa. 780–850.

Binet, Jacques. 1786–1856.

Bombelli, Rafael. 1530–1572.

Cardano, Girolamo. 1501–1576.

Cayley, Arthur. 1821–1895.

da Pisa (Fibonacci), Leonardo. 1170–1250.

Euclide. ~300 a.c.

Ferrari, Lodovico. 1522–1560.

Galois, Evariste. 1811–1832.

Lagrange, Joseph-Louis. 1736–1813.

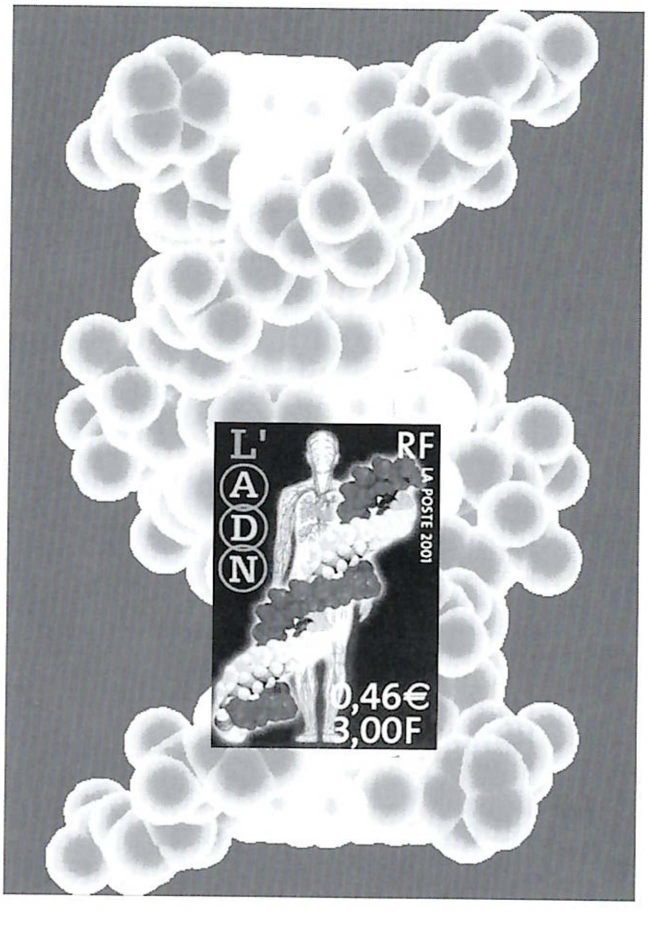
Sylvester, James. 1814–1897.

Tartaglia, Nicolo. 1506–1557.

van Roomen, Adriaan. 1561–1615.

Viète, François. 1540–1603.

Dans notre prochain numéro :



- Le cinquantième anniversaire de la découverte de la structure hélicoïdale de l'ADN
- Le point de vue du biologiste
- Des hélices et des spirales
- Un tableur qui dessine des courbes
- ...

... sans oublier nos rubriques habituelles.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G . NOËL
Rue de la Culée 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée