MATH-JEUNES

LES PROBABILITES

25ème année
Mars 2004 - n° 108 S

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-fax 32-(0)65-373729,
e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte IBAN BE 26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60€	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

Sommaire

En couverture : Andrei Kolmogorov, Pierre de Fermat, Blaise Pascal et Maurice Fréchet.

Les articles *Des représentations d'une hélice circulaire*, de C. Randour et *Le déroulement de la spirale d'Archimède* de J. Opsomer et P. Tilleuil, publiés dans le numéro 107, sont disponibles, en versions interactives, sur le site www.sbpm.be de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°108 Vingt-cinquième année 2004

MATH-JEUNES

Les probabilités

Les probabilités jouent un rôle de plus en plus important dans tous les domaines de la vie moderne. Par exemple, elles constituent le point de départ de toute approche explicative de la statistique. Une telle situation suffit pour que *Math-Jeunes* s'intéresse au sujet.

Fidèles à un principe qui nous semble fructueux, nous commençons par donner quelques indications relatives au développement historique de notre thème. C'est l'objet des deux premiers articles. Celui de G. Noël, *Le début de l'histoire*, traite de la période précédant les travaux de Fermat et Pascal, une période mal connue au point qu'on considère souvent ces deux savants comme ayant été les tout premiers à s'intéresser aux probabilités. Il est vrai qu'ils leur ont donné leurs lettres de noblesse : auparavant, les activités probabilistes n'étaient guère considérées que comme des amusettes. Ceci explique sans doute que des traités rédigés AVANT les travaux de Fermat et Pascal n'ont été publiés qu'APRÈS.

L'article de P. Tilleuil, *Des jeux au chaos : la suite de l'histoire*, prend le relais et brosse l'évolution du sujet de la fin du XVII^e^ siècle à nos jours, accordant une large place à la loi dite *normale*, un sujet que l'auteur reprend de façon plus explicite dans *La loi du hasard* où il fait surgir la courbe dite *en cloche* d'une simulation réalisée à l'aide d'un tableur.

Il est impossible, dans le cadre de *Math-Jeunes*, de donner une idée même approximative de la théorie moderne des probabilités. Il était tout aussi impossible que P. Tilleuil évoque la période moderne sans citer le nom d'Andrei Kolmogorov. Sur notre couverture, à côté des portraits de Fermat, Pascal et Kolmogorov, figure une photographie de Maurice Fréchet, ce mathématicien français (1878–1973) qui a contribué largement aux développements intervenus durant le XX^e^ siècle. Dans sa rubrique *Anniversaire*, S. Trompler revient sur la vie de Kolmogorov. Elle nous parle aussi de Jacques Bernoulli, le père de la *loi des grands nombres*.

Nos autres articles sont consacrés à des applications, certaines relativement classiques. Le problème des anniversaires est traité par J.-P. Gosselin et le jeu de franc-carreau par J. Miewis. Enfin, dans *Cent cibles s'abstenir*, Y. Hanssens nous propose une situation qui ne manque pas de piquant.

Tout au long de la revue, deux outils probabilistes importants sont utilisés. Leur emploi s'accompagne souvent du tracé d'un *arbre*.

1. La *règle du produit* s'applique lorsqu'on considère deux événements CONSÉCUTIFS A et B. Si p_A est la probabilité que A se réalise et si lorsque A s'est réalisé, la probabilité que B se réalise est p_B, alors la probabilité que A et B se réalisent consécutivement est le produit $p_A \cdot p_B$. (Elle est donc *inférieure ou égale* à p_A et à p_B.)

2. La *règle* de la somme s'applique lorsqu'un événement A peut se réaliser de deux manières différentes et incompatibles. Si p_1 est la probabilité associée à la première manière, et p_2 celle associée à la seconde, alors la probabilité de l'événement A est la somme p_1+p_2. (Elle est *supérieure ou égale* à p_1 comme à p_2.)

Ce numéro de *Math-Jeunes* est le dernier de l'année scolaire 2003–2004. Vous pouvez dès à présent renouveler votre abonnement pour l'année 2004–2005. Voyez nos tarifs (inchangés) ci-contre.

Le début de l'histoire

G. Noël

La joueuse d'osselets
Statue attribuée à
Polyclète,
V^e siècle av. J.-C.

Le jeu des osselets

Ce jeu a porté également le nom d'*astragalisme*, ou encore de *jeu des bibelots*.
Au départ, les osselets étaient de petits os provenant du carpe du mouton ou du porc. Avec le temps, on les fabriquera en matériaux divers.
Un osselet présente quatre faces : deux faces larges, l'une convexe marquée 4, l'autre concave, marquée 3 et deux faces étroites, l'une plate, marquée 1 et l'autre sinueuse, marquée 6.
Le jeu consistait à lancer quatre osselets, puis à interpréter les résultats selon un système de règles qui a varié dans le temps et dans l'espace.
Initialement, le jeu des osselets était à la fois un jeu de hasard et d'adresse.

1. Le hasard

Dès l'antiquité, avec Aristote (384–322 av. J.-C.), Épicure (341–270 av. J.-C.), Lucrèce (98–55 av. J.-C.),... l'homme s'est interrogé sur le hasard : sa nature, les conditions de l'apparition de certains phénomènes, etc.

Certaines des considérations formulées à l'époque sont étonnamment modernes. Ainsi, on trouve chez Aristote l'idée qu'un événement aléatoire dépend de petits changements dans la chaîne des événements qui l'ont précédé. Cette idée est fondamentalement celle du « chaos déterministe » qui a cours aujourd'hui.

La réflexion sur le hasard relève essentiellement de la philosophie. Avant le XVI^e siècle, on ne trouve guère de traces d'une quelconque tentative de *quantification* du hasard. Cependant des *jeux de hasard* existent déjà, des tirages au sort aussi. Une intuition des probabilités se met donc en place. Par exemple, Aristote considère qu'obtenir aux dés une suite de 10 000 résultats identiques consécutifs est impossible. On apprend ainsi à distinguer entre *phénomènes déterministes* et *phénomènes aléatoires.*

Un des jeux les plus pratiqués est le jeu des osselets. C'est l'ancêtre des jeux de dés.

2. Le problème des partis

Au fil du temps, la pratique des jeux de hasard, notamment du jeu de dés, fait surgir des questions qui ne peuvent recevoir de réponses sans un minimum de raisonnement quantitatif. Dès le début du quinzième siècle, le *problème des partis* ([1]) apparaît dans un manuscrit italien anonyme, au moins dans un cas particulier. Énonçons-le dans le cas général :

> *Un jeu équitable se joue en plusieurs manches et met aux prises deux joueurs. Le gagnant est celui qui, le premier, remporte un nombre de manches convenu. Supposons que les joueurs sont obligés de s'arrêter avant que le nombre de manches requis ait été atteint par aucun d'entre eux. Si pour l'emporter, il manque a manches au premier joueur et b manches au second, comment doivent-ils partager la mise ?*

Le manuscrit italien mentionné plus haut envisage le cas particulier où $a = 1$ et $b = 3$ — et dans ce cas résout le problème correctement. Près de cent ans plus tard, Luca Pacioli (1450–1520) s'attaque au même

([1]) Le mot « parti » provient ici du verbe « partir » dans le sens de « partager ».

problème et en propose une résolution que l'on pourrait qualifier d'intuitive : il suggère de répartir la mise proportionnellement au nombre de manches gagnées par chacun des deux joueurs. Mais il est mal à l'aise, se rendant compte qu'avec sa méthode, si un joueur a gagné une manche, et l'autre 0, alors le premier remporte toute la mise, ce qui serait clairement injuste dans la plupart des cas !

Dans son ouvrage *General Trattato di numeri et misure*, Nicolo Tartaglia (1499–1557), mieux connu pour sa contribution à la découverte de la méthode de résolution des équations algébriques de degré 3, émet la même objection à la méthode de Luca Pacioli, mais ne propose rien d'autre, se contentant d'affirmer « *La résolution d'une telle question relève plus du judiciaire que du rationnel, de sorte que, quelle que soit la solution proposée, il y aura matière à litige.* »

Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501–1576) fut — après l'anonyme italien de l'an 1400 — le premier à comprendre que la répartition de la mise entre les deux joueurs devait dépendre non du nombre de manches qu'ils ont déjà gagnées, mais bien du nombre de manches qu'il leur reste, chacun, à gagner.

À la place de la règle de Pacioli, Cardano propose de répartir la mise proportionnellement aux « progressions » des nombres de manches que chacun des joueurs doit encore gagner. Dans le langage de Cardano, la « progression » du nombre n est la somme $1 + 2 + \cdots + n$, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi selon Cardano, si un des joueurs doit encore gagner trois manches et l'autre une, la mise devra être répartie, en faveur du second, dans le rapport de $1+2+3 = 6$ à 1. S'il n'avait pas trouvé la réponse correcte, Cardano était néanmoins sur la bonne voie.

Un siècle plus tard, le problème fut posé à Pascal par le Chevalier de Méré et fit l'objet d'un célèbre échange de correspondance entre Fermat (1601–1665) et Pascal (1623–1662), lesquels le résolurent définitivement en 1654 par deux méthodes différentes.

La solution de Fermat présentée dans l'encadré nous permet deux remarques.

1. Fermat énumère les résultats possibles pour les trois manches non jouées, alors qu'il n'aurait peut-être pas été nécessaire de les jouer toutes les trois. Il aurait pu se contenter d'écrire « a, ba, bba, bbb ». Mais il aurait alors dû attribuer des probabilités différentes à ces quatre résultats et donc abandonner la traditionnelle règle d'équiprobabilité. La théorie des probabilités n'était pas encore suffisamment établie pour que ce fût possible. Aujourd'hui, nous utilisons un arbre probabiliste pour supporter le raisonnement de Fermat.

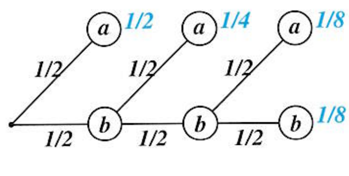
2. En répartissant la mise proportionnellement aux probabilités de gain des joueurs A et B, Fermat et Pascal utilisent implicitement la notion d'*espérance mathématique*.

La solution de Fermat

Notons A et B les deux joueurs et supposons que, pour gagner, il manque une manche à A et trois manches à B.
Tout au plus trois manches auraient encore été jouées. Imaginons les résultats de ces trois manches, en notant a les manches gagnées par A et b les manches gagnées par B : les huit cas possibles sont les suivants :

aaa aab aba abb
baa bab bba bbb

De ces huit possibilités, il n'y en a qu'une qui se traduit par le gain final de B. Ainsi, au moment où les deux joueurs ont dû se séparer, le joueur B n'avait qu'une chance sur huit de remporter la mise. Sa part sera donc un huitième de celle-ci, et celle A sera de sept huitièmes.



Si j'ai un billet de tombola qui me permet de gagner un lot de 100 €, et si ma probabilité de gain est de $\frac{1}{10}$, alors AVANT LE TIRAGE, la valeur de mon billet est $100\text{ €} \times \frac{1}{10} = 10$ €. C'est mon **espérance de gain**. APRÈS LE TIRAGE, la valeur de mon billet est soit de 100 €, soit de 0 €.

Par « circuit entier », Cardano désigne l'ensemble des cas possibles.

Imaginons à nouveau deux joueurs A et B. Appelons a le nombre de cas favorables à A et b le nombre de cas qui lui sont défavorables et sont donc favorables à son adversaire B. Notons m_A et m_B les mises respectives de A et B, Cardano nous dit qu'on doit avoir

$$\frac{a}{b} = \frac{m_A}{m_B}$$

Pourquoi ? La réponse fait intervenir l'idée d'espérance de gain rencontrée plus haut. La probabilité de gain de A est $\frac{a}{a+b}$. La somme à gagner est le total des mises, $m_A + m_B$. L'espérance de gain de A est donc

$$\frac{a}{a+b}(m_A + m_B)$$

Si $\frac{a}{b} = \frac{m_A}{m_B}$, alors $am_B = bm_A$ et l'espérance de gain de A est

$$\frac{(a+b)m_A}{a+b} = m_A$$

3. Girolamo Cardano

Durant une partie de son existence, Cardano (personnage pittoresque, contestable et contesté, dont le nom apparaît également à propos de la résolution de l'équation du troisième degré) gagna sa vie en jouant et pariant dans des tavernes à des jeux dont on se demande s'ils étaient équitables et si ses partenaires disposaient des connaissances nécessaires pour se faire une opinion à ce sujet. Fort des connaissances pratiques ainsi acquises, Cardano rédigea aux environs de 1560 le premier traité consacré aux probabilités, intitulé *Liber de ludo aleae*. Il y donne ce que nous pouvons considérer comme une définition de la probabilité :

> *[...] Nous devons considérer le circuit entier et le nombre des lancers qui représente en combien de façons les résultats favorables peuvent se produire, et comparer ce nombre au reste du circuit. [...] Les paris mutuels devront être posés selon cette proportion, de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux.*

Il faut, dit Cardano, comparer le nombre de cas favorables au reste du circuit, c'est-à-dire aux cas défavorables. À quoi sert cette comparaison ? Que veut-il dire exactement ?

L'encadré ci-contre montre que la condition de proportionnalité des mises aux probabilités est une condition *d'équitabilité* du jeu : chacun des joueurs a une espérance de gain égale à sa mise. Ainsi, après avoir mis leur argent sur la table, ni A, ni B n'ont encore rien perdu. De plus, en jouant un nombre assez grand de parties, en moyenne, ils récupèrent chacun leur mise. Cette condition d'équitabilité est ainsi associée à une forme de la loi des grands nombres.

Le problème des partis était directement lié à une question d'argent. C'est là une caractéristique du calcul des probabilités qui persistera au fil des siècles. (Voir, par exemple le calcul des primes d'assurance.)

Cardano était également conscient de ce que nous appelons actuellement les règles d'addition et de multiplication. Encore a-t-il commis, à propos de la règle d'addition, une erreur qui mérite d'être mentionnée. Le problème étudié était le suivant : *Combien de fois faut-il lancer une paire de dés pour avoir une chance sur deux qu'au moins lors d'un lancer le total des points marqués sur les deux dés soit 2.*

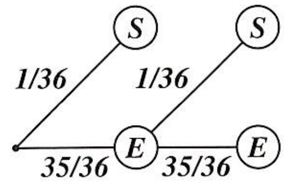
Le raisonnement de Cardano était essentiellement le suivant :

- En un lancer de deux dés, la probabilité d'avoir un total de deux est de $\frac{1}{36}$.
- En deux lancers de deux dés, j'ai deux fois plus de chances d'avoir au moins un total de deux, soit $\frac{2}{36}$.
- En poursuivant de la sorte, il arrivait à une probabilité de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ dans le cas de 18 lancers.

Le raisonnement est faux du fait que les probabilités ne s'additionnent pas toujours. Par exemple, dans le cas de deux lancers, on ne doit tenir compte du résultat du deuxième lancer que si le total 2 n'a pas été obtenu lors du premier lancer. L'arbre probabiliste ci-contre montre que la probabilité d'avoir au moins un total 2 en deux lancers vaut

$$\frac{1}{36} + \frac{35}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{71}{1296} \simeq 0{,}0548$$

alors que $\frac{2}{36} \simeq 0{,}0556$.



La lettre S désigne un succès : le total des points des deux dés vaut 2. La lettre E désigne un échec : le total ne vaut pas 2.

En additionnant la probabilité d'avoir un total de 2 au premier lancer à celle de l'avoir au deuxième lancer, Cardano comptait deux fois le cas où les deux lancers donnent tous deux un total de 2, cas dont la probabilité est $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$, ce qui est précisément la différence $\frac{2}{36} - \frac{71}{1296}$.

Comment résoudre alors le problème de Cardano et trouver la valeur de n pour laquelle il y a une chance sur deux d'avoir au moins un total de 2 en n lancers ? Le plus simple est de déterminer la probabilité pour qu'aucun des n lancers ne donne un total de 2 : c'est le produit de n facteurs $\frac{35}{36} \times \cdots \times \frac{35}{36}$. La probabilité pour qu'au moins un lancer donne un total de 2 est alors $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ et il reste à résoudre l'équation

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$$

Hélas, la solution de cette équation n'est pas un nombre entier ! Elle vaut 24,605...

Conclusion : Pour un nombre de lancers inférieur à 25, la probabilité d'avoir au moins un total de 2 est inférieure à $\frac{1}{2}$, pour un nombre de lancers au moins égal à 25, elle est supérieure à $\frac{1}{2}$.

L'ouvrage de Cardano ne fut, malheureusement, publié que 100 ans après sa rédaction, en 1663, à une époque où il était largement dépassé par les travaux de Fermat et Pascal, et par la publication du traité de Christiaan Huygens, *De ratiociniis in Ludo aleae* (1657).

Quelle est la probabilité de gain au passe-dix ?
Aucun calcul n'est nécessaire : sur un dé la somme des points marqués sur deux faces opposées vaut toujours 7. Ainsi, si les faces supérieures de trois dés fournissent un total supérieur à 10, alors le total des points des faces inférieures est au plus égal à 10 (le total des six faces est 21). À toute possibilité gagnante correspond donc exactement une possibilité perdante, de sorte que la probabilité de gain vaut exactement 0,5.

4. Galilée et le jeu de passe-dix

Lancez simultanément trois dés ordinaires (bien équilibrés). Vous gagnez si et seulement si le total des points marqués par les dés est supérieur à 10. Un ami de Galilée avait remarqué qu'il gagnait plus souvent en amenant un total de 11 qu'un total de 12. Pourtant, il y a six manières d'obtenir un total de 11, comme un total de 12. Comment expliquer ce paradoxe ?

Total 11		Total 12	
$1+4+6$	6	$1+5+6$	6
$1+5+5$	3	$2+4+6$	6
$2+3+6$	6	$2+5+5$	3
$2+4+5$	6	$3+3+6$	3
$3+3+5$	3	$3+4+5$	6
$3+4+4$	3	$4+4+4$	1

Dans son ouvrage *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi*, rédigé vers 1640, mais publié pour la première fois seulement en 1718, Galilée (1564–1642) explique le phénomène : en distinguant soigneusement les trois dés, par exemple en les coloriant, on constate qu'une somme telle que $1+4+6$ peut être réalisée de six façons différentes, $(1+4+6, 4+1+6, \ldots)$ alors que $3+4+4$ ne peut être réalisée que de trois façons différentes, et $4+4+4$ d'une seule façon. Si on tient compte du nombre de façons de réaliser chaque somme (voir le tableau), on trouve 27 possibilités d'obtenir 11 et 25 possibilités d'obtenir 12, ce qui montre que le paradoxe n'était qu'apparent.

Galilée venait ainsi d'attirer l'attention sur la possibilité que certaines analyses débouchent sur des modèles où les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Des jeux au chaos : la suite de l'histoire

P. Tilleuil

1. Le calcul des probabilités sort de l'ombre

Pierre de Fermat

Après Tartaglia, Cardano et Galilée, la solution de problèmes issus de la pratique des jeux de hasard devient progressivement une discipline mathématique. Et le sujet acquiert sa (première) maturité avec les travaux de B. Pascal (1623–1662) et P. de Fermat (1601–1665) : la solution du problème des partis et la notion d'espérance de gain (cf. l'article *Le début de l'histoire*) servent de modèles pour la résolution de questions variées.

Mais si les jeux de hasard deviennent ainsi l'objet d'un calcul des probabilités, celui-ci reste une discipline assez marginale dans les mathématiques de l'époque. D'autres problèmes semblent beaucoup plus importants, entre autres ceux qui concernent le mouvement, la notion de vitesse (instantanée), etc. A travers ces questions, c'est tout le calcul différentiel et intégral qui commence à voir le jour.

Blaise Pascal

De plus, les premiers résultats du calcul des probabilités sont assez mal diffusés. Les travaux de Cardano et Galilée ne sont publiés que longtemps après leurs rédactions ; les lettres de Pascal et Fermat, dans lesquelles ils discutent de leurs méthodes, ne seront complètement disponibles qu'à partir de 1679, même si le traité de Pascal à propos du « triangle arithmétique » (que nous appelons « triangle de Pascal » bien qu'il ait été connu avant celui-ci) paraît en 1654, etc.

Heureusement, C. Huygens (1629–1695), à la suite d'un voyage à Paris en 1655, publie en 1657 un petit ouvrage : *De Ratiociniis in Ludo aleae*, qui semble bien être le premier livre à avoir été publié sur le calcul des probabilités, et qui restera la référence pendant une bonne partie du siècle suivant. En plus de contributions notables de sa part, Huygens y reconnaît tout ce qu'il doit aux travaux de Pascal et Fermat.

Christiaan Huygens

2. Du calcul des probabilités à la théorie des probabilités

Au dix-huitième siècle, le calcul des probabilités reste d'abord tourné vers l'étude des jeux de hasard et les questions de combinatoire qui s'y rapportent. Mais une question très simple et très naturelle va lentement s'imposer comme *la* question à résoudre, et transformer le calcul concernant les jeux en une théorie de portée beaucoup plus grande.

Cette question, c'est : est-il possible d'estimer la valeur d'une probabilité au départ d'une expérience concrète, et avec quel degré de précision, ou plus précisément, quelle est la relation entre la fréquence (relative) d'un résultat lors de la réalisation concrète d'une expérience aléatoire, et la probabilité *a priori* de ce résultat, et quelle est la marge d'erreur sous-jacente ?

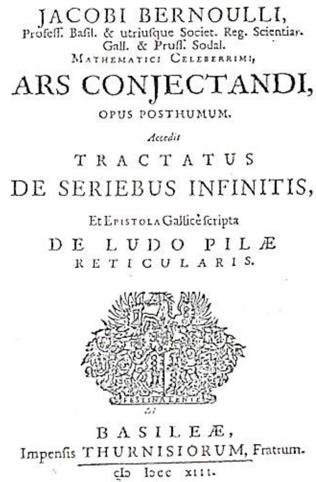
Cette question n'a de sens que si l'expérience aléatoire considérée est reproductible — à l'identique, donc sans que le résultat obtenu lors d'une expérimentation puisse influencer le résultat obtenu lors d'une expérimentation ultérieure — autant de fois qu'on le désire.

C'est Jacob – ou Jacques – Bernoulli, (voir l'article *Anniversaire* de S. Trompler), (1654-1705) qui le premier fournit une réponse mathématique à cette question et démontre pour cela un théorème qui marque la naissance de la *théorie* des probabilités. Il s'agit de ce qu'on appelle de nos jours la loi (faible) des grands nombres :

> *Dans une suite de n réalisations indépendantes d'une expérience aléatoire ne comportant que deux issues (qualifiées d'échec ou succès), la probabilité que la fréquence (relative) f_n d'un succès diffère de la probabilité p de ce succès de plus d'une quantité fixée a priori, devient négligeable lorsque le nombre n d'expériences devient suffisamment grand.*

Nous écririons que la probabilité de l'événement $|f_n - p| > r$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et cela quel que soit le réel strictement positif r.

En d'autres mots, il est très probable – en un sens précis – que fréquence (relative) et probabilité *a priori* pour un certain type d'expérience aléatoire, soient quasiment identiques, pourvu seulement que le nombre d'expériences qui sert à calculer cette fréquence soit suffisamment grand. Ce résultat est d'autant plus remarquable que sa démonstration par J. Bernoulli est tout à fait rigoureuse (ce qui n'était pas si fréquent à l'époque). Mais pour respecter ce qui ressemble à une funeste habitude, les résultats de J. Bernoulli, obtenus entre 1690 et 1705, ne seront publiés qu'après sa mort, en 1713, dans un livre intitulé *Ars Conjectandi*.


JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
 clↄ Iↄcc xiii.

Or, en 1738, A. de Moivre (1667–1754), dans son livre *The Doctrine of Chances*, propose une version plus précise du théorème de Bernoulli, en calculant les « valeurs exactes » des probabilités des valeurs possibles de $|f_n - p|$. C'est une première version de ce qui deviendra plus tard le théorème de la limite centrale (pour plus de détails, cf. *La loi du hasard* dans ce numéro).

De plus, en 1777, G. L. Buffon dans son *Traité d'Arithmétique Morale*, étudie deux problèmes de probabilités à propos d'événements dont l'ensemble des résultats n'est ni fini, ni même discret, mais bien continu. Il s'agit du jeu de franc-carreau (cf. l'article de ce titre) et du jet de l'aiguille sur un parquet. Ces problèmes de probabilité géométrique associent – pour la première fois – la notion de probabilité à celle de mesure au sens mathématique du terme (ici, la de mesure d'aire ou de longueur). Ils préfigurent ainsi la théorie moderne.


Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827).

La théorie des probabilités est définitivement lancée ! Il lui reste à se trouver un traité de référence, une bible. Ce sera l'œuvre de P. S. de Laplace (1749–1827), qui publie en 1812 un monumental ouvrage de plus de 800 pages, la *Théorie Analytique des Probabilités*. Laplace y fixe une bonne part de la terminologie, et surtout synthétise tous les résultats connus jusqu'alors, les développe et les enrichit de multiples façons, en utilisant à tour de bras le calcul différentiel et intégral.

On y retrouve dès les premières pages, une définition encore utilisée aujourd'hui :

« ... *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles* ... »

Rappelons qu'à la suite de Cardano, on a longtemps mesuré une probabilité par le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas DÉFAVORABLES.

Lisez dans l'encadré ci-dessous comment Laplace introduit le théorème de Bernoulli.

« ... *Au milieu des causes variables et inconnues que nous comprenons sous le nom de* ***hasard****, et qui rendent incertaine et irrégulière la marche des événements, on voit naître, à mesure qu'ils se multiplient, une régularité frappante, qui semble tenir à un dessein et que l'on a considéré comme une preuve de la providence. Mais, en y réfléchissant, on reconnaît bientôt que cette régularité n'est que le développement des possibilités respectives des événements simples, qui doivent se présenter plus souvent lorsqu'ils sont plus probables.*
Concevons, par exemple, une urne qui renferme des boules blanches et des boules noires, et supposons qu'à chaque fois que l'on en tire une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites au nombre des boules noires extraites sera le plus souvent très irrégulier dans les premiers tirages ; mais les causes variables de cette irrégularité produisent des effets alternativement favorables et contraires à la marche régulière des événements, et qui, se détruisant mutuellement dans l'ensemble d'un grand nombre de tirages, laissent de plus en plus apercevoir le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne, ou les possibilités respectives d'en extraire une boule blanche ou une boule noire à chaque tirage. De là résulte le théorème suivant :
La probabilité que le rapport du nombre de boules blanches extraites au nombre total des boules sorties ne s'écarte pas au delà d'un intervalle donné du rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules contenues dans l'urne, approche indéfiniment de la certitude par la multiplication indéfinie des événements, quelque petit que l'on suppose cet intervalle...
On peut tirer du théorème précédent cette conséquence, qui doit être regardée comme une loi générale, savoir, que les rapports des effets de la nature sont à fort peu près constants, quand ces effets sont considérés en grand nombre... Il suit encore de ce théorème que, dans une série d'événements indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue sur celle des causes irrégulières ... »

Laplace développe ensuite avec beaucoup de détails une démonstration générale du théorème de la limite centrale ; le théorème est d'ailleurs aussi connu depuis lors comme théorème de de Moivre-Laplace.

Et il est intéressant de noter que bien souvent, dans la discussion des hypothèses qu'il met à la base de ses raisonnements, Laplace raisonne par analogie avec des situations tirées de l'un ou l'autre jeu de hasard. Le travail des pionniers n'est donc pas perdu ...

3. Des applications à la recherche d'une théorie

Chronologiquement, quelques problèmes bien précis retiennent l'attention des mathématiciens à la fin du dix-huitième siècle. Ils sont à la source des progrès réalisés en théorie des probabilités par Laplace, mais aussi par C. F. Gauss (1777–1855).

Ces problèmes sont liés à la nécessité, nouvelle à cette époque, de traiter de manière cohérente un grand nombre de résultats d'expériences (mesure de la position de planètes ou de leurs satellites, mesure du méridien terrestre et de l'aplatissement de la terre, ...) Le prototype de ces problèmes est assez simple : comment résoudre un système d'équations linéaires comportant plus d'équations que d'inconnues ?

Le théorème de la limite centrale joue un rôle déterminant dans la solution de ce type de problème, comme Laplace et Gauss le feront voir. Et il permet en particulier d'expliquer pourquoi il y a un sens à développer une théorie *probabiliste* des erreurs d'observations.

Mais il n'y a pas que ces questions-là qui vont fournir l'occasion à la théorie des probabilités de s'ouvrir et de se diversifier.

Les sciences sociales, c'est-à-dire l'étude des « lois » (au sens physique du terme) qui gouvernent le fonctionnement des sociétés humaines, vont lentement assimiler les grands résultats de la théorie des probabilités, et les intégrer comme méthode expérimentale de découverte de ces « lois » encore inconnues. Ce sera principalement l'œuvre de A. Quételet (1796–1874) (un Belge !), inventeur du concept d'« homme moyen » pour quantifier certaines caractéristiques d'une population donnée, et de F. Galton (1822–1911), dont la célèbre « planche » illustre certaines propriétés de la distribution « en cloche » de Laplace-Gauss issue du théorème de la limite centrale :

$$\mathbb{L}\,(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

où μ est une moyenne et σ un écart-type.

Si les pionniers des sciences humaines commencent ainsi à exploiter les méthodes et les résultats de la théorie des probabilités, ils ne sont pas les seuls ! Dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, quelques physiciens remarquent que le très grand nombre de particules qui constituent un gaz suggère une interprétation probabiliste du comportement global de ce gaz. Ce que l'on appellera bientôt la *mécanique statistique* naît ainsi.

4. Le temps des synthèses

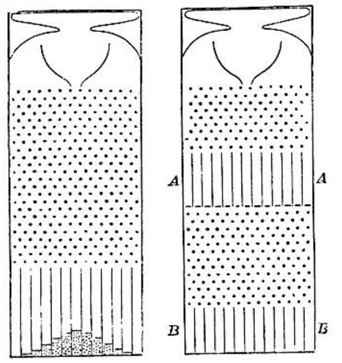
Il est quasiment impossible de détailler tous les développements que connaît la théorie des probabilités au vingtième siècle, mais il n'est pas

A. Quételet

Si on sait qu'un phénomène est décrit par une relation du type

$$y = ax + b,$$

et qu'on dispose de plus de résultats de mesure du couple (x, y) qu'il n'est nécessaire — mais tous aussi valables les uns que les autres ! — comment en déduire la valeur *la plus probable* de a et de b ?



Les deux versions de la planche de F. Galton, figure extraite de son livre « Natural Inheritance » de 1889. La figure de gauche est la planche de Galton classique, tandis que la figure de droite montre un dispositif permettant de restreindre l'expérience à une seule colonne en A, et d'observer en B la courbe de distribution des billes qui en résulte.

bien difficile de comprendre pourquoi une telle explosion devenait inévitable. En effet, et comme on vient de l'esquisser dans la section précédente, les domaines d'applications, et donc les nouveaux problèmes, ne cessaient de se multiplier ; et d'autre part, toutes les disciplines mathématiques (l'algèbre, la théorie des fonctions, la théorie des ensembles, etc.) qui pouvaient contribuer à une meilleure compréhension des méthodes utiles à la résolution de ces problèmes, ne cessaient plus eux aussi de se développer. La pression du neuf était donc partout !

Dans la préface de son ouvrage, Kolmogorov expose le cadre de son travail :
L'auteur s'est fixé pour tâche de placer les concepts de base de la théorie des probabilités à leur place naturelle, parmi les notions générales de mathématique moderne. [...]
Cette tâche aurait été impossible sans l'introduction par Lebesgue des théories de la mesure et de l'intégration [...] Les analogies entre la mesure d'un ensemble et la probabilité d'un événement, ainsi qu'entre l'intégrale d'une fonction et l'espérance mathématique d'une variable aléatoire, devinrent apparentes.
Ces analogies étaient susceptibles de prolongements. [...]
Mais si la théorie des probabilités devait reposer sur ces analogies, il était encore nécessaire de rendre les théories de la mesure et de l'intégration indépendantes des éléments géométriques qui apparaissaient chez Lebesgue. Ceci fut fait par Fréchet.

De plus, D. Hilbert (1862-1943) souligne, dans une liste de problèmes restée célèbre, l'intérêt de préciser les *fondements* de la théorie des probabilités, pour la mettre enfin à l'abri de toute contestation, en particulier quant au sens du hasard.

En 1933, A. Kolmogorov (1903-1987), (voir l'article *Anniversaire* dans ce numéro), à la suite de travaux de mathématiciens français, polonais, russes, américains, ... décrit finalement la notion de probabilité par quelques axiomes simples, comme une mesure imposée à un (certain) espace d'événements. Et il en tire immédiatement toute une série de résultats nouveaux, qui étendent encore la portée de la théorie. En fait, c'est à cela que servent de telles caractérisations axiomatiques !

A la suite de cette nouvelle synthèse, le rythme des progrès ne faiblira plus ! Des disciplines multiples, à première vue étrangères les unes aux autres, se fécondent mutuellement, à travers leur recours à des méthodes issues de la théorie des probabilités : la mécanique quantique, la thermodynamique, le comportement chaotique des systèmes dynamiques, les phénomènes de percolation, et aussi les fluctuations des cours de la bourse, la gestion des risques naturels, l'épidémiologie, les rythmes biologiques, les prévisions climatiques, etc. Et il ne se passe désormais plus beaucoup de temps sans qu'une nouvelle synthèse entre des domaines éloignés ne vienne éclairer d'un jour nouveau cet ensemble démesuré d'applications ...

En 2004, la théorie des probabilités se porte donc très bien, et ça, ... c'est une certitude !

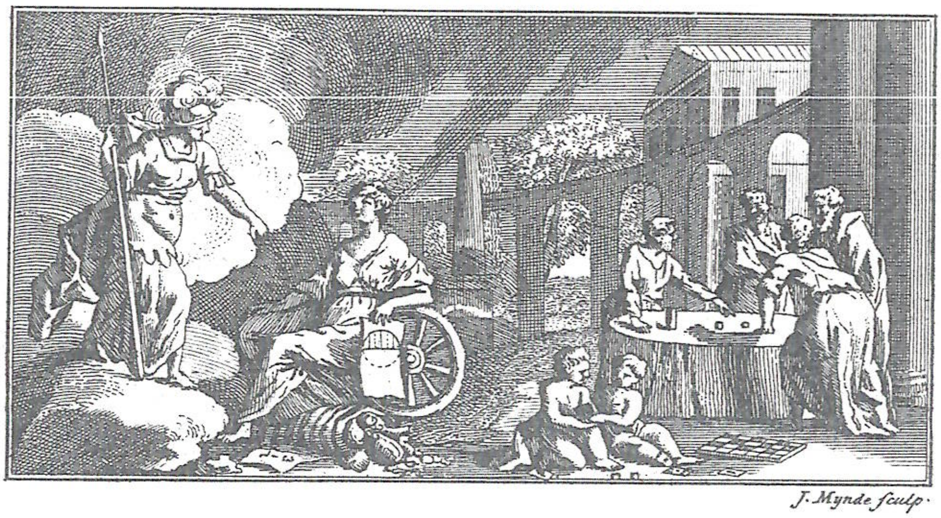
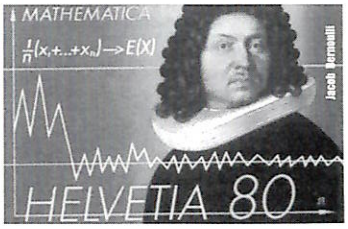


Illustration de l'ouvrage d'Abraham DE MOIVRE, *The Doctrine of Chances*, (édition de 1756)

S. Trompler

Jacques Bernoulli, 1654–1705

Jacques (ou Jacob) BERNOULLI est un mathématicien suisse. Sa famille, d'origine anversoise, avait fui les Pays-Bas espagnols en 1583 à cause des persécutions du duc d'Albe contre les protestants. Son père voulait en faire un théologien. Il suivit les cours nécessaires à l'université, mais il y ajouta des cours de mathématiques et d'astronomie contre les souhaits de ses parents.

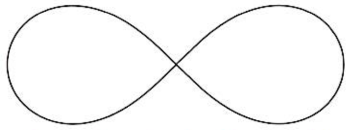


Jacques Bernoulli et l'approximation d'une probabilité par une fréquence (voir page 7).

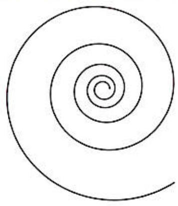
Licencié en philosophie en 1671, puis en théologie, en 1676, il voyagea en France, puis aux Pays-Bas, où il rencontra de nombreux mathématiciens. Il passa ensuite en Angleterre et compléta ainsi ses relations avec les principaux mathématiciens de l'époque. Revenu à Bâle , il devint professeur à l'université de cette ville à partir de 1687 et poursuivit des recherches en mathématique et en physique jusqu'à la fin de sa vie.

Son jeune frère Johann le suivit bientôt dans ses études et devint rapidement son rival, après avoir été son collaborateur. Il faut dire que Jacob Bernoulli est le premier d'une famille extraordinairement fertile en mathématiciens de tout premier plan : frères, neveux, petits-neveux et arrière-petits neveux, soit une douzaine en tout, devaient marquer leur époque par des recherches restées célèbres !

L'*Ars conjectandi* (1713) est la plus importante œuvre (posthume) de Jacques Bernoulli : c'est le premier grand traité de probabilité et de statistique. Bernoulli s'est aussi beaucoup intéressé à des courbes : l'une d'elle porte son nom : la lemniscate de Bernoulli. On peut la tracer point par point à partir de sa définition géométrique ; c'est le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant et égal au carré de la demi-distance entre ces points.



Lemniscate de Bernoulli



Spirale logarithmique

Une autre courbe l'a fasciné au point qu'il désire la faire graver sur sa tombe. Il s'agit de la spirale logarithmique qu'il appelle *spira mirabilis*.

Andrei Nicolaevitch Kolmogorov, 1903–1987

Il y a 100 ans naissait en Russie un mathématicien dont les travaux ont revêtu la plus grande importance, dans des branches très variées des mathématiques, notamment dans le domaine des probabilités.

La famille de la mère de Kolmogorov faisait partie de l'aristocratie et il passa sa jeunesse dans les terres familiales. En 1917, la révolution changea radicalement la situation et il devint quelque temps conducteur de train avant de pouvoir entrer à l'Université de Moscou, en 1920.

Andrei Nikolaievitch Kolmogorov

Les étudiants recevaient une aide minime de l'état et les conditions de vie étaient très dures : les salles de cours n'étaient pas chauffées. Kolmogorov suivit les cours d'Histoire de Russie et de mathématiques. Il fit des recherches scientifiques sérieuses sur les XV^e et XVI^e siècles qui furent très appréciées. Pour ses premiers travaux mathématiques, il choisit la théorie des ensembles, la géométrie projective et la théorie des fonctions analytiques.

Dès 1921–1922, il obtint des résultats personnels qui le firent connaître dans son pays et lui valurent une nomination de professeur à l'Université de Moscou en 1931.

Kolmogorov était intéressé par toutes les branches de la science. Lui et ses élèves écrivirent des articles à propos de la croissance des cristaux, de « la vie et la mort » et de la génétique, par exemple. Il avait l'art de trouver des liens entre des domaines qui paraissaient sans connexion et il leur consacra un petit nombre d'articles fondamentaux.

On peut s'étonner de l'aisance dans laquelle vivait Kolmogorov, et des facilités qui lui étaient accordées dans un pays, et à une époque, où la dictature stalinienne pesait lourdement sur les intellectuels. Il faut reconnaître que cette situation privilégiée exigeait beaucoup de prudence et des actes pas toujours en accord avec sa conscience. Par exemple, en biochimie, Trofim Denissovich Lyssenko avait contredit les grands généticiens de l'époque, par une théorie totalement fausse concernant la possible transmission héréditaire des caractères acquis. Comme il pouvait invoquer cette théorie à l'appui de ses idées politiques, Staline la décréta seule valable et envoya au goulag les généticiens en désaccord. Kolmogorov rédigea un article où il critiquait Lyssenko, mais le retira à temps de la publication.

Son intérêt pour la théorie des probabilités date de 1924. Dès 1929 il posa les bases d'un système d'axiomes. Il n'était pas le premier à s'atteler à cette tâche, mais dans son livre *Fondements du calcul des probabilités*, (publié en 1933 en allemand) il construisit la théorie des probabilités d'une manière rigoureuse à partir d'axiomes, d'une manière comparable à la méthode d'Euclide pour la géométrie. La traduction russe date de 1936, à un moment où une pression importante s'exerçait sur les scientifiques soviétiques pour qu'ils publient en russe et dans leur pays plutôt qu'à l'étranger. La traduction anglaise date seulement de 1950, ce qui explique que l'impact de ce travail se soit marqué assez tard. En général les idées de Kolmogorov en probabilité ont donné lieu à de nombreux développements théoriques et à de multiples applications dans la physique d'aujourd'hui.

En 1938–1939 fut créé l'Institut Mathématique Steklov de l'Académie des Sciences. La direction du département de Probabilité et de Statistique fut confiée à Kolmogorov. Cela ne l'empêcha pas de se consacrer également à des problèmes très variés en physique et en mathématique.

Il s'intéressa beaucoup à l'enseignement. Ses activités dans ce domaine commencèrent en 1922, lorsqu'il devint professeur dans une école expérimentale du Commissariat du Peuple pour l'Éducation. Il prit une part active dans l'organisation d'*Olympiades* (tiens, tiens !) dans les écoles. Selon lui, vers 14–15 ans, à peu près la moitié des élèves sont arrivés à la conclusion que les mathématiques et la physique ne leur serviront à rien. Pour ces élèves-là, il préconise un programme spécial simplifié. Par contre, les autres doivent avoir des cours qui les poussent le plus loin possible. Il s'occupa principalement de ceux-là. Kolmogorov fut l'instrument d'une profonde transformation, en URSS, du caractère de l'enseignement universitaire en mathématique. Il donna aussi aux étudiants des cours de musique, d'art et de littérature : il trouvait que le développement intellectuel doit être équilibré.

Happy birthday(s) !

J.-P. Gosselin

Y a-t-il environ une chance sur deux qu'au moins deux élèves de ta classe aient leur anniversaire le même jour ?

Bien sûr la réponse dépend du nombre d'élèves, et il serait plus judicieux de poser la question de la manière suivante :

Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité p qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Franchement, la question suivante est plus simple :

Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité q que toutes les personnes aient leur anniversaire des jours différents ?

Il semble en effet plus aisé de calculer q et on comprend bien que $p = 1 - q$.

Dans le cas général, on observe que n doit être inférieur ou égal au nombre de jours d'une année. Oui, mais si l'année est bissextile ? Le problème sera déjà assez compliqué comme cela, simplifions-le en excluant le 29 février et ne considérons que des années de 365 jours. Dans ce cas on supposera qu'il y a au plus 365 personnes et évidemment au moins 2.

Avant d'aborder le cas général, et pour fixer les idées, considérons une assemblée de trois personnes, Rose, Frédéric et Bruno, et cherchons la probabilité q qu'elles aient leur anniversaire des jours différents. Si l'anniversaire de Rose est le 4 mai, Frédéric fêtera le sien un des 364 autres jours, le 18 avril par exemple et Bruno un des 363 jours restants, le 4 décembre si l'on veut.

Ainsi

$$q = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = 0{,}991\ldots \qquad (1)$$

et $p = 1 - q = 0{,}008\ldots$

Il y a donc environ 8 chances sur 1000 qu'au moins deux des trois personnes aient leur anniversaire le même jour.

Ainsi

$$2 \leqslant n \leqslant 365$$

Habillons la réponse (1) ci-contre de manière à faire apparaître clairement le nombre 3 de personnes.

$$q = \underbrace{\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}}_{3-1 \text{ facteurs}}$$

Et sans avoir une imagination en délire, tu as déjà compris que pour n personnes :

$$q = \underbrace{\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}}_{n-1 \text{ facteurs}}$$

La réponse est donc finalement :

$$p = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}$$

Ouf !

Revenons alors à la question initiale, et supposons que ta classe comprenne 25 élèves. Il s'agit donc de calculer

$$q = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{341}{365}$$

On calculera patiemment q en alternant produits et quotients pour éviter tout dépassement de capacité de la calcul atrice :

$$\begin{aligned} q &= (((\cdots(364/365) \times 363)/365) \cdots \times 341)/365 \\ &= 0{,}431\,300\,296\,0\ldots \end{aligned}$$

et

$$p = 1 - q = 0{,}568\,699\,703\,9\ldots$$

Dans une classe de 25 élèves, il y a donc plus d'une chance sur deux que deux élèves aient leur anniversaire le même jour.

Et pour 24 élèves ? ou 23 élèves ? Pour ne pas recommencer plusieurs fois le même calcul, remarquons que la valeur de q pour n élèves s'obtient à partir de celle pour $n-1$ élèves :

La formule ci-contre permet de calculer $q(n)$ à partir de $q(n-1)$. C'est ce qu'on appelle une équation de récurrence du premier ordre.

$$\begin{aligned} q(n) &= \underbrace{\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}}_{n-1 \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-2)}{365}}_{n-2 \text{ facteurs}} \times \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= q(n-1) \times \frac{366-n}{365} \end{aligned}$$

n	$q(n)$
2	0,997 260 274 0
3	0,991 795 834 1
4	0,983 644 087 5
5	0,972 864 426 3
…	…
19	0,620 881 474 0
20	0,588 561 616 4
21	0,556 311 664 8
22	0,524 304 692 3
23	0,492 702 765 7
24	0,461 655 742 1
25	0,431 300 296 0
26	0,401 759 179 9

C'est le moment de rappeler que nous avions supposé $n \geqslant 2$. D'après la formule générale, on a $q(2) = \frac{364}{365}$. Les valeurs suivantes de q peuvent alors être calculées en n'ayant à effectuer qu'une multiplication et une division pour chaque nouvelle valeur. Le tableau ci-contre donne les valeurs de q pour $2 \leqslant n \leqslant 5$, puis $19 \leqslant n \leqslant 26$.

En particulier : si $n = 22$ alors $p = 1 - 0{,}5243\ldots = 0{,}4756\ \ldots$; si $n = 23$ alors $p = 1 - 0{,}4927\ldots = 0{,}5072\ \ldots$

A partir de 23 élèves, il y a plus d'une chance sur deux que deux élèves de la classe aient leur anniversaire le même jour.

J.-P. Gosselin est l'auteur du logiciel `Menumath` qui figure sur le cd-rom annexé au n°106 de *Math-Jeunes*.
Sur ce cd-rom, vous trouverez aussi un jeu, « `Activité probabiliste` » ainsi qu'un logiciel, « `Simulations` » qui sont consacrés aux probabilités.

Le jeu de Franc-Carreau

J. Miewis

Jetez une pièce de monnaie sur un sol carrelé. Quelle est la probabilité que la pièce tombe à franc-carreau, c'est-à-dire sur un seul carreau ?

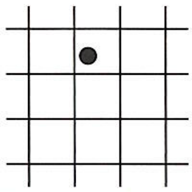
C'est quasi en ces termes que BUFFON (1707–1788) a jadis posé son célèbre problème.

En fait, il souhaitait connaître le rapport entre le diamètre de la pièce et la taille des carreaux pour que le pari du franc-carreau soit équitable. Il représentait la probabilité que la pièce soit à franc-carreau (Cas Favorable) ou qu'elle touche un joint (Cas Défavorable) par l'aire de certaines surfaces. Il recherchait ensuite à quelle condition le rapport $\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}$ valait 1, ce qui indique une égale probabilité des deux cas (puisque dans ce cas, le rapport $\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$, ou encore $\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CP}}$, vaut 0,5).

Nous allons examiner quelques situations et une manière de les modéliser. Nous admettons que l'épaisseur des joints est négligeable et nous calculons les conditions d'équitabilité sur des sols de carreaux carrés ou hexagonaux. Il nous faut également admettre que le diamètre de la pièce est suffisamment petit pour que le problème ait un sens. La pièce n'aura non plus jamais le mauvais goût de s'immobiliser sur la tranche... On considérera que la position du centre de la pièce suit une loi uniforme sur le carreau, ce qui signifie que le centre de la pièce peut atterrir en n'importe quel point du carreau avec la même probabilité. La position du centre de la pièce sur le sol déterminera si le coup est favorable ou non. Nous supposons aussi que les probabilités sur le carreau choisi sont les mêmes sur tous les carreaux.

Nous touchons là à des détails du protocole expérimental qui, en bonne logique, devrait toujours être complètement formulé avant de réaliser l'expérience, fût-elle simulée par un logiciel. En effet, si vous lancez vraiment une pièce de 2 €, par exemple, sur une table de cuisine recouverte de petites carreaux hexagonaux, vous aurez tendance à ne pas la lancer vers le bord de la table : dans ce cas les probabilités de tous les carreaux ne sont peut-être plus les mêmes !

Après des études de Droit à Dijon, Georges-Louis LECLERC, comte de Buffon, se consacre à sa passion des Sciences. En 1733, il s'assure une réputation de probabiliste en publiant son *Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau*. Il entre à l'Académie Royale des Sciences et exerce la fonction d'Intendant des Jardins du Roi. Il publie à partir de 1749 une *Histoire naturelle* en 36 volumes.

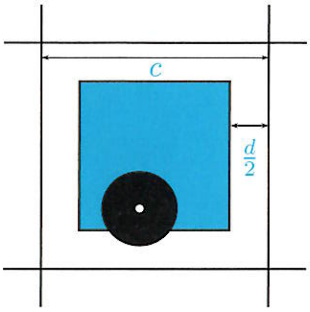


Pièce tombée à franc-carreau.

BUFFON s'est intéressé à beaucoup d'autres situations du même genre : carreaux rectangulaires, planchers, jet d'une aiguille au lieu d'une pièce. Toutes les situations ont en commun d'avoir ouvert la voie à un traitement géométrique de la probabilité.

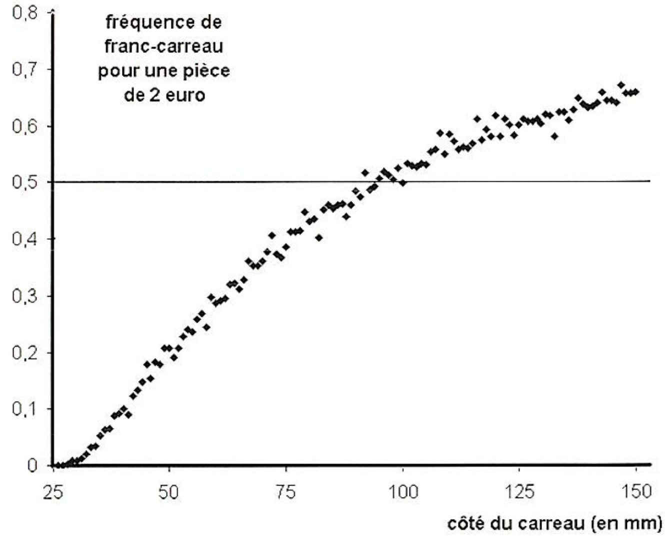
Carreaux carrés.

Soit d le diamètre de la pièce et c le côté du carreau carré. On a $d < c$. La surface favorable au franc-carreau est un carré de côté $c - d$ au centre du carreau ; la surface défavorable est l'« anneau » des points distants du bord du carré de côté c d'une distance inférieure à $\frac{d}{2}$. On a $\mathrm{CF} = (c-d)^2$ et $\mathrm{CD} = c^2 - (c-d)^2$. Le jeu sera équitable si $\dfrac{(c-d)^2}{c^2-(c-d)^2} = 1$, condition équivalente à $1 - \dfrac{d}{c} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



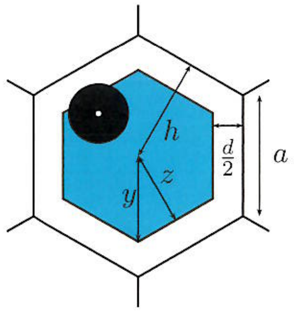
Si à première vue, il semble y avoir deux solutions, on ne peut garder que $\frac{d}{c} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,292$ car nous savons que $d < c$. Le jeu sera équitable si $\frac{d}{c}$ vaut 0,292.

Parier que la pièce sera à franc-carreau est donc avantageux dès que le diamètre de la pièce est inférieur à 0, 292 fois le côté du carreau. Pour une pièce de 2 € dont le diamètre est de 26 mm, il faut donc des carreaux (ou un quadrillage) de plus de 8,9 cm de côté !



Résultats d'une simulation pour une pièce de 2 € sur des carreaux carrés de côté c exprimé en mm.

Le jeu est équitable pour des côtés de carrés entre 90 et 100 mm. Les fréquences sont obtenues pour 1000 lancers de la pièce.



Carreaux hexagonaux.

Soit d le diamètre de la pièce et a le côté du carreau hexagonal. On a $d < a$. L'apothème h de l'hexagone est $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Sous ces hypothèses, la surface favorable au franc-carreau est un hexagone au centre du carreau d'apothème $z = h - \frac{d}{2}$ et de côté y avec $z = \frac{y}{2}\sqrt{3}$. La surface défavorable est l'« anneau » des points distants du bord de l'hexagone de côté a d'une distance inférieure à $\frac{d}{2}$. L'aire du grand hexagone est $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Le côté du petit hexagone est $y = a - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et son apothème est $\frac{1}{2}(a\sqrt{3} - d)$. Son aire vaut $\frac{3(a-\frac{d}{\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{2}$. On a

$$\mathrm{CF} = \frac{3(a - \frac{d}{\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{CD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3(a - \frac{d}{\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot (2a - \frac{d}{\sqrt{3}})$$

Le jeu sera équitable si $\left(a - \frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{d}{\sqrt{3}}\left(2a - \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$. On en déduit la condition $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{2}) \approx 0,507$.

Parier que la pièce sera à franc-carreau est donc avantageux dès que le diamètre de la pièce est inférieur à 0, 507 fois le côté du carreau. Pour la pièce de 2 €, ceci demande des côtés de carreaux supérieurs à 5,12 cm.

Pour vous entraîner : Étudiez le cas de carreaux ayant la forme de losanges, de côtés a et d'angle aigu θ. Montrez que si le diamètre de la pièce est d, le jeu est équitable si $\frac{d}{a} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\sin\theta$.

Pour en savoir plus : FRÉDÉRIC MÉTIN, Buffon et le problème de l'aiguille, in *Commission Inter-Irem, Irem de Normandie*, Ellipse, 2000, ISBN 2-7298-6822-4

La loi du hasard

P. Tilleuil

Voici un fichier à réaliser sous EXCEL®, et qui montre que le hasard obéit probablement à une loi !

Prérequis
Pour réaliser ce fichier, il vaut mieux que tu aies déjà travaillé un peu avec EXCEL®, dans le même contexte que celui de l'animation de la spirale d'Archimède proposée dans le numéro précédent de *Math-Jeunes* (et dont une version détaillée est disponible sur le site de la S.B.P.M.e.f., à l'adresse : `http://www.sbpm.be`).

Le problème

On lance la même pièce de monnaie (parfaitement équilibrée) 100 fois de suite. Bien sûr (?) on n'obtient pas toujours 50 fois face et 50 fois pile, mais quelle est la distribution des différences à ce résultat idéal ?

Plus précisément, le nombre N de piles relevées lors d'*une* expérience de 100 lancers, varie entre 0 et 100 et la différence $N - 50$ varie entre -50 et $+50$.

Si $\mathscr{E}$ est un échantillon de 1000 expériences de ce genre, on note $L(x)$ la fréquence de la différence $x = N - 50$ dans l'échantillon $\mathscr{E}$, et on demande de représenter graphiquement la fonction $L(x)$ où x est donc un entier compris entre -50 et 50. Que devient cette fonction lorsqu'on augmente la taille de l'échantillon ?

Le fichier de simulation pour 1000 expériences

Il suffit de réaliser l'échantillon de 1000 lancers, et d'y effectuer les dénombrements nécessaires. A cause de la taille de l'échantillon, il vaut mieux programmer le tableur horizontalement que verticalement.

Après avoir décidé que chaque ligne est consacrée à une expérience, tu commences par reproduire de **A2** à **A1001** le texte **Exp. 1**, **Exp. 2**, ... **Exp. 1000**. De **B1** à **CW1**, tu places les nombres de 1 à 100, pour repérer les 100 lancers de chaque expérience. De **B2** à **CW1001**, tu reproduis alors la formule $\boxed{\text{=ENT(2*ALEA())}}$. Cette formule fournit 1000 listes de 100 résultats, chacun valant 0 ou 1. On interprète 0 comme face et 1 comme pile. L'échantillon $\mathscr{E}$ est ainsi réalisé ; la figure ci-dessous montre une copie d'écran d'une (petite) partie de celui-ci.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
2	Exp. 1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
3	Exp. 2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
4	Exp. 3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
5	Exp. 4	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
6	Exp. 5	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
7	Exp. 6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
8	Exp. 7	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
9	Exp. 8	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
10	Exp. 9	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
11	Exp. 10	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
12	Exp. 11	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
13	Exp. 12	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
14	Exp. 13	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
15	Exp. 14	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
16	Exp. 15	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Les premiers résultats de l'échantillon, tels qu'on les découvre à l'écran.

Tu calcules alors pour chaque expérience la valeur du nombre N de piles, en faisant la somme des « 1 » présents dans chacune des lignes correspondantes, c'est-à-dire en recopiant à partir de **CY2** jusqu'à **CY1001** : $\boxed{\text{=SOMME(B2:CW2)}}$. Tu fais ensuite apparaître les valeurs de $N - 50 = x$ dans les cellules **CZ2** à **CZ1001** en reproduisant la formule $\boxed{\text{=CY2-50}}$.

Il faut maintenant dénombrer, et calculer les fréquences. De **B1003** à **BJ1003**, tu déroules la liste des valeurs de la variable x (on peut se limiter à $-30 \leqslant x \leqslant 30$). Tu relèves alors le nombre de réalisations de x dans l'échantillon $\mathscr{E}$ en reproduisant, de **B1004** à **BJ1004**, la formule

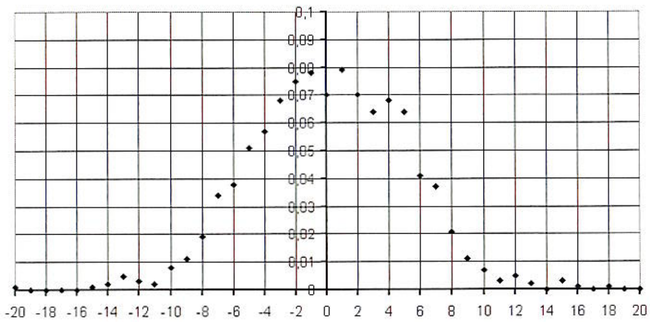
$\boxed{\text{=NB.SI(\$CZ\$2:\$CZ\$1001;B\$1003)}}$;

pendant la reproduction – qui se fait en ligne – seule la *lettre* précédant 1003 doit donc varier.

Finalement, il te reste à calculer la fonction $L(x)$ en reproduisant de **B1006** à **BJ1006** la formule $\boxed{\text{=B1004/1000}}$.

Le graphique ci-contre montre par exemple que 7% des 1000 expériences, soit 70 expériences, ont donné lieu à $N - 50 = 2$. Autrement dit sur les 100 lancers de chacune de ces 70 expériences, il y avait 52 « piles ».

Les résultats obtenus pour les valeurs de la différence x qui ne sont pas trop éloignées de 0 semblent d'abord chaotiques. Mais la représentation graphique de la fonction $L(x)$ montre mieux ce qui se passe : le graphique à l'air vaguement symétrique. Il devient donc assez intéressant d'augmenter la taille de l'échantillon. . . .



Le graphique de la fonction $L(x)$, pour un échantillon de 1000 expériences de 100 lancers.

Si avec le fichier du numéro précédent de *Math-Jeunes*, tu n'es pas encore devenu un virtuose des références circulaires, il est temps de te ruer sur le site de la S.B.P.M.e.f. ! Sinon, tu auras déjà deviné ce qu'on va faire : créer une nouvelle ligne de calculs du nombre de réalisations des différentes valeurs de x, en cumulant à chaque fois l'ancien résultat avec le nouveau.

Où on augmente la taille de l'échantillon. . .

Crée un interrupteur (0 ou 1) par exemple dans la cellule **A1009**, et autorise ensuite les références circulaires suivant la procédure habituelle ; pour mémoire

- choisir « **Outils/Options** » dans la barre de menus,
- sélectionner l'onglet « **Calcul** »,
- cocher la case « **Itération** » choisir « 1 » pour le nombre maximal d'itérations
- et quitter en appuyant sur « **Calculer maintenant (F9)** » dans la section « **Mode de calcul** », juste au-dessus de la section « **Itération** » ou en choisissant « **Mode de calcul/Sur ordre** ».

Tu calcules ensuite le nombre cumulé d'expériences en **A1011**, en y écrivant : $\boxed{\text{=SI(A1009=1;1000+A1011;0)}}$.

Tu recopies alors à partir de la cellule **B1012** et jusqu'en **BJ1012** la formule

$$\boxed{\text{=SI(\$A\$1009=1;B\$1004+B\$1012;0)}},$$

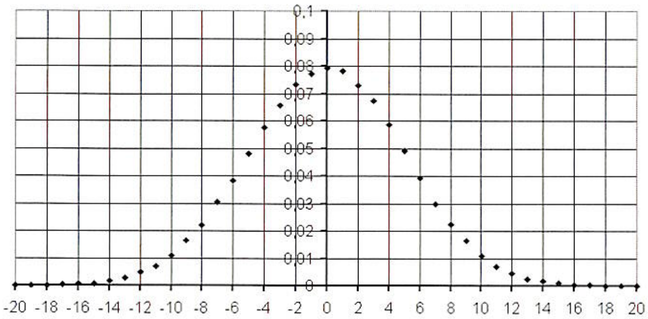
qui calcule le nombre cumulé de valeurs du résultat x pour toutes les expériences. Il reste encore à calculer les (nouvelles) fréquences correspondantes, ce qui se fait en recopiant de la cellule **B1013** jusqu'en **BJ1013** la formule $\boxed{\text{=B\$1012/\$A\$1011}}$. Maintenant, dès que tu appuies sur la touche F9, en haut du clavier, le cumul des expériences commence, par paquets de 1000 lancers.

La figure ci-contre montre les résultats qu'on obtient pour les valeurs de la différence x qui ne sont pas trop éloignées de 0.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
L(x)	0,0384	0,0478	0,0582	0,0651	0,0733	0,0771	0,0795	0,0782	0,0733	0,0672	0,0586	0,0492	0,0391

Un extrait du tableau de valeurs de la fonction $L(x)$, après 113 000 expériences de 100 lancers.

A la suite du (nouveau) tableau de valeurs ainsi obtenu, la représentation graphique de la fonction $L(x)$ semble plus régulière, et présente une symétrie beaucoup plus convaincante que pour un échantillon de 1000 expériences.



Le graphique de la fonction $L(x)$, pour un échantillon de plus de 100000 expériences de 100 lancers.

Ainsi, la stabilité accompagne le grand nombre d'expériences, et mérite qu'on s'y attarde un peu...

Une synthèse : le théorème de la limite centrale

La simulation qui vient d'être décrite permet de comprendre la signification de ce qu'il est convenu d'appeler une loi du hasard, sinon *la* loi du hasard. Cette loi est connue sous des dénominations variées : le théorème de la limite centrale, ou de De Moivre, ou de De Moivre-Laplace, etc.

En termes de probabilités, il s'agit de calculer une expression du type $Pr\,(N - 50 = x)$, où N est le nombre de piles obtenu lors de 100 lancers. Or, si on note

$$f_{100} = \frac{N}{100}$$

(ce qui est donc la *fréquence observée* du nombre N de piles dans un échantillon de 100 lancers), l'expression en question s'écrit aussi :

$$Pr\left(\frac{N}{100} - \frac{50}{100} = \frac{x}{100}\right) = Pr\left(f_{100} - \frac{1}{2} = \frac{x}{100}\right),$$

où $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ est la probabilité *a priori* d'obtenir pile. Et plus généralement, s'il s'agit d'un échantillon de n lancers, on s'intéresse à l'expression :

$$\mathbb{L}_n\,(x) = Pr\left(f_n - \frac{1}{2} = \frac{x}{n}\right).$$

Or, le cumul des résultats dans le fichier que tu viens de réaliser suggère que, pour des tailles d'échantillons suffisamment grandes (c'est-à-dire pour $n \to \infty$), cette fonction devient très régulière. C'est ce qu'énonce le théorème suivant.

Si tu veux avoir une idée de la démonstration de ce théorème, tu peux consulter l'excellent petit livre d'E. Lesigne : *Pile ou Face. Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités.* Coll. Opuscules, Ellipses S. A. ; Paris, 2001. Mais ton professeur de mathématiques pourra probablement t'épargner des nuits d'insomnie en te déblayant un peu le chemin . . .

Théorème de la limite centrale

Il existe une fonction $\mathbb{L}\,(x)$ de la différence x, qui est positive, dont le graphique admet la droite $x = 0$ comme axe de symétrie, et qui est telle que :

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(f_n - \frac{1}{2} = \frac{x}{n}\right) = \mathbb{L}\,(x),$$

et, pour être très précis :

$$\mathbb{L}\,(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{50}},$$

où $e = 2,718281828\ldots$ est un nombre exceptionnel à plus d'un titre. . .

Un billet de 10 marks représentant C. F. Gauss ainsi qu'une « courbe en cloche ».

Ainsi, sur de (très) grands échantillons, le hasard ne fait pas tout à fait ce qu'il veut, puisqu'on peut alors *estimer* la probabilité d'une valeur x de la différence entre le nombre observé N et le nombre théorique $\frac{n}{2}$ de piles, grâce à l'examen de la courbe $\mathbb{L}\,(x)$! Cette courbe est un exemple des « courbes en cloche » de C. F. Gauss (1777-1855).

Le hasard suit donc une loi ? Eh oui, mais en probabilité seulement. . . !

Cent cibles s'abstenir !

Y. Hanssens

Au tir à l'arc, Sylvie Zocentre entame un parcours de 10 cibles, numérotées de 1 à 10. Lorsqu'elle atteint une cible, le point lui est accordé ainsi que celui de la cible suivante sans qu'il lui soit nécessaire (ni même permis !) d'y tenter sa chance. Lorsqu'elle manque une cible, le point ne lui est pas attribué et elle se présente naturellement devant la cible suivante.

On note « I » le fait que le point d'une cible ait été accordé et « O » le fait qu'il ne l'ait pas été. Ainsi, le parcours « I I O I I I I O I I » est possible alors que « O O I O I I O I I I » ne l'est pas.

1. *Combien y a-t-il de parcours différents possibles de 10 cibles ?*
2. *Si, chaque fois que Sylvie se présente devant une cible, sa probabilité de l'atteindre est 1/2, quelle est la probabilité que le point de la dixième cible lui soit attribué (la réponse sera exprimée sous forme de fraction à termes entiers simplifiée au maximum) ?*
3. *Pour un parcours de cinq cibles (la probabilité d'atteindre l'objectif, quand on le vise, étant toujours de 1/2), Victor propose à Sylvie l'enjeu suivant :*
   - *si elle marque cinq points, il lui donne 3 €,*
   - *si elle marque quatre points, il lui donne 1 €,*
   - *si elle marque trois points, c'est elle qui lui donne 1 €,*
   - *si elle marque deux points, elle lui donne 2 €,*
   - *si elle marque un point, elle lui donne 3 €,*
   - *si elle ne marque aucun point, elle ne reçoit ni ne donne rien.*

   Ce jeu est-il favorable à Sylvie ou à Victor ?

Prolongements :

- Combien y a-t-il de parcours de 100 cibles, de n cibles ?
- Quelle est la probabilité d'atteindre la n^e cible ?
- De quel nombre s'approche cette probabilité quand n devient « très grand » ?
- Et si la probabilité p d'atteindre la cible vaut 1/3 à chaque essai ?

Solutions

$\boxed{1.}$ Soit P_n le nombre de parcours possibles avec n cibles. Observons les résultats obtenus pour de « petits » parcours.

Par exemple, dénombrons les parcours possibles pour $n = 1, 2, 3, 4$ cibles en séparant ceux pour lesquels Sylvie atteint la première cible de ceux pour lesquels elle ne l'atteint pas.

Nombre de cibles n	1	2	3	4	...
Parcours possibles	I ― O	II ― OI OO	III IIO ― OII OOI OOO	IIII IIOI IIOO ― OIII OIIO OOII OOOI OOOO	...
P_n	2	3	5	8	...

Continuons :

$$\underbrace{\begin{array}{c|cccc|} O & I & I & I & I\\ O & I & I & O & I\\ O & I & I & O & O\\ O & O & I & I & I\\ O & O & I & I & O\\ O & O & O & I & I\\ O & O & O & O & I\\ O & O & O & O & O \end{array}\ \underset{P_4}{\downarrow} \qquad \begin{array}{cc|ccc|} I & I & I & I & I\\ I & I & I & I & O\\ I & I & O & I & I\\ I & I & O & O & I\\ I & I & O & O & O \end{array}\ \underset{P_3}{\downarrow}}_{P_5=P_4+P_3=8+5=13}$$

Pour un nombre $n \geqslant 3$,
- si la première cible est atteinte, le point de la 2e est attribué et il reste P_{n-2} parcours possibles pour les cibles restantes,
- si la première cible est manquée, il reste P_{n-1} parcours pour le reste des cibles.

Ainsi

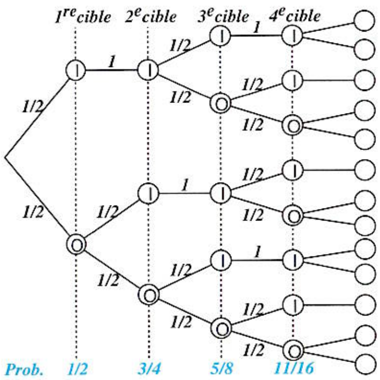
$$\boxed{P_n = P_{n-2} + P_{n-1}}$$

La solution cherchée — soit P_{10} — est donc le 10e terme de la suite (P_n) définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} P_1 = 2 \\ P_2 = 3 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-1}, \text{ si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

à savoir 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...(la fameuse suite de Fibonacci amputée de ses 3 premiers termes 0, 1 et 1). Ainsi $P_{10} = 144$.

Question subsidiaire : combien de parcours de 100 cibles ? Pour y répondre, relisez l'article consacré à la suite de Fibonacci, « Une suite en Italie », paru dans le numéro 106 de *Math-Jeunes*.



$p_1 = \frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$p_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Numéro de la cible	Probabilité de marquer le point
1	$\frac{1}{2} = 0,5$
2	$\frac{3}{4} = 0,75$
3	$\frac{5}{8} = 0,625$
4	$\frac{11}{16} = 0,6875$
5	$\frac{21}{32} \simeq 0,6562$
6	$\frac{43}{64} \simeq 0,6718$
7	$\frac{85}{128} \simeq 0,6640$
8	$\frac{171}{256} \simeq 0,6679$
9	$\frac{341}{512} \simeq 0,6660$
10	$\frac{683}{1024} \simeq 0,6669$

$\boxed{2.}$ Soit p_i la probabilité d'obtenir le point de la i^{e} cible.

Une première approche de la solution peut s'obtenir à l'aide d'un diagramme en arbre comme ci-contre. On calcule $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $p_3 = \frac{5}{8}$, $p_4 = \frac{11}{16}$, ... et on « devine » comment prolonger cette suite : le dénominateur est doublé à chaque fois et le numérateur est, alternativement, doublé et augmenté de 1, puis doublé et diminué de 1, ...

De manière un peu plus rigoureuse (avec un raisonnement proche de celui utilisé dans la solution du premier problème) :

- **Si la première cible est atteinte** (probabilité $\frac{1}{2}$), il reste un parcours de $n-2$ cibles pour lequel le point de la dernière cible est accordé avec une probabilité égale à p_{n-2}. Ces deux événements (indépendants !) se produiront avec une probabilité égale à $\frac{1}{2} \cdot p_{n-2}$.
- **Si la première cible est manquée** (probabilité $\frac{1}{2}$), il reste un parcours de $n-1$ cibles pour lequel le point de la dernière cible est accordé avec une probabilité égale à p_{n-1}. Ces deux événements (indépendants !) se produiront avec une probabilité égale à $\frac{1}{2} \cdot p_{n-1}$.

Ce qui nous donne (avec une belle allure de théorème des probabilités totales) :

$$p_n = \frac{1}{2} \cdot p_{n-2} + \frac{1}{2} \cdot p_{n-1}$$

En résumé : La solution cherchée — soit p_{10} — est le 10e terme de la suite (p_n) définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} p_1 = 1/2 \\ p_2 = 3/4 \\ p_n = \frac{1}{2}(p_{n-2} + p_{n-1}), \text{ si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Il « semble » que la suite de ces probabilités tende vers $\frac{2}{3}$ par encadrements successifs de cette valeur. La recherche de la formule explicite de p_n est envisagée en annexe.

Parcours	Scores	Probabilités
I I I I I	5	1/8
I I I I O	4	1/8
I I O I I	4	1/8
I I O O I	3	1/16
I I O O O	2	1/16
O I I I I	4	1/8
O I I O I	3	1/16
O I I O O	2	1/16
O O I I I	3	1/16
O O I I O	2	1/16
O O O I I	2	1/16
O O O O I	1	1/32
O O O O O	0	1/32

$\boxed{3.}$ Soit X le gain de Sylvie. Le tableau ci-contre reprend les treize parcours possibles avec les scores obtenus (nombres de points marqués) et les probabilités respectives.

Dans l'article « *Le début de l'histoire* », vous avez rencontré l'espérance de gain quand le joueur n'avait que deux possibilités : ou bien il gagnait tout, ou bien il perdait tout. Dans le cas présent il y a six possibilités de gain (ou perte). Leurs probabilités sont reprises dans le tableau suivant :

X_i	3	1	-1	-2	-3	0
$P(X_i)$	1/8	3/8	3/16	1/4	1/32	1/32

L'espérance de gain pour Sylvie, (c'est-à-dire son gain moyen), est alors donnée par la formule $X_1 \cdot P(X_1) + \cdots + X_6 \cdot P(X_6)$, soit

$$3 \cdot \frac{4}{32} + 1 \cdot \frac{12}{32} + (-1) \cdot \frac{6}{32} + (-2) \cdot \frac{8}{32} + (-3) \cdot \frac{1}{32} + 0 \cdot \frac{1}{32} = \frac{-1}{32}$$

En moyenne, Sylvie devra donc donner $\frac{1}{32}$ € à Victor, de sorte que le jeu est favorable à Victor.

Annexe

Généralisons : la probabilité (constante) d'atteindre la cible est p au lieu de $\frac{1}{2}$. La probabilité de rater la cible est alors $1-p$. La suite des probabilités p_n d'obtenir le point de la n^e cible est définie par

$$\begin{cases} p_1 = p \\ p_2 = p + (1-p)p = p(2-p) \\ p_n = (1-p) \cdot p_{n-1} + p \cdot p_{n-2}, \text{ si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Pour calculer explicitement p_n, nous procédons comme dans l'article « Une suite en Italie » (*Math-Jeunes* n° 106 S, pp.22–26). Du fait que les solutions de l'équation $x^2 = (1-p)x + p$ sont 1 et $-p$, nous constatons d'abord que les suites $(a_n = 1^n)$ et $(b_n = (-p)^n)$ vérifient toutes deux l'équation de récurrence $p_n = (1-p) \cdot p_{n-1} + p \cdot p_{n-2}$. Il suffit dès lors de trouver des nombres α et β tels que

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1^0 + \beta \cdot (-p)^0 = p \\ \alpha \cdot 1^1 + \beta \cdot (-p)^1 = p \cdot (2-p) \end{cases}$$

pour pouvoir écrire $p_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot (-p)^n$ quel que soit n.

Les solutions du système en α et β sont $\alpha = \frac{2p}{1+p}$ et $\beta = \frac{p(p-1)}{1+p}$. En conclusion, $p_n = \dfrac{2p - (p-1)(-p)^n}{1+p}$.

Et puisque, en dehors du cas trivial $p = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-p)^n = 0$, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2p - (p-1)(-p)^n}{1+p} = \frac{2p}{1+p}$$

Si $p = 1$, alors $p_n = 1$ pour tout n, et la limite de p_n est encore $\frac{2p}{1+p}$.

Pour notre exemple ($p = \frac{1}{2}$), cela donne, après petites transformations,

$$p_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$$

Le cas où $p = \frac{1}{3}$ offre la particularité de donner des probabilités alternativement inférieures et supérieures à $\frac{1}{2}$ et tendant vers cette valeur. Autrement dit, les cibles de rang pair ont une probabilité supérieure à une chance sur deux d'être atteintes (pour les cibles de rang impair, elle est inférieure à $\frac{1}{2}$).

 Math-Jeunes n°108, 24–24, 2004

Jeux

Y. Noël-Roch

---

1. Mr. Proba et ses deux enfants.

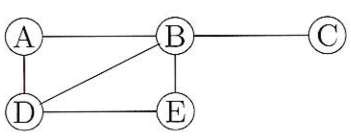
Mr. Proba propose un jeu à ses deux enfants Chance et Hasard. A son tour, chacun des trois lance deux pièces de 1 €. A chaque fois un des trois joueurs reçoit un point :
– Chance dans le cas de deux Piles
– Hasard dans le cas de deux Faces
– Mr. Proba dans le cas d'un Pile et d'un Face.
Le premier joueur qui obtient 25 points est le gagnant. Ce jeu attribue-t-il le même espoir de gain aux trois partenaires ?

2. Quatre enfants.

En supposant que tous les couples adultes décident d'avoir quatre enfants et que la probabilité d'avoir une fille soit la même que celle d'avoir un garçon, quelle serait la situation la plus fréquente
– trois enfants d'un sexe et un de l'autre ou
– deux garçons et deux filles ?

3. Choisir l'emplacement d'un restaurant.

Dans le diagramme suivant, les points marqués A, B, ..., E représentent des îles et les segments, des ponts qui joignent ces îles.



Les touristes partent de A et vont d'île en île. Ils ne peuvent passer deux fois par le même pont. Chaque fois qu'un touriste doit choisir un pont, il effectue ce choix en attribuant la même probabilité aux ponts qu'il peut encore choisir. Il ne s'arrête pour déjeuner que lorsqu'il est bloqué. Sur quelle île est-il judicieux d'installer le restaurant ?

4. Les trois portes.

Sous des habillages différents, on a vu à plusieurs reprises à la TV le jeu suivant :

Le décor comporte trois portes munies d'étiquettes $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$. *Derrière l'une d'entre elles est caché un cadeau. Ce cadeau ne changera pas de place durant le jeu. Celui-ci comporte trois étapes.*

Étape I : un concurrent, notons-le x*, choisit une porte mais ne l'ouvre pas.*

Étape II : l'animateur, notons-le @, choisit à son tour une porte, différente de celle choisie par x*. De plus, il choisit systématiquement une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. (@ connaît l'emplacement du cadeau.) Il ouvre cette porte.*

Étape III : @ donne à x *la possibilité de modifier éventuellement son choix en sélectionnant une des deux portes non encore ouvertes. Il ouvre alors la porte finalement choisie par* x*. Si le cadeau apparaît,* x *a gagné.*

Problème : À l'étape III, quelle stratégie x a-t-il intérêt à appliquer en vue d'augmenter sa probabilité de gain :
– conserver la porte choisie à l'étape I ?
– modifier son choix ?
Ou bien aucune des deux stratégies n'est-elle meilleure que l'autre ?

Solution des jeux : page 31.

Claudine Festraets

Au moment où tu lis ce texte, les demi-finales des Olympiades Mathématiques Belges ont déjà eu lieu et tu y as peut-être participé. Pour prolonger l'intérêt que tu apportes certainement à l'O.M.B. et pour t'exercer en vue de ta prochaine participation, voici quelques-unes des questions des demi-finales « midi » et « maxi » de cette année.

MIDI 20

a, b et c sont trois nombres réels. Quatre des cinq relations ci-dessous sont équivalentes entre elles. Quelle est celle qui n'est équivalente à aucune autre ?

Ⓐ $b = \frac{1}{2}(a+c)$ Ⓑ $b = \frac{1}{3}(a+b+c)$
Ⓒ $b = \frac{1}{5}(2a+b+2c)$ Ⓓ $b = \frac{1}{7}(4a+2b+c)$
Ⓔ $b = a - b + c$

Solution

Lorsqu'on isole a dans les égalités A, B, C et E, on obtient $a = 2b - c$, tandis que lorsqu'on l'isole dans l'égalité D, on obtient $a = \frac{5b-c}{4}$. C'est donc la relation D qui n'est équivalente à aucune des quatre autres.

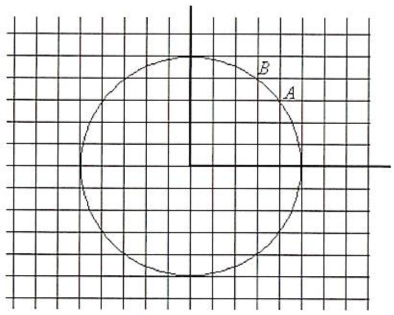
MIDI 21 - MAXI 19

Un disque opaque de rayon 5 est placé sur une grille infinie formée de carreaux de côté 1 et a son centre en un sommet de cette grille. Combien de carreaux sont entièrement recouverts par ce disque ?

Ⓐ 64 Ⓑ 60 Ⓒ 50 Ⓓ 56 Ⓔ 62

Solution

Comptons combien de carreaux sont entièrement recouverts dans un quart de cercle.



Remarquons que les points A et B sont sur le cercle, en effet, si on désigne par d leur distance au centre du cercle, on a $d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, d'où $d = 5$.

Il y a donc 15 carreaux entièrement recouverts dans un quart de cercle, ce qui donne 60 carreaux dans le cercle complet.

MIDI 22

Sans réponse préformulée – La moyenne arithmétique de dix nombres est 166. On supprime un des nombres et la moyenne arithmétique des neuf nombres restants est 153. Quel est le nombre que l'on a supprimé ?

Solution

Appelons x le nombre supprimé et S la somme des neuf autres nombres. Résolvons le système

$$\begin{cases} \frac{S+x}{10} = 166 \\ \frac{S}{9} = 153 \end{cases}$$

Calculons S dans chacune des deux équations : $\begin{cases} S = 1660 - x \\ S = 1377 \end{cases}$

D'où $x = 1660 - 1377 = 283$

MIDI 26 - MAXI 22

Sans réponse préformulée – Quel est le produit maximal que l'on peut former avec deux nombres naturels dont la différence des carrés égale 64 ?

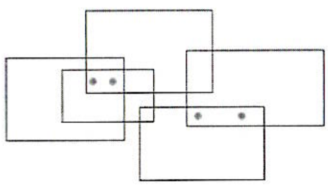
Solution
$a^2 - b^2 = 64 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$
Puisque a et b sont naturels, on a quatre possibilités :
$a-b=1$ et $a+b=64$: impossible car on aurait $2a = 65$;
$a-b=2$ et $a+b=32$, ce qui donne $a=17$, $b=15$ et $a \cdot b = 255$;
$a-b=4$ et $a+b=16$, ce qui donne $a=10$, $b=6$ et $a \cdot b = 60$;
$a-b=8$ et $a+b=8$, ce qui donne $a=8$, $b=0$ et $a \cdot b = 0$.
Le produit maximal est donc 255.

MIDI 27
A la poste, Jean donne 10 € à l'employé et lui dit « donnez-moi quelques timbres à 0,20 €, dix fois autant de timbres à 0,10 € et le reste en timbres à 0,50 € ». Combien Jean reçoit-il de timbres ?

Ⓐ 51 Ⓑ 63 Ⓒ 72 Ⓓ 27
Ⓔ Les données ne déterminent pas le nombre de timbres.

Solution
Posons x le nombre de timbres à 0,20 € et y le nombre de timbres à 0,50 €, x et y sont tous deux des naturels non nuls. L'énoncé nous fournit l'équation $0{,}2 \cdot x + 0{,}1 \cdot 10x + 0{,}5 \cdot y = 10$, ce qui équivaut à $12x + 5y = 100$.
$5y$ et 100 sont tous deux multiples de 5, donc $12x$ doit être multiple de 5 et la seule valeur convenable est $x = 5$ (sinon $12x > 100$). On a alors $60 + 5y = 100$, d'où $y = 8$. Et le nombre total de timbres est $x + 10x + y = 5 + 50 + 8 = 63$.

MIDI 30 - MAXI 30
Cinq cartons sont posés sur une planche comme l'indique la figure ci-dessous. Ils doivent être fixés à la planche par des punaises dans les positions indiquées sans pouvoir tourner. Quel est le nombre minimum de punaises à utiliser ?



Ⓐ 3
Ⓑ 4
Ⓒ 5
Ⓓ 6
Ⓔ 7

Solution
Il suffit de 4 punaises dont les positions sont indiquées sur la figure.

MAXI 21
Les racines de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ sont aussi racines de l'équation $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$. Quelle est la troisième racine de la deuxième équation ?

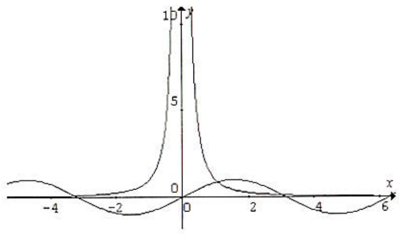
Ⓐ $x = -\frac{1}{2}$ Ⓑ $x = -1$ Ⓒ $x = -5$
Ⓓ $x = 1$ Ⓔ Une autre valeur que celles proposées.

Solution
La division de $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5$ par $x^2 + 4x - 5$ donne le quotient $2x + 1$, la troisième racine vaut donc $-\frac{1}{2}$.

MAXI 28
Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $\sin x = \frac{1}{x^{2004}}$?

Ⓐ 0 Ⓑ 4 Ⓒ 8 Ⓓ 16 Ⓔ Une infinité

Solution



Sur le graphique ci-dessus, les deux courbes d'équations $y = \sin x$ et $y = \frac{1}{x^{2004}}$ sont représentées. Il est clair qu'elles ont une infinité de points d'intersection. Donc l'équation proposée dans l'énoncé admet une infinité de solutions.

MAXI 29
Voici des tableaux d'étude du signe de la dérivée f' d'une fonction f. Quel tableau ne peut être celui correspondant à une fonction f du troisième degré ?

Ⓐ

x		x_1		x_2	
f'	+	0	−	0	+

Ⓑ

x		x_1		x_2	
f'	−	0	+	0	−

Ⓒ

x		x_1	
f'	+	0	+

Ⓓ

x		x_1	
f'	−	0	+

Ⓔ

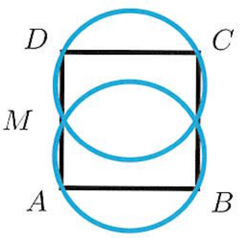
x		x_1	
f'	−	0	−

Solution
Le tableau Ⓓ nous indique que la fonction f est décroissante, minimum pour $x = x_1$, puis croissante. Ceci n'est le cas d'aucune fonction polynôme de degré 3.

Rallye problèmes

N. Miewis

1. Les nappes



En utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on obtient $AC = \sqrt{90^2 + 90^2} \approx 127$. Donc $AC > 100$. Une nappe ne peut donc recouvrir deux coins opposés de la table.

Chaque nappe recouvre donc deux coins consécutifs, A et B pour l'une et C et D pour l'autre. Soit M le milieu de $[A, D]$. Dans le triangle ABM rectangle en A, on calcule $MB = \sqrt{90^2 + 45^2} \approx 100,62$. Donc $MB > 100$. La nappe qui recouvre A et B ne peut recouvrir M et B en même temps. Il est donc impossible de recouvrir la table en posant dessus les deux nappes.

2. Les assiettes

Notons a, b, c, les nombres d'assiettes dans les trois piles, avec $a < b < c$. On a $a \leqslant b - 1$ et $b \leqslant c - 1$ donc $a \leqslant c - 2$. Donc $2\,004 = a + b + c \leqslant (c-2) + (c-1) + c$, d'où l'on tire $c \geqslant 669$. On réalise donc le minimum en prenant $c = 669$. Dans ce cas les autres piles ont $b = 668$ et $a = 667$ assiettes.

3. L'escargot

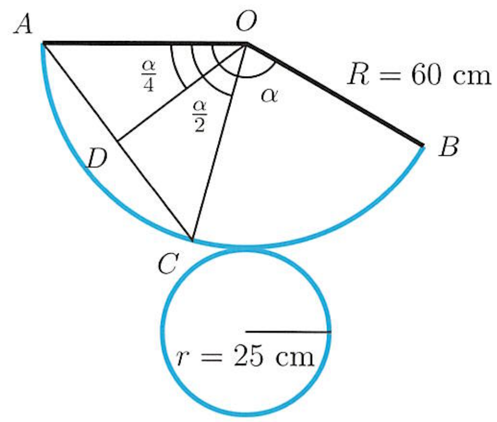
La circonférence de la base vaut 50π cm.

Le secteur qui forme la surface latérale du cône est limité par un arc AB de même longueur. Si l'angle au centre du secteur est α, on a $120\pi\frac{\alpha}{360°} = 50\pi$, d'où $\alpha = 150°$.

Le point de la base diamétralement opposé au point A ($=B$) est le point C milieu de l'arc AB. La trace de l'escargot sur la surface conique est représentée par la corde AC. Soit D le point milieu de la corde AC. Dans le triangle AOD, rectangle en D, on a

$$\frac{AC}{2} = 60 \sin\frac{75°}{2} \approx 36,5256 \text{ cm},$$

d'où, au mm près $AC = 731$ mm.



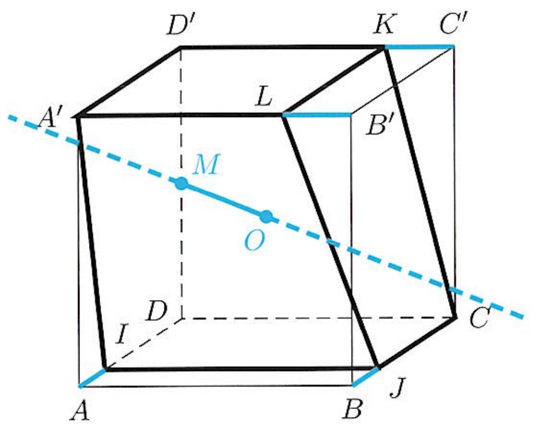
4. L'axe de symétrie

Le solide $A'LKD'IJCD$ possède deux sommets et deux seulement, à savoir D et D', d'où les trois arêtes sont deux à deux perpendiculaires. (En effet $A'ID$, CKD', DCK, $D'A'I$ ne sont pas droits et JL n'est perpendiculaire ni à la face $A'LKD'$, ni à la face $DCJI$.)

Si une symétrie d'axe $\mathcal{S}$ existe, qui transforme ce solide en lui-même, alors soit D et D' sont invariants (ce qui est impossible car DD' n'est visiblement pas un axe de symétrie de $\mathcal{S}$), soit elle transforme D en D'.

L'arête DC est alors transformée en une arête issue de D', de même longueur, soit nécessairement $D'A'$ (car DD' est invariante). L'axe doit donc passer par le milieu de DD' (le point M) et le milieu de CA' (le centre O du cube). L'éventuel axe de symétrie de $\mathcal{S}$ ne peut être que la droite OM.

Il reste à vérifier que OM est bien un axe de symétrie de $\mathcal{S}$, ce qui résulte de ce que DI est transformé en $D'K$ et le rectangle $IDCJ$ en le rectangle $KD'A'L$.

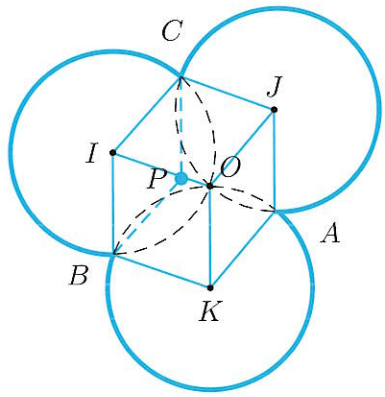


5. Les arcs

1. Les quadrilatères $OICJ$, $OIBK$ et $OJAK$ ont leur quatre côtés de même longueur : ce sont des losanges. On construit le losange $CIBP$; donc $PB = PC = r$.

Les droites IB et JA sont parallèles puisque toutes deux parallèles à OK. Donc PC qui est parallèle à IB l'est aussi à JA. Mais $PC = r = JA$, donc le quadrilatère $CJAP$ est un parallélogramme. Finalement, comme $CJ = JA$, $CJAP$ est un losange et $PA = r$. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est r.

2. La droite CO est la médiatrice de IJ et $IJAB$ est un parallélogramme ; donc $CO \perp AB$. De même, $BO \perp AC$ et $AO \perp BC$. Le point O est l'orthocentre du triangle ABC.



3. Si la mesure de l'angle inscrit $\widehat{BOC}$ est α, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne comprenant pas O est $2r\alpha$. De même, si $\widehat{COA} = \beta$, la longueur de $\overset{\frown}{CA}$ ne comprenant pas O est $2r\beta$, et enfin si $\widehat{AOB} = \gamma$, la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ ne comprenant pas O est $2r\gamma$. Puisque $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, la somme des longueurs des trois arcs AB, BC et CA ne contenant pas O est $4r\pi$.

6. L'escalier roulant

Soit x le nombre de marches inconnu. Quand Marc utilise l'escalator, il parcourt $x - 20$ marches en 60 secondes. Quand c'est Julie, elle parcourt $x - 16$ marches en 72 secondes. L'escalier a donc une vitesse propre de 4 marches en 12 secondes. Il parcourt donc 20 marches en 60 secondes. Sa hauteur est la somme de ces 20 marches et des 20 que Marc a franchies de son propre pas, soit 40 marches.

7. Le rallye

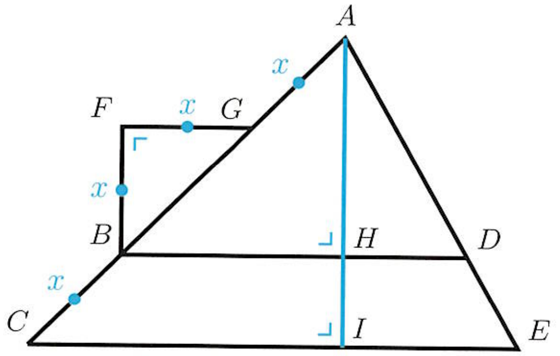
Soit n le nombre de concurrents de la catégorie cadet et p le numéro de dossard. La somme des numéros des dossards plus petits que p est $1 + 2 + 3 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2}$. La somme des numéros de dossards plus grands que p est $(p+1) + (p+2) + (p+3) + \cdots + n = (n-p)\frac{p+1+n}{2}$. En écrivant l'égalité, on trouve $p^2 = \frac{n(n+1)}{2}$.

n	p²	p
1	1	1
2	3	1,732050808
3	6	2,449489743
4	10	3,16227766
5	15	3,872983346
6	21	4,582575695
7	28	5,291502622
8	36	6
9	45	6,708203932
10	55	7,416198487

On obtient les valeurs de n en utilisant un tableur qui permet de vérifier pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ si p est un entier. Une solution avec $n < 12$ donnera le nombre de concurrents en catégorie cadet et une solution avec $12 < n < 100$ donnera le nombre de concurrents en catégorie junior. Il y a 8 concurrents cadets et CLAUDE porte le dossard 6 ; il y a 49 concurrents juniors et DOMINIQUE porte le dossard 35.

44	990	31,46426545
45	1035	32,17141588
46	1081	32,87856445
47	1128	33,58571125
48	1176	34,2928564
49	1225	35
50	1275	35,70714214
51	1326	36,41428291
52	1378	37,12142239
53	1431	37,82856064
54	1485	38,53569774

8. Le camping



Il nous faut vérifier que les aires du triangle ABD et du trapèze $BDEC$ sont égales. On construit $AI \perp CE$. Puisque BD est parallèle à CE, l'angle en H, intersection de AI et BD est également un angle droit.

Puisque le triangle BFG est isocèle rectangle, $BG = x\sqrt{2}$.

De la similitude des triangles ABH et ACI, on tire $\frac{AH}{AI} = \frac{AB}{AC} = \frac{x+x\sqrt{2}}{2x+x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De la similitude des triangles ABD et ACE, on tire $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le rapport des aires des triangles ABD et ACE est $\frac{\text{Aire } ABD}{\text{Aire } ACE} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Puisque d'une part, l'aire ACE est double de l'aire ABD et que d'autre part l'aire ACE est la somme de l'aire ABD et $BDEC$, on a bien que l'aire du triangle ABD est égale à l'aire du trapèze $BDEC$.

9. La perche brisée

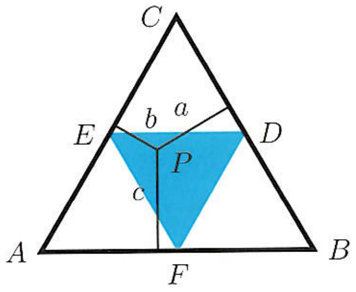
Il est possible de former un triangle avec trois segments de longueurs a, b, c si et seulement si

$$\begin{aligned} c &\leqslant b + a \\ a &\leqslant c + b \\ b &\leqslant c + a. \end{aligned}$$

Lorsque $a + b + c = \ell$, la longueur de la perche, ces conditions sont équivalentes à $a \leqslant \frac{\ell}{2}$, $b \leqslant \frac{\ell}{2}$, $c \leqslant \frac{\ell}{2}$. L'égalité $a + b + c = \ell$ fait penser à un théorème connu de géométrie plane : la somme des distances d'un point aux trois côtés d'un triangle équilatéral est une constante valant la longueur de la hauteur de ce triangle.

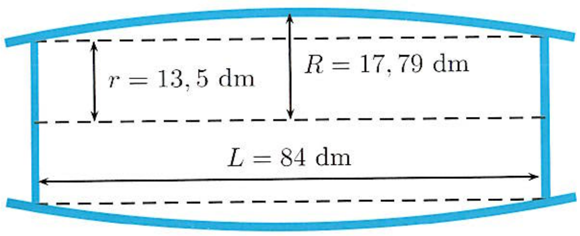
Traçons donc un triangle équilatéral ABC de hauteur ℓ. Choisir au hasard trois nombres a, b, c tels que $a+b+c = \ell$ revient à choisir au hasard un point P du triangle, les nombres a, b, c étant alors les distances de P aux côtés de ABC.

Les conditions $a \leqslant \frac{\ell}{2}$, $b \leqslant \frac{\ell}{2}$, $c \leqslant \frac{\ell}{2}$ sont satisfaites si et seulement si le point P est intérieur au triangle DEF obtenu en joignant les milieux des trois côtés du triangle ABC.



L'aire du triangle DEF est trivialement le quart de l'aire du triangle ABC ; ainsi la probabilité de réussir la construction du triangle est $\frac{1}{4}$ et la probabilité demandée est de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

10. Le tonneau d'Eberbach



La plupart des formules de calcul de volume de tonneau que l'on rencontre dans la littérature spécialisée ne tiennent pas compte de la courbure du tonneau. On trouvera ci-dessous un florilège de formules « possibles ». L'unité des données étant le dm, le volume sera exprimé en litres.

La « découpe en tranches » consiste à placer un système d'axes au centre du tonneau et à rechercher l'équation de la parabole dont on connaît trois points : (-42 ;13,5), (0 ;17,79) et (42 ;13,5). On trouve $y = -0,002\,431x^2 + 17,79$.

Ensuite, certains élèves ont partagé la hauteur $L = 84$ dm en 40 tranches de 2,1 dm et, en assimilant les tranches à des cylindres, ont trouvé 65 922 litres à l'aide d'une calculette. D'autres, utilisant un tableur, ont pu appliquer la même méthode en partageant la hauteur en 840 tranches de 1cm. Ils ont trouvé 71 139 litres.

Par calcul intégral, avec cette même fonction, on trouve 71 067 litres.

À Eberbach, le musée annonce une jauge de 71 000 litres, sans aucune explication !

Formules trouvées dans la littérature

- **Formule du cylindre moyen**
  $V = L\pi\left(\frac{r+R}{2}\right)^2$ (64 592 litres.)
- **Formule des 2 troncs de cône**
  $V = \frac{L\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ (64 997 litres.)
- **Formule de Béziers**
  $V = 0,4L(R+r)^2$ (65 793 litres.)
- **Formule des troncs paraboliques**
  $V = \frac{L\pi}{2}\left(R^2 + r^2\right)$ (65 806 litres.)
- **Formule de GUILMAIN**
  $V = 3,28RrL$ (66 170 litres.)
- **Formule de l'Octroi de Paris**
  $V = L\pi\left(\frac{1{,}32r+1{,}68R}{3}\right)^2$ (66 735 litres.)
- **Formule « adéquate »**
  $V = \frac{L\pi}{9}\left(5R^2 + 4r^2\right)$ (67 774 litres.)
- **Formule de DEZ**
  $V = \frac{L\pi}{64}(5R+3r)^2$ (69 096 litres.)
- **Formule de l'an VII**
  $V = \frac{L\pi}{9}(2R+r)^2$ (70 631 litres.)
- **Formule des tonneaux à génératrice parabolique**
  $V = \frac{L\pi}{15}\left(8R^2 + 4Rr + 3r^2\right)$ (71 063 litres.)
- **Formule d'OUGHTRED**
  $V = \frac{L\pi}{3}\left(2R^2 + r^2\right)$ (71 765 litres.)
- **Formule de la jauge diagonale**
  $V = 0,525\left(\sqrt{(R+r)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right)^3$ (75 423 litres.)
- **Formule de la douane**
  $V = 0,605\left(\sqrt{(R+r)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right)^3$ (86 917 litres.)

Les noms des gagnants du concours seront communiqués dans le numéro 109 de *Math-Jeunes*, premier numéro de l'année prochaine.

Solutions des jeux

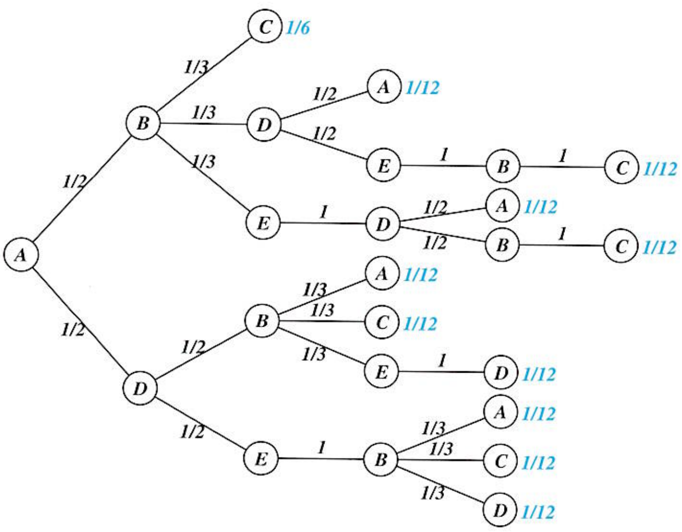
1. Mr. Proba et ses deux enfants. et 2. Quatre enfants.

Ces deux jeux relèvent du même schéma : le jet de deux pièces, comme la naissance de quatre enfants, peut se ramener à un certain nombre de **cas favorables** parmi l'ensemble des **cas possibles équiprobables**.

1. Chacun des résultats (P,P), (P,F), (F,P), (F,F) étant obtenu avec la probabilité 0.25, les deux enfants gagneront en moyenne une fois sur quatre tandis que leur père gagnera en moyenne une fois sur deux. Celui-ci n'a donc pas choisi des règles équitables !
2. Les quatre naissances successives peuvent donner (F,F,F,F), (F,F,F,G), (F,F,G,F),… (F,F,G,G), (F,G,F,G),… (G,G,G,F), (G,G,G,G). Chacune des seize situations a la même probabilité $\frac{1}{16}$. On obtient ainsi
   - trois enfants d'un sexe et un de l'autre avec une probabilité $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
   - deux filles et deux garçons avec la probabilité $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

3. Choisir l'emplacement d'un restaurant.

En déterminant tous les parcours possibles, on obtient l'arbre probabiliste suivant :



La lecture de cet arbre donne les probabilités que le promeneur se retrouve bloqué sur chacune des îles :

- sur A avec la probabilité $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$,
- sur B avec la probabilité 0 (il n'y sera jamais bloqué !),
- sur C avec la probabilité $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$,
- sur D avec la probabilité $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$,
- sur E avec la probabilité 0.

Tout restaurateur conscient de ces probabilités s'installera donc sur l'île C.

4. Les trois portes.

Ce jeu a suscité beaucoup de discussions, parfois passionnées. Un point de vue très répandu — sinon le plus répandu — consiste à dire qu'à l'étape III, puisque ⓧ n'a plus le choix qu'entre deux portes, une bonne et une mauvaise, sa probabilité de gain est désormais de $\frac{1}{2}$ et que, par conséquent, il importe peu qu'il conserve le même choix ou qu'il le modifie. Certains ont une appréciation différente. Sur deux points, heureusement, un accord est facile à établir :

- L'emplacement particulier du cadeau ne joue aucun rôle dans le problème. Aussi, nous supposerons que le cadeau est toujours derrière la porte $\boxed{\text{A}}$. Évidemment, seul ⓐ connaît cette information.
- Si le jeu s'arrêtait à la première étape, ⓧ aurait une chance sur trois de gagner. En effet, comme, à ce stade, il ne dispose d'aucune information, il ne peut que désigner une porte au hasard, en attribuant la même probabilité aux trois possibilités.

À l'étape II, @ fournit une information supplémentaire à x. Tout le problème est de savoir comment celui-ci peut en tenir compte. Nous pourrions déjà remarquer que, pour x, décider de ne pas modifier son choix revient à ne pas tenir compte de l'information reçue. Ne peut-on en déduire immédiatement que dans ce cas la probabilité de gain de x reste de $\frac{1}{3}$?

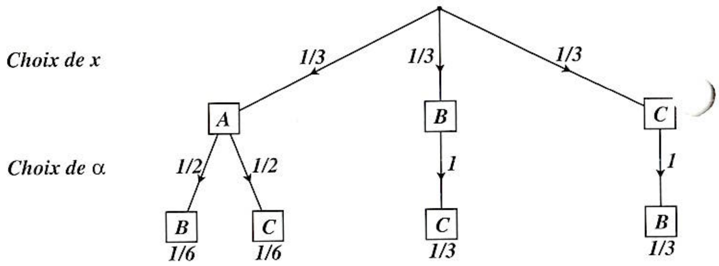
Le tracé d'un arbre va nous aider. Nous y représentons les deux premières étapes du jeu. À la première, les trois choix $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ et $\boxed{\text{C}}$ de x ont la même probabilité $\frac{1}{3}$.

À la deuxième étape, @ se trouve devant des situations différentes selon le choix effectué par x :

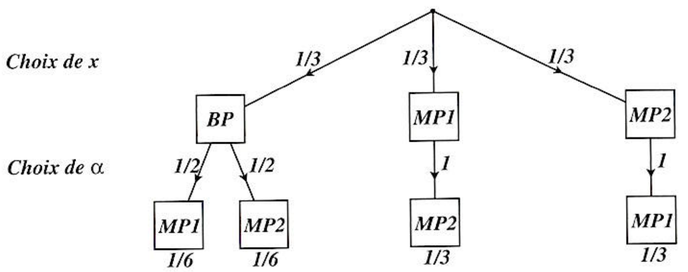
– Si x a choisi $\boxed{\text{A}}$, @ peut ouvrir au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) une des deux autres portes.

– Si x a choisi $\boxed{\text{B}}$, @ ne peut ouvrir que $\boxed{\text{C}}$. Dans ce cas la flèche $\boxed{\text{B}} \rightarrow \boxed{\text{C}}$ ne représente pas une transition *possible* à affecter d'une probabilité, mais une transition *certaine*. Nous pouvons lui affecter la probabilité 1.

– De même, si x a choisi $\boxed{\text{C}}$, @ ne peut ouvrir que $\boxed{\text{B}}$.

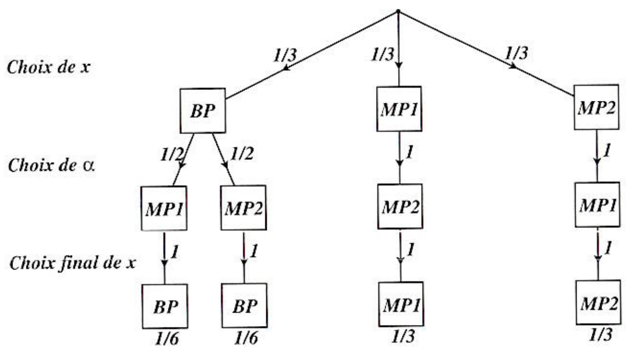


Notre concurrent x peut très bien dessiner ce graphe, à ceci près qu'il ignore quelle est la « bonne porte ». Son graphe aurait plutôt l'aspect suivant (où « BP » signifie « Bonne porte » et « MP », « Mauvaise porte ») :



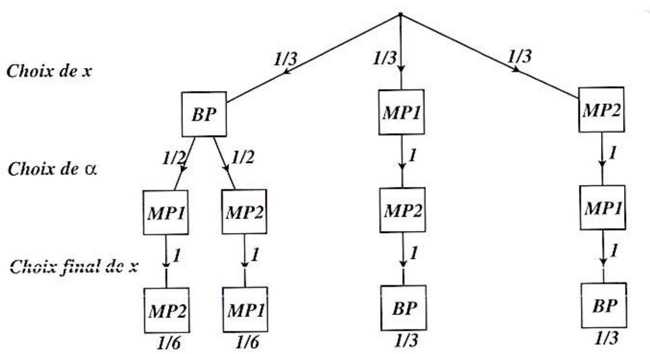
x peut compléter cet arbre de deux façons selon la stratégie adoptée :

1. Conserver le choix initial



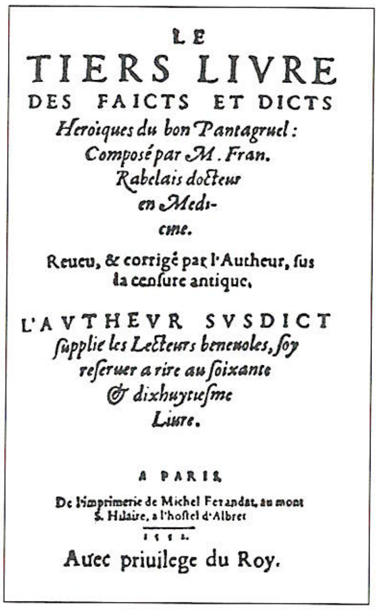
La probabilité de gain de x est restée de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Ceci montre bien qu'en ne tenant pas compte de l'information fournie par l'animateur, le concurrent renonce d'avance à toute possibilité d'augmenter sa probabilité de gagner.

2. Modifier le choix initial



Cette fois, la probabilité de gain de x est de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

> Conclusion de x : Je choisis comme stratégie de toujours modifier mon choix à l'étape III.


LE
TIERS LIVRE
DES FAICTS ET DICTS
Heroiques du bon Pantagruel:
Composé par M. Fran.
Rabelais docteur
en Medi-
cine.

Reueu, & corrigé par l'Autheur, sus
la censure antique.

L'AVTHEVR SVSDICT
supplie les Lecteurs beneuoles, soy
reseruer a rire au soixante
& dixhuytiesme
Liure.

A PARIS,
De l'imprimerie de Michel Fezandat, au mont
S. Hilaire, a l'hostel d'Albret
1552.
Auec priuilege du Roy.

Dans *Le Tiers Livre des faicts et dicts héroiques du bon Pantagruel*, de François Rabelais (1494–1553), Pantagruel assiste au procès d'un juge nommé *Bridoye* auquel il est reproché d'avoir rendu un jugement inéquitable. Dans l'extrait suivant, Bridoye explique comment il use de dés pour rendre ses jugements.

Pantagruel [...] là trouve Bridoye au milieu du parquet assis, et, pour toutes raisons et excuses, rien plus ne répondant, sinon qu'il était vieux devenu et qu'il n'avait la vue si bonne comme de coutume, alléguant plusieurs misères et calamités que vieillesse apporte avec soi [...] C'est pourquoi ne connaissait-il tant distinctement les points des dés comme avait fait par le passé ; d'où pouvait être qu'à la façon qu'Isaac, vieux et mal voyant, prit Jacob pour Esaü, ainsi qu'à la décision du procès, dont était question, il aurait pris un quatre pour un cinq, notamment rapportant que lors il avait usé de ses petits dés [...]

– Quels dés (demandait Trinquamelle, grand président de cette cour), mon ami, entendez-vous ?

– Les dés (répondit Bridoye) des jugements [...] desquels dés, vous autres, Messieurs, usez ordinairement en votre cour souveraine, aussi font tous autres juges en décision des procès [...] le sort est fort bon, honnête, utile et nécessaire à la vidange des procès et dissensions [...]

– Et comment (demandait Trinquamelle) faites-vous, mon ami ?

– [...] Je fais comme vous autres, Messieurs, et comme est l'usage [...] Ayant bien vu, revu, lu, relu, paperassé et feuilleté les complaintes, ajournements, comparutions, commissions, informations, avant-procédés, productions, allégations, intendits, contredits, requêtes, enquêtes, répliques, dupliques, tripliques, écritures, reproches, griefs, salvations, récolements, confrontations, acarations, libelles, apostoles, lettres royaux, compulsoires, déclinatoires, anticipatoires, évocations, envois, renvois, conclusions, fins de non procéder, appointements, reliefs, confessions, exploits et autres telles dragées et épiceries d'une part et d'autre, comme doit faire le bon juge [...]

« Je pose sur le bout de la table, en mon cabinet, tous les sacs (1) **du défendeur, et lui livre chance premièrement [...]**

Cela fait, je pose les sacs du demandeur, comme vous autres, Messieurs, sur l'autre bout [...] Pareillement, en même temps, je lui livre chance. »

– Mais, (demandait Trinquamelle) mon ami, à quoi connaissez-vous obscurité des droits prétendus par les parties plaidoyantes ?

– Comme vous autres, Messieurs, répondit Bridoye, savoir est quand il y a beaucoup de sacs d'une part et d'autres. Et lors j'use de mes petits dés [...] J'ai d'autres gros dés bien beaux et harmonieux, desquels j'use, comme vous autres, Messieurs, quand la matière est plus liquide, c'est-à-dire quand moins y a de sacs.

– Cela fait (demandait Trinquamelle), comment sentenciez-vous mon ami ?

– Comme vous autres, Messieurs, répondit Bridoye : Pour celui je donne sentence duquel la chance, livrée par le sort du dé judiciaire, tribunien, prétorial, premièrement advient. Ainsi commandent nos droits [...]

(1) Il s'agit des sacs contenant les documents mentionnés plus haut.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G . NOËL
Rue de la Culée 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée