Le Monde des COURBES

MATH-JEUNES

25ème année
Janvier 2004 - n°107 S

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte IBAN BE 26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60€	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

Sommaire

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne

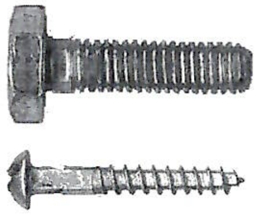
– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°107 Vingt-cinquième année 2004

MATH-JEUNES

Le monde des courbes

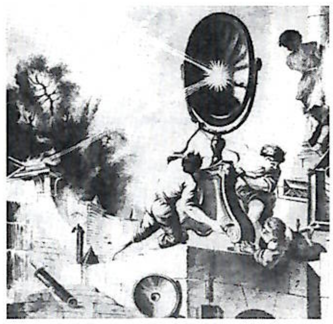
Contrairement à une opinion trop répandue, la biologie est une discipline scientifique qui utilise très souvent des outils mathématiques. Depuis les travaux du moine autrichien G. MENDEL (1822–1884), on sait qu'il en est particulièrement ainsi en génétique. Aussi notre revue devait-elle consacrer la place qui lui revient à la célébration du 60e anniversaire de la structure en double hélice de l'acide désoxyribonucléique (ADN). C'est l'objet de la rubrique « Anniversaire » de S. Trompler, ainsi que d'un court article de C. Carleer qui donne quelques détails de nature biologique.



Les hélices ne se rencontrent pas uniquement en biologie. On peut même dire que ces courbes sont d'un usage très fréquent. Que l'on songe à l'escalier en colimaçon, à la vis de menuisier, aux ressorts, etc. Une hélice peut s'enrouler autour d'un cylindre, d'un cône ou d'autres solides. C. Randour nous explique ce qu'est une hélice pour un mathématicien et comment en dessiner des représentations planes. Elle envisage successivement la représentation en géométrie descriptive, la représentation en perspective oblique (encore appelée « perspective cavalière ») et enfin la représentation en perspective centrale.

Les hélices dont nous venons de parler sont des courbes de l'espace. L'élève de l'enseignement secondaire connaît bien la parabole qui « vit » dans le plan. C. Villers nous montre comment ses propriétés sont néanmoins déterminantes pour construire ces objets bien matériels et bien utiles que sont les antennes paraboliques (appelées communément « paraboles » et dont le nom mathématique serait « calotte de paraboloïde de révolution »). Faut-il rappeler que l'on attribue souvent à ARCHIMÈDE (287–212 av J.-C.) l'invention de « miroirs ardents » qui auraient contribué à la défaite de la flotte romaine envahissant Syracuse ?

Si ce « fait historique » est loin d'être attesté, des miroirs ardents ont bel et bien été construits depuis longtemps. La peinture ci-contre est due à J. LA JOUE (1687–1761).



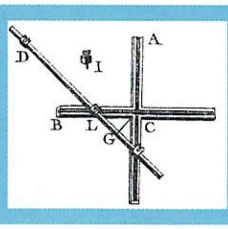
D'autres courbes « omniprésentes » sont les spirales, et particulièrement les spirales d'Archimède, encore lui !

Dès l'âge du bronze, des spirales ont été gravées sur des pierres. Le dessin suivant reproduit les gravures d'une pierre du dolmen de Gavrinis (Bretagne).

J. Opsomer et P. Tilleuil nous expliquent comment dessiner une spirale d'Archimède à l'aide d'un... tableur.

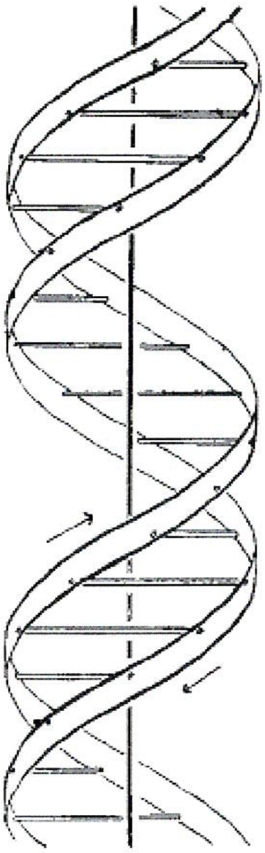
Notre dernier article, dû à G. Noël et P. Tilleuil fait une petite place aux monstres : des courbes monstrueuses qui ont effrayé plus d'un mathématicien lors de leur découverte, mais aussi un monstre antique. Mais n'en disons pas plus...

Il existe bien d'autres types de courbes que les hélices, les spirales et les paraboles. Aussi, tout au long des vingt-quatre premières pages de ce numéro, un bandeau est consacré à des courbes variées. Un catalogue beaucoup plus complet a fait l'objet d'un numéro spécial (n°45) de la Revue du Palais de la Découverte à Paris. Nous commencerons par un instrument permettant de dessiner une ellipse. Cette planche est extraite de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.



S. Trompler

La découverte de la structure de l'ADN a cinquante ans. C'est une des plus importantes avancées de la Science du XX^{e} siècle.



Extrait de *Molecular structure of nucleic acids*, par J. D. WATSON et F.H.C. CRICK (voir ci-dessous « Pour en savoir plus ».)

En effet, l'ADN est la molécule de la Vie ; la connaissance de sa structure a permis de comprendre le mécanisme de l'hérédité. L'ADN de chaque individu est différent et il identifie ainsi quelqu'un sans doute possible, à partir d'un cheveu, d'un morceau d'ongle, d'une goutte de sang, etc. L'analyse de l'ADN est actuellement un des meilleurs auxiliaires, totalement objectif, de la Justice.

Cette analyse donne aussi un moyen de comparaison entre les êtres vivants, montre leurs ressemblances et leurs différences, indique la filiation des espèces et leur évolution.

Nous ne sommes encore qu'au début de l'utilisation de cette molécule dans les domaines les plus divers, notamment en médecine, et il est probable que les années qui suivent montreront encore mieux l'importance de sa découverte.

C'est en 1869 que l'ADN est découverte sous forme de complexe par le Suisse Frédéric MIESCHER, à partir de pus sur des bandages. On l'appelle alors « nucléine » parce qu'il est abondant dans le noyau des cellules. Cette molécule est riche en phosphore et est acide.

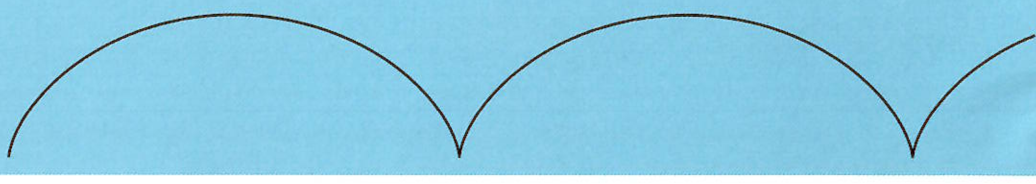
Personne ne se doute à cette époque que la nucléine est le support de l'hérédité, mais les chercheurs s'y intéressent néanmoins. Le constituant acide non protéique est appelé acide nucléique puis ADN (acide désoxyribonucléique).

En 1944, une équipe américaine découvre que le caractère génétique de virulence de pneumocoques peut être transféré par l'intermédiaire de leur ADN.

Le rôle de l'ADN dans l'hérédité est reconnu au début des années cinquante par toute la communauté scientifique.

Mais comment se présente cette molécule ? Quelle est sa structure spatiale ? Comment se fait-il qu'elle transmette les caractères héréditaires ?

La cycloïde : courbe engendrée par un point d'un cercle de rayon R roulant sur une droite.
$x = R(t - \sin t)$
$y = R(1 - \cos t)$



Tant en Amérique qu'en Europe, il est clair pour tous les biochimistes que la réponse à ces questions est d'une importance primordiale, et qu'un prix Nobel récompensera celui ou ceux qui la trouveront.

La course à la découverte de la structure de l'ADN est engagée, activement, sans merci, entre les chercheurs d'Amérique et d'Europe. Cette découverte met en jeu de nombreuses disciplines telles que la cristallographie, la diffraction aux rayons X, la chimie des grosses molécules.

En 1951, James WATSON, biologiste américain de 22 ans, est passionné par l'établissement de la structure des protéines qu'a réalisée le grand chimiste Linus PAULING : l'élément de base est une hélice. Les diagrammes de réfraction aux rayons X d'un cristal d'ADN , opérés par le cristallographe anglais Maurice WILKIN, montrent une régularité que la structure en hélice pourrait expliquer.

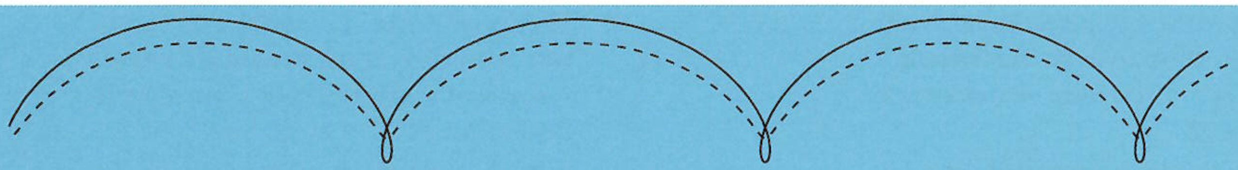
James Watson s'associe à un physicien anglais de 35 ans, Francis CRICK, dans un groupe de l'université de Cambridge. Dans cette université se côtoient des équipes interdisciplinaires de haut niveau, ce qui enrichit beaucoup les hypothèses et facilite la détection d'erreurs.

Après de multiples essais en Amérique et en Europe, tous mettant en jeu des hélices, tous erronés, finalement Watson et Crick trouvent la solution : la double hélice bien connue actuellement. Ils se précipitent pour publier un article dans la revue *Nature*, sans aucune vérification expérimentale, tellement ils ont peur d'être pris de vitesse par les concurrents. Ils précisent les enjeux de cette structure par la phrase « il n'a pas échappé à notre attention que l'appariement spécifique des bases que nous avons postulé suggère immédiatement un possible mécanisme du recopiage de matériel génétique ».

Le prix Nobel de physiologie et de médecine sera attribué à Watson, Crick et Wilkin en 1962. Nous connaissons assez bien les péripéties de cette aventure scientifique grâce, notamment, au livre de James Watson « *The Double Helix* » où il raconte en détail les revers et les succès de l'entreprise qui a mobilisé tant de chercheurs.

Les procédés employés pour gagner la course à la découverte de la structure de l'ADN ne sont pas un modèle d'éthique et de rigueur : des renseignements confidentiels arrachés à une équipe, un manque de confirmation expérimentale, ne sont que des exemples parmi d'autres de démarches habituellement condamnées par la morale scientifique. D'autres hommes et une femme, Rosalind FRANKLIN, auraient mérité de figurer parmi les lauréats de ce prix Nobel.

Pour en savoir plus
- A. Kahn, *L'hélice de la vie*, Médecine/Sciences, Vol. 19, n°4 , (avril 2003).
- J. D. Watson, *La double hélice*, Coll. Jeune science, Ed. Laffont, (1968)
- J. D. WATSON et F.H.C. CRICK, *Molecular structure of nucleic acids*, Nature, N°4356, (25 avril 1953)

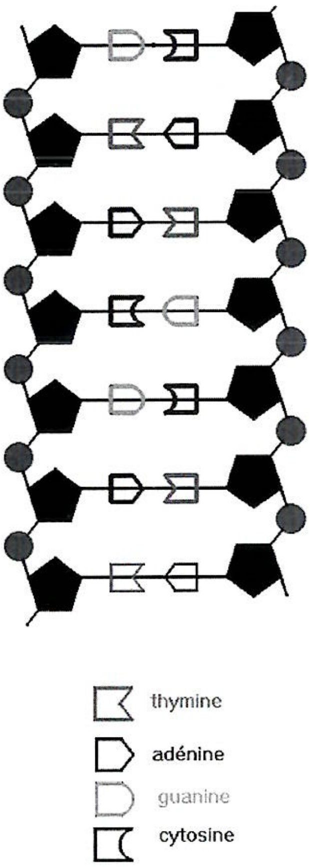


Cycloïdes raccourcie ($a < 1$, **en pointillés) et allongée** ($a > 1$) $x = R(t - a \sin t)$ $y = R(1 - a \cos t)$

L'ADN, une molécule à la fois biologique et mathématique

C. Carleer

1- Quelques rappels de nos cours de biologie : l'ADN ou acide désoxyribonucléique est le composant principal du noyau cellulaire. On le trouve aussi chez les bactéries qui ne possèdent pas de vrai noyau (il n'y a pas de membrane nucléique) Chez la majorité des êtres vivants, c'est l'ADN qui forme les chromosomes, associé à d'autres molécules. Les chromosomes ne sont constitués, donc visibles, que lors des divisions cellulaires.



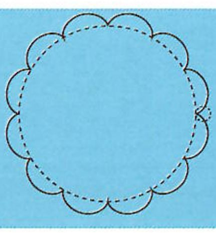
Les pentagones représentent les phosphates, et les disques représentent les sucres.

2- Structure de l'ADN (voir schémas) : On sait depuis longtemps que l'ADN est formé par la combinaison de six types moléculaires différents. Un sucre, le désoxyribose ; un groupement phosphate dérivant de l'acide phosphorique ; quatre bases organiques que l'on désigne souvent par leur initiale, A pour adénine, T pour thymine, C pour cytosine et G pour guanine. Mais ceci ne nous indique rien à propos de la structure spatiale de l'ADN. Pourtant, des analyses chimiques précises ont donné quelques renseignements. Pour commencer, désoxyribose et groupements phosphates sont en quantités rigoureusement égales, quelle que soit l'espèce vivante étudiée.

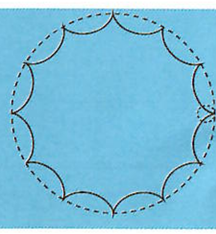
Ensuite, on trouve autant de A que de T et autant de C que de G, comme si ces bases étaient toujours associées en paires de bases A-T et C-G, ici aussi quelle que soit l'espèce vivante étudiée. Par contre, les proportions relatives de ces paires de bases sont typiques de chaque espèce vivante. Ces observations ainsi que des analyses spectrométriques sur de l'ADN cristallisé ont permis à Watson et Crick (se basant aussi sur les travaux d'autres chercheurs tels Rosalind Franklin et Maurice Wilkins) d'élaborer un des symboles de la biochimie moderne, la célèbre double hélice d'ADN.

Cette découverte a fait l'objet, à juste titre, d'un prix Nobel. Chacune de ces hélices est constituée d'une succession sucre–phosphate–sucre–phosphate–... ces hélices étant reliées entre elles par les paires de bases décrites ci-dessus. Ces hélices sont toutes deux dextrogyres mais sont construites en sens contraires. Remarquons enfin que la molécule d'ADN est universelle, on la trouve en effet chez tous les êtres vivants, du plus simple au plus complexe, ainsi que chez certains virus (les adénovirus). Elle a partout le même rôle.

Épicycloïde : courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r roulant à l'extérieur d'un cercle de rayon R
$x = (R+r)\cos t - r\cos(\frac{R}{r}+1)t$,
$y = (R+r)\sin t - r\sin(\frac{R}{r}+1)t$



Hypocycloïde : courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon R
$x = (R-r)\cos t + r\cos(1-\frac{R}{r})t$,
$y = (R-r)\sin t + r\sin(1-\frac{R}{r})t$



3- Rôle de l'ADN : Lui aussi est resté longtemps mal connu, mal compris. Il a fallu de nombreuses expériences pour montrer que l'ADN est responsable de la structure et du fonctionnement des cellules et par là des êtres vivants eux-mêmes. Une sorte de logiciel, pour parler informatique. Petite question pour les curieux. Puisque toutes les cellules d'un être vivant contiennent le même ADN, comment expliquer que cet être vivant soit formé d'un nombre souvent important de types cellulaires différents ? Il y a là un paradoxe semble-t-il. Eh bien non, car chaque type cellulaire n'utilise qu'une partie du message, du logiciel ADN, celle qui lui correspond.

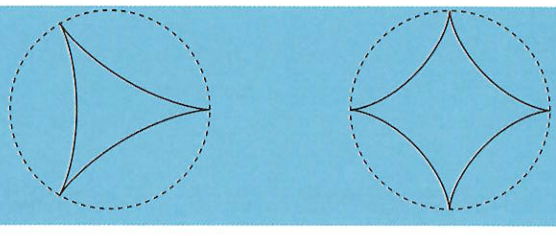
En fait, on peut considérer l'ADN comme un texte moléculaire utilisant un alphabet de quatre lettres, A, T, C et G. Chaque « mot » de ce texte est traduit pour donner un autre texte, une protéine pour être plus précis. Ce texte protéine utilise pour sa part un alphabet de vingt lettres, les vingt sortes d'acides aminés présents dans la nature (ici aussi il y a universalité, ces vingt acides aminés sont présents chez tous les êtres vivants, seules leurs proportions varient d'une espèce à l'autre) La traduction du texte ADN en texte protéine utilise un code, le célèbre code génétique. L'ensemble du phénomène, qui porte le nom de synthèse des protéines, a été découvert par une équipe de chercheurs français, Messieurs Jacques Monod, François Jacob et André Lwoff, travail lui aussi récompensé par un prix Nobel.

4- Le code génétique : Nous venons de voir qu'il doit permettre la traduction d'un texte en un autre. Une correspondance lettre ADN à lettre acide aminé ne convient pas, quatre lettres au départ ne peuvent en déterminer vingt à l'arrivée. Une correspondance deux « lettres ADN » à une « lettre acide aminé » non plus, il n'existe que seize « mots » de deux lettres utilisant un alphabet de quatre lettres. Une correspondance trois « lettres ADN » à une « lettre acide aminé » semble convenir, bien que l'on puisse écrire soixante-quatre « mots » de trois lettres utilisant un alphabet de quatre lettres. Cette troisième option est la bonne, plusieurs « mots » de trois lettres du texte ADN correspondent à la même lettre ou acide aminé du texte protéine. Chacun de ces « mots » de trois lettres ou triplets est une unité du code, il en existe donc soixante-quatre.

5- Rôles des protéines : Pour ne pas entrer dans les détails, ne parlons que du rôle de structure des protéines : entre autres, elles entrent dans la structure de toutes les membranes cellulaires, et surtout du rôle enzymatique des protéines : les enzymes permettent le bon déroulement de toutes les réactions vitales des êtres vivants (respiration, photosynthèse, synthèses et décompositions diverses...)

6- Les ARN : des intermédiaires entre ADN et protéines. L'ADN étant confiné dans le noyau et la synthèse des protéines se déroulant dans le cytoplasme des cellules, il faut un intermédiaire, un messager qui transporte l'information ADN vers ce cytoplasme. L'ARN messager est chargé de ce transport. En effet, il copie une partie du texte ADN (selon les besoins de la cellule, c'est la transcription) et gagne le cytoplasme. Remarquons que dans les ARN, T est remplacé par U (l'uracile qui a les mêmes caractéristiques que T) De plus, cet ARNm (l'indice m signifie messager) n'est formé que d'une chaîne (alors que l'ADN est formé, rappelons le, de deux chaînes en hélices) et n'a de ce fait pas de structure spatiale précise. C'est à partir de cet ARNm qu'il faut trouver les acides aminés par la correspondance triplet-acide aminé.

Deux hypocycloïdes simples :
1) à trois points de rebroussement ($R = 3r$),
2) à quatre points de rebroussement ($R = 4r$).
Cette dernière courbe est aussi appelée « astroïde ».

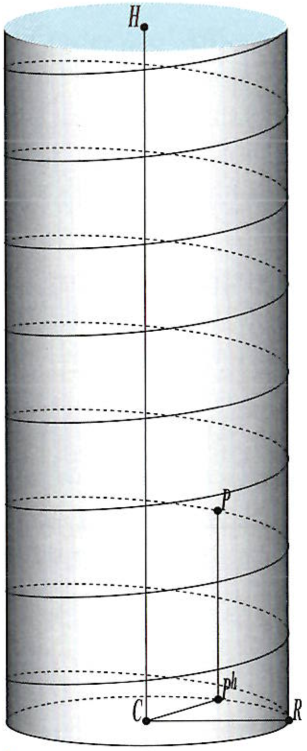


 Math-Jeunes n°107, 6–13, 2004

Des représentations d'une hélice circulaire

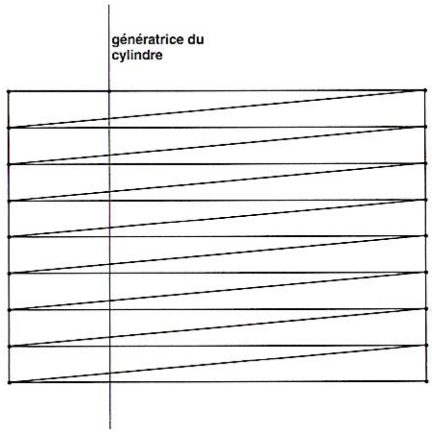
C. Randour

1. Hélice circulaire



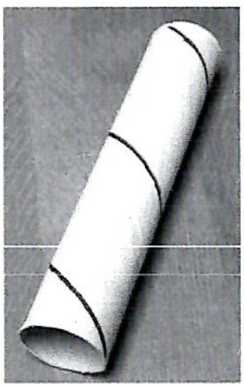
P^{h} étant la projection d'un point P de l'hélice sur le plan de base du cylindre, la position de P est déterminée par l'angle $t = \widehat{RCP^{\mathsf{h}}}$ et la hauteur $|PP^{\mathsf{h}}| = kt$. Le choix du nombre k permet un enroulement plus ou moins serré des spires sur le cylindre. La distance entre deux spires consécutives vaut $k.2\pi$ et est appelée le *pas* de l'hélice.

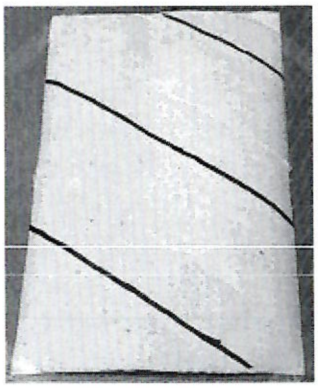
Hélice : du grec *helix*, courbe située sur la surface d'un cylindre dont les tangentes en chaque point forment un angle constant avec les droites génératrices.



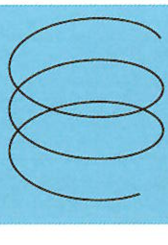
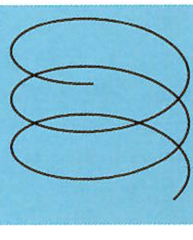
En découpant le rectangle ci-contre et en recollant les deux bords verticaux, former un cylindre.
Les segments obliques décrivent alors une hélice circulaire.

Découper un carton de rouleau d'essuie-tout, suivant une droite parallèle à l'axe, montre l'hélice avec laquelle il est fabriqué comme une succession de segments parallèles.



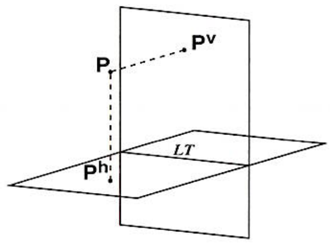


Exercice : Représenter sur un rectangle une « double hélice » faisant deux tours complets !

Des hélices **gauche :**  **droite :** 

2. Représenter une hélice circulaire avec Cabri en géométrie descriptive

La géométrie descriptive, également appelée « méthode de Monge » a été développée par Gaspard MONGE, (1746–1818). Elle utilise deux plans de projection perpendiculaires entre eux : un *plan vertical* et un *plan horizontal*. Tout point P de l'espace est déterminé par sa projection orthogonale sur le plan vertical, P^{v}, et sa projection orthogonale sur le plan horizontal, P^{h}.

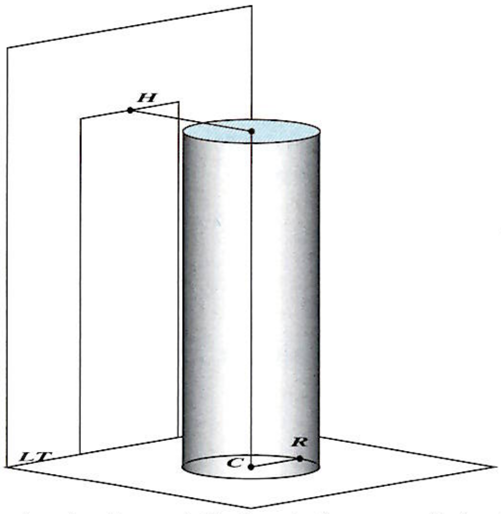


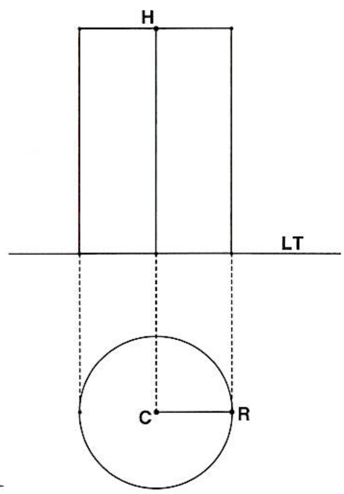
Le rabattement du plan horizontal sur le plan vertical, en utilisant leur intersection (appelée *ligne de terre* et notée simplement LT) comme charnière, permet une représentation plane de tout objet spatial.

Notre premier objectif est de représenter par la méthode de Monge une hélice enroulée autour d'un cylindre droit. À cet effet, nous utiliserons Cabri-Géomètre, afin de disposer des capacités dynamiques de ce logiciel qui nous permettront d'observer le parcours de l'hélice par un point.

Représenter un cylindre droit

Les projections verticale et horizontale du cylindre sont respectivement un rectangle et un cercle.





- Dessiner la ligne de terre LT,
- choisir un point C,
- tracer la droite horizontale parallèle à LT comprenant C et placer un point R sur cette droite,
- tracer la projection horizontale du cylindre : le cercle de centre C comprenant R,
- tracer la droite verticale comprenant C, et placer un point H sur cette droite,
- tracer la projection verticale du cylindre : le rectangle limité par la ligne de terre, l'horizontale passant par H et les verticales tangentes au cercle,
- cacher les constructions devenues inutiles.

La figure de droite a été dessinée avec Cabri-Géomètre™. Le centre C de la base du cylindre peut se déplacer. En déplaçant le point R, on modifie le rayon de la base et en déplaçant le point H, on modifie la hauteur du cylindre. La construction est détaillée ci-contre.

Représenter une hélice circulaire

Pour dessiner une hélice, on doit en déterminer les projections horizontale et verticale. La projection horizontale est simplement le cercle de

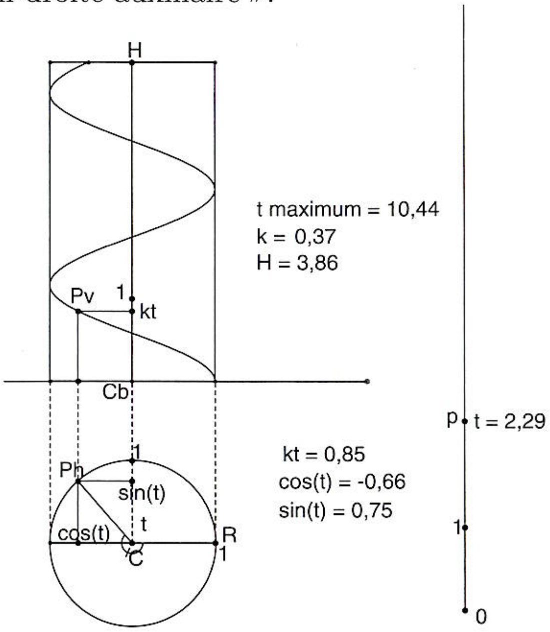
- Dessiner une demi-droite, marquer 0 à l'origine et choisir un point, noté 1.
- Placer un point p sur la demi-droite. Son abscisse t peut être obtenue en calculant le rapport $\frac{|0p|}{|01|}$.
- Utiliser la calculatrice incorporée à `Cabri` pour calculer $\cos(t)$, $\sin(t)$ et $k.t$.
- Reporter $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sur les axes x et y. Marquer le point P^{h}.
- Marquer Cb à l'intersection de CH et de la ligne de terre. Tracer $[CbH]$.
- Graduer ce segment en choisissant $|CR|$ comme unité de longueur.
- Calculer la valeur maximale de t pour que le point de hauteur $k.t$ sur la demi-droite $[CbH$ appartienne au segment $[CbH]$: $t_{max} = \frac{1}{k}\frac{|CbH|}{|CR|}$.
- Donner à t une valeur inférieure à t_{max} et construire le point P^{v}.
- Demander le lieu de P^{v} lorsque le point p, d'abscisse t, parcourt le segment $[0, t_{max}]$ de la demi-droite auxiliaire.

base du cylindre. On considèrera ce cercle comme étant le cercle trigonométrique, le point R étant le point de coordonnée $(1, 0)$. Si P^{h}est la projection horizontale d'un point P de l'hélice, on note t l'angle $\widehat{RCP^{\mathsf{h}}}$. La coordonnée de P^{h}est donc $(\cos(t), \sin(t))$.

La projection verticale P^{v}de P est le point de hauteur $k.t$ sur la verticale passant par P^{h}.

À toute valeur de t, on associe ainsi un point de l'hélice. Pour obtenir la projection verticale de celle-ci, on demandera le lieu du point P^{v}, lorsque le paramètre t est l'abscisse d'un point variable sur une demi-droite quelconque.

La construction de la projection verticale de l'hélice, détaillée ci-contre, commence donc par le choix d'une telle demi-droite, que nous qualifierons de « demi-droite auxiliaire ».

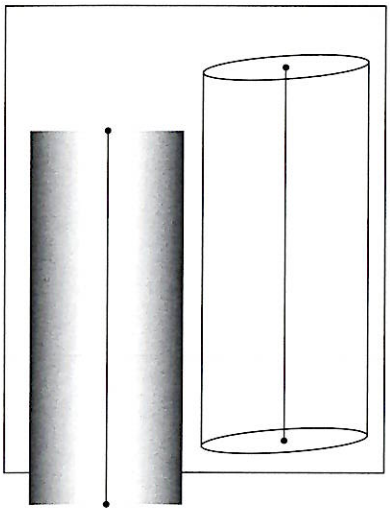


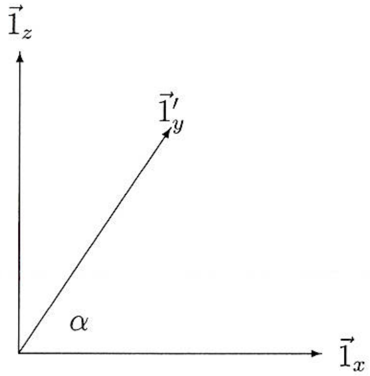
Remarquer que la projection verticale de l'hélice est une partie de sinusoïde.

3. L'hélice en perspective oblique

En perspective oblique, les objets de l'espace sont projetés sur un plan vertical parallèlement à une direction faisant avec ce plan un angle non droit. Les dimensions des segments parallèles à ce plan sont conservées, cependant que tout segment perpendiculaire au plan est reporté sur une droite faisant un angle constant, α, avec LT et que sa longueur est multipliée par un facteur r $(r < 1)$.

Un des trois problèmes classiques de l'antiquité grecque était celui de la trisection de l'angle : construire *à la règle et au compas* un angle qui soit le tiers d'un angle donné. Ce problème n'a pas de solution générale. Aussi des courbes (elles-mêmes non constructibles à la règle et au compas) ont-elles été utilisées dans ce but. On les appelle des « trisectrices ». Nous en présentons quatre dans les pages qui suivent.



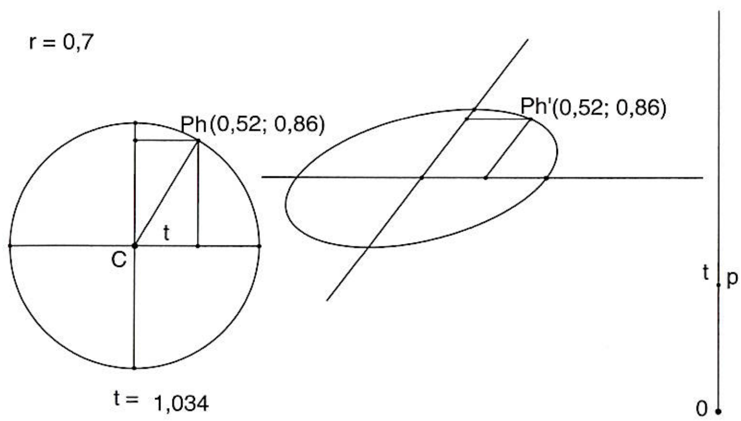


En termes vectoriels, les vecteurs unités $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_z$ des axes x et z étant dans le plan vertical de projection, sont projetés sur eux-mêmes, cependant que le vecteur unité $\vec{1}_y$ de l'axe y est projeté sur le vecteur $\vec{1}'_y = (r\cos(\alpha), 0, r\sin(\alpha))$ du plan xoz. L'image du point (x, y, z) de l'espace est donc le point $(x + ry\cos(\alpha), 0, z + ry\sin(\alpha))$ du plan xoz.

Passer de la géométrie descriptive à la perspective oblique.

Notre deuxième objectif consiste à représenter sur une même figure la représentation de Monge d'une hélice ET sa représentation en perspective oblique. Nous devons donc compléter la figure de la page 8.

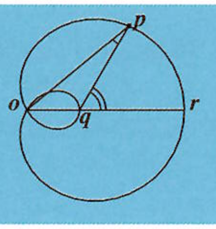
Nous allons commencer par représenter le cercle de base du cylindre et, pour cela, partir de la projection horizontale de la représentation de Monge. Un point P^{h} de ce cercle est de hauteur nulle, sa coordonnée spatiale est $(\cos(t), \sin(t), 0)$. L'axe x est parallèle au plan vertical de projection. La composante $\cos(t)$ est donc conservée par projection. Par contre, l'axe y est perpendiculaire au plan de projection. La composante $\sin(t)$ est donc remplacée par $r.\sin(t)$ et doit être reportée sur une droite faisant avec l'axe x l'angle α. Pour la lisibilité de la figure, il vaut mieux que l'ancienne projection horizontale de la représentation de Monge et la représentation en perspective oblique ne se superposent pas. On crée donc un nouveau système d'axes et on reporte les coordonnées de P^{h} dans ce système pour dessiner l'image de ce point $P^{\mathsf{h}'}$ en perspective oblique.



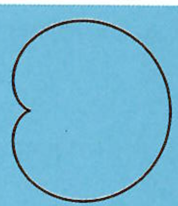
On peut éventuellement, comme sur la figure ci-contre, demander le lieu de $P^{\mathsf{h}'}$ lorsque p parcourt un segment de longueur 2π. Cependant cette ellipse, qui est la projection de l'hélice sur le plan de base du cylindre ne fait pas partie de l'hélice elle-même. On devra donc ensuite la cacher.

Le limaçon de Pascal (il s'agit d'ici d'Étienne Pascal, père de Blaise)
$\rho = a\cos\theta + b$

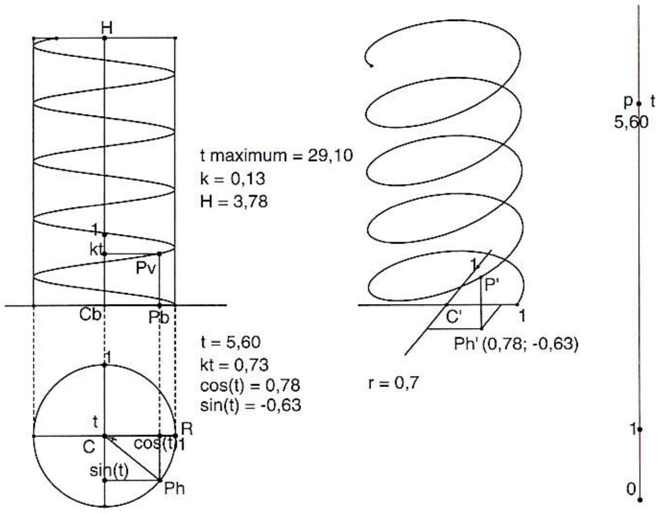
Dans le cas particulier $a = 1$, $b = 0.5$, le limaçon est une courbe trisectrice
$\widehat{opq} = \frac{1}{3}\widehat{pqr}$



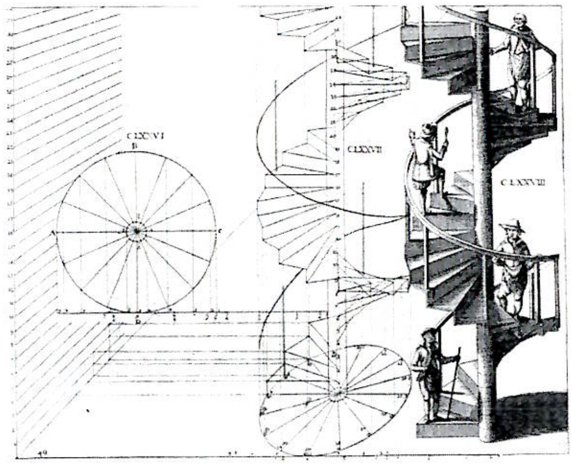
La cardioïde est un cas particulier du limaçon mais n'est pas trisectrice
$\rho = \cos\theta + 1$



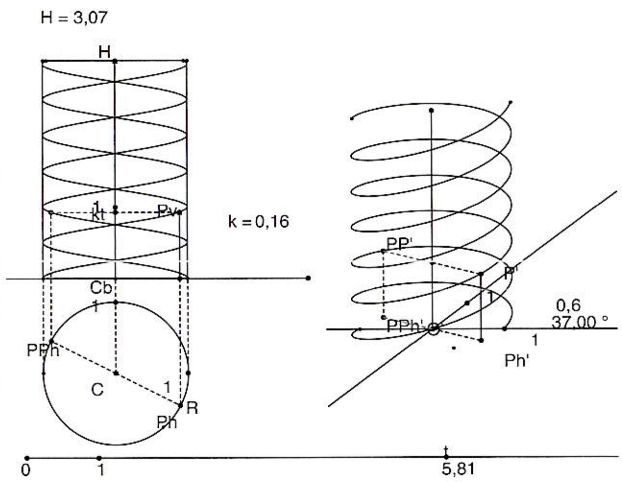
Puisque les segments verticaux sont reproduits en vraie grandeur en perspective oblique, la distance du point P', représentation de P, à $P^{h'}$, est égale à $k.t$. Cette valeur ayant déjà été calculée quand on a réalisé la projection de Monge, on utilise les outils de `Cabri` pour la reporter à la verticale de $P^{h'}$. En demandant alors le lieu de P' lorsque t parcourt le segment $[0, t_{max}]$, on obtient l'hélice en perspective oblique.



La gravure ci-contre, de Samuel Marolois (1572–1627), représente un escalier en perspective oblique. Gravure extraite de *Opera mathematica*, ou *Œuvres mathématiques traictans de géométrie, perspective, Architecture, et Fortification*



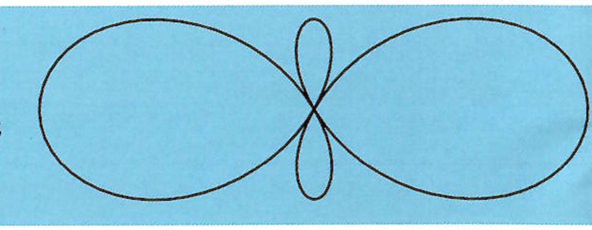
4. La double hélice en perspective oblique



On complète la représentation de Monge en dessinant PP^{h}symétrique de P^{h} par rapport au centre C et en plaçant PP^{v} à la veticale de PP^{h} et à l'horizontale de P^{v}. Quant à la représentation en perspective oblique, $PP^{\mathsf{h}'}$, est le symétrique de $P^{\mathsf{h}'}$ par rapport au centre O' et PP' est obtenu en translatant $PP^{\mathsf{h}'}$ de la même hauteur que P^{h}'. Les lieux des nouveaux points pour t variant sur le segment donnent les nouvelles courbes.

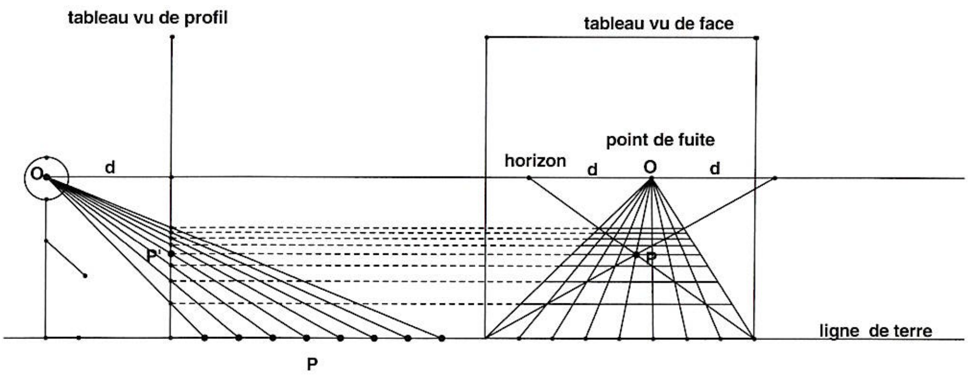
La trisectrice de Mac Laurin
$\rho = 4a\cos\theta - \frac{a}{\cos\theta}b$
L'équation cartésienne est
$x(x^2+y^2) = a(3x^2-y^2)$

La trisectrice de Ceva
$\rho = 1 + 2\cos 2\theta$
L'équation cartésienne est
$(x^2+y^2)^3 = (3x^2-y^2)^2$



5. Quelques notions de perspective centrale

Le principe de la perspective dite linéaire, centrale ou artificielle, se développe à Florence au début du XV^{e} siècle. Les lois de la perspective sont mises en évidence par l'architecte, ingénieur, peintre et sculpteur Filippo BRUNELLESCHI (1377–1446) et Leon Battista ALBERTI (1404–1472), architecte et artiste. En 1436, Alberti achève son traité sur la représentation de l'espace « *Della Pittura* ». Il est le premier à énoncer explicitement les règles de la perspective.

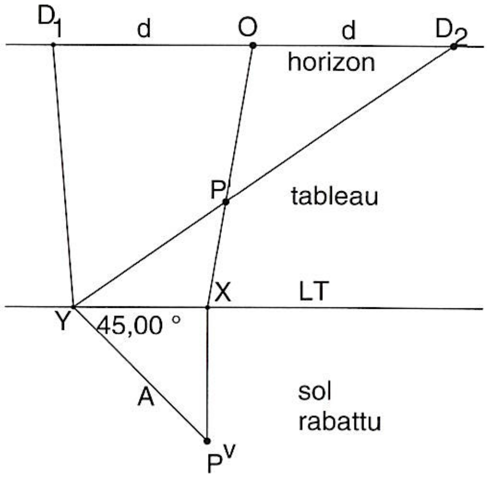


La toile du peintre est située dans un plan vertical perpendiculaire au plan horizontal du sol. La droite d'intersection de ces deux plans est appelée *ligne de terre*. Notons O l'œil du peintre. Chaque point P de la scène est représenté par le point P', intersection du plan du tableau et de la droite joignant O et P.

Toutes les perpendiculaires au plan du tableau comprennent le « point de fuite » O situé à la hauteur de l'œil du peintre. La droite du tableau comprenant O parallèle à la ligne de terre est appelée horizon.

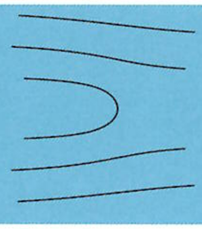
Les parallèles à la ligne de terre restent parallèles à cette droite. Les droites parallèles au sol formant un angle de 45° avec la ligne de terre comprennent un point situé sur l'horizon à une distance d de O, d égale à la distance entre l'œil du peintre et le tableau. Les points de la ligne de terre sont fixes.

6. Une construction classique



Construisons géométriquement l'image d'un point P du plan du sol.
Notons X le point de percée dans le tableau de la droite PO perpendiculaire au plan du tableau. Comme P est dans le plan du sol, le point X est sur la ligne de terre. On le détermine en rabattant vers le bas le plan du sol sur le plan de la peinture, en utilisant la ligne de terre comme charnière. Le point P vient ainsi en un point P^{V}et X est le pied de la perpendiculaire abaissée de P^{V} sur la ligne de terre.

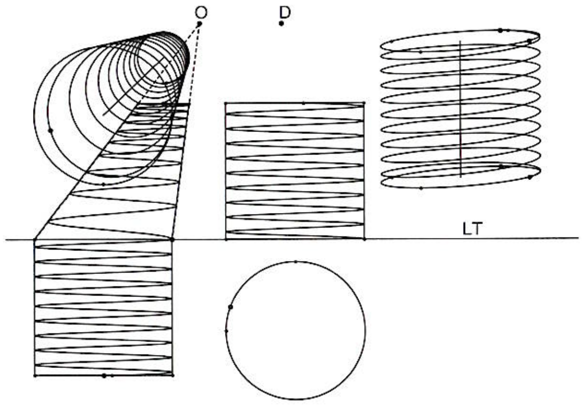
La quadratrice d'Hippias (également appelée « Quadratrice de Dinostrate ») $\rho = \frac{2\theta}{\pi \sin\theta}$
L'équation cartésienne est
$x = y\,\mathrm{cotg}(\pi y/2)$

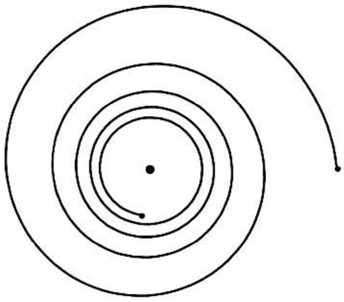


Cette courbe permet non seulement de découper un angle en un nombre quelconque de parties égales, mais aussi de construire un carré ayant même aire qu'un disque.

Sur cette figure Cabri, l'hélice est représentée en géométrie descriptive, en perspective oblique et en perspective linéaire en imaginant que l'axe de l'hélice est perpendiculaire au plan du tableau. Sous la représentation de l'hélice, on voit sa projections sur le plan du sol et le rabattement de cette projection dans le plan du tableau.
En plaçant de plus l'œil sur l'axe de l'hélice, la représentation de celle-ci en perspective centrale est une courbe appelée *spirale hyperbolique*. Les équations paramétriques de cette courbe sont :
$x(t) = \dfrac{a\cos(t)}{t}$
$y(t) = \dfrac{a\sin(t)}{t}$
La photo d'un escalier en colimaçon met en évidence deux spirales hyperboliques, l'une est la photo de la rampe, l'autre est celle de la base de l'escalier.

Soit A une des deux demi-droites passant par P^{V} qui forment un angle de 45° avec la ligne de terre. Soit Y le point d'intersection de la ligne de terre avec A. Comme les points de la ligne de terre sont fixes dans la perspective centrale, les droites issues de Y et faisant un angle de 45° avec la ligne de terre passent par les points D_1 et D_2 situés à distance d de O sur la ligne d'horizon. Une d'entre elles coupe le segment $[XO]$ en le point P', image de P dans la perspective centrale.





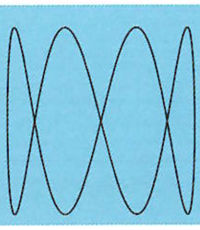
Photographie de Eugène Atget (1856–1927), Comédie Française

7. L'hélice en architecture

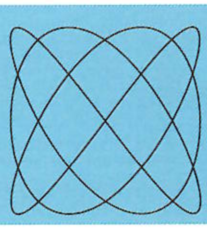
Un artiste de la Renaissance : Hans Vredeman de Vries (1527 – 1604)

Ce paragraphe est dû à M. Eric Fierens, que nous tenons à remercier pour sa collaboration.
Hans Vredeman de Vries participe activement à l'introduction de la Renaissance dans nos régions. Né à Leeuwarden dans les Pays-Bas, en 1527, il effectue son apprentissage dans cette ville ainsi qu'à Kampen. Ensuite, il s'installe successivement à Malines et à Anvers. Il y exécute ses premières œuvres importantes : il participe aux décorations réalisées à l'occasion de la Joyeuse Entrée de l'Empereur Charles Quint dans la ville en 1549.
Ce travail, habituellement confié aux artistes déjà reconnus, confirme son goût pour la mise en scène d'architectures peintes. On y trouve réunies ses passions : la peinture, l'architecture et la décoration.

Les courbes de Lissajous
$x = \sin mt$
$y = \sin nt$



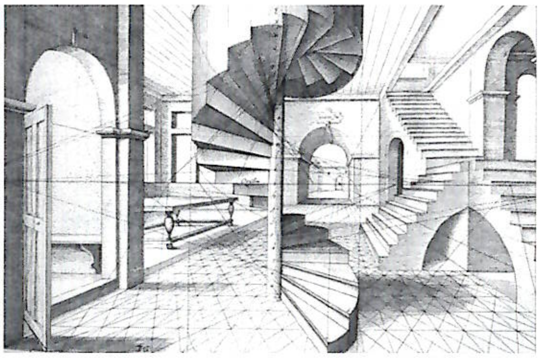
$m = 1$
$n = 4$



$m = 3$
$n = 4$

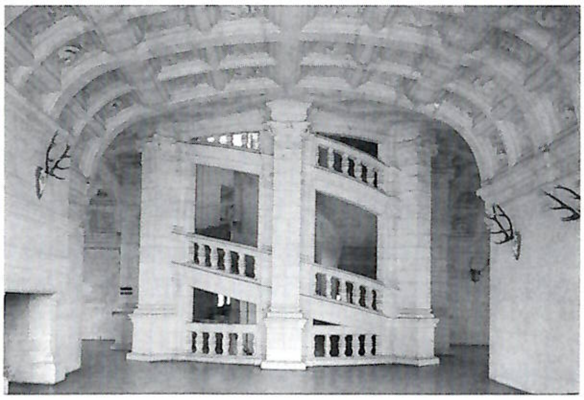
Vu ses qualités de théoricien et son ouverture aux influences étrangères, principalement italienne et française, on ne s'étonne pas que cet humaniste rédige, à 33 ans, un recueil de gravures d'ornements architecturaux, intitulé *Scenographiae sive perspectivae.* S'inspirant de l'ouvrage d'un artiste italien, Serlio, ce qui était habituel à cette époque, ce recueil va assurer la diffusion d'éléments nouveaux dans l'architecture et contribuer à diffuser la Renaissance dans les Pays-Bas puis dans toute l'Europe du Nord et du Centre.

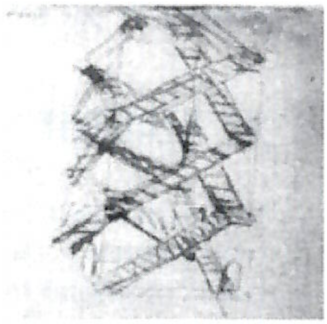
La perspective dite centrée, est au cœur des préoccupations artistiques de Vredeman. L'artiste a représenté ici un escalier à vis en perspective centrale.



Perspective (1604), Planche 36 Editions,Tableau B.V.Mijdrecht, 1979

Au château de Chambord





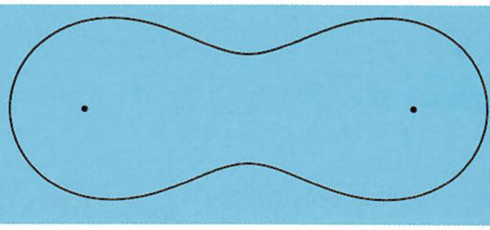
Dessin de Léonard de Vinci, 1519

À Chambord, un escalier à double hélice probablement dessiné par Léonard de Vinci a inspiré plusieurs architectes. Ainsi certains parkings utilisent ce principe pour éviter les rencontres accidentelles entre les voitures entrantes et sortantes. Voyez en page 3 de couverture le récit de Mademoiselle de Montpensier écrit entre 1627 et 1637 décrivant ses jeux d'enfants dans l'escalier.

Pour en savoir plus

Math-Jeunes a publié *Dessiner l'espace* par M. Ballieu, *Math-Jeunes*, n°92, pp. 26–30, (2000).
On peut aussi consulter *Vers la géométrie projective*, par M. Ballieu et M.-F. Guissard, *Mathématique et Pédagogie*, n°140, pp. 53–70. Cet article est repris sur le CD annexé au n°106.
Concernant la perspective et les anamorphoses, mentionnons aussi le site de Jean Drabbe :
http ://www.ibelgique.com/mathema
Autres sites consacrés aux courbes :
http://www.mathcurve.com/courbes3d/helicecirculaire/helicecirculaire.html
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/anx1/helice.html
http://www.educanet.ch/home/makl/_hpgen_content1.htm

Les ovales de Cassini
Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant
$(x^2 + y^2 + c^2)^2 = 4c^2x^2 + k^4$
La distance des deux points fixes est $2c$.
La valeur du produit constant est k^2.



Math-Jeunes n°107, 14–17, 2004

La parabole du bon téléspectateur !

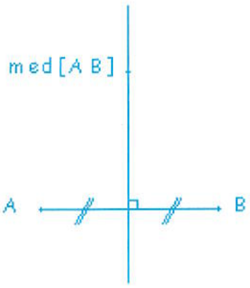
C. Villers

La mathématique au quotidien...

1. Mise en bouche

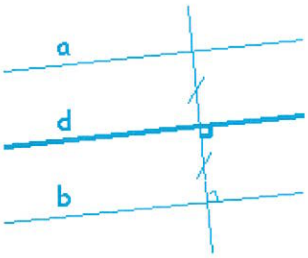
L'objet représenté ne vous est certainement pas étranger. Vous savez qu'il s'agit d'une antenne permettant de capter, par exemple, les signaux de télévision envoyés par satellites. Beaucoup de personnes pensent que le réflecteur est une calotte sphérique mais nombreux aussi sont ceux qui utilisent l'appellation : antenne « parabolique ». Pour mener une étude élémentaire autour de cet objet de l'espace, nous allons commencer par rester dans le plan.

2. Apéritif



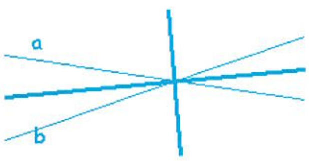
Vous connaissez, fort bien sans doute, quelques lignes, appelées « lieux géométriques » (et même « lieux » tout simplement) dont tous les points possèdent une propriété particulière qu'ils sont les seuls à posséder.

Ainsi le lieu des points du plan équidistants de deux points A et B donnés est la médiatrice de $[AB]$ (segment de droite d'extrémités A et B).



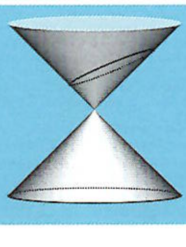
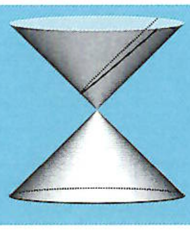
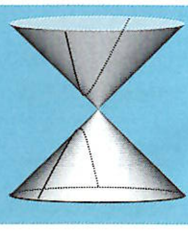
En ce qui concerne le lieu des points du plan équidistants de deux droites données a et b, il devient nécessaire de préciser la position de ces deux droites.

- Si les deux droites sont parallèles, le lieu est la droite d qui leur est parallèle à mi-distance.



- Si les deux droites sont sécantes, le lieu est constitué des bissectrices des angles formés par les deux droites.

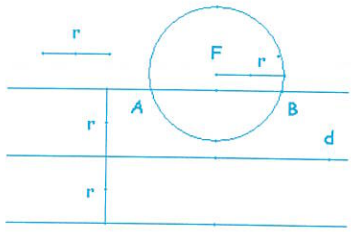
Dans le premier lieu, les éléments de départ sont deux points tandis que dans le deuxième, ce sont deux droites.

Les sections coniques **Ellipse :**  **Parabole :**  **Hyperbole :** 

3. En entrée

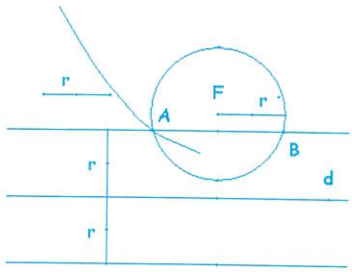
Alors, quasi naturellement, surgit une suggestion : *Et si maintenant nous nous intéressions au lieu (s'il existe) des points du plan équidistants d'un point et d'une droite ?*

Soit donc F le point et d la droite en question. Commençons par nous donner une idée de l'allure du lieu en construisant quelques-uns de ses points.



Une façon de procéder consiste à se donner une distance r. Tous les points à distance r de F appartiennent au cercle $C(F, r)$ et tous les points situés à distance r de d appartiennent à l'une ou l'autre des parallèles à d tracées à la distance r de d. Dans le cas de la figure, A et B remplissent les deux conditions. Ce sont donc deux points du lieu.

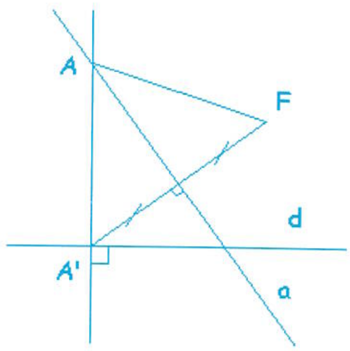
En répétant (avec grand soin) un nombre suffisant de fois cette procédure, on se donne une idée de la forme du lieu.



Si vous disposez d'un logiciel de construction de figures géométriques ([1]), n'hésitez pas à l'utiliser pour faire apparaître le lieu. Celui-ci n'est pas rectiligne mais prend la forme d'une courbe. Cette courbe porte le nom de *parabole*. F et d sont appelés respectivement foyer et directrice de la parabole.

NB : Quelques considérations de type géométrique permettent d'une part de démontrer qu'il est inutile de tracer la parallèle à d située de l'autre côté de F par rapport à d et d'autre part de déterminer la valeur minimale pour la variable r. Peut-être avez-vous déjà rencontré dans le cadre de vos cours une courbe portant ce nom, mais définie autrement. S'agit-il de la même courbe ? La réponse est "oui". Mais à vous de justifier cela !

4. Le plat de consistance



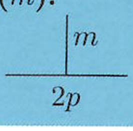
Voici une autre manière de construire des points du lieu.

Si A est un point quelconque du lieu et si A' est la projection orthogonale de A sur d ($[AA'] \perp d$) alors la condition $|AF| = |AA'|$ entraîne que A appartient à la médiatrice a de $[A'F]$. Dès lors, en partant de A', on peut construire le point A qui est le point commun à la perpendiculaire à d en A' et à la médiatrice de $[A'F]$.

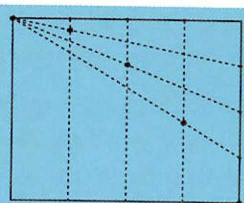
Il suffit de répéter cette construction en utilisant plusieurs points B', C', D', E'... de d pour obtenir une idée de ce qu'est le lieu cherché.

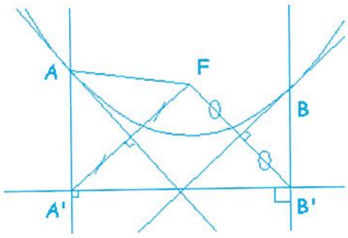
([1]) Par exemple Déclic que vous trouvez sur le CD-ROM accompagnant le premier numéro 2003-2004 de Math-Jeunes.

Pour construire un arc parabolique, un maçon dispose de la portée ($2p$) et de la montée (m).



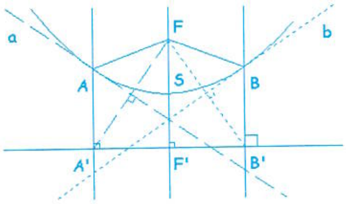
**Il dessine le patron ci-contre dans un rectangle de dimensions m et p.
Il lui reste à relier à main levée cinq points de la parabole cherchée.
Il peut si nécessaire augmenter le nombre de points.**



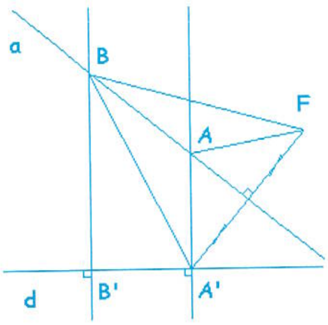


Ici encore d'un logiciel de construction de figures géométriques donne, de manière spectaculaire, l'allure de la parabole.

5. Desserts variés

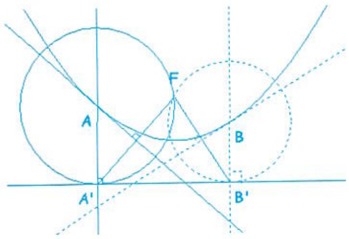


- En utilisant les invariants de la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite qui comprend le foyer et est perpendiculaire à la directrice, vous justifierez facilement que cette droite est également axe de symétrie de la parabole. Il est aussi immédiat que l'intersection de la parabole avec son axe de symétrie est le milieu S du segment ayant pour extrémités le foyer et la projection orthogonale du foyer sur la directrice.



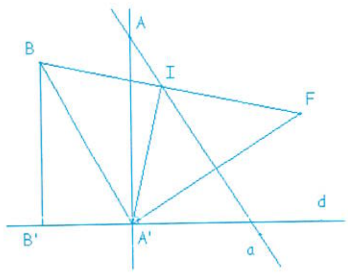
- Soit A un point du lieu et a la médiatrice de $[A'F]$. Si B appartient à a et est aussi un point du lieu alors $|BA'| = |BF|$ et $|BB'| = |BF|$. On aurait donc $|BA'| = |BB'|$ ce qui est faux (perpendiculaire et obliques).

  La parabole a un et un seul point commun, le point A, avec la médiatrice a. Elle est tangente à a en A.



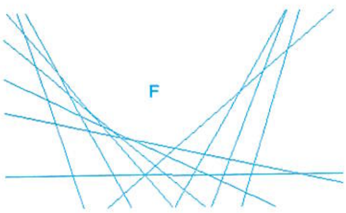
- Une conséquence immédiate de la construction est que tous les points symétriques du foyer par rapport aux tangentes à la parabole sont des points de la directrice.

  Les cercles dont les centres sont les points de la parabole et qui comprennent le foyer sont tous tangents à la directrice



- Soit A un point quelconque de la parabole de foyer F et de directrice d et a la médiatrice de $[A'F]$. Si B est un point de l'autre côté de a par rapport à F et si I est le point commun à $[BF]$ et a, alors $|BA'| < |BI| + |IA'| = |BI| + |IF| = |BF|$. Mais on a aussi $|BB'| < |BA'|$. Donc $|BB'| < |BF|$ et B n'est pas un point de la parabole.

  Tous les points de la parabole sont situés du même côté de a que F.

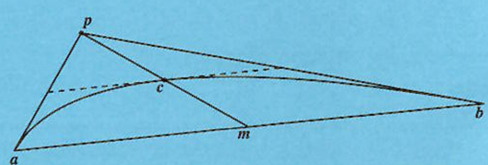


- La figure ci-contre montre seulement les tracés de 10 médiatrices associées à 10 points de la directrice d. Toutes ces médiatrices sont des tangentes à P. La parabole P de foyer F et de directrice d apparaît nettement. Une meilleure vision serait obtenue en traçant beaucoup plus de médiatrices. On dit que P est l'enveloppe de ces médiatrices.

La figure ci-contre illustre une propriété des paraboles:

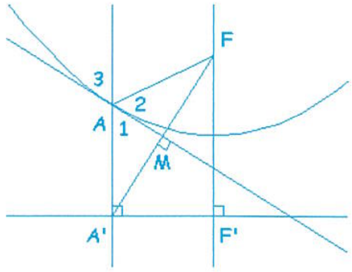
1. Soit $\widehat{ab}$ un arc de parabole.
2. Soit p l'intersection des tangentes en a et b.
3. Soit m le milieu de $[ab]$.

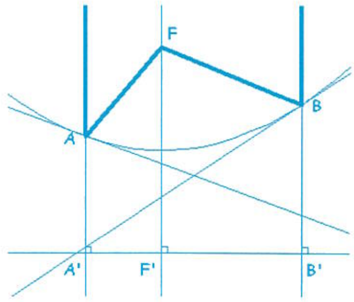
Alors
1. L'intersection c du segment $[pm]$ et de la parabole est le milieu de $[pm]$.
2. La tangente à la parabole en c est parallèle à la corde $[ab]$.



- La tangente AM au point A de la parabole est la médiatrice de la base du triangle isocèle $A'AF$. Elle est donc bissectrice de l'angle $\widehat{FAA'}$ au sommet principal et on a: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_3$ sont des angles opposés par le sommet donc $\hat{A}_1 = \hat{A}_3$. Il en résulte que $\hat{A}_3 = \hat{A}_2$.

  Ceci nous rappelle une loi de la réflexion en optique. En termes de mouvement, **tout point qui se déplace sur une droite parallèle à l'axe de la parabole est réfléchi au point de contact avec cette parabole en direction du foyer.** Ce point obéit donc à une loi de l'optique: l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

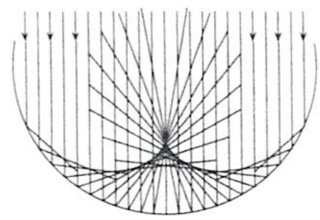




6. Cerise sur le gâteau

Revenons maintenant dans l'espace ! Imaginez que vous fassiez tourner une parabole autour de son axe de symétrie alors vous obtenez un objet spatial appelé *paraboloïde.*

Une calotte de paraboloïde possède donc la propriété de réfléchir les rayons parallèles à son axe vers un point unique : le foyer. De même, les rayons issus éventuellement du foyer sont réfléchis en des rayons parallèles. Une calotte sphérique, par exemple, ne réalise pas cela. Les rayons parallèles à l'axe ne sont pas réfléchis vers un point commun. Ils enveloppent une courbe qui porte le nom de *caustique.* Une illustration de ce dernier genre de courbe est observable, en lumière rasante, sur le fond vernissé de certains récipients, une tasse par exemple. Mais cela c'est une autre histoire.

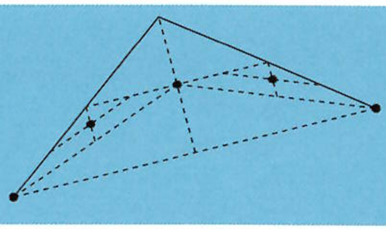


Cette propriété des calottes paraboloïdales est exploitée dans les miroirs « paraboliques », certains phares, les antennes de radar, les fours solaires, ... et les antennes de télévision.

Son axe de symétrie doit alors, dans l'idéal, être dirigé vers le satellite. En effet, à ce moment, l'éloignement de ce dernier est si grand que les signaux qu'il envoie peuvent être considérés comme parallèles et, de plus, parallèles à l'axe de l'antenne. Ils sont donc réfléchis par la calotte de l'antenne vers le foyer. Cela assure une bonne réception de ces signaux.

Voilà pourquoi la parabole du bon téléspectateur doit être installée avec un maximum de précision.

Utilisez la propriété illustrée à la page précédente pour raccorder deux droites sécantes par un arc de parabole tangent en deux points donnés. Poursuivez la construction entamée.



 Math-Jeunes n° 107, 18–22, 2004

Le déroulement de la spirale d'Archimède

J. Opsomer et P. Tilleuil

Prérequis. Pour réaliser ce fichier, il faut déjà avoir travaillé un peu avec EXCEL®, et en connaître au moins le vocabulaire de base (cellule, adresse d'une cellule, plage de cellules, référence absolue ou relative, ...) ainsi que savoir engendrer des suites arithmétiques, écrire et recopier des formules mathématiques, et créer un graphique en nuage de points. Pour le reste, tout est expliqué dans la suite de l'article. Si néanmoins un coup de pouce était nécessaire, le mieux serait de se reporter par exemple aux premières pages des ouvrages de B. Egger (cf. [1]) ou M. Mincke (cf. [2]).

Voici un fichier à réaliser sous EXCEL®, et qui propose une construction de la spirale d'Archimède... pleine d'animation !

Introduction

Une spirale d'Archimède est la trajectoire d'un point dont le mouvement est le résultat de la *composition* de deux mouvements uniformes très simples : le mouvement circulaire uniforme d'une demi-droite autour d'une de ses extrémités, et le mouvement rectiligne uniforme d'un point sur cette demi-droite. Notons

v : la vitesse (linéaire) du mouvement rectiligne uniforme,

ω : la vitesse angulaire du mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire l'angle constant (exprimé en radians) parcouru par unité de temps.

Les deux mouvements étant uniformes, le rapport $\dfrac{v}{\omega}$ est une constante caractéristique de la trajectoire en question, qu'on note k. Si on note encore

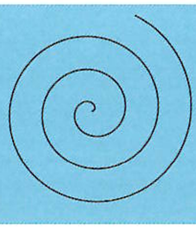
$r(t)$: la distance (linéaire) parcourue à l'instant t sur la demi-droite,
$\theta(t)$: l'angle parcouru à l'instant t par la demi-droite,

alors on a, par définition de mouvement circulaire uniforme : $\theta\,(t) = \omega t$, tandis que par définition de mouvement rectiligne uniforme : $r\,(t) = vt = k\omega t$. Tout cela permet de calculer sans peine l'abscisse et l'ordonnée à l'instant t d'un point de la spirale d'Archimède :

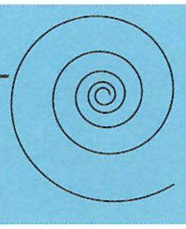
$$\begin{cases} x\,(t) = r\,(t)\cos\theta\,(t) = k\omega t\cos\omega t \\ y\,(t) = r\,(t)\sin\theta\,(t) = k\omega t\sin\omega t \end{cases}$$

Cette spirale est donc entièrement déterminée par la donnée de la vitesse angulaire ω et de la constante caractéristique k. Pour fixer les idées, on va choisir ici une vitesse angulaire ω de $0,05235988\ldots$ radians (c'est-à-dire 3°) par unité de temps, et une constante caractéristique $k = 0,5$.

La spirale d'Archimède : $\rho = k\theta$
Sur cette figure : $k = 0.01$



La spirale logarithmique : $\rho = k^{\theta}$



La construction du fichier

On ouvre une feuille de calculs EXCEL®. On écrit les commentaires oméga(°) : et oméga(rad) : dans les cellules **B1** et **B2**, ainsi que le nombre 3 dans la cellule **C1** et la formule de conversion de degrés en radians =C1*PI()/180 dans la cellule **C2** .

Le fichier EXCEL® consiste à faire tourner une demi-droite, sur laquelle le mouvement (uniforme) d'un point laisse apparaître *progressivement* une spirale d'Archimède. L'essentiel du travail est donc concentré sur deux procédures : d'abord créer un *compteur de temps*, et ensuite s'en servir pour faire apparaître la courbe progressivement (c'est-à-dire au fur et à mesure que le temps du compteur défile).

Le compteur de temps

Il est réalisé à partir de ce qu'on appelle une *référence circulaire*, en 3 étapes :

étape 1 : autoriser une référence circulaire sous EXCEL®,
étape 2 : écrire cette référence circulaire, c'est-à-dire ici : créer le compteur de temps,
étape 3 : prévoir un interrupteur de remise à 0 du compteur de temps.

Étape 1 : autoriser une référence circulaire.

Pour cela, on choisit « **Outils/Options** » dans la barre de menus. On sélectionne l'onglet « **Calcul** ». On y coche la case « **Itération** » et on choisit « 1 » pour le nombre maximal d'itérations. On quitte en appuyant sur « **Calculer maintenant (F9)** » dans la section « **Mode de calcul** », juste au-dessus de la section « **Itération** » (cf. la figure 1 ci-dessous), ou en choisissant **Mode de calcul/Sur ordre**.

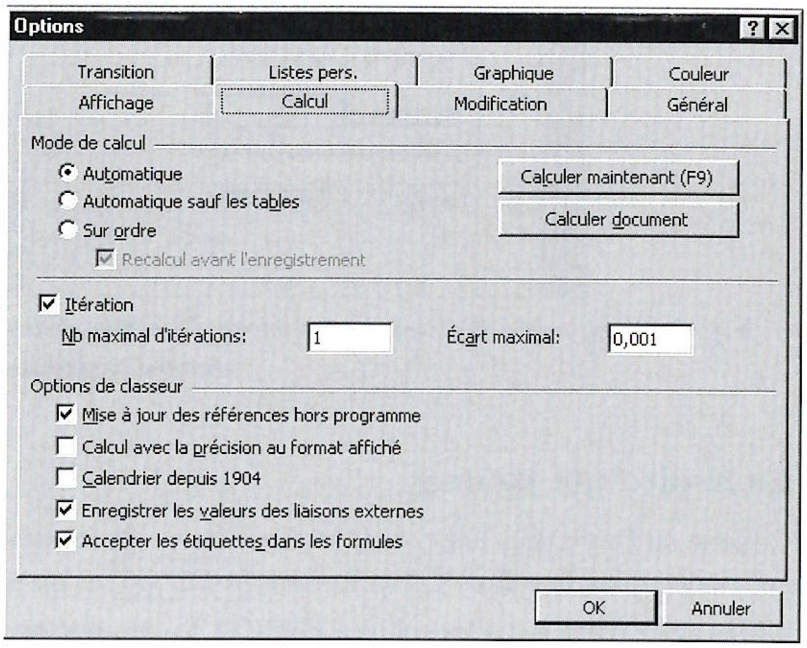
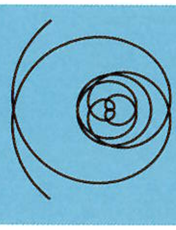
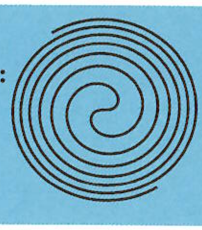


Fig. 1 - *Le menu (complété) qui autorise les références circulaires.*

La spirale de Galilée :
$\rho = (1 - k\theta^2)$
Sur cette figure : $k = 0.01$



La spirale de Fermat :
$\rho = \pm\sqrt{\theta}$



Étape 2 : écrire la référence circulaire, c'est-à-dire créer le compteur de temps.
On écrit en **C4** l'instruction : $\boxed{=1+C4}$. La cellule **C4** contient donc une formule qui fait référence à cette cellule elle-même pour ajouter une unité de temps au temps déjà présent : il s'agit bien d'une référence circulaire. Mais cette référence circulaire étant maintenant autorisée, chaque pression sur la touche F9 en haut du clavier ajoute alors une unité de temps à la précédente. Et si on appuie en continu sur cette touche, le compteur de temps délivre un flux de nombres quasiment continu.
Étape 3 : prévoir un interrupteur de remise à 0 du compteur de temps.
Si on se limite à ces deux premières étapes, il est impossible de remettre à 0 le compteur de temps qu'on vient de créer. Pour pallier cet inconvénient, il suffit de soumettre la possibilité d'itération à une condition préalable, parfois qualifiée d'*interrupteur*. Pour cela, on décide par exemple d'écrire en **A1** le nombre 0 ou 1 suivant qu'on veut mettre le compteur C4 à 0 ou au contraire le déclencher. On remplace alors l'instruction précédemment écrite en **C4** par $\boxed{=SI(A1=1\,;1+C4\,;0)}$. On relance le calcul en appuyant sur la touche F9.
Mais il reste un petit problème ... Avec l'instruction écrite dans la cellule **C4**, le compteur n'affiche 0 que lorsque l'interrupteur est fermé, c'est-à-dire lorsqu'on écrit 0 en **A1** ; dès que l'interrupteur est ouvert, le compteur démarre à 1. Comme il faut que le compteur de temps démarre effectivement à 0, on écrit dans la cellule **C5** la formule $\boxed{=C4\text{-}1}$, *et c'est dans cette cellule* **C5** *qu'on ira chercher les valeurs du temps t dont on aura besoin dans la suite.* Afin de s'en souvenir, on ajoute le commentaire $\boxed{\text{t :}}$ dans la cellule **B5**, et le commentaire $\boxed{\text{compteur :}}$ dans la cellule **B4**.
La figure 2 montre une copie d'écran d'une partie de la feuille de calculs achevée ; la barre de formule en haut de l'écran montre la formule écrite dans la cellule **C4**.

C4 = =SI(A1=1;C4+1;0)

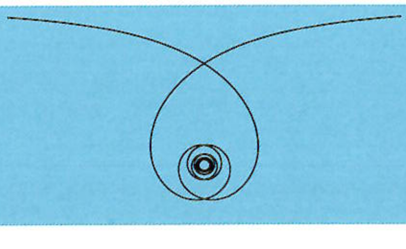
	A	B	C	D	E	F	G
1	0	oméga(°) :	3		droite	qui	tourne
2		oméga(rad) :	0,05235988		r	x	y
3					0	0	0
4		compteur :	0		0,1	0,09986295	-0,0052336
5		t :	-1		0,2	0,19972591	-0,01046719
6					0,3	0,29958886	-0,01570079
7		oméga*t :	-0,05235988		0,4	0,39945181	-0,02093438
8					0,5	0,49931477	-0,02616798
9					0,6	0,59917772	-0,03140157
10		k :	0,5		0,7	0,69904067	-0,03663517

Fig. 2 - *Une copie d'écran du « tableau de commandes » et des données permettant de faire tourner la droite.*

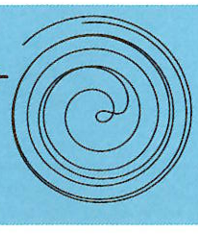
La droite qui tourne

Comme on l'a vu plus haut, dans le mouvement de rotation c'est la quantité ωt qui intervient. On écrit donc dans la cellule **C7** la formule $\boxed{=C2*C5}$ et on ajoute en **B7** le commentaire $\boxed{\text{oméga*t}}$.
Après avoir placé dans les cellules **E-F-G1** le commentaire $\boxed{\text{droite-qui-tourne}}$ et dans les cellules **E2**, **F2** et **G2** les commentaires $\boxed{\text{r}}$, $\boxed{\text{x}}$ et $\boxed{\text{y}}$ respectivement, on peut commencer à faire tourner la dite droite.

La spirale hyperbolique :
$\rho = 1/\theta$



La spirale parabolique : $\rho = 1 \pm \sqrt{\theta}$



Pour cela, on crée alors dans la colonne **E** une liste de distances à l'origine, notées r, variant de 0 à 15 par exemple, et par pas de 0,1. Ensuite, dans les colonnes **F** et **G** en regard, on recopie les formules $\boxed{\text{=E3*COS(\$C\$7)}}$ et $\boxed{\text{=E3*SIN(\$C\$7)}}$ qui font tourner simultanément tous les points correspondant à toutes les valeurs de r. Pour le voir, il suffit de créer un graphique (en nuages de points par exemple) à partir des données des colonnes **F** et **G**, et – l'interrupteur étant ouvert – d'appuyer sur la touche F9 en haut du clavier : la demi-droite tourne !

La spirale fantôme

Avant de faire apparaître progressivement la spirale, il faut d'abord calculer la position de tous ses points, *sans les représenter graphiquement* : c'est ce qu'on appelle créer le fantôme de la spirale ! On commence par placer dans les cellules **I-J- . . . -O1** le commentaire $\boxed{\text{S-P-I-R-A-L-E}}$ et dans les cellules **I2**, **J2**, **K2** et **L2** les commentaires $\boxed{\text{t}}$, $\boxed{\text{t*oméga}}$, $\boxed{\text{x/spirale}}$ et $\boxed{\text{y/spirale}}$ respectivement. Ensuite, on crée dans la colonne **I** une liste de temps notés t, allant de 0 à 3600 par exemple, et par pas de 1 ; il s'agit d'un temps « figé », par opposition au temps variable fourni par le compteur de temps dans la cellule **C5**. Dans la colonne **J** en regard, on recopie alors la formule $\boxed{\text{=I3*\$C\$2)}}$.

Enfin, dans les colonnes **K** et **L** correspondantes, on déroule les formules $\boxed{\text{=\$C\$10*J3*COS(J3)}}$ et $\boxed{\text{=\$C\$10*J3*SIN(J3)}}$ qui, suivant les équations détaillées au début, décrivent les abscisses et les ordonnées des points de la spirale.

Apparition de la spirale

Il ne reste plus qu'à faire apparaître progressivement tous ces points. L'idée est de comparer le temps « figé » de la colonne **I** au temps variable qui défile dans la cellule **C5**.
On ajoute les commentaires $\boxed{\text{anim. x}}$ et $\boxed{\text{anim. y}}$ dans les cellules **M2** et **N2**. On recopie ensuite dans la colonne **M** et **N** les formules $\boxed{\text{=SI(I3<\$C\$5 ;K3 ;0)}}$ et $\boxed{\text{=SI(I3<\$C\$5 ;L3 ;0)}}$, qui commandent l'apparition progressive des points – déjà calculés ! – de la spirale.

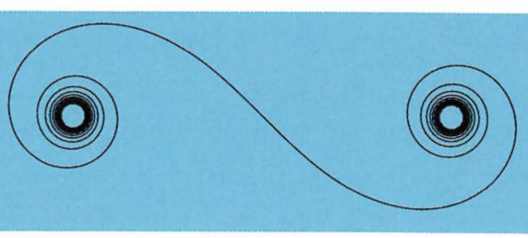
M11 = =SI(I11<C5;K11;0)

	H	I	J	K	L	M	N	O
1		**S**	**P**	**I**	**R**	**A**	**L**	**E**
2		t	t*oméga	x/spirale	y/spirale	anim. X	anim. Y	
3		0	0	0	0	0	0	
4		1	0,05235988	0,02614406	0,00137015	0,02614406	0,00137015	
5		2	0,10471976	0,05207304	0,0054731	0,05207304	0,0054731	
6		3	0,15707963	0,07757286	0,01228633	0,07757286	0,01228633	
7		4	0,20943951	0,10243138	0,02177246	0,10243138	0,02177246	
8		5	0,26179939	0,12643939	0,03387933	0,12643939	0,03387933	
9		6	0,31415927	0,14939161	0,04854028	0,14939161	0,04854028	
10		7	0,36651914	0,17108755	0,06567436	0,17108755	0,06567436	
11		8	0,41887902	0,19133251	0,08518672	0,19133251	0,08518672	
12		9	0,4712389	0,20993847	0,10696899	0	0	
13		10	0,52359878	0,22672492	0,13089969	0	0	
14		11	0,57595865	0,24151979	0,15684478	0	0	

Fig. 3 - *Une copie d'écran des données permettant de faire apparaître la spirale : elle est prise au temps $t = 9$, ce qui se confirme en observant les colonnes **M** et **N** à partir de la ligne **12**.*

Il faut encore insérer les données des colonnes **M** et **N** dans la fenêtre graphique contenant déjà la droite qui tourne, ce qui se réalise par ce qu'on appelle un « collage spécial ». Pour mémoire, on procède de la manière suivante :

La « clothoïde » est utilisée pour le tracé des autoroutes car elle permet de négocier des courbes à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.
On la dessine en Logo (voir le cd qui accompagnait le numéro 106 de *Math-Jeunes*) par l'instruction
repete 300 [av 1 ga :a donne "a :a + 0.1]



- on sélectionne les données à importer, ici les colonnes **M** et **N** ;
- on choisit « **Edition/Copier** » ;
- on sélectionne la fenêtre graphique dans laquelle on veut importer ces données ;
- on choisit « **Edition/Collage Spécial** ».

On vérifie que la boîte de dialogue qui s'ouvre alors est complétée comme dans la figure 4 ci-dessous.

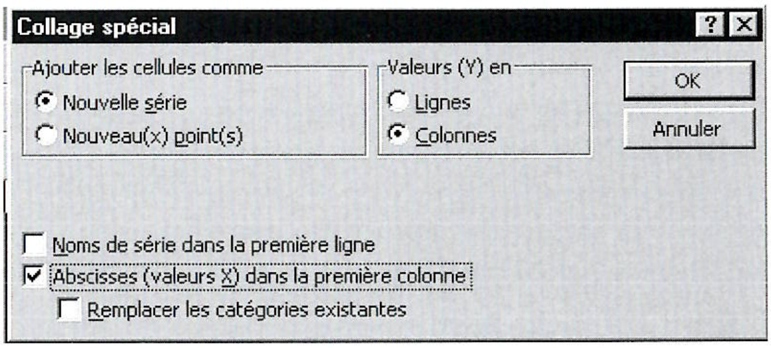


Fig. 4 - *La boîte de dialogue d'un collage spécial, telle qu'elle doit en général être complétée.*

L'importation est achevée. En passant éventuellement par une remise à 0 du compteur, tout est prêt pour lancer le mouvement. L'interrupteur étant ouvert, dès qu'on appuie de manière continue sur la touche F9, la demi-droite tourne, et la spirale se déroule !

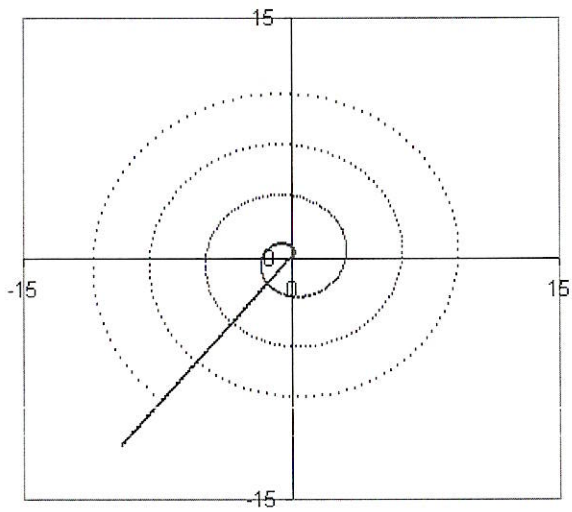


Fig.5 - *Une copie d'écran montrant le déroulement de la spirale.*

Et maintenant, ... si on essayait de dessiner un cercle qui roule sur une droite (sans glisser) et dont un point décrit une cycloïde... ?

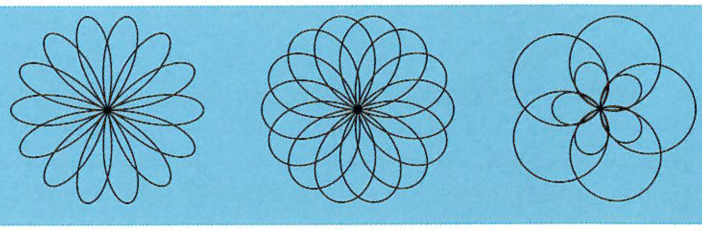
Une version au format pdf de cet article, permettant l'accès au fichier `Excel` dont la programmation est détaillée ici, est téléchargeable sur le site Internet de la *Société Belge des Professeurs de mathématique d'expression française*, à l'adresse www.sbpm.be/mj.htm. (Sur cette page, demander le sommaire du n°107.)

Pour en savoir plus

[1] Bernard Egger — *Excel/Star Calc. Utiliser un tableur au cours de mathématiques au lycée.* Ellipses S. A. ; Paris, 2002.

[2] Michel Mincke — *EXCEL®, un outil pour résoudre des problèmes au cours de sciences. Applications en mathématiques, physique, chimie, biologie et au laboratoire.* Editions De Boeck ; Bruxelles, 2001 (réédité en 2003).

Un bouquet de fleurs
Equations : $\rho = \cos \frac{7}{2}\theta$, $\rho = \cos \frac{7}{4}\theta$, $\rho = \cos \frac{5}{4}\theta + \frac{1}{3}$.



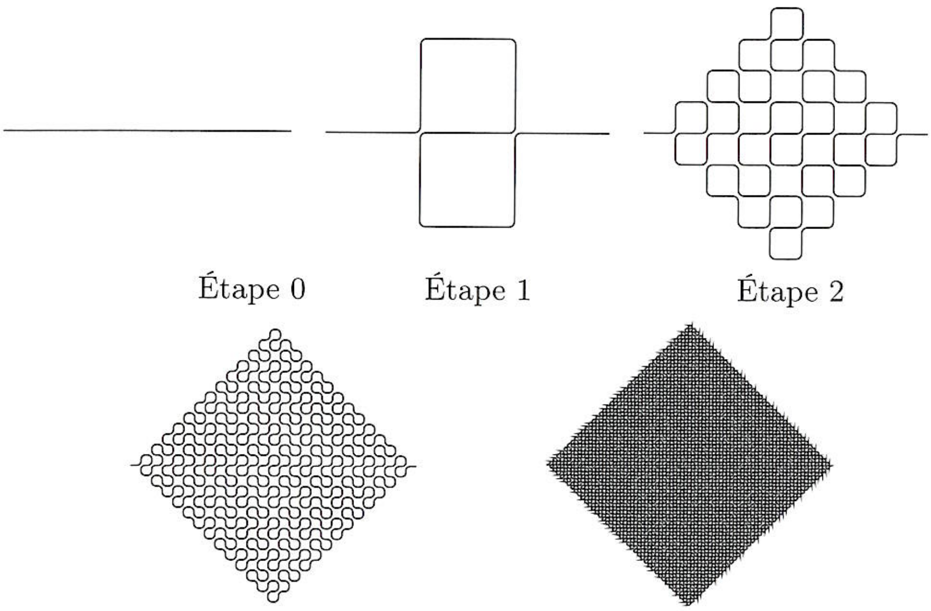
Peano, Hilbert. . . et le Minotaure

G. Noël et P. Tilleuil

En 1890, le mathématicien italien Giuseppe PEANO (1858–1932), se pose une question *a priori* absurde : est-il possible que l'aire d'une courbe continue ne soit pas nulle ? Il s'agit bien de *l'aire* et non de la *longueur*. Et voici que Peano, dans un article publié dans la revue *Mathematische Annalen*, construit une courbe continue qui passe par tous les points d'un carré !

G. Peano

Peano ne dessine pas effectivement la courbe qu'il définit. Son procédé consiste à construire une fonction qui, à tout réel $t \in [0,1]$ associe un point d'un carré. Plus tard, on a montré qu'il était équivalent de construire cette courbe en une infinité d'étapes.



Étape 0 Étape 1 Étape 2

Étape 3 Étape 4

À l'étape 0, on dessine simplement un segment. À l'étape 1, ce segment est remplacé par une ligne brisée comprenant neuf segments, chacun de longueur égale au tiers du segment initial. (Sur la figure ci-contre, les « coins » ont été arrondis, de façon à ce que l'on puisse distinguer la façon dont la ligne est dessinée.) À l'étape 2, on procède de même : chacun des neuf petits segments de l'étape 1 est remplacé par neuf mini-segments ayant pour longueur $\frac{1}{81}$ de la longueur du segment initial. On continue ainsi éternellement. La courbe limite est la courbe de Peano, elle passe par tous les points d'un carré (et même plusieurs fois par certains points).

L'année suivante, le célèbre mathématicien allemand David HILBERT (1862–1943) construit un second exemple de courbe qui remplit complètement un carré. Contrairement à celle de Peano, sa construction est essentiellement visuelle. Voici un extrait du texte de Hilbert (1).

À partir d'une construction arithmétique, Peano a récemment montré dans les Mathematischen Annalen comment les points d'une ligne peuvent être appliqués continûment sur les points d'une portion de surface. Les fonctions nécessaires à une telle application s'imaginent plus

(1) La traduction est due à P. Tilleuil

Les trois premières approximations de la courbe de Hilbert

D. Hilbert

Pour Hilbert, les lignes polygonales des figures 1 à 3 ne servent qu'à indiquer l'ordre dans lequel les « petits » carrés des subdivisions successives sont parcourus. Toutefois, si à chaque étape, on choisit arbitrairement un point dans chacun de ces carrés et si, pour tout n, on joint le point du carré n°n au point du carré n°$n+1$, par un trait ne sortant pas de ces deux carrés, on obtient une suite de courbes qui approchent de mieux en mieux la courbe de Hilbert.

Références

G. Peano, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Annalen, 36, 157–160, (1890).
D. Hilbert, *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Annalen, 38, 459–460, (1891).
J. Villette, *L'énigme du labyrinthe de la cathédrale*, Rectorat de la Cathédrale, Chartres.

clairement lorsqu'on a recours à la représentation géométrique suivante. On divise d'abord la ligne en question — qu'on suppose de longueur 1 — en 4 parties égales, notées 1, 2, 3, 4 et la surface en question, supposée avoir la forme d'un carré de côté 1, en 4 carrés égaux notés 1, 2, 3, 4 par deux droites perpendiculaires (Fig. 1).

On partage ensuite chacun des segments 1, 2, 3, 4 à nouveau en 4 parties égales de façon à obtenir les 16 segments 1, 2, 3… 16 ; pareillement, chacun des 4 carrés 1, 2, 3, 4 est partagé en 4 carrés égaux, et les 16 carrés ainsi définis sont affectés des nombres 1, 2… 16 de telle sorte que les carrés se succèdent en étant à chaque fois accolés par un de leurs côtés (Fig. 2).

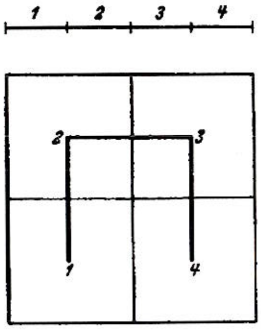


Fig.1

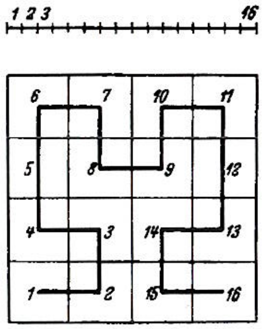


Fig.2

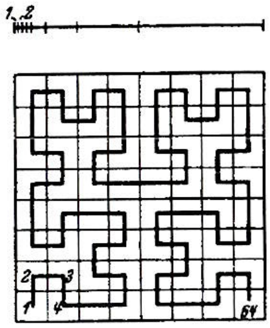


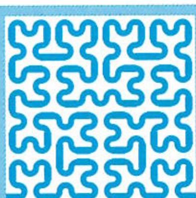
Fig.3

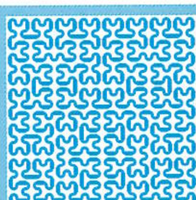
Si ce procédé est poursuivi – la Fig. 3 montre l'étape suivante – il est facile d'imaginer comment on peut associer à chaque point donné de la ligne un et un seul point bien déterminé du carré ; pour cela, il suffit de déterminer chaque division de la ligne dans laquelle est situé le point donné. Les carrés associés à chacun des nombres correspondants sont nécessairement emboîtés les uns dans les autres et, à la limite, ils enferment un point bien déterminé de la portion de surface. C'est là le point [du carré] sur lequel est appliqué le point donné.

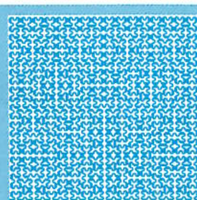
L'application ainsi décrite est bien définie et continue, et réciproquement, chaque point du carré renvoie ainsi à un, deux ou quatre points de la ligne.

Au fait, Peano et Hilbert ont-ils vraiment « inventé » les courbes qui remplissent un carré ? Avez-vous déjà entendu parler de Thésée, ce héros de l'antiquité grecque qui en Crète, affronta le *Minotaure*, un monstre caché au cœur d'un labyrinthe ? Il s'agissait bien entendu d'un symbole : le labyrinthe représente le trajet de la naissance à la mort, son parcours devait durer le plus longtemps possible. Ce thème s'est perpétué durant de nombreux siècles dans les arts décoratifs. Certaines des cathédrales du moyen-âge comportaient un labyrinthe. Il en subsiste un à Chartres. Pouvez-vous imaginer les étapes qui permettraient de transformer ce labyrinthe en une courbe remplissant un disque ?

et les trois suivantes



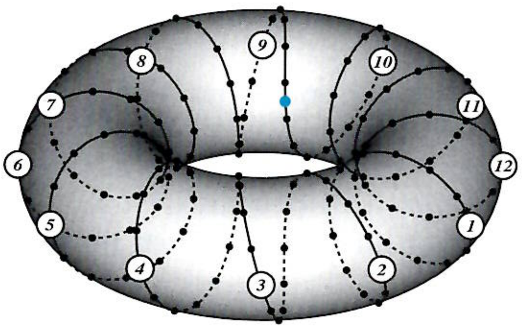




Jeux

Y. Noël-Roch

1. Une curieuse horloge



Quelle heure indique cette horloge ?

2. Nombres croisés.

Quels sont les nombres R, S, T et U utilisés dans le carré ci-dessous ?

	A	B	C	D	E
1					
2		■			■
3					
4	■	■			
5				■	

Horizontalement.

1. S^4 le plus petit possible.
2. $T + 2U$
3. $R \times S^2 \times T$
4. R^3 est un palindrome.
5. T^2

Verticalement.

A. S^2

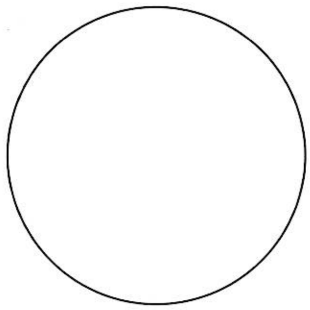
B. Dans le désordre, trois nombres consécutifs.

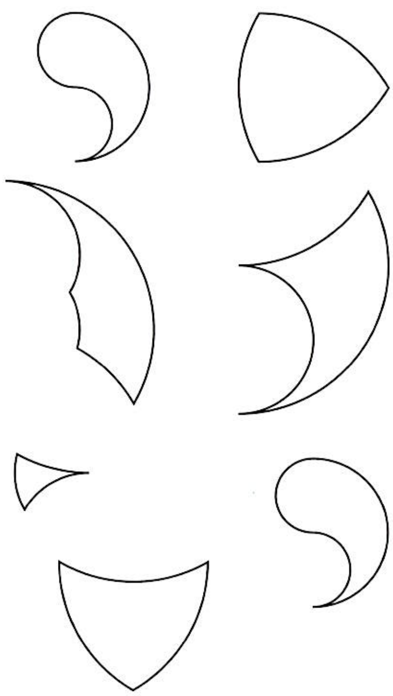
C. T^4

D. $S \times U^2 + \frac{U}{R}$

E. $S \times U$

3. Ciel ! Mon disque en pièces détachées !





Pouvez-vous replacer les pièces dans la boîte circulaire ?

4. Colorier à la mode de Hilbert

Ce jeu peut se dérouler en un nombre quelconque d'étapes. Nous vous proposons les trois premières.

Un grand carré est progressivement découpé en 4 cases, 16 cases, 64 cases, ...

A chaque étape, vous colorierez toutes les cases du grand carré, l'une après l'autre en utilisant quatre couleurs toujours dans le même ordre. (Pour des raisons techniques, nous utiliserons la suite de couleurs noir – bleu – blanc – gris. Après le gris revient le noir.)

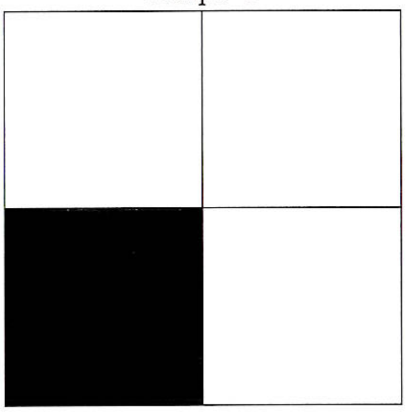
Voici les règles du coloriage :

- commencer en coloriant en noir la case inférieure gauche,
- après avoir colorié une case, passer à une *case voisine* en traversant un côté commun et utiliser *la couleur suivante*,
- l'objectif est de colorier toutes les cases en terminant par la case inférieure droite qui doit être coloriée en gris,
- à partir de la deuxième étape, tout bloc de 4 cases formant un carré dont le coloriage est entamé doit être complété, avant d'entamer un bloc voisin,
- à partir de la troisième étape, tout bloc de 4 cases ou 16 cases formant un carré dont le coloriage est entamé doit être complété avant d'entamer un bloc voisin.

Ne vous inquiétez pas si les deux dernières règles vous paraissent nébuleuses. Elles vous empêchent par exemple de colorier d'affilée 4 cases consécutives en ligne ou en colonne. Ce n'est qu'à partir de l'étape 3, quand vous serez déjà familiarisé avec le coloriage qu'elles s'avèreront plus importantes.

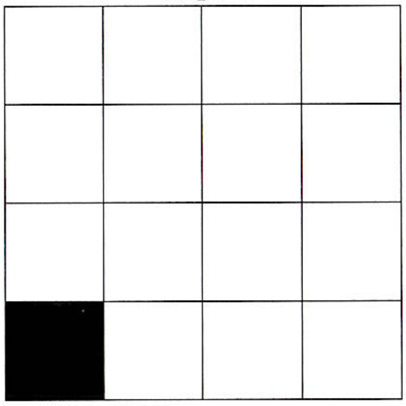
À vos pinceaux !

Étape 1



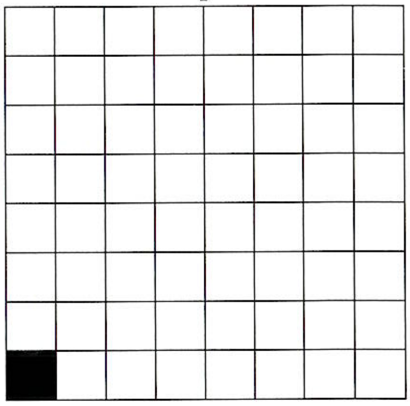
C_1

Étape 2



C_2

Étape 3



C_3

Solutions des jeux 1 à 3

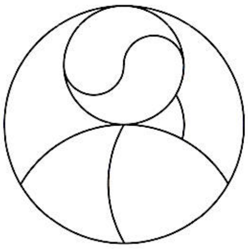
1. Une curieuse horloge

L'heure indiquée par le point rouge est (environ) 9h 27.

2. Nombres croisés

$R = 7$, $S = 11$, $T = 16$ et $U = 21$.

3. Mon disque en pièces détachées !



La solution du jeu n°4 se trouve page 32.

Olympiades

C. Festraets

Lorsque tu recevras ce numéro de Math-Jeunes, tu auras certainement participé à l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge. Peut-être seras-tu admis en demi-finale, et dans ce cas, je te félicite. Peut-être ne seras-tu pas aussi chanceux, mais ne t'en fais pas, prends courage et réinscris-toi l'année prochaine. Dans tous les cas, voici quelques énoncés qui devraient t'intéresser ; ces énoncés sont choisis parmi ceux des épreuves midi et maxi de cette dernière éliminatoire, essaye d'abord de les résoudre sans regarder la solution.

Si tu désires t'exercer davantage, tu peux te procurer les tomes 4 et 5 des brochures « Olympiades ». Pour les commander :

Olympiades Mathématiques Belges

Tome 4 (1994-1998) : 5 €,
Tome 5 (1999-2002) : 6 €,
Tome 4 + tome 5 : 10 €.
Frais de port : ajouter 1,60 € pour un tome et 2,30 € pour deux tomes. Les commandes sont à adresser à

SBPMef,
rue de la Halle, 15, 7000 Mons
Compte : 000-0728014-29
Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Midi 10

J'ai deux montres. L'une retarde de deux minutes par heure. L'autre avance d'une minute par heure. La première fois que je les ai regardées, elles indiquaient toutes les deux la même heure, mais la seconde fois, le même jour, celle qui avance indiquait une heure de plus que l'autre. Entre mes deux observations, combien de temps s'est-il écoulé ?

Ⓐ 5 h Ⓑ 10 h Ⓒ 15 h Ⓓ 20 h Ⓔ 30 h

Solution

En une heure, la différence des temps indiqués par les deux montres est de 3 minutes. La seconde fois que je regarde ces montres, l'une indique une heure (c'est-à-dire 60 minutes) de plus que l'autre, il s'est donc écoulé $60 : 3 = 20$ heures entre mes deux observations.

Midi 15

Si la longueur x d'un trajet est diminuée de 15% et si le temps y mis pour effectuer ce trajet est augmenté de 25%, alors la vitesse $\frac{x}{y}$

Ⓐ diminue de 32 % Ⓑ augmente de 32 %
Ⓒ diminue de 10 % Ⓓ augmente de 10 %
Ⓔ diminue de 40 %

Solution

Calculons la nouvelle vitesse

$$\frac{x+\frac{15x}{100}}{y-\frac{25y}{100}}=\frac{\frac{85x}{100}}{\frac{75y}{100}}=\frac{85x}{75y}=\frac{17x}{25y}=\frac{68x}{100y}$$

Elle a donc diminué de 32 %.

Midi 18 et Maxi 8

Sans réponse préformulée - Combien existe-t-il de rectangles d'aire 2004 cm^2 dont les dimensions sont des nombres entiers de cm ?

Solution

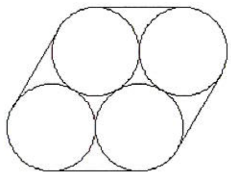
Décomposons 2004 en facteurs premiers : $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$. L'aire d'un rectangle étant égale au produit de sa largeur par sa longueur, il suffit de calculer tous les produits de deux facteurs entiers qui valent 2004 :

$$\begin{aligned} 2\,004 &= 1 \times 2\,004 = 2 \times 1\,002 = 3 \times 668 \\ &= 4 \times 501 = 6 \times 334 = 12 \times 167 \end{aligned}$$

Il y a donc 6 rectangles d'aire 2 004 cm^2.

Midi 20

Des tuyaux cylindriques de diamètre extérieur égal à 20 cm sont ficelés au plus serré comme indiqué sur la figure. Quelle est, en cm, la longueur de la ficelle (hors noeuds) ?



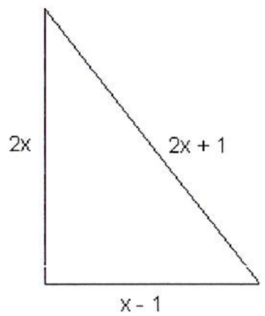
Ⓐ 100 Ⓑ $100 + 10\pi$ Ⓒ $40 + 20\pi$ Ⓓ $80 + 20\pi$ Ⓔ $80 + 40\pi$

Solution

La ficelle présente 4 segments rectilignes et 4 arcs de cercle. Chaque segment rectiligne est tangent à deux cercles de même rayon, la longueur d'un segment vaut deux fois le rayon d'un cercle soit 20 cm et au total les 4 segments rectilignes mesurent 80 cm. La ficelle fait un tour complet, donc la somme des 4 arcs de cercle vaut $2\pi r$ où r est le rayon d'un cercle, soit 10 cm. La longueur totale de la ficelle est $80 + 20\pi$.

Midi 23

Que vaut l'aire du triangle rectangle représenté ci-dessous où x est un nombre réel strictement positif ?



Ⓐ 6 Ⓑ 12 Ⓒ 24 Ⓓ 30 Ⓔ 60

Solution

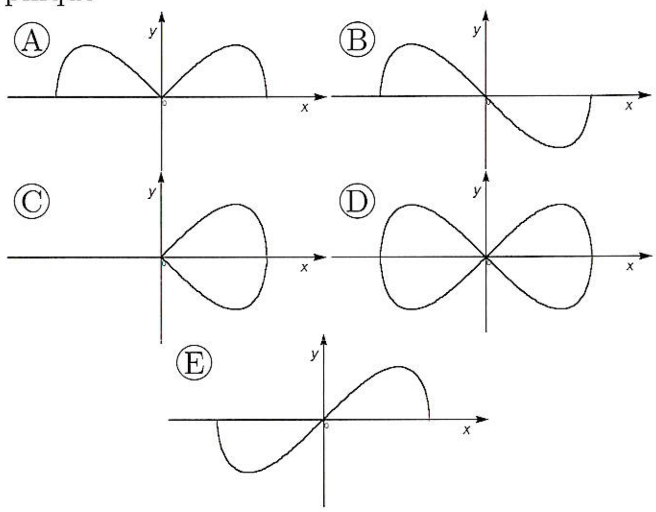
Appliquons le théorème de Pythagore à ce triangle :

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (x-1)^2 + (2x)^2\\ 4x^2+4x+1 &= x^2-2x+1+4x^2\\ x^2-6x &= 0\\ x &= 6\end{aligned}$$

Les côtés de l'angle droit du triangle ont alors pour longueurs $x - 1 = 5$ et $2x = 12$ et l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}(5 \times 12) = 30$.

Maxi 10

La courbe d'équation $y = x\sqrt{1 - x^2}$ a pour graphique



Solution

L'équation est définie pour $1-x^2 > 0$, donc x est compris entre -1 et 1. De plus si x est positif, y est aussi positif, tandis que si x est négatif, y est aussi négatif. Le seul graphique qui satisfait à ces conditions est Ⓔ.

Midi 30

Les seuls réels ne satisfaisant pas l'inégalité $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{1}{x-2}$ sont

Ⓐ les réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$
Ⓑ 1 et 2
Ⓒ tous les réels strictement supérieurs à 1
Ⓓ tous les réels inférieurs à 2
Ⓔ les réels supérieurs à 1 ou inférieurs à 2

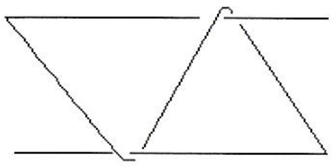
Solution

Il faut certainement que $x \neq 1$ et $x \neq 2$ pour que l'inégalité soit satisfaite. On a alors trois possibilités : $x < 1$, $1 < x < 2$ ou $x > 2$. Dans le premier cas, les deux dénominateurs sont négatifs. Dans le deuxième cas, $x - 1$ est positif et $x - 2$ est négatif. Dans le troisième cas, les deux dénominateurs sont positifs. En multipliant les deux membres par $x - 1$ et par $x - 2$, on obtient $x - 2 < x - 1$ dans les premier et troisième cas, ce qui est vrai, tandis que dans le second cas, on obtient $x - 2 > x - 1$, ce qui est faux.

L'inégalité n'est donc pas satisfaite pour les réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Maxi 15

Deux barres parallèles sont longues de 10 m et écartées de 1 m ; leur épaisseur est négligeable. Quelle est, en mètres, la plus petite longueur d'une corde joignant deux de leurs extrémités comme indiqué sur la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) ?



Ⓐ $\sqrt{109}$ Ⓑ $\sqrt{112}$ Ⓒ 11 Ⓓ 12 Ⓔ 13

Solution

La ficelle est constituée de trois parties d'égale longueur. Soit a la longueur (en mètres) d'une de ces parties. En partant de la gauche, la première partie de la ficelle touche la barre inférieure au tiers de sa longueur. On a donc, d'après le théorème de Pythagore, $a = \sqrt{1^2 + (\frac{10}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{100}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{109}$ et la longueur totale de la ficelle est $\sqrt{109}$ mètres.

Maxi 19

S est la somme de tous les nombres de 4 chiffres différents que l'on obtient en utilisant uniquement les chiffres 1, 2, 3 et 4. La somme des chiffres de S est

Ⓐ 6 Ⓑ 12 Ⓒ 16 Ⓓ 24 Ⓔ 146

Solution

Il y a $4! = 24$ permutations des quatre chiffres 1, 2, 3, 4, donc 24 nombres formés avec ces quatre chiffres. Chaque chiffre apparaît le même nombre de fois. La somme des chiffres formant les unités est $6 \times (1+2+3+4) = 60$. De même, la somme des chiffres formant les dizaines, ou les centaines, ou les mille est 60. La somme totale des 24 nombres est donc $60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660$ et la somme des chiffres de ce dernier nombre est 24

Maxi 22

Quel est le produit de tous les naturels p tels que $\dfrac{18p+23}{p-1}$ soit un naturel ?

Ⓐ 0 Ⓑ 2 Ⓒ 8 Ⓓ 84 Ⓔ 86

Solution

$p-1$ divise exactement $18p+23 = 18p-18+41 = 18(p-1)+41$, d'où $p-1$ est un diviseur de 41. Les seuls diviseurs de 41 sont 1 et 41, donc $p = 2$ ou $p = 42$ et le produit de ces deux valeurs est 84.

Maxi 26

Sans réponse préformulée - L'entier n est le plus petit multiple strictement positif de 15 tel que chaque chiffre de n soit 0 ou 8. Que vaut $\dfrac{n}{120}$?

Solution

S'il existe un multiple de 15 qui ne comporte que des chiffres 0 ou 8, alors en divisant ce nombre par 8, on obtient un multiple de 15 dont les chiffres sont des 0 ou des 1. Cherchons un tel nombre. Remarquons que $37 \cdot 3 = 111$, d'où $37 \cdot 3 \cdot 10 = 74 \cdot 15 = 1110$. Ce qui donne $n = 8 \cdot 74 \cdot 15 = 8880$ et $\dfrac{n}{120} = 74$. La valeur de n est bien la plus petite satisfaisant à la question, il suffit de vérifier que les nombres 8800, 8000, 8080, 8008, 888, 880, 808, 88, 80 et 8 ne sont pas multiples de 15.

Maxi 29

$\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Que vaut $\sin\alpha - \cos\alpha$?

Ⓐ $2\sqrt{198}$ Ⓑ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $\frac{4}{3}$ Ⓓ $-\frac{4}{3}$ Ⓔ 0

Solution

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{2}{9}$, d'où $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{9}$ et $2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{7}{9}$.
De là, $1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$.
α est un angle du deuxième quadrant, donc $\sin\alpha > \cos\alpha$ et de l'égalité précédente, il vient $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$.

Rallye problèmes

N. Miewis

Vous trouverez ci-dessous les cinq problèmes de la deuxième étape. Envoyez vos solutions à Nicole MIEWIS, avenue de Péville, 150, 4030 - Grivegnée, munies de la mention « Rallye Math-Jeunes » avant le 20 février 2004. Les solutions les plus élégantes seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

6 — L'escalier roulant (5 points)

Marc a l'habitude de grimper l'escalier roulant du Métro tandis qu'il fonctionne : il monte 20 marches de son propre pas et met ainsi exactement 60 secondes. Julie ne monte elle-même que 16 marches et met ainsi 72 secondes. L'escalier roulant est aujourd'hui en panne !

Combien de marches Marc et Julie monteront-ils ?

7 — Le rallye (5 points)

CLAUDE et DOMINIQUE sont engagés dans le Grand Rallye Pédestre des Trois Vallées.

CLAUDE, dossard bleu, en catégorie cadet et DOMINIQUE, dossard rouge, en catégorie junior. Pour chaque catégorie, la numérotation des dossards commence à 1 et on ne saute pas de numéro.

Dans l'ambiance du départ, CLAUDE observe ses adversaires et dit à DOMINIQUE :

« C'est curieux, j'ai fait la somme des numéros des dossards bleus qui sont plus petits que le mien et j'observe qu'elle est égale à la somme des numéros des dossards bleus qui sont plus grands que le mien ! ».

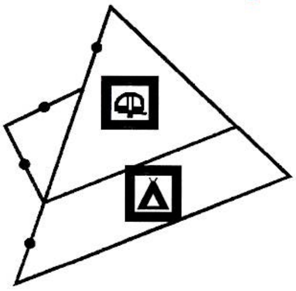
DOMINIQUE éclate de rire et lui dit :

« Vous n'êtes même pas une douzaine dans ta catégorie, c'était facile à observer. Admire un peu, je suis dans la même situation que toi dans ma catégorie et pourtant nous sommes bien plus nombreux que vous, même si nous sommes loin d'atteindre la centaine ! ».

Combien y avait-il de concurrents engagés au Grand Rallye des Trois Vallées en catégorie cadet et en catégorie junior ?

8 — Le camping (7 points)

Le terrain de camping « au pi-allez » est de forme triangulaire. Il est partagé par une ligne droite parallèle à un des côtés en deux zones, l'une pour les tentes et l'autre pour les caravanes. Le bâtiment d'accueil, qui a la forme d'un triangle rectangle, a été construit à l'extérieur, le long d'un deuxième côté comme l'indique le schéma. Les quatre côtés signalés par un point central ont la même longueur.



Les deux zones du camping « au pi-allez » ont-elles la même aire ?

9 — La perche brisée

(10 points)

Arc-bouté sur sa perche en fibre de verre de 5 mètres de longueur, KISOTPAS allait probablement passer la barre, lorsque sa perche se brisa net en 2 endroits.

L'engin avait été saboté et on voyait encore des traces de dents de scie, amorces de cassures équiprobables tout le long de la perche, espacées régulièrement et proches les unes des autres.

Fort dépité, KISOTPAS contemplait les dégâts et récupérait les trois tronçons avec la ferme intention de faire un sit-in de désapprobation devant le public. Quant il remarqua qu'il ne pouvait même pas faire un triangle avec les tronçons et s'asseoir au milieu, il envisagea sérieusement le sepuku !

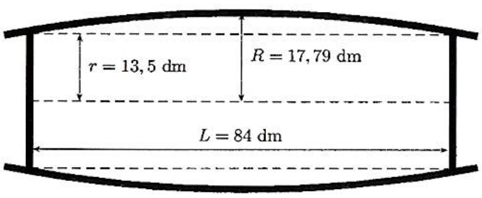
Quel est la probabilité que la perche se soit cassée de cette manière ?

10 — Le tonneau d'Eberbach (10 points)

Le vignoble allemand doit son origine à des moines bourguignons qui fondèrent vers 1125 l'abbaye d'Eberbach à Eltville sur le Rhin. Lorsque le père abbé recevait ses hôtes dans son bureau (kabinet), il leur servait de si bons vins, que le terme est resté et désigne depuis les meilleurs vins allemands.

Aujourd'hui propriété de l'Etat de Hesse, c'est un lieu de rencontre et un musée consacrée à l'histoire du vin. On y a notamment tourné le film « Le nom de la Rose » de J.J. ARNAUD.

Pour transporter leurs vins, les moines avaient conçus des bateaux à fond plat où prenaient places deux tonneaux. Près d'une maquette de ces bateaux, un simple dessin nous indique quelques dimensions de ces tonneaux.

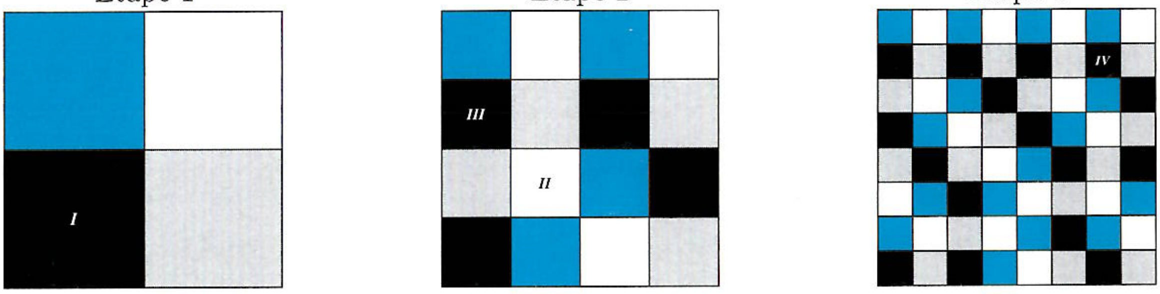


En vous servant de ces seules données, pouvez-vous donner une estimation de la capacité de ces barriques ?

Solution du jeu n°4

Colorier à la mode de Hilbert

Étape 1 Étape 2 Étape 3



C_1 C_2 C_3

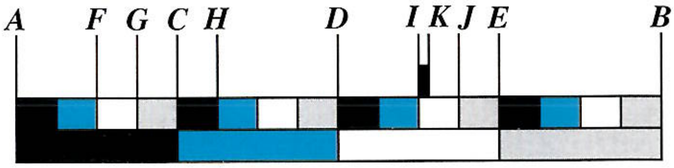
Commentaires

Les règles de coloriage imposées correspondent au parcours de la courbe de Hilbert (voir l'article *Peano, Hilbert et le Minotaure*).

Le coloriage sert de support à un **codage** qui permet de repérer chaque case de chaque étape. Voici quelques illustrations de ce codage.

Case	Étape 1	Étape 2	Étape 3
I	noir		
II	noir	blanc	
III	bleu	noir	
IV	blanc	blanc	noir

Nous colorions ensuite un segment en une succession d'étapes, de façon analogue à ce qui a été fait pour le carré. La figure suivante représente (de bas en haut) les deux premières étapes, ainsi qu'un petit segment issu de la troisième étape.



Voici les codes de certains segments :

Segment	Étape 1	Étape 2	Étape 3
$[AC]$	noir		
$[FG]$	noir	blanc	
$[CH]$	bleu	noir	
$[IK]$	blanc	blanc	noir

À chaque étape du coloriage du segment correspond une étape du coloriage du carré, et chaque sous-segment du segment initial correspond à une case du carré initial : celle ayant le même code.

- $[AC] \leftrightarrow$ noir $\leftrightarrow$ I
- $[FG] \leftrightarrow$ noir–blanc $\leftrightarrow$ II
- $[CH] \leftrightarrow$ bleu–noir $\leftrightarrow$ III
- $[IK] \leftrightarrow$ blanc–blanc–noir $\leftrightarrow$ IV

En extrapolant le processus à l'infini, on cerne

- un point du segment comme intersection de segments emboîtés de plus en plus petits
- un point du carré comme intersection de carrés emboîtés de plus en plus petits.

Par passage à la limite, une application des points du segment sur les points du carré est définie: à un point qui parcourt le segment $[AB]$, on peut associer un point qui parcourt le carré en passant successivement par tous ses points. Les règles imposées pour colorier à chaque étape les cases du carré ont pour effet que le parcours du carré s'effectue de façon continue, suivant la courbe construite par Hilbert.

Melle de Montpensier à Chambord

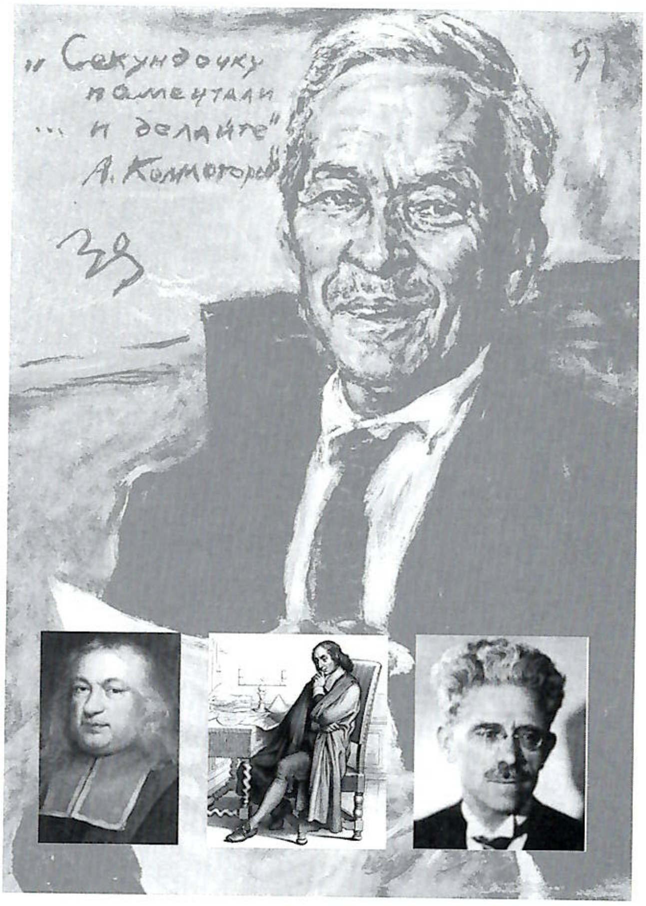
Monsieur vint au-devant de moi jusqu'à Chambord, qui est à trois lieues de Blois ; c'est un château qui lui appartient, bâti par François Ier d'une manière fort extraordinaire, au milieu d'un parc de huit ou neuf lieues de tour, sans autre cour qu'un espace qui règne autour d'une partie du logis, qui fait une figure ronde. Une des plus curieuses et des plus remarquables choses de la maison est le degré, fait d'une manière qu'une personne peut monter et une autre descendre sans qu'elles se rencontrent, bien qu'elles se voient ; à quoi Monsieur prit plaisir de se jouer d'abord avec moi. Il étoit au haut de l'escalier lorsque j'arrivai ; il descendit quand je montai, et rioit bien fort de me voir courir, dans la pensée que j'avois de l'attraper. J'étois bien aise du plaisir qu'il prenoit, et je le fus encore davantage quand je l'eus joint.

Dans notre prochain numéro :

Les probabilités

- Petit historique
- A. Kolmogorov...
- Happy birthday to you!
- Des simulations
- ...

... sans oublier nos rubriques habituelles.



Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G . NOËL
Rue de la Culée 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée