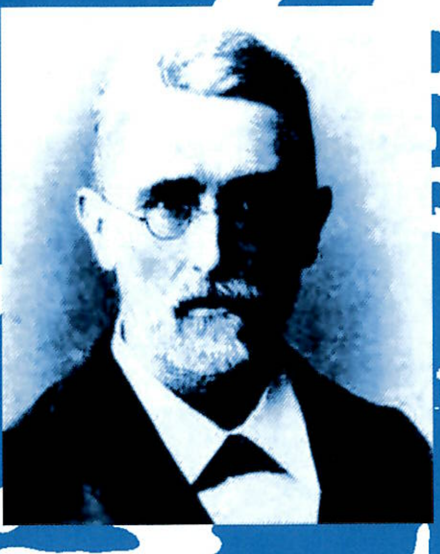
Math Jeunes

# L'INFINI



26ème année - N°109 S - Novembre 2004

**Math-Jeunes** et **Math-Jeunes Junior**

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.



Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBP-Mef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

## Tarifs

| Abonnements groupés (5 exemplaires au moins) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | | Les **deux** revues | |
| Belgique | 4 € | | 7 € | |
| | ✉ | ✉̸ | ✉ | ✉̸ |
| Europe | 7 € | 9 € | 13 € | 17 € |
| Autres pays | 10 € | 14 € | 15 € | 20 € |

| Abonnements individuels | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | | Les **deux** revues | |
| Belgique | 6 € | | 11 € | |
| | ✉ | ✉̸ | ✉ | ✉̸ |
| Europe | 13 € | 16 € | 16,50 € | 20,50 € |
| Autres pays | 15 € | 21 € | 20 € | 25 € |

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

# Sommaire



En couverture : Georg Cantor, Richard Dedekind, John Wallis et Bernhard Bolzano. Les biographies de ces mathématiciens se trouvent aux pages 6, 26, 23 et 10.

Faites-nous savoir quel article, ou quelle rubrique, vous avez préféré(e). Envoyez un SMS au **0473-973808** ou un e-mail à **sbpm@sbpm.be**

*Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :*

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°109 Vingt-sixième année 2004

# Math-Jeunes

## L'infini

Chacun d'entre nous parle sans hésiter de l'infini : l'ensemble des entiers naturels est infini, de même que l'ensemble de tous les nombres réels, presque tout nombre réel admet un développement décimal illimité, toute droite est infinie, deux droites parallèles « se rejoignent à l'infini », on peut couper en deux un segment de droite, puis chacune des deux moitiés, et recommencer éternellement.

Mais tous ces infinis sont-ils les mêmes ? Sont-ils tous égaux ? Qu'est-ce que l'infini ? Et d'abord est-ce que cela existe vraiment ?

La question n'est pas si simple qu'il y paraît. De l'antiquité jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle, elle a suscité des débats passionnés. Certains y ont perdu la vie. Ainsi l'Italien Giordano BRUNO (1548–1600) fut brûlé par l'Inquisition pour avoir affirmé que l'univers était infini...

Commençons par le commencement. On pourrait croire qu'une des premières apparitions de l'infini résulta de la constatation que la litanie 1, 2, 3, 4, ... peut être prolongée aussi loin qu'on veut. Ce fait n'implique-t-il pas l'existence d'un ensemble infini ?

Ce raisonnement ne convainquait pas tous les philosophes et mathématiciens de l'antiquité classique. ARISTOTE (384–322 av. J.-C.) distingue l'infini *potentiel* de l'infini *actuel*. *Votre infini*, dit-il en substance, *n'est que potentiel : vous ne l'atteindrez jamais. Vous ne connaîtrez jamais qu'un nombre fini de nombres. Quant à un infini actuel (c'est-à-dire « effectif »), vous êtes bien incapable d'en montrer un. Il n'existe donc pas.*

Les travaux de BOLZANO (1781–1848) et de CANTOR (1845–1918) firent accepter le concept mathématique d'ensemble, ouvrant ainsi la porte à l'infini actuel. L'article de Y. Noël-Roch, *Deux infinis valent mieux qu'un*, fait écho à ces questions.

Mais le principal problème des Grecs concerne l'infiniment petit. Pour les Pythagoriciens, un segment est composé d'un nombre fini de points et ne peut être indéfiniment coupé en deux. La découverte de l'existence de grandeurs « incommensurables » porte un coup fatal à cette théorie. Mais il faut attendre la Renaissance pour que naisse le concept d'infiniment petit. En même temps, l'infiniment lointain apparaît en peinture. *Math-Jeunes* a publié précédemment plusieurs articles à ce sujet. Directement lié aux limites, un autre article de Y. Noël-Roch présente des *Écritures sans fin*, cependant que P. Tilleuil consacre sa rubrique `Excel` à la construction d'un tableur qui calcule une à la fois les décimales d'une solution d'une équation. (Aristote n'avait pas tout à fait tort : même Bill Gates n'a pas inventé un tableur infini !)

Les démonstrations et constructions par récurrence constituent également des processus infinis. Le mathématicien arabe AL-KARAJI les utilise de façon informelle dès le XI^e siècle. Dans *Prouver par récurrence*, N. Lambelin nous en rappelle le fonctionnement.

Et les points à l'infini ? Existent-ils ? Dans *À quelle distance est l'infini ?*, G. Noël aborde la question du point de vue du photographe, cependant que dans *Les points à l'infini*, S. Trompler nous propose une réflexion mathématique à ce sujet.

# Deux infinis valent mieux qu'un

**Yolande Noël-Roch**

## Des ensembles infinis

Soient

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des naturels : $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers : $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$,
- $A_1$ l'ensemble des points d'un segment de longueur 10 cm,
- $A_2$ l'ensemble des points d'un segment de 2 cm,
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'ensemble des couples d'entiers,
- $K$ l'ensemble des nombres carrés parfaits,
- $5\mathbb{N}$ l'ensemble des naturels multiples de 5 :
  $\{0, 5, 10, 15, \cdots\}$,
- $S_1$ l'ensemble des points d'une sphère de rayon 2cm,
- $S_2$ l'ensemble des points d'une sphère de rayon 10cm,
- $D$ l'ensemble des points d'une droite.

Ces dix ensembles comprennent une infinité d'éléments (nombres ou points ...).

Parmi les dix, y a-t-il un ensemble qui contient

- moins d'objets que tous les autres ?
- plus d'objets que tous les autres ?

Ou comprennent-ils tous le même nombre d'objets ?

Voici les avis contradictoires de trois rois de France :

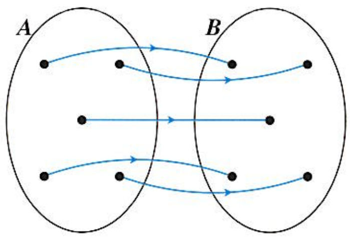
- Louis le Débonnaire : Pour obtenir les entiers, on adjoint les entiers négatifs aux naturels. Il y a donc **plus** d'entiers **que** de naturels.
- Louis le Jeune : Je raisonnais comme toi mais on m'a un jour expliqué que pour savoir si deux ensembles comprennent le même nombre d'éléments, il n'est pas nécessaire de compter les objets, c'est d'ailleurs impossible dans les ensembles infinis. Il est par contre possible de rechercher s'il existe **une bijection** entre deux ensembles infinis. Par exemple, pour $\mathbb{N}$ et $K$,
  - tout naturel est associé à son carré,
  - tout carré parfait est associé à sa racine carrée positive.

| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | 12 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 0 | 1 | 4 | 9 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | 900 | $\cdots$ | $n^2$ | $\cdots$ |

  Le tableau « montre » que $\mathbb{N}$ et $K$ contiennent le **même nombre** d'éléments.
- Louis le Juste : Grâce à ces discussions entre mes prédécesseurs, je vois d'autres ensembles donnés qui sont aussi équipotents à $\mathbb{N}$.

Ami(e) lecteur(trice), avant de continuer votre lecture, essayez de trier les dix ensembles donnés en groupes d'ensembles équipotents.

Deux ensembles qui comprennent le même nombre d'éléments sont dits ***équipotents***.
On construit une ***bijection de** $A$ **sur** $B$* lorsqu'on associe à tout élément de $A$ un élément unique de $B$ de manière que
- deux éléments différents de $A$ sont nécessairement associés à deux éléments différents de $B$,
- tout élément de $B$ correspond de cette façon à un élément de $A$.




D'après Cantor, *deux ensembles — finis ou infinis — contiennent le même nombre d'éléments lorsqu'ils sont applicables l'un sur l'autre par une bijection.*

# 1. De l'antiquité au vingtième siècle

Concevoir la notion d'infini, comparer des ensembles infinis sont des problèmes auxquels l'homme a été confronté dès l'antiquité.

Les résoudre s'est avéré d'autant plus compliqué que les aspects mathématiques se mêlaient aux aspects religieux et philosophiques, d'autant plus dangereux que si l'infini touchait au divin, un avis jugé hérétique pouvait conduire au bûcher celui qui le défendait courageusement ! Nous n'en sommes heureusement plus là. Il reste cependant vrai que la difficulté — même « réduite » à l'aspect mathématique — ne se franchit pas en une étape. L'infini (les différents infinis comme nous le verrons progressivement) ne s'apprivoise que petit à petit : il y a autant de carrés parfaits que de nombres naturels *...et pourtant, il y a des naturels qui ne sont pas des carrés parfaits* ! Les deux faits ne sont pas contradictoires mais ils ont donné bien du souci à de nombreux mathématiciens et non des moindres. L'infini a été pendant longtemps source de paradoxes.

Dans les *Eléments*, Euclide (env. 300 av. J.-C.) considère que *le tout est plus grand que la partie.*

Si Galilée (1564–1642) est connu de tous pour ses découvertes en astronomie et en physique et pour le procès que lui a fait l'Inquisition, il est moins célèbre pour ses travaux mathématiques. Il avait cependant des vues profondes dans ce domaine également. Dans ses *Discours sur deux sciences nouvelles*, il déclare que *les épithètes comme « plus petit », « plus grand » et « égal » ne conviennent pas* aux ensembles infinis.

L'équipotence entre $\mathbb{N}$ et $K$ est reconnue par Galilée mais ressentie par celui-ci comme un paradoxe. Deux siècles plus tard, Bolzano (1781 – 1848) met l'accent sur les correspondances entre ensembles infinis dans *Les paradoxes de l'infini*, travail publié après sa mort en 1851. Mais des résistances majeures continuent à se manifester.

Ainsi, Gauss (1777 – 1855) *conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler.*

En découvrant qu'un segment, un carré construit avec ce segment comme côté, un cube, une droite, un plan, l'espace peuvent être mis en bijection, Cantor écrit à Dedekind *« Je le vois, mais je ne le crois pas »*.

Il faut attendre la fin du 19e siècle pour que

- Dedekind (1831 – 1916) définisse un ensemble infini comme un ensemble qui peut être mis en bijection avec une de ses parties propres.
- Cantor (1845 – 1918) démontre en 1874 que l'ensemble des réels ne peut pas être mis en bijection avec les naturels. Il va beaucoup plus loin et établit qu'il existe une infinité d'infinis différents.

Mais cette évolution couvre de nombreuses années et de nombreux affrontements. Reprenons notre cheminement !

# 2. Dépasser le dénombrable ?

Une partie d'un ensemble $E$ est propre si elle ne contient que des éléments de $E$, sans les contenir tous.

**Tout ensemble infini est équipotent à une de ses parties propres.**

- L'ensemble des naturels et l'ensemble des naturels multiples de 5 sont équipotents :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | 18 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
| $5\mathbb{N}$ | 0 | 5 | 10 | 15 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | 2345 | $\cdots$ | $5n$ | $\cdots$ |

- L'ensemble des naturels et l'ensemble des entiers sont équipotents :

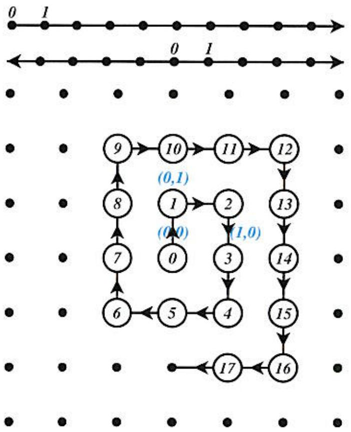
Tout ensemble équipotent à $\mathbb{N}$ est dit **dénombrable**

| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | 10 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | $2k$ | $2k+1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | $-7$ | $\cdots$ | $-k$ | $k+1$ | $\cdots$ |

*Ainsi les ensembles $K$ et $5\mathbb{N}$ d'une part, $\mathbb{Z}$ d'autre part, obtenus à partir de $\mathbb{N}$*
*– soit en ôtant une infinité dénombrable de nombres*
*– soit en ajoutant une infinité dénombrable de nombres*
*sont tous les trois des ensembles dénombrables ...tout comme $\mathbb{N}$.*

La représentation des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ comme ensembles de points d'une graduation sur une demi-droite et sur une droite vous est familière

Essayons cette fois d'utiliser les deux dimensions du plan pour ajouter de nouveaux points. Obtenons-nous un ensemble non dénombrable ?




- L'ensemble des sommets du réseau carré ci-contre est une représentation géométrique de l'ensemble des couples d'entiers (ensemble noté $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

  Le colimaçon définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ | 8 | $\cdots$ | 11 | $\cdots$ | ? | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(1,0)$ | $(1,-1)$ | $\cdots$ | $(-1,1)$ | $\cdots$ | ? | $\cdots$ | $(2,-1)$ | $\cdots$ |

*L'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Plus généralement, *la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $K$, $5\mathbb{N}$ comprennent tous le même nombre d'éléments. Ils sont tous dénombrables.

Le *cardinal* d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble. Au lieu de dire qu'**un ensemble $E$ est dénombrable**, on dit aussi que **le cardinal de $E$ vaut aleph-zéro**. Cela s'écrit

$$\#E = \aleph_0$$

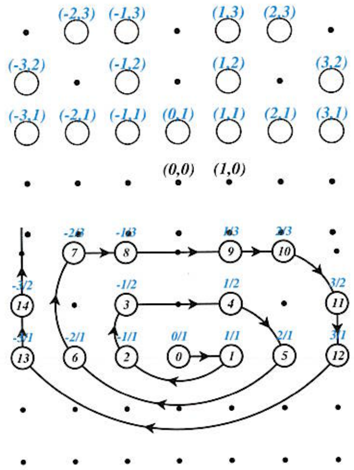
$\aleph$ est la première lettre de l'alphabet hébreu.

Nous venons de voir que l'augmentation de la **dimension** dans l'espace ne nous a pas permis de passer le cap de l'infini dénombrable. Pour essayer d'aller plus loin et en nous appuyant sur le support géométrique déjà introduit, nous allons jouer sur un autre critère : la **densité** des ensembles considérés.

Lorsque nous graduons sur une demi-droite, les points qui interviennent constituent un ensemble **discret**. Cela signifie que chaque élément est entouré d'un intervalle dans lequel il n'y en a pas d'autre : les éléments sont isolés.

Pour essayer de trouver un ensemble de nombres comprenant plus d'éléments, nous pouvons rompre cet isolement en considérant, sur une demi-droite graduée, l'ensemble des points d'abscisse rationnelle.

Cette fois, aucun élément n'est isolé : entre 4,97 et 4,971 se trouvent notamment 4,9705, 4,97025...Comme on le constate, entre deux nombres rationnels, il en existe une infinité d'autres. Cette fois, nous n'avons plus un ensemble discret : on dit que l'ensemble des rationnels est **dense**. Dépassons-nous pour autant le dénombrable ? Et bien non ! En effet, au lieu de penser à la représentation de $\mathbb{Q}$ sur une droite, pensons aux nombres rationnels sous une autre forme : les fractions irréductibles dont le numérateur est un entier et le dénominateur un naturel non nul. (Par exemple, le nombre $-0{,}5$ est représenté par le couple $(-1, 2)$ tandis que les couples $(1, -2)$, $(-2, 4)$ ne sont pas repris.) L'ensemble des rationnels apparaît alors comme une partie des sommets sur le schéma de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ utilisé plus haut. ... et notre nouveau colimaçon (qui a l'air moins vorace ?) digère un à un tous les nombres rationnels. En ouvrant son estomac, nous découvrons le début d'une bijection :




| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ... |
| $\mathbb{Q}$ | 0 | 1 | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | $-2$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | 3 | $-3$ | $-\frac{3}{2}$ | ... |

Ainsi, malgré sa densité, l'ensemble des rationnels est dénombrable ! Après avoir été confronté à cette découverte, Cantor a attribué le cardinal $\aleph_0$ aux ensembles dénombrables. De plus, il s'est alors demandé si *tous* les ensembles infinis étaient dénombrables et a démontré que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels **ne peut pas être dénombré**.

## 3. Un infini non dénombrable : le continu

Nous exploiterons la propriété connue sous le nom d'*Axiome de Dedekind* :

*L'intersection d'une infinité de segments fermés emboîtés de plus en plus petits et dont la longueur tend vers zéro est un point.*

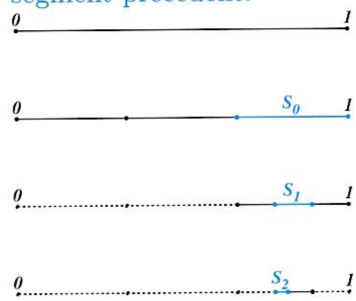
### 3.1. $[0\ 1]$ n'est pas dénombrable

Le raisonnement se fait « par l'absurde » : en supposant avoir *dénombré* les points du segment $[0 \quad 1]$ et en montrant qu'on en a nécessairement laissé échapper. Nous supposons donc que nous avons *accroché une étiquette* à chaque point de ce segment. Les voici rangés

$p_0, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{237}, \cdots$

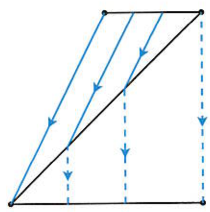
- Partageons $[0 \quad 1]$ en trois tiers.Une de ces trois parties (au moins) ne comprend pas le point $p_0$. Soit $S_0$ ce segment.
- Partageons $S_0$ en trois tiers. Une de ces trois parties ne comprend pas le point $p_1$. Soit $S_1$ ce segment. Il ne contient ni $p_0$, ni $p_1$.
- Partageons $S_1$ en trois tiers. Une de ces trois parties ne comprend pas le point $p_2$. Soit $S_2$ ce segment
- ...

Nous prendrons à chaque étape un segment tiers du segment précédent.



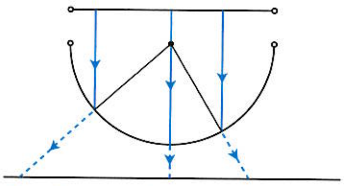

Nous avons construit un segment $S_2$ qui ne contient ni $p_0$, ni $p_1$, ni $p_2$. En poursuivant ainsi à l'infini, nous obtenons un point $p$ (intersection de *tous* les $S_i$) appartenant à tous les $S_i$. Il n'est donc pas $p_0$ puisqu'il n'appartient pas à $S_0$, ni $p_1$ puisqu'il n'appartient pas à $S_1$, ... ni aucun des points qui ont été énumérés. Nous avons ainsi prouvé que cette *énumération* (au sens strictement mathématique du terme) était un leurre.

### 3.2. Tous les segments fermés sont équipotents



**Tous les segments sont équipotents**

L'équipotence des deux segments $A_1$ et $A_2$ peut également être visualisée géométriquement. Interprétez les schémas ci-contre en termes de translations et projections, ... Ils couvrent tous les cas possibles de mise en bijection de deux segments.



On dit que les segments et les droites **ont la puissance du continu** ou que ces ensembles sont de cardinal $\mathfrak{c}$. Pour tout ensemble ayant la puissance du continu, on écrit

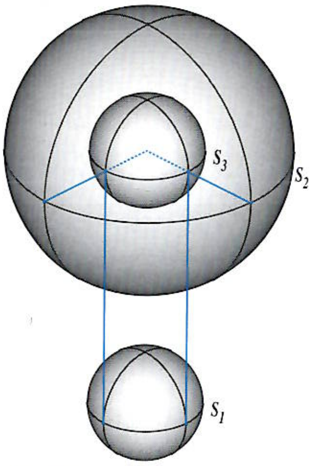
$$\#E = \mathfrak{c}$$

## 3.3. ... et toujours la puissance du continu

Par une projection parallèle et une projection centrale, voyez ci-contre une démonstration de l'équipotence d'un segment ouvert, d'un demi-cercle ouvert et d'une droite.

Nous avons utilisé des segments fermés, un segment ouvert pour faciliter la vision géométrique de bijections simples. Ce détail importe peu ; limitons-nous à une approche partielle et intuitive :

Sachant que le segment ouvert $]r\,s[$ et la droite $rs$ ont même nombre de points, nous pouvons admettre intuitivement qu'il en est de même pour $[r\,s]$, $[r\,s[$ et $]r\,s]$. Plus généralement, tous les segments et les courbes planes (de longueur non nulle), toutes les droites du plan contiennent $\mathfrak{c}$ points.




**Toutes les sphères sont équipotentes**

# 4. Revenons à notre classement

Parmi les cinq ensembles donnés au départ, nous avons déjà identifié cinq ensembles de cardinal $\aleph_0$ ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $K$ et $5\mathbb{N}$) et trois ensembles de cardinal $\mathfrak{c}$. Qu'en est-il de $S_1$ et $S_2$ ?

Galilée (encore lui !) a étudié le problème de deux sphères de rayons différents (dans le cas particulier de deux sphères concentriques). Il fait correspondre tout point de l'une à un point unique de l'autre en utilisant les demi-droites issues du centre commun. Cette projection centrale est une bijection. Les deux surfaces sphériques sont donc formées du même nombre de points.

Si les sphères ne sont pas concentriques, nous translatons $S_1$ sur une sphère intermédiaire $S_3$. Comme Galilée, nous construisons alors une bijection de $S_3$ sur $S_2$. La composée de ces deux bijections est une bijection de $S_1$ sur $S_2$.

### Georg Cantor (1845–1918)

*Cantor naît à Saint Petersbourg, de parents mélomanes Il devient lui-même un remarquable violoniste. La famille quitte Saint Petersbourg en 1856 et se fixe en Allemagne. Cantor termine le collège à 15 ans, avec un excellent rapport qui mentionne ses dons en mathématiques. Il entre au Polytechnikum de Zürich en 1862, puis à l'université de Berlin. A 22 ans, il est docteur !*
*Ses recherches le portent vers la théorie des nombres et l'analyse. En 1873, il prouve que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable et en 1874, que l'ensemble des nombres réels ne l'est pas. A partir de 1884, il souffre de temps à autre de dépression. Les attaques contre ses théories y sont pour quelque chose, mais il devait avoir des prédispositions à cette maladie. Pendant ces périodes, il se tourne vers la philosophie, la littérature, puis la religion. Néanmoins, entre deux séjours au sanatorium, il continue ses recherches mathématiques. Ses dernières années sont pénibles, à cause de sa santé, mais aussi des conditions de vie en Allemagne, à la fin de la guerre.*

S. Trompler

*Math-Jeunes n° 109S, 7–10, 2004*

# Le solveur presse-bouton

**Philippe Tilleuil**

Voici un (très) petit fichier à réaliser sous EXCEL®. Il permet de résoudre n'importe quelle équation ou, plus précisément, de déterminer une valeur approchée de n'importe quelle racine réelle d'une équation. Il est basé sur un théorème dû à B. Bolzano (1781–1848), et bien connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires.

### Le théorème des valeurs intermédiaires

> *Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si le nombre $c$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un nombre $\xi \in [a;b]$ tel que $f(\xi) = c$.*

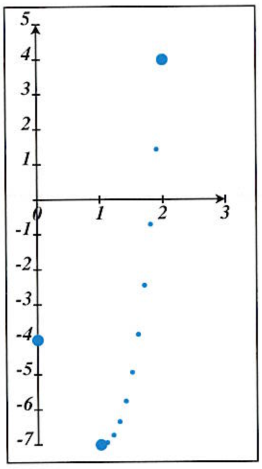
En particulier, si une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ change de signe sur un sous-intervalle de $[a;b]$, alors elle admet une racine dans ce sous-intervalle.

Regardons par exemple comment déterminer, à l'aide de ce théorème, une racine de l'équation

$$x^4 - 4x - 4 = 0.$$

Nous associons à cette équation la fonction $f(x) = x^4 - 4x - 4$ ; elle est continue pour toute valeur de $x$.

Dès que nous observons que $f(1) = -7$ et $f(2) = 4$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il y a (au moins) une racine de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]1;2[$.




Recommençons, mais cette fois-ci avec les valeurs $f(1,1)$, $f(1,2)$, etc. Nous obtenons entre autres $f(1,8) = -0,7024$ et $f(1,9) = 1,4321$, d'où — toujours en vertu du théorème des valeurs intermédiaires — l'existence d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ dans le sous-intervalle $]1,8;1,9[$ de l'intervalle $]1;2[$. Il n'est plus très difficile d'imaginer comment il faut poursuivre...

## La construction du fichier

> ***Prérequis*** *: pour réaliser ce fichier, il faut avoir déjà vu une feuille de calculs* EXCEL® *et en connaître le vocabulaire de base (cellule, adresse d'une cellule, barres d'outils, ...) Il peut être intéressant de savoir aussi écrire une formule, sans que cela ne soit indispensable...*

De manière générale, le principe du fichier consistera à calculer les valeurs d'une fonction pour des valeurs appropriées de la variable. Ces valeurs seront définies progressivement, à partir des chiffres de l'écriture décimale de la variable. Et à chaque fois, il faudra fixer le chiffre à partir duquel s'opère un changement de signe dans les valeurs correspondantes de la fonction.

Bien sûr, le tout est de bien organiser la chose ! Le fichier étant (très) petit, nous allons prendre le temps d'en détailler la construction. Ouvrons une feuille de calcul EXCEL®, et construisons le fichier qui permet de calculer les racines (réelles) de l'équation $x^4 - 4x - 4 = 0$. Cette construction va se faire en 3 étapes :

- la présentation des chiffres de l'écriture décimale d'un nombre $x$,
- l'écriture du nombre $x$ correspondant à cette succession de chiffres,
- le calcul de la valeur correspondante de la fonction.

Détaillons ces différentes étapes.

### Première étape : la présentation des chiffres de l'écriture décimale de $x$

Supposons que $x \in [0;100[$ ; nous voulons placer le chiffre des dizaines dans la cellule `A1`, celui des unités en `B1` – la virgule en `C1`, ce sera joli ! – le chiffre des dixièmes en `D1`, celui des centièmes en `E1`, etc. Mais l'essentiel de cette étape consiste à savoir faire varier ces chiffres à la souris ; c'est pour arriver à cela que nous allons utiliser ce qu'on appelle en EXCEL® des barres de défilement.

Nous construisons une barre de défilement pour chacun des chiffres du développement décimal en les disposant de `A3` à `A9`, `B3` à `B9`, de `D3` à `D9`, etc. (cf. la copie d'écran en fin d'article).

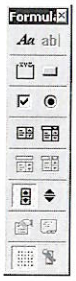
Ce ne sont encore que de beaux objets, il s'agit maintenant de les faire fonctionner ! Un clic droit (et non pas gauche !) sur une barre de défilement nouvellement créée permet à la fois de la sélectionner et de faire apparaître un menu contextuel. Sélectionnons «`Format de contrôle`» tout en bas de ce menu. La boîte de dialogue qui apparaît alors doit à chaque fois être complétée de la manière suivante :

- «`Valeur minimale`» : c'est la plus petite valeur numérique que la barre de défilement permet de créer, et ici c'est le plus petit chiffre qui puisse se présenter dans l'écriture décimale d'un nombre, c'est-à-dire 0 ;
- «`Valeur maximale`» : c'est la plus grande valeur numérique que la barre de défilement permet de créer, et ici c'est donc le plus grand chiffre qui puisse se présenter dans l'écriture décimale d'un nombre, c'est-à-dire 9 ;
- «`Changement de pas`» : c'est la différence entre deux valeurs numériques consécutives créées par la barre de défilement – et ce doit être impérativement un nombre entier ! – ici, ce nombre doit donc être égal à 1 ;
- «`Changement de page`» : c'est la quantité dont varie la valeur numérique fournie par la barre de défilement à chaque fois qu'un clic est produit sur cette barre elle-même (c'est-à-dire entre les deux triangles noirs situés aux extrémités de la barre), et ici nous fixons ce changement comme égal à 1 ;
- «`Cellule liée`» : c'est l'adresse de la cellule où doit apparaître le nombre créé par la barre de défilement, et comme nous avons associé une barre de défilement à chaque chiffre de l'écriture décimale de $x$ :
  - pour la barre de défilement associée au chiffre des dizaines de $x$, l'adresse de la cellule liée sera `A1`,
  - pour la barre de défilement associée au chiffre des unités de $x$, l'adresse de la cellule liée sera `B1`,
  - pour la barre de défilement associée au chiffre des dixièmes de $x$, l'adresse de la cellule liée sera `D1`,
  - etc.

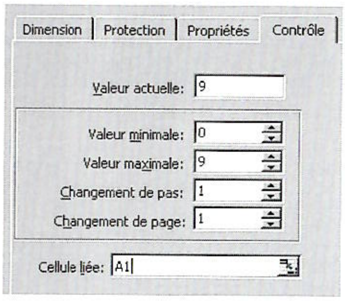
### Deuxième étape : l'écriture du nombre $x$ correspondant

Il faut maintenant faire d'une succession de chiffres, un nombre. Si nous décidons de placer ce nombre dans la cellule `L11`, il faut donc y écrire la formule

Pour créer une barre de défilement, on choisit `Affichage/Barre d'outils/Formulaire` dans la barre de menu. La barre d'outils suivante apparaît, horizontalement ou verticalement.



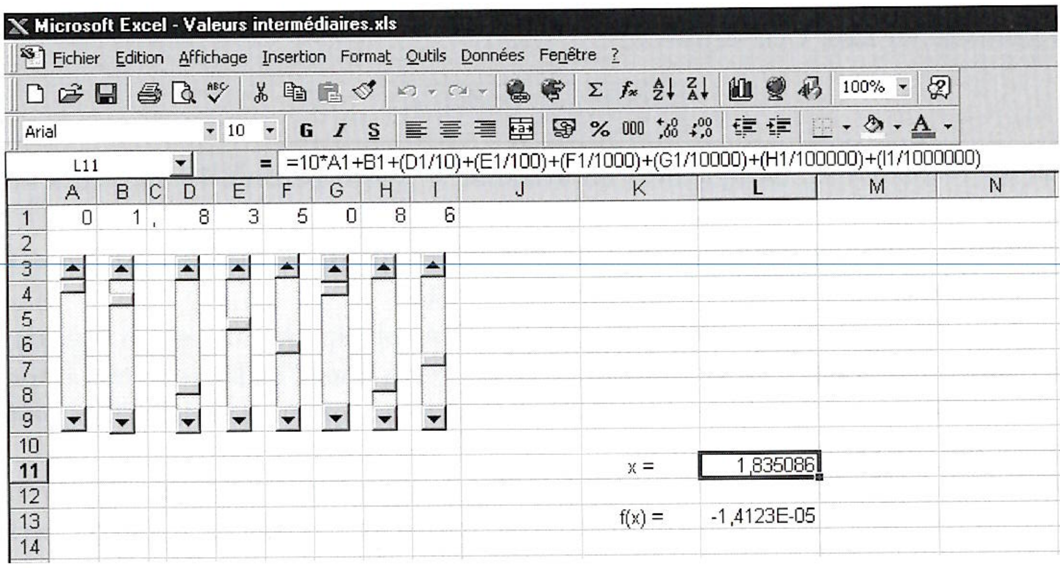

On sélectionne le symbole de la barre de défilement : . Un déplacement de la souris fait alors voir que le pointeur s'est transformé en une petite croix fine. En cliquant (avec le bouton gauche de la souris) en un endroit approprié de la feuille, par exemple en `A3`, et en gardant le bouton enfoncé tout en déplaçant le curseur-croix de `A3` à `A9`, on matérialise une barre de défilement dans la feuille de calculs.




Et après avoir à chaque fois validé ce format en appuyant sur « `OK` », tout est achevé : un clic gauche sur l'un ou l'autre triangle situé à l'une des extrémités de n'importe laquelle de ces barres de défilement fait varier le chiffre correspondant de 0 à 9.

`=10*A1+B1+(D1/10)+(E1/100)+(F1/1000)+(G1/10000)+(H1/100000)+(I1/1000000)`

suivie d'un retour de clavier ou «`Enter`». Comme commentaire, nous écrivons dans la cellule `K11` : `x =` (toujours suivi d'un retour de clavier), afin de nous souvenir de ce qui a été placé dans la cellule `L11`. Le résultat presque final est visible sur la figure ci-dessous :




la cellule `L11` y est sélectionnée, ce qui permet de faire apparaître, en dessous de la barre d'icônes dans la zone de nom, son adresse (à savoir `L11`), et dans la barre de formules l'écriture explicite de la formule active en `L11`.

**Troisième étape : le calcul de la valeur correspondante de la fonction $f(x)$**

Tout ce qui précède est indépendant de l'expression dont nous recherchons les racines, à savoir ici $f(x) = x^4 - 4x - 4$. Si nous décidons de calculer la valeur de cette fonction par exemple dans la cellule `L13`, il faut donc y écrire la formule :

=(L11∧4)-4*L11-4

toujours suivie d'un retour de clavier. Comme commentaire, nous écrivons dans la cellule `K13` : f(x) = (encore suivi d'un retour de clavier), afin de nous souvenir de ce qui a été placé dans la cellule `L13`. Le résultat – final, cette fois-ci ! – est visible sur la copie d'écran déjà reproduite ci-dessus. C'est fini : le solveur presse-bouton est prêt à fonctionner !

## Le fonctionnement du solveur

Commençons par mettre à 0 tous les chiffres de `A1` à `I1`. En agissant sur la deuxième barre de défilement (dans la colonne `B`) nous faisons apparaître dans la cellule `L13` les valeurs de la fonction $f(x)$ correspondant aux premières valeurs entières de $x$. Un changement de signe se fait voir entre $x = 1$ et $x = 2$ : nous fixons donc le 1 de la cellule `B`. Il reste à recommencer cette procédure pour les cellules `D1`, `E1`, etc.

# Quelques remarques, pour conclure ...

Bien sûr, le fichier qui vient d'être décrit peut encore être amélioré sur de nombreux points.
Son amélioration la plus notable consiste à l'adapter à la recherche des racines négatives. Une manière simple de procéder consiste à écrire, par exemple dans la cellule `N11`, la formule $\boxed{\text{=-L11}}$, qui calcule donc l'opposé du nombre $x$, et d'écrire ensuite dans la cellule `N13` la formule analogue à celle déjà présente en `L13`, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{=(N11}\wedge\text{4)-4*N11-4}}$$

(l'adaptation est réalisée automatiquement en utilisant le presse-papier). Le solveur s'utilise alors en lisant dans la colonne `N` ce qui était lu auparavant dans la colonne `L`.
Le solveur presse-bouton peut évidemment traiter d'autres équations que $x^4 - 4x - 4 = 0$ ; il suffit de changer les formules écrites dans les cellules `L13` et `N13`.
Il est également utile de savoir qu'EXCEL® dispose d'un solveur qui lui est propre, dont le maniement est relativement convivial et efficace, mais qui reste pour l'utilisateur une (merveilleuse) boîte noire. Notre solveur est moins subtil, mais nous savons comment il calcule et surtout c'est le nôtre : ça, ça n'a pas de prix !
On pourrait encore facilement le modifier de manière à augmenter le nombre de décimales calculées. Il suffirait d'utiliser un plus grand nombre de barres de défilement. L'intérêt serait d'augmenter la précision du résultat calculé. N'oublions pas en effet qu'un nombre réel comporte **une infinité** de décimales, même si nous ne pouvons jamais en calculer qu'un nombre fini !

## Bernard Bolzano (1781-1848)

*Mathématicien, mais aussi philosophe et théologien tchèque. En 1800, il entame trois ans d'études en théologie, en même temps qu'il prépare un doctorat en géométrie, qu'il obtient en 1804. Deux jours plus tard, il est ordonné prêtre et devient titulaire de la chaire de philosophie et de religion à l'université de Prague.*
*À cause de ses vues pacifistes et de son projet de justice économique, Bolzano est suspendu en 1819 par le gouvernement autrichien dont l'autorité s'étend à l'époque au territoire tchèque, puis est arrêté par l'Eglise qui l'accuse d'hérésie et l'assigne à résidence, avec interdiction de publier.*
*Mais, comme pour Galilée, cette interdiction ne l'empêchera pas de faire connaître ses travaux, par des publications à l'étranger. Son travail sur les « Paradoxes de l'infini » est publié en 1851 par un de ses étudiants. Le mot « ensemble » y apparaît pour la première fois. Bolzano donne des exemples de bijection entre les éléments d'un ensemble infini et les éléments d'une de ses parties propres.*

S. Trompler

*Math-Jeunes n°109S, 11–15, 2004*

# Des écritures sans fin

***Yolande Noël-Roch***

## 1. Mise en bouche

Essayez de calculer

$E_1$ :
$1-1+1-1+1-1+1-\cdots$

$E_2$ :
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$

$E_3$ :
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

$E_4$ :
$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$

$E_5$ :
$325{,}74545454545\ldots$

$E_6$ :
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$

Ne craignez pas d'user papier, crayon, calculatrice, tableur... **avant** de continuer votre lecture !

> Une expression telle que $E_4$ est une *fraction continue*. On essaye de lui attribuer une valeur en calculant successivement ce qu'on appelle ses *réduites*. Celles de $E_4$ sont $1$, $1+\frac{1}{1}$, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, etc.

Voici les échanges de trois amis, Arit, Algé et Algo après leurs recherches.

Arit : Je suis perplexe ! J'ai démontré que $0 = 1$ en calculant deux fois la somme $E_1$, en associant les termes deux par deux, et cela de deux façons différentes :

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$$

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-\cdots = 1.$$

Algé : J'ai trouvé autre chose, en associant les termes encore autrement ! En partant de

$$1-1+1-1+1-1+1-\cdots = 1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)$$

et en désignant par $x$ la somme cherchée, j'ai obtenu $x = 1-x$, donc $x = 0{,}5$

Algo : Alors, grâce à vous $0 = 1 = 0{,}5$ ...

Arit et Algé, vexés, changent de problème !

Arit : Dans $E_3$, j'ai reconnu les termes d'une **PG** de premier terme $t = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$. Je sais alors calculer la somme : elle vaut $t \times \frac{1}{1-r} = 1 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Algé (un peu nerveux) : Je connais la P.J., les P.V. et mes deux Pépés ... mais pas les PG. Comme pour la première somme, j'ai appelé $x$ le nombre cherché. En partant de

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots = 1+\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots\right)$$

j'ai trouvé $x = 1+0{,}5x$, donc $x = 2$.

Algo : Au moins, cette fois, vous trouvez la même chose ! Moi, je ne sais pas calculer des sommes avec des petits points ! J'ai calculé progressivement :

> Une **Progression Géométrique** est une suite de nombres du type
>
> $$t \quad tr \quad tr^2 \quad tr^3 \quad tr^4 \quad \cdots$$
>
> Elle est définie par la **raison** $r$ et le **premier terme** $t$. Chaque terme est le produit du précédent par la raison.
> La somme des $k$ premiers termes vaut
>
> $$t(1+r+r^2+\cdots+r^{k-1}) = t\frac{1-r^k}{1-r}$$
>
> Si $k$ tend vers l'infini et $-1 < r < 1$, la somme des termes de la progression géométrique tend vers $t\frac{1}{1-r}$.

| B | A | B |
|---|---|---|
| **E4** | **n** | **E4** |
| 1 | 1 | 1 |
| =1+1/B2 | 2 | 2 |
| =1+1/B3 | 3 | 1,5 |
| =1+1/B4 | 4 | 1,66666667 |
| =1+1/B5 | 5 | 1,6 |
| =1+1/B6 | 6 | 1,625 |
| =1+1/B7 | 7 | 1,61538462 |
| =1+1/B8 | 8 | 1,61904762 |
| =1+1/B9 | 9 | 1,61764706 |
| =1+1/B10 | 10 | 1,61818182 |
| =1+1/B11 | 11 | 1,61797753 |
| =1+1/B12 | 12 | 1,61805556 |
| =1+1/B13 | 13 | 1,61802575 |
| =1+1/B14 | 14 | 1,61803714 |
| =1+1/B15 | 15 | 1,61803279 |
| =1+1/B16 | 16 | 1,61803445 |
| =1+1/B17 | 17 | 1,61803381 |
| =1+1/B18 | 18 | 1,61803406 |
| =1+1/B19 | 19 | 1,61803396 |
| =1+1/B20 | 20 | 1,618034 |
| =1+1/B21 | 21 | 1,61803399 |
| =1+1/B22 | 22 | 1,61803399 |
| =1+1/B23 | 23 | 1,61803399 |

| B | A | B |
|---|---|---|
| **E2** | **n** | **E2** |
| 1 | 1 | 1 |
| =RACINE(2+B2) | 2 | 1,73205081 |
| =RACINE(2+B3) | 3 | 1,93185165 |
| =RACINE(2+B4) | 4 | 1,98288972 |
| =RACINE(2+B5) | 5 | 1,99571785 |
| =RACINE(2+B6) | 6 | 1,99892917 |
| =RACINE(2+B7) | 7 | 1,99973228 |
| =RACINE(2+B8) | 8 | 1,99993307 |
| =RACINE(2+B9) | 9 | 1,99998327 |
| =RACINE(2+B10) | 10 | 1,99999582 |
| =RACINE(2+B11) | 11 | 1,99999895 |
| =RACINE(2+B12) | 12 | 1,99999974 |
| =RACINE(2+B13) | 13 | 1,99999993 |
| =RACINE(2+B14) | 14 | 1,99999998 |
| =RACINE(2+B15) | 15 | 2 |
| =RACINE(2+B16) | 16 | 2 |
| =RACINE(2+B17) | 17 | 2 |
| =RACINE(2+B18) | 18 | 2 |
| =RACINE(2+B19) | 19 | 2 |

- dans le premier cas :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1-1$ | $1-1+1$ | $1-1+1-1$ | $\cdots$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $\cdots$ |

Pas la peine de continuer, je vois bien que ce sera toujours 1 puis 0, alors je ne vois pas comment décider du résultat ! A moins qu'en faisant la moyenne pour trouver la réponse de Algé ? ?

- J'ai ensuite attaqué l'expression $E_4$ qui ne présente que des 1. Cela m'a amené dans des calculs de fractions qui se compliquaient. Par contre, j'ai remarqué une règle fort simple de passage d'une étape à la suivante. Voici mon tableau :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1+\frac{1}{1}$ | $1+\frac{1}{1+1/1}$ | $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1/1}}$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $n^{\text{e}}$ étape | $(n+1)^{\text{e}}$ étape |
| 1 | 2 | $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ | $1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$ | $\frac{13}{8}$ | $\cdots$ | $s_n$ | $1+\frac{1}{s_n}$ |

J'ai programmé les calculs sur un tableur ; admirez le résultat ! C'est plus clair avec des écritures décimales qu'avec des fractions ! Je pense que la réponse est 1,618 033 99.

Algé : Je me suis aussi occupé de ce calcul et j'ai écrit à peu près la même chose que toi, précisément grâce aux petits points comme tu dis. Puisque l'écriture du calcul ne s'arrête jamais, je peux écrire $s=1+\frac{1}{s}$ avec $s$ qui remplace le nombre cherché. J'ai trouvé deux racines de l'équation $s^2-s-1=0$ : $s_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Manifestement la deuxième est un nombre négatif et ne peut pas convenir, mais ma calculatrice donne 1,618 033 989 pour $s_1$. Cela ressemble drôlement à ton tableur... et au nombre d'Or.

Arit : Je vais essayer d'appliquer à $E_2$ la méthode de Algé. Si $x$ est le nombre cherché, on a $x=\sqrt{2+x}$ et je résous l'équation $x^2=2+x$. Je trouve comme racines $-1$ et 2. Je suppose que la réponse au problème est 2 ?

Pendant ce temps, Algo a intéressé Algé au tableur. Les trois amis comparent leurs résultats : cette fois, ils sont concordants.

# 1. Des questions

Nos trois amis sont contents. Ils ont bien l'impression d'avoir résolu trois problèmes sur les cinq qui leur ont été proposés mais ils restent perplexes :

- que penser de $E_1$ ?
- peut-on faire confiance à Algé et Arit qui trouvent plusieurs « solutions » pour $E_2$ et $E_4$ et éliminent ensuite celles qui ne leur paraissent pas convenir ? Les solutions conservées conviennent-elles ? Les concordances avec Algo valident-elles les résultats ?

C'est au milieu de cette discussion qu'apparaît Analis qui peut les aider !

Analis : Vous avez remarquablement débrouillé le problème mais vous ne disposez pas des éléments de théorie qui vous permettraient de conclure avec certitude. En gros, il existe des séries qu'on appelle **convergentes** et des séries qu'on appelle **divergentes** :

- $1-1+1-1+\cdots$ est un exemple de série divergente : aucun nombre ne résulte de cette addition d'une infinité de termes. L'écriture $E_1$ ne représente donc pas un nombre.
  Dès lors, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'en associant de différentes façons les termes de $E_1$, on obtienne des résultats contradictoires ! Moralité : les « bonnes vieilles » propriétés de l'addition, comme l'associativité, sont à mettre en doute pour des additions infinies...
- La méthode de Algé est valable dans certains cas mais peut donner lieu à des difficultés de natures différentes :
  - le résultat obtenu pour $E_3$ est correct ; il est validé par l'étude des progressions géométriques.
  - Au contraire, le résultat obtenu pour $E_1$ n'est pas valable ; en désignant par $x$ la somme cherchée, Algé suppose que cette somme existe, alors que ce n'est pas le cas !
  - Dans le cas de $E_2$ et $E_4$, la situation est moins grave : Algé et Arit **supposent l'existence** d'un nombre **qui existe réellement**. Mais les équations impliquées sont des **conséquences** de l'égalité posée tout en n'étant **pas équivalentes** à cette égalité.

C'en est trop pour Arit, Algé et Algo qui se retrouvent assez découragés. Mais Analis leur redonne confiance : les résultats 2, 2 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ trouvés respectivement pour $E_2$, $E_3$ et $E_4$ sont corrects. Et quelles sont les idées à propos de $E_5$ ?

**Suites et séries**
Avec une *suite* de nombres réels

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \ldots$$

on peut fabriquer une *série*, c'est-à-dire une addition infinie :

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$$

La série *converge* si, en additionnant les termes un à la fois, on obtient une suite de *sommes partielles*, $t_0$, $t_0+t_1$, $t_0+t_1+t_2$, ... qui deviennent et restent aussi proches qu'on le veut d'un nombre réel $S$. Celui-ci est appelé la *somme* de la série et on dit que la série est *convergente* (vers $S$). De plus, on note

$$S = \sum_{i=0}^{+\infty} t_i$$

Introduites dans la seconde moitie du XVII^e siècle par le mathématicien anglais John Wallis (1616–1703), les séries et les produits infinis ont joué depuis lors un rôle important dans le développement de l'analyse mathématique.

## 2. Les nombres rationnels

L'arrivée d'Analis a interrompu les recherches de nos trois amis qui n'ont pas encore abordé le problème de $E_5$ et les mises au point qui viennent d'être faites les rendent prudents ! Ils trouvent que l'écriture $E_5$ est ambigüe : que cachent les points de suspension ?

Par exemple, que représentent les trois écritures 3,141 592..., 17,163 974 239... et 52,178 989 898 9... ?

Avec ces écritures **illimitées**, depuis bien longtemps vous utilisez des **séries** sans y penser. Par exemple

$$3{,}141\,592\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{5}{10\,000} + \cdots$$

Mais il y a plus :

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale **limitée** ou **illimitée périodique**.

- $3{,}141\,592\ldots$ fait penser au nombre $\pi$. Dans ce cas, un grand nombre de décimales sont connues. Elles ne peuvent pas l'être toutes, et on sait que le développement n'est pas périodique, ce qui signifie que $\pi$ n'est pas rationnel.
- $17{,}163\,974\,239\ldots$ et $52{,}178\,989\,898\,9\ldots$ sont des écritures très douteuses car nous ignorons si ces développements sont périodiques.

$$52{,}17\overline{89} = 52{,}17 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{89}{10^{2n}}$$

Pour marquer la périodicité d'un développement, on écrit une seule fois la période et on la surmonte d'un trait :

$$52{,}17\overline{89} = 52{,}17 + \frac{89}{10^4} + \frac{89}{10^6} + \cdots + \frac{89}{10^{2n}} + \cdots$$

De même, nous écrirons $0{,}\overline{3}$ pour $\frac{1}{3}$.

Comment passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale et *vice versa* ?

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme $\frac{a}{b}$ où $a$ est un entier et $b$ un naturel non nul.

## 2.1. De la barre à la virgule

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline 32 & 4{,}375 \\ 30 & \\ 24 & \\ 60 & \\ 56 & \\ 40 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline 24 & 4{,}16 \\ 10 & \\ 6 & \\ 40 & \\ 36 & \\ 4 & \end{array}$$

Pour trouver l'écriture décimale de $\frac{a}{b}$, il suffit d'effectuer la division de $a$ par $b$. De deux choses l'une

- ou bien un reste nul apparaît. Dans ce cas, l'écriture est limitée.
- ou bien le reste n'est jamais nul. Comme il doit être toujours plus petit que $b$, le même reste réapparaît nécessairement après $b-1$ étapes au maximum ... d'où la répétition de chiffres dans le quotient.

## 2.2. De la virgule à la barre

$$8{,}239 = \frac{8\,239}{1\,000}$$

Evidemment, toute écriture limitée se transforme facilement en fraction, le dénominateur étant une puissance de 10. Que la fraction soit simplifiable ou non ne nous intéresse pas ici.

Arrêtons-nous un peu aux écritures illimitées. Quelle fraction représente $0{,}\overline{45}$ ?

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0{,}\overline{P} \\ \text{alors } 10^k x &= P{,}\overline{P} \\ (10^k-1)x &= P \\ x &= \frac{P}{10^k-1} \end{aligned}$$

$$0{,}\overline{45} = \frac{45}{100} + \frac{45}{10\,000} + \cdots + \frac{45}{10^{2n}} + \cdots$$

Ainsi, les méthodes utilisées par Arit et Algé permettent toutes les deux de démontrer que $0{,}\overline{45} = \frac{45}{99}$. D'une manière plus générale, le nombre $0{,}\overline{P}$ où $P$ est une période de $k$ chiffres s'écrit aussi $\frac{P}{10^k-1}$, ou encore $\frac{P}{9\ldots9}$, en utilisant autant de chiffres 9 qu'il y a de chiffres dans $P$.

En deux étapes, le nombre $325{,}7\overline{45}$ se ramène à la fraction $\frac{3\,257}{10} + \frac{45}{990} = \frac{3\,257\times99+450}{990}$. Plus généralement, tout nombre du type $E{,}M\overline{P}$ peut s'écrire $E{,}M + 10^m \times 0{,}\overline{P}$ si $m$ est le nombre de chiffres écrits entre la virgule et le début de la période. Ainsi, toute écriture décimale illimitée périodique est un nombre rationnel.

## 3. Le tableur n'est pas infini !

Programmons-le pour calculer progressivement les expressions $E_3$ et $E_6$.

$$E_3 : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \qquad E_6 : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

| A | B | C |
|---|---|---|
| | | E3 |
| 1 | =1/A2 | =B2 |
| =A2*2 | =1/A3 | =C2+B3 |
| =A3*2 | =1/A4 | =C3+B4 |
| =A4*2 | =1/A5 | =C4+B5 |
| =A5*2 | =1/A6 | =C5+B6 |
| =A6*2 | =1/A7 | =C6+B7 |
| =A7*2 | =1/A8 | =C7+B8 |
| =A8*2 | =1/A9 | =C8+B9 |
| =A9*2 | =1/A10 | =C9+B10 |
| =A10*2 | =1/A11 | =C10+B11 |
| =A11*2 | =1/A12 | =C11+B12 |
| =A12*2 | =1/A13 | =C12+B13 |
| =A13*2 | =1/A14 | =C13+B14 |
| =A14*2 | =1/A15 | =C14+B15 |
| =A15*2 | =1/A16 | =C15+B16 |
| =A16*2 | =1/A17 | =C16+B17 |
| =A17*2 | =1/A18 | =C17+B18 |
| =A18*2 | =1/A19 | =C18+B19 |
| =A19*2 | =1/A20 | =C19+B20 |
| =A20*2 | =1/A21 | =C20+B21 |
| =A21*2 | =1/A22 | =C21+B22 |
| =A22*2 | =1/A23 | =C22+B23 |
| =A23*2 | =1/A24 | =C23+B24 |
| =A24*2 | =1/A25 | =C24+B25 |

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| | | E3 | | | E6 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,5 | 1,5 | 2 | 0,5 | 1,5 |
| 4 | 0,25 | 1,75 | 3 | 0,33333333 | 1,83333333 |
| 8 | 0,125 | 1,875 | 4 | 0,25 | 2,08333333 |
| 16 | 0,0625 | 1,9375 | 5 | 0,2 | 2,28333333 |
| 32 | 0,03125 | 1,96875 | 6 | 0,16666667 | 2,45 |
| 64 | 0,015625 | 1,984375 | 7 | 0,14285714 | 2,59285714 |
| 128 | 0,0078125 | 1,9921875 | 8 | 0,125 | 2,71785714 |
| 256 | 0,00390625 | 1,99609375 | 9 | 0,11111111 | 2,82896825 |
| 512 | 0,00195313 | 1,99804688 | 10 | 0,1 | 2,92896825 |
| 1024 | 0,00097656 | 1,99902344 | 11 | 0,09090909 | 3,01987734 |
| 2048 | 0,00048828 | 1,99951172 | 12 | 0,08333333 | 3,10321068 |
| 4096 | 0,00024414 | 1,99975586 | 13 | 0,07692308 | 3,18013376 |
| 8192 | 0,00012207 | 1,99987793 | 14 | 0,07142857 | 3,25156233 |
| 16384 | 6,1035E-05 | 1,99993896 | 15 | 0,06666667 | 3,31822899 |
| 32768 | 3,0518E-05 | 1,99996948 | 16 | 0,0625 | 3,38072899 |
| 65536 | 1,5259E-05 | 1,99998474 | 17 | 0,05882353 | 3,43955252 |
| 131072 | 7,6294E-06 | 1,99999237 | 18 | 0,05555556 | 3,49510808 |
| 262144 | 3,8147E-06 | 1,99999619 | 19 | 0,05263158 | 3,54773966 |
| 524288 | 1,9073E-06 | 1,99999809 | 20 | 0,05 | 3,59773966 |
| 1048576 | 9,5367E-07 | 1,99999905 | 21 | 0,04761905 | 3,6453587 |
| 2097152 | 4,7684E-07 | 1,99999952 | 22 | 0,04545455 | 3,69081325 |
| 4194304 | 2,3842E-07 | 1,99999976 | 23 | 0,04347826 | 3,73429151 |
| 8388608 | 1,1921E-07 | 1,99999988 | 24 | 0,04166667 | 3,77595818 |

| D | E | F |
|---|---|---|
| | | E6 |
| 1 | =1/D2 | =E2 |
| =D2+1 | =1/D3 | =F2+E3 |
| =D3+1 | =1/D4 | =F3+E4 |
| =D4+1 | =1/D5 | =F4+E5 |
| =D5+1 | =1/D6 | =F5+E6 |
| =D6+1 | =1/D7 | =F6+E7 |
| =D7+1 | =1/D8 | =F7+E8 |
| =D8+1 | =1/D9 | =F8+E9 |
| =D9+1 | =1/D10 | =F9+E10 |
| =D10+1 | =1/D11 | =F10+E11 |
| =D11+1 | =1/D12 | =F11+E12 |
| =D12+1 | =1/D13 | =F12+E13 |
| =D13+1 | =1/D14 | =F13+E14 |
| =D14+1 | =1/D15 | =F14+E15 |
| =D15+1 | =1/D16 | =F15+E16 |
| =D16+1 | =1/D17 | =F16+E17 |
| =D17+1 | =1/D18 | =F17+E18 |
| =D18+1 | =1/D19 | =F18+E19 |
| =D19+1 | =1/D20 | =F19+E20 |
| =D20+1 | =1/D21 | =F20+E21 |
| =D21+1 | =1/D22 | =F21+E22 |
| =D22+1 | =1/D23 | =F22+E23 |
| =D23+1 | =1/D24 | =F23+E24 |
| =D24+1 | =1/D25 | =F24+E25 |

L'outil de calcul utilisé, si perfectionné soit-il, ne nous permet pas de déterminer si $E_3$ et/ou $E_6$ représentent des nombres. Dans les deux cas, les termes ajoutés deviennent de plus en plus petits. Les sommes calculées dans la colonne $E_3$ atteindront-elles 2 ...dépasseront-elles 2 ? Et dans la colonne $E_6$, atteindront-elles 3,8 ou 4 ? dépasseront-elles ce(s) nombre(s) ?

Il faut disposer de résultats théoriques pour étayer les tâtonnements numériques. Par exemple, dans le cas de $E_3$, Arit a invoqué les résultats relatifs aux Progressions Géométriques pour affirmer **a priori** que **la somme existe**, ce qui valide le résultat 2 trouvé par nos amis.

Au contraire, la colonne $E_6$ de notre tableur donne les premières valeurs d'une série **divergente** célèbre en mathématique : la « série harmonique ». Bien que les termes ajoutés soient de plus en plus petits, il suffit de calculer « suffisamment loin » pour dépasser n'importe quel nombre, aussi grand qu'on le choisisse. (Voyez à ce sujet la rubrique *Jeux*, page 27.)

**La série harmonique diverge**

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8}$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{8}{16}$$

Des blocs de 2, 4, 8, ... $2^n$ termes donnent chaque fois une somme supérieure à 0,5 et les sommes partielles dépassent successivement 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5... 1 000 000... n'importe quel réel arbitrairement grand.

## Solutions des exercices de la rubrique « Olympiades mathématiques » :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | D | D | A | C | D | B | E | B |

Math-Jeunes n°109S, 16–18, 2004

# Prouver par récurrence

Nicole Lambelin

## Prérequis
## Les nombres premiers

Un nombre naturel est premier s'il admet *exactement* deux diviseurs : lui-même et 1.

Le crible d'Eratosthène de Cyrène, (environ −276 à environ −194) est une méthode de recherche des nombres premiers. Il suffit d'écrire, par ordre croissant, tous les naturels, de barrer 1, d'entourer 2, de barrer tous ses multiples stricts, de recommencer cette opération avec 3, puis avec le premier non barré (5) et ainsi de suite.

Les naturels entourés sont premiers.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 11 | ~~21~~ | 31 | 41 | ~~51~~ |
| 2 | ~~12~~ | ~~22~~ | ~~32~~ | ~~42~~ | ~~52~~ |
| 3 | 13 | 23 | ~~33~~ | 43 | 53 |
| ~~4~~ | ~~14~~ | ~~24~~ | ~~34~~ | ~~44~~ | ~~54~~ |
| 5 | ~~15~~ | ~~25~~ | ~~35~~ | ~~45~~ | ~~55~~ |
| ~~6~~ | ~~16~~ | ~~26~~ | ~~36~~ | ~~46~~ | ~~56~~ |
| 7 | 17 | ~~27~~ | 37 | 47 | ~~57~~ |
| ~~8~~ | ~~18~~ | ~~28~~ | ~~38~~ | ~~48~~ | ~~58~~ |
| ~~9~~ | 19 | 29 | ~~39~~ | ~~49~~ | 59 |
| ~~10~~ | ~~20~~ | ~~30~~ | ~~40~~ | ~~50~~ | ~~60~~ |

Pour savoir si un naturel $n$ est premier, il suffit de tester comme diviseurs éventuels les nombres premiers $p$ tels que $p^2 < n$.

---

Thomas : Choisis un naturel plus petit que 20, ajoute-lui son carré et augmente ton résultat de 41.

Loïc : C'est fait.

Thomas : Je parie que tu obtiens un nombre premier.

Loïc : Tu as raison, 71 est premier. Est-ce vrai pour tous les naturels plus petits que 20 ?

Thomas : Oui, regarde.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2+n+41$ | 41 | 43 | 47 | 53 | 61 | 71 | 83 | 97 | 113 | 131 | 151 |

| $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2+n+41$ | 173 | 197 | 223 | 251 | 281 | 313 | 347 | 383 | 421 | 461 | |

Loïc : Et pour les autres naturels ?

Thomas : Oh, si c'est vrai pour les naturels de 0 à 20, c'est sûrement vrai pour tous les naturels.

Loïc : Pas sûr, essayons.

| $n$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2+n+41$ | 503 | 547 | 593 | 641 | 691 | 743 | 797 | 853 | 911 | 971 |

Thomas : Tu vois que c'est vrai.

Loïc : Persévérons.

| $n$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2+n+41$ | 1033 | 1097 | 1163 | 1231 | 1301 | 1373 | 1447 | 1523 | 1601 | 1681 |

1681 est le carré de 41 :

$$40^2+40+41 = 40(40+1)+41 = 40\times 41+41 = 41(40+1) = 41^2$$

Ta propriété est donc fausse puisqu'il y a au moins un naturel pour lequel elle est fausse.

Thomas : Heureusement que ce premier naturel était 40 et pas 2 823 459 !

Loïc : Nous aurions aussi pu voir, même sans calculatrice, que $n^2+n+41$ n'est pas premier lorsque $n=41$ car $41^2+41+41$ est divisible par 41.

Justine : Moi aussi, j'ai une propriété à vous proposer :

« Pour tout naturel $n$, $4^n+2$ est un multiple de 3 ».

Loïc : Essayons.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4^n+2$ | 3 | 6 | 18 | 66 | 258 | 1026 | 4098 | 16386 | 65538 | 262146 | 1048578 |

Thomas : Ils sont tous divisibles par 3. Mais maintenant je me méfie, comment vérifier pour des valeurs plus grandes ? On va rapidement dépasser les capacités de la calculatrice.
Loïc : Même si notre calculatrice pouvait afficher un plus grand nombre de chiffres, il faudrait tester une infinité de valeurs, ce qui est impossible.
Thomas : Comment faire ?
Justine : Réfléchissons, nous avons vérifié la propriété pour les naturels inférieurs ou égaux à 10 ; il suffirait de prouver que dès que la propriété est vraie pour un naturel alors elle est vraie pour le naturel suivant. Notre propriété serait alors vraie pour 11, 12... pour tout naturel.
Thomas : Pourquoi ?
Justine : Pense à un domino qui, en tombant, entraîne la chute du domino suivant. C'est un peu le même principe :

- La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Comme elle est vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour $n = 1$ puisque si la propriété est vraie pour un naturel, alors elle est vraie pour le naturel suivant.
- Comme elle est vraie pour $n = 1$, elle est vraie pour $n = 2$... et ainsi de suite, indéfiniment.

« Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte en supposant deux lemmes. Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base. [...] Le second, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. » (Pascal, Traité du triangle arithmétique, 1654)

Thomas : J'ai compris, mais encore faut-il démontrer cette « hérédité ».
Loïc : Je pense avoir trouvé.

1. $4^0 + 2 = 3$ est un multiple de 3. Donc la propriété est vraie pour le plus petit naturel.
2. Si $4^n + 2$ est un multiple de 3 alors $4^{n+1} + 2$ l'est aussi car :

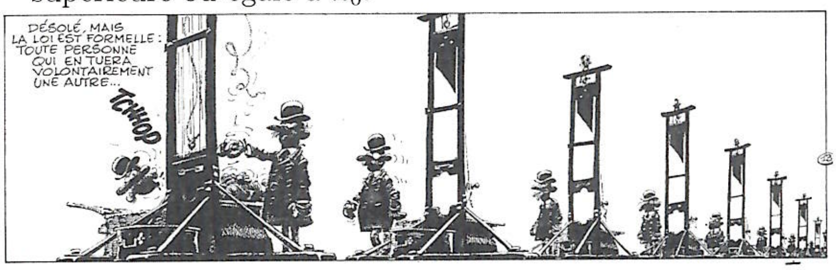
Il existe $p \in \mathbb{N}_0$ tel que $4^n + 2 = 3p$ (hypothèse de récurrence).
Donc $4^{n+1} + 2 = 4.4^n + 2 = 4.(3p - 2) + 2 = 12p - 8 + 2 = 12p - 6 = 3(4p - 2)$ est multiple de 3.
Thomas : Si j'ai bien compris, le principe est le suivant :
Soient $P_0$, $P_1$... $P_n$... des propriétés mathématiques dépendant d'un paramètre naturel $n$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} P_0 \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N} : P_n \Rightarrow P_{n+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P_n \text{ est vraie.}}$$

Le symbole $\forall$ signifie (et se lit) « Pour tout », ou « Quel que soit ». La phrase « $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ est vraie. » signifie donc « Quel que soit le naturel $n$, la propriété $P(n)$ est vraie ».
$\forall$ est appelé le « quantificateur universel ».

Loïc : Il y a donc deux phases :

- « l'initialisation » qui est la vérification de la propriété pour la plus petite valeur $n_0$ (le plus souvent $n_0 = 0$ ou 1),
- « l'hérédité » où on prouve que si la propriété est vraie pour un naturel $n$, alors elle est vraie pour le naturel suivant $n + 1$, et cette preuve doit être valable pour n'importe quelle valeur de $n$ supérieure ou égale à $n_0$.




*La récurrence selon Franquin*

Extrait de Idées Noires

Ed. Fluide Glacial, 1981

**Indications pour la démonstration de la première proposition.**

1 Prouve la propriété pour $n = 1$.

2 Prouve que :
$\forall n \in \mathbb{N}_0$ :
**Si**
$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
**Alors**
$1+2+3+\cdots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Giuseppe Peano (1858–1932) a défini l'ensemble des naturels non nuls par cinq axiomes, puis l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$ par récurrence.

« Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes »
Henri Poincaré (1854–1912)
*La Science et l'hypothèse*

Thomas : Entraînons-nous sur les propositions suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1.2+2.3+3.4+\cdots+(n-1).n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
- La somme des cubes des $n$ premiers naturels impairs est : $n^2(2n^2-1)$

Justine : Si nous n'y arrivons pas, nous demanderons de l'aide à notre professeur.

Loïc : J'ai trouvé des pseudo-démonstrations par récurrence qui sont fausses et je ne trouve pas l'erreur.

Justine : Explique.

Loïc : Les crayons de couleur sont tous de la même couleur.

En effet,

Initialisation :

$P_1$ est vraie car un crayon est de la même couleur que lui-même.

Hérédité :

Soient $n+1$ crayons. Retirons un crayon, les $n$ crayons restants sont de la même couleur (par hypothèse de récurrence). Reposons ce crayon et retirons un autre crayon, les $n$ crayons restants sont à nouveau de même couleur (par hypothèse de récurrence). Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les autres et donc les $n+1$ crayons sont de la même couleur.

Thomas : C'est faux.

Justine : Oui, mais je ne vois pas où le raisonnement est incorrect.

Loïc : Voici une autre démonstration. Pour tout naturel $n$ supérieur ou égal à 2 : $n$ points distincts du plan sont toujours alignés.

Initialisation :

$P_2$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.

Hérédité :

Prouvons que si $n$ points distincts du plan sont alignés alors $n+1$ points distincts du plan le sont aussi. Soient $A_1$, $A_2$,...$A_{n+1}$ $n+1$ points distincts. $A_1$, $A_2$... $A_n$ sont alignés (par hypothèse de récurrence), ils appartiennent à une droite $d$. $A_2$, $A_3$,... $A_{n+1}$ sont alignés (par hypothèse de récurrence), ils appartiennent à une droite $d'$. Les droites $d$ et $d'$ ayant $n-1$ points communs ($A_2$, $A_3$... $A_n$) sont confondues et donc $A_1$, $A_2$... $A_{n+1}$ sont alignés.

Justine : Ha ! Maintenant, j'ai trouvé.

As-tu, comme Justine, trouvé l'erreur ?

*Math-Jeunes n°109S, 19–23, 2004*

# À quelle distance est l'infini?

**Guy Noël**

L'Anglais John Wallis, inventeur du symbole $\infty$, serait bien étonné d'apprendre que bon nombre de touristes portent ce symbole en bandoulière. En fait, tous ceux qui disposent d'un appareil photographique muni des trois réglages traditionnels de la distance, du diaphragme et de la vitesse.

Mais que vient faire ce symbole sur l'objectif d'un appareil photographique ? Il n'est pas question de photographier un objet placé à cette « distance » ! Alors ?

Recherchons la réponse sur l'objectif lui-même.

Sur la photographie ci-dessus, les distances sont indiquées (en mètres et en pieds) sur une bague mobile.

La distance sélectionnée est celle qui est amenée en face d'un losange blanc, ◆, situé sur une bague fixe placée juste sous la bague des distances.

De part et d'autre de ◆, on trouve l'échelle des indices de diaphragme. Étant placée sur une bague fixe, cette double échelle ne peut servir à sélectionner l'ouverture du diaphragme. Mais les indices de diaphragme figurent aussi sur une seconde bague mobile placée encore en-dessous et vers laquelle ◆ pointe également. C'est cette bague qui sert à la sélection du diaphragme.

*Petite digression concernant les indices de diaphragme*

Les valeurs indiquées sur l'objectif sont des valeurs approchées au dixième près. Les valeurs (les plus courantes) approchées au centième près sont les suivantes :

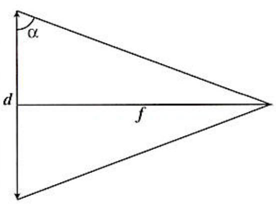
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,41 | 2 | 2,82 | 4 | 5,65 | 8 | 11,31 | 16 | 22,62 |

Avez-vous déjà eu la curiosité de les élever au carré ?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,99 | 4 | 7,95 | 16 | 31,92 | 64 | 127,69 | 256 | 511,66 |

Vous avez compris : les valeurs exactes des carrés sont 2, 4, 8, 16... Les valeurs des indices de diaphragme constituent donc (aux approximations près) une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$. D'après vous, pourquoi a-t-on choisi cette valeur ? En ouvrant le diaphragme d'un cran, l'indice est divisé par $\sqrt{2}$ et le rayon du diaphragme est multiplié par $\sqrt{2}$. L'aire du diaphragme est donc multipliée par 2 et la quantité de lumière pénétrant dans l'objectif est doublée.

L'indice de diaphragme est le rapport $\dfrac{f}{d}$, où $f$ est la distance focale et $d$ le diamètre du diaphragme.




Le carré du rapport inverse $\frac{d}{f}$ mesure la « luminosité » de l'objectif, c'est-à-dire la quantité de lumière reçue par un cm$^2$ de pellicule. L'exposition est donc d'autant plus intense que l'indice de diaphragme est petit.

*Parlons un peu du réglage de la distance.*

Pour photographier un objet $\mathcal{O}$, placé à une distance donnée $p$ de l'appareil, on doit régler celui-ci sur la distance $p$, à l'aide de la première bague mobile dont il a été question plus haut. Ce réglage a pour objet de déplacer légèrement l'objectif par rapport au plan de la pellicule de manière que l'image de l'objet se forme exactement dans ce plan. Comment détermine-t-on l'amplitude de ce déplacement ?

*C'est le moment de rappeler la loi fondamentale des lentilles.*

Conformément aux habitudes, limitons-nous à considérer des lentilles *minces* : leur épaisseur est petite par rapport à leur rayon de courbure. De plus, elles sont utilisées dans ce qu'on appelle les *conditions de Gauss* : les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe de la lentille et ne frappent celle-ci qu'en des points proches de son centre.

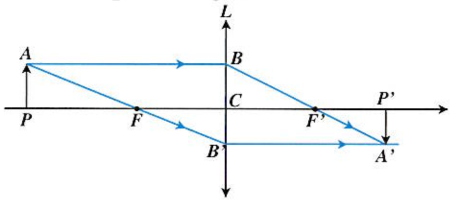
Loin d'être une lentille mince, l'objectif d'un appareil photographique est constitué de plusieurs lentilles épaisses. Celles-ci sont soigneusement choisies de façon que la déviation des rayons lumineux passant à travers l'objectif soit proche de celle qui serait due à une lentille mince. Nous pouvons donc considérer la formule des lentilles minces comme une approximation suffisante pour nos besoins.

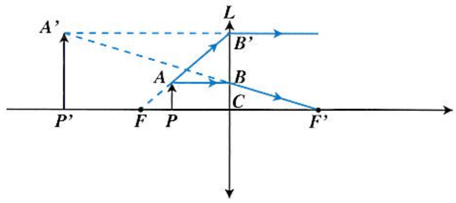
Les *foyers* $F$ et $F'$ d'une lentille mince $L$ sont deux points situés sur l'axe de la lentille, de part et d'autre et à la même distance $f$ de celle-ci (la distance *focale*). Ces foyers ont des propriétés remarquables.

- Les rayons lumineux parallèles à l'axe de la lentille se réfractent en passant par un foyer,
- Les rayons lumineux passant par un foyer se réfractent parallèlement à l'axe de la lentille.

Comme le rappellent les figures suivantes, ces propriétés permettent de déterminer la position de l'image d'un objet $\mathcal{O}$, symbolisé ici par une flèche $\overrightarrow{PA}$. Dans la figure de gauche, la distance de l'objet à la lentille est supérieure à la distance focale. L'image, symbolisée par une seconde flèche $\overrightarrow{P'A'}$, est réelle et située de l'autre côté de la lentille. Dans la figure de droite, l'objet est à une distance de la lentille inférieure à la distance focale. L'image est alors virtuelle et du même côté de la lentille que l'objet.

Dans le cas de l'appareil photographique, seule la figure de gauche présente un intérêt : l'objet $\mathcal{O}$ est forcément à l'extérieur de l'appareil ! Cependant il est bon de noter que la formule qui permet de déterminer la position du point $P'$ en fonction de celle du point $P$ est la même dans les deux cas de figure.



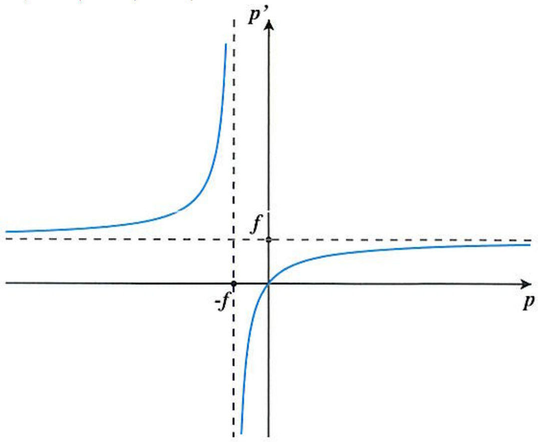




D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{|PF|}{|FC|} = \frac{|AF|}{|FB'|} = \frac{|BC|}{|CB'|} = \frac{|BF'|}{|F'A'|} = \frac{|CF'|}{|F'P'|}$.

Introduisons des coordonnées : l'origine des abscisses est placée en $C$, l'axe est orienté dans le sens des rayons lumineux (ici, de gauche à droite). Les abscisses des points $P$ et $P'$ sont notées respectivement $p$ et $p'$. Celles de $F$ et $F'$ sont $-f$ et $f$. Dans les deux cas de figure, on déduit de la formule précédente (voir l'encadré en fin d'article),

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p}$$

Traçons le graphique de la fonction $p' = \dfrac{fp}{p+f}$. La courbe est une hyperbole d'asymptotes parallèle aux axes. L'ordonnée de l'asymptote horizontale est $f$ : quand l'objet s'éloigne à l'infini, son image se rapproche du foyer $F'$.




N'oubliez pas que $f$ est une constante (la distance focale) et que la variable est notée ici $p$ plutôt que $x$.

Quand à l'abscisse de l'asymptote verticale, elle vaut $-f$ : si l'objet se déplace de $-\infty$ vers le foyer $F$, alors $p'$ tend vers $+\infty$ : l'image s'éloigne indéfiniment vers la droite. Lorsque l'objet est placé en $F$, peut-on encore parler de son image ? On pourrait dire qu'elle se trouve à l'infini, à l'extrême droite de la lentille.

Mais immédiatement, $p$ devenant supérieur à $-f$, l'image réapparaît... à l'extrême gauche de la lentille puisque $p'$ est alors « proche de $-\infty$ ».

**Conclusion :**
Nous pouvons tout aussi bien dire qu'un objet situé en $F$ n'a pas d'image, ou que celle-ci est située à l'infini. Mais dans ce cas, nous ne pouvons préciser s'il s'agit de $+\infty$ ou $-\infty$.

Du point de vue de la lentille, tout se passe comme si sur une droite, il n'y avait qu'un seul point à l'infini !

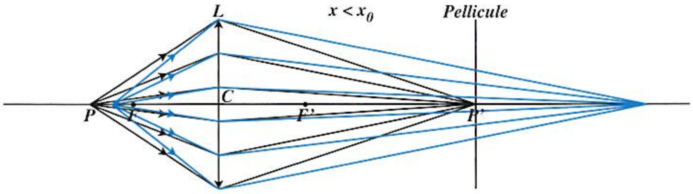
*Revenons à la photographie.*

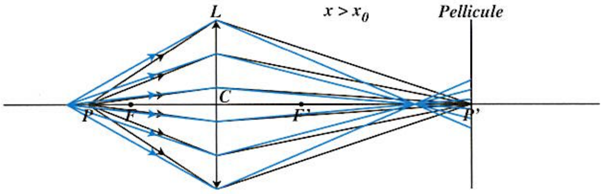
Nous venons de voir comment régler l'appareil photo : si l'objet à photographier est à la distance $x$ de l'appareil, il convient de s'arranger pour que la distance $x'$ du plan de la pellicule à l'objectif soit donnée par la formule $\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$ (voir la remarque ci-contre).

**Remarque** : Dans la formule des lentilles, $p$ n'est pas la distance de l'objet à la lentille, mais l'abscisse de l'objet. Dans le cas d'un appareil photo, cette abscisse est négative. À partir d'ici, nous raisonnons en termes de distance. La *distance* de l'objet à l'objectif de l'appareil photo sera notée $x$, celle de son image à cet objectif sera $x'$. On a donc $x = -p$ et $x' = p'$. La formule des lentilles devient alors $\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$.

Supposons donc que l'appareil est réglé sur la distance $x_0$. Un point situé à cette distance de l'appareil apparaît comme un point sur la pellicule. Notons que, quel que soit l'emplacement du point sur l'axe de l'objectif, l'ensemble des rayons lumineux qui frappent la pellicule sont ceux qui passent à travers l'ouverture (circulaire) du diaphragme. Ils constituent donc un cône.

Considérons ensuite un point situé à une distance $x$, différente de $x_0$. Son image n'est pas sur la pellicule. Cependant les rayons lumineux issus du point viennent frapper celle-ci. Le point apparaîtra donc comme une tache circulaire : la section du cône de rayons lumineux par le plan de la pellicule.




Ce n'est pas grave si la tache est très petite : l'œil ne verra pas la différence. Le diamètre maximum que peut avoir une tache circulaire pour être perçue comme un point dépend de beaucoup de paramètres (notamment de l'agrandissement à l'impression). Une valeur raisonnable pour les photos au format 24 mm × 36 mm est 0,01 mm.

Nous noterons $\delta_0$ le diamètre maximum acceptable pour l'image d'un point. Examinons la question suivante :

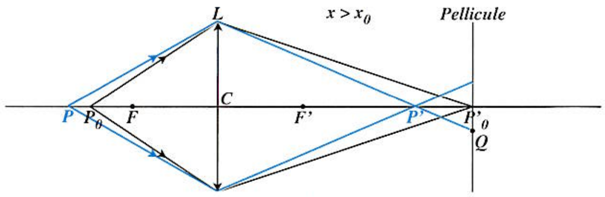
*Quelles sont les valeurs de $x_0$ telles que tous les points situés à une distance $x$ de l'objectif supérieure à $x_0$ aient une image nette, c'est-à-dire de diamètre inférieur à $\delta_0$ ?*

Lorsque l'appareil est réglé sur une de ces distances $x_0$, on pourra affirmer que la *profondeur de champ* va jusqu'à l'infini.

La *profondeur de champ* correspondant à la distance $x_0$ est l'intervalle $[x_1, x_2]$ des valeurs de $x$ pour lesquelles la tache circulaire est perçue comme un point. Il est indiqué par la double échelle d'indices de diaphragme située de part et d'autre de ♦.

Calculons le diamètre de l'image d'un point situé à une distance $x > x_0$ de l'objectif. D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{|LC|}{|QP_0'|} = \frac{|CP'|}{|P_0'P'|}$$




Or $|LC|$ est le rayon du diaphragme : $\frac{d}{2}$. Si nous notons $\delta$ le diamètre de la tache image du point $P$, $|QP_0'|$ vaut $\frac{\delta}{2}$. De plus $|CP'| = x'$ et $|P'P_0'| = x_0' - x'$ La formule ci-dessus devient $\frac{d}{\delta} = \frac{x'}{x'-x_0'}$

On obtient ainsi $\delta$ en fonction de $x'$ :

$$\delta = g(x') = \frac{d(x_0' - x')}{x'}$$

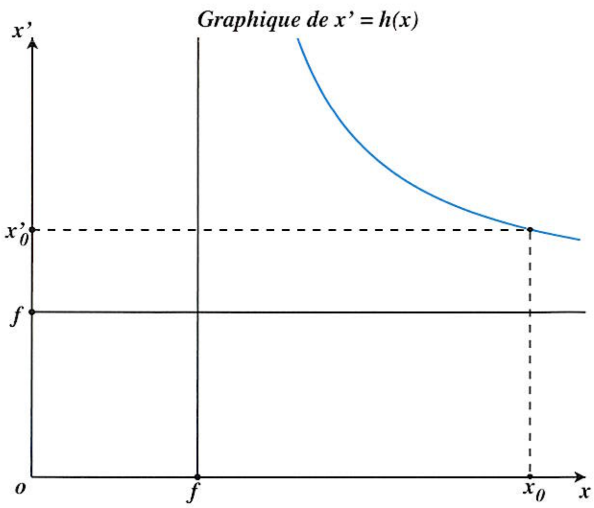
Par ailleurs, puisque $\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$, nous connaissons $x'$ en fonction de $x$ :

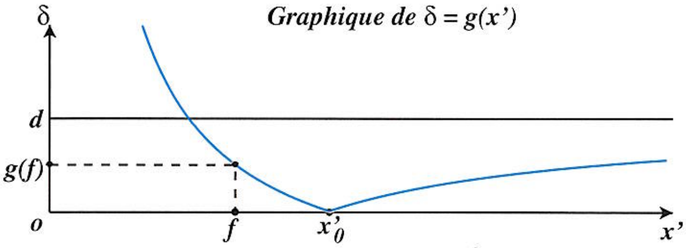
$$x' = h(x) = \frac{fx}{x-f}$$

Ci-dessous, nous aurons aussi besoin de la valeur de $\delta$ pour $x < x_0$. Un calcul analogue au calcul ci-contre montre que dans ce cas $\delta = \frac{d(x'-x_0')}{x'}$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\delta = g(x') = \frac{d \cdot |x' - x_0'|}{x'}$$

Le graphique de droite montre que pour $x \geqslant x_0$, on a $f < x' \leqslant x_0'$. Pour que l'image de tous les points avec $x > x_0$ soit nette, il suffit donc que la fonction $g$ soit inférieure à $\delta_0$ sur tout l'intervalle $[f, x_0']$. Cette fonction étant décroissante sur cet intervalle, la condition se ramène à $g(f) \leqslant \delta_0$.




Or $g(f) = \frac{d(x_0'-f)}{f}$ et $x_0' = \dfrac{fx_0}{x_0 - f}$. Un petit calcul ramène alors la condition $g(f) \leqslant \delta_0$ à

$$\boxed{x_0 \geqslant \frac{d+\delta_0}{\delta_0} \cdot f}$$

Dernière question : *Quelle est la profondeur de champ si nous réglons la distance sur* $\infty$ *?*
Cela revient à faire tendre $x_0$ vers l'infini. Dans ce cas, $x_0'$ tend vers $f$ et, puisqu'on a cette fois $x < x_0$, le diamètre $\delta$ de l'image du point situé à distance $x$ de l'objectif peut être assimilé à $\frac{d(x'-f)}{x'}$. Vous vérifierez sans peine que cette expression vaut $\frac{f}{x}$, de sorte que la condition $\delta \leqslant \delta_0$ devient

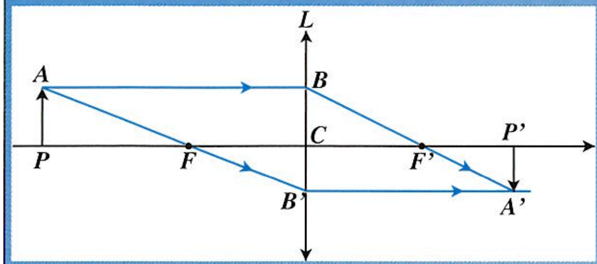
$$\boxed{x \geqslant \frac{df}{\delta_0}}$$

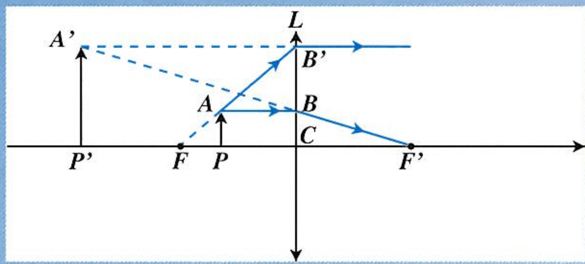
Cette formule s'écrit généralement sous la forme $\frac{f^2}{n\delta_0}$ où $n$ est l'indice de diaphragme.

*Exemple* : Considérons un objectif de distance focale de 50 mm, un indice de diaphragme de 8 et prenons $\frac{1}{100}$ mm comme valeur de $\delta_0$. Le diamètre du diaphragme vaut alors $d = \frac{50}{8}$ mm. La différence entre les résultats fournis par les deux formules encadrées vaut exactement la distance focale $f$. D'après la deuxième formule, si on règle la distance sur $\infty$, l'image est nette à partir de $\frac{f^2}{n\delta_0} = \frac{2500}{8 \times 0{,}01}$ mm $= 31{,}25$ m. En utilisant la première formule, on trouve 31,3m.
Pour cet objectif, cette ouverture de diaphragme, et cette valeur de $\delta_0$, nous pouvons dire que *l'infini commence à 31,25 m* !

L'auteur remercie vivement C. Villers et P. Tilleuil dont les suggestions ont permis d'améliorer sensiblement le présent texte.

**La formule fondamentale des lentilles minces**




Dans le premier cas de figure, on a

$$p < -f < 0 < f < p'$$

D'où, $|PF| = -f - p$, $|FC| = f$, $|CF'| = f$ et $|F'P'| = p' - f$.

Dans le deuxième cas de figure, on a

$$p' < -f < p < 0 < f$$

D'où $|PF| = p + f$, $FC| = f$, $|CF'| = f$ et $|F'P'| = f - p'$.

Remplaçons $|PF|$, $|FC|$, $|CF'|$ et $|F'P'|$ par leurs valeurs dans la formule $\frac{|PF|}{|FC|} = \frac{|CF'|}{|F'P'|}$ :

$$\begin{aligned} \frac{-f-p}{f} &= \frac{f}{p'-f} \\ f^2 &= (p'-f)(-f-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p+f}{f} &= \frac{f}{f-p'} \\ f^2 &= (f-p')(f+p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p' &= f + \frac{f^2}{-f-p} \\ p' &= \frac{-fp}{-f-p} \\ \frac{1}{p'} &= \frac{f+p}{fp} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

## John Wallis (1616–1703)

*Wallis est souvent considéré comme le plus important parmi les mathématiciens anglais, prédécesseurs de Newton. À l'école, il étudie le latin, le grec et l'hébreu, mais pas les mathématiques. En 1631 il apprend les règles de l'arithmétique et, dès lors, il se passionne pour cette science. En 1632, il entre au collège à Cambridge où il étudie l'éthique, la métaphysique, la géographie, l'astronomie, la médecine et l'anatomie ! En 1640, il est ordonné chapelain. Lors de la guerre civile entre les Royalistes et les Parlementaires, Wallis s'exerce à la cryptographie. Quoique Parlementaire, il se prononce contre l'exécution du roi Charles I. Le roi Charles II le confirme dans son emploi et le nomme Royal Chaplain.*

*En 1647, la lecture du Clavis Mathematicae de Oughtred convainc Wallis de se vouer aux mathématiques. Il étudie Kepler, Cavalieri, Roberval, Torricelli, et Descartes et prolonge leurs travaux. Dans l'Arithmetica infinitorum (1656), il développe le traitement analytique de la géométrie dans le style de Descartes. C'est lui qui utilise pour la première fois le symbole $\infty$. Grâce à Wallis, puis à Newton, l'Angleterre allait jouer un rôle majeur en recherche mathématique, jusqu'au moment où Leibniz, les Bernoullis et Euler ramenèrent le foyer sur le continent.*

S. Trompler

*Math-Jeunes n° 109S, 24–26, 2004*

# Les points à l'infini

**Simone Trompler**

En grammaire les règles comportent très souvent des exceptions (les pluriels en x, l'accord des participes passés, les verbes irréguliers, etc).
Les mathématiciens n'apprécient pas les exceptions. Il leur déplaît de devoir dire que « deux droites distinctes d'un plan se coupent en un point *excepté* si elles sont parallèles ». Ils préfèrent dire que « deux droites distinctes d'un plan se coupent en un point ». Ce point peut être à distance finie (droites sécantes) ou à l'infini (droites parallèles).

Comme notre vue de rails, ou d'arbres le long d'une route nous donne l'impression qu'ils se rejoignent très loin, cette idée ne devrait pas nous choquer.

Cependant, il y a un problème : si nous nous retournons, nous les voyons se rejoindre de l'autre côté. Y aurait-il deux points à l'infini sur ces droites parallèles ? Cela ne nous arrangerait pas du tout ; remplacer une exception par une autre n'était pas notre but ! Nous dirons donc qu'il s'agit du même point, et nous pouvons même invoquer des arguments physiques à l'appui de cette idée (voir l'article *À quelle distance est* $\infty$ *?* dans ce numéro).

Mais le mathématicien a-t-il *le droit* de décréter qu'une droite a un point à l'infini ? Pouvez-vous imaginer qu'un physicien affirme qu'un pot de fleurs lâché au premier étage se dirige vers le deuxième ? S'il bâtissait une mécanique sur ce genre de propositions, il décrirait une science « fausse ». Il n'est pas « vrai » qu'un objet qui tombe s'éloigne du centre de la Terre.

## Est-il « vrai » qu'une droite a un point à l'infini ?

Cette question ne se pose pas. La géométrie n'est ni vraie ni fausse : elle est cohérente, sans contradiction avec les postulats(axiomes) posés au départ et avec les théorèmes qui en ont découlé. Bien sûr, ces postulats ont d'abord été choisis dans l'Antiquité, en accord avec l'expérience de tous les jours et le bon sens. Ils ont été réexaminés et complétés à la fin du dix-neuvième siècle. Mais nous verrons dans un prochain numéro qu'on peut en choisir d'autres et qu'on obtient alors des géométries différentes, parfois choquantes pour notre esprit, mais tout aussi valables, à condition de ne contenir aucune contradiction.

Nous pouvons donc accepter que chaque droite a un point à l'infini et un seul.

## Quelle ligne ces points constituent-ils dans le plan ?

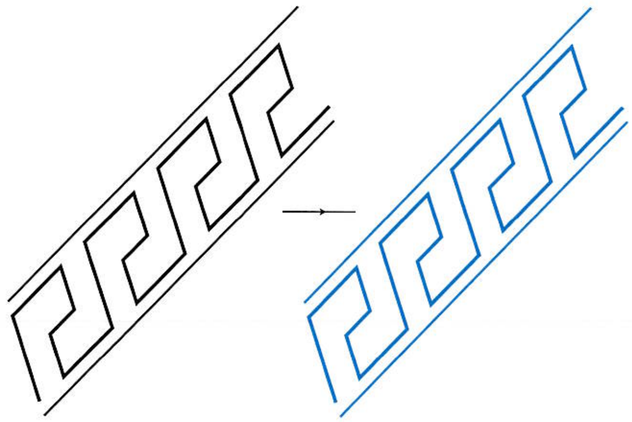
Passons à trois dimensions : « deux plans distincts se coupent suivant une droite, excepté s'ils sont parallèles ». Supprimons cette exception et nous trouvons que « deux plans se coupent suivant une droite ». S'ils sont parallèles, cette droite est à l'infini. Chaque plan a, dès lors, une droite à l'infini et la ligne des points à l'infini d'un plan est une droite.

Jouons un peu avec ces nouveaux points.

## Que leur arrive-t-il lorsque le plan subit une transformation ?

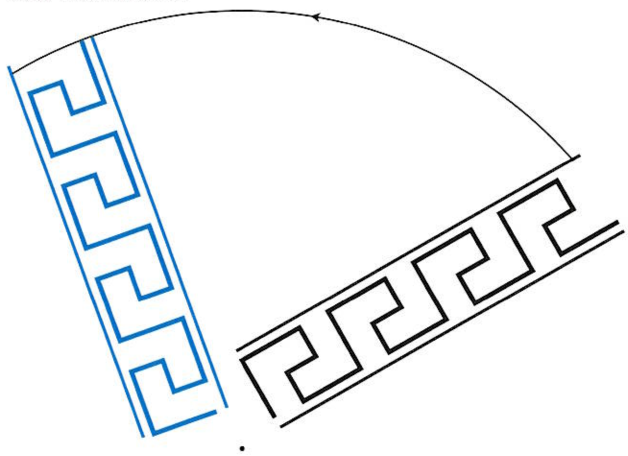
Passons en revue les transformations que nous connaissons :

- Les translations



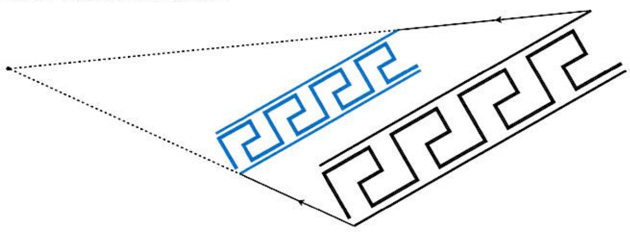
Nous voyons et savons que l'image de droites parallèles est formée de droites parallèles. L'image du point à l'infini est un point à l'infini. Mieux encore : puisque les images des droites leur sont parallèles, il s'agit du même point à l'infini.

- Les rotations



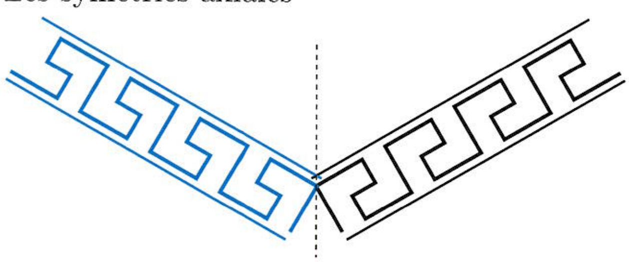
Les images de droites parallèles sont parallèles, mais dans une direction différente, sauf si l'angle de la rotation est de 0° ou 180°. Dans le cas général, l'image du point à l'infini est un point à l'infini, mais un autre.

- Les homothéties



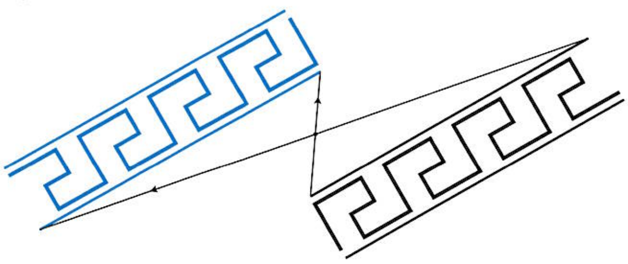
Mêmes conclusions que pour les translations.

- Les symétries axiales



Mêmes conclusions que pour les rotations

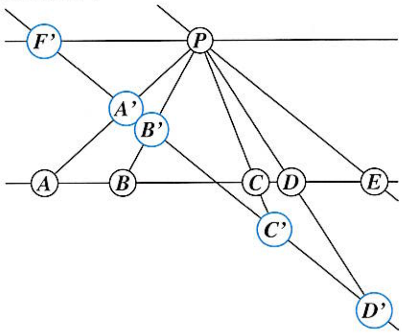
- Symétries centrales



Mêmes conclusions que pour les translations.

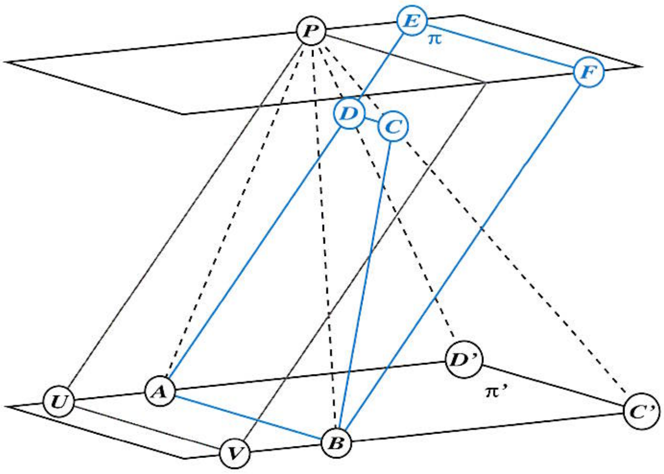
On dit que les points à l'infini sont invariants pour les translations, les homothéties et les symétries centrales. La droite de l'infini est invariante aussi.
Les points à l'infini ne sont pas invariants pour les rotations et les symétries axiales (sauf les cas particuliers mentionnés), mais comme ils restent à l'infini, la droite de l'infini est globalement invariante
Les transformations qui appliquent toute droite sur une droite et laissent la droite de l'infini invariante (notamment toutes celles qui précèdent ) sont dites *transformations affines*.
Est-il possible d'envoyer un point à l'infini à distance finie et inversement ?

Envisageons la projection centrale d'une droite $d$ sur une droite $d'$ à partir d'un point $P$. Les points $A$, $B$, $C$, $D$ de $d$ ont pour image $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Pour le point $E$, tel que le segment $PE$ est parallèle à $d'$, la rencontre ne se fera qu'à l'infini. L'image du point $P$, à distance finie, est à l'infini. D'autre part, le point à l'infini $F$ de $d$, a comme image $F'$, à distance finie.




On peut, de même, projeter un plan $\pi$ sur un autre, $\pi'$, à partir d'un point $P$ et transformer ainsi sa droite de l'infini en une droite $UV$ à distance finie pendant que l'image d'une de ses droites à distance finie, $EF$, part à l'infini.

Nous voyons ainsi que la différence entre les points à l'infini et les points « ordinaires » peut être effacée par certaines manipulations et que le mathématicien travaille sans trop de difficultés, dans le plan et dans l'espace, avec ces nouveaux points.




## Richard Dedekind (1831–1916)

*Mathématicien allemand. Il entre à l'université de Göttingen à 17 ans. Il y suit principalement des cours de mathématique et de physique. A partir de 1850, il suit les enseignements de Gauss dont il sera le dernier élève. En 1854, il devient professeur à l'université et donne des cours de probabilité et de géométrie, tout en suivant lui-même des leçons de mathématiques plus avancées. A partir de 1858, il enseigne au Polytechnikum de Zürich.*
*En cherchant comment enseigner le calcul différentiel et intégral, il s'interroge sur la définition des nombres irrationnels et introduit l'idée de coupure. En 1874, Dedekind rencontre Cantor et discute avec lui de la théorie des ensembles. Il a eu une influence particulièrement importante sur les mathématiciens de son époque grâce à son habileté à formuler ses idées et à la clarté de ses exposés.*

S. Trompler

# Jeux

Yolande Noël-Roch

## 1. Avec les chiffres de 1 à 9.

1.1 **Le cent millième,** (*Championnat de France des Jeux mathématiques et logiques 1987.*)

On dresse la liste des nombres qui s'écrivent avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun pris une seule fois. On classe ces nombres par ordre croissant.

- Combien de nombres obtient-on ?
- Quel est le 100 000$^{e}$ nombre de la liste ?

1.2 **A propos de carrés parfaits.**

- Quel est le carré de 111 111 111 ?
- Le nombre 98 765 432 123 456 789 est-il un carré parfait ?

1.3. **Des multiples de 11.**

En utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun pris une seule fois, écrire

- le plus grand multiple de 11 possible,
- le plus petit multiple de 11 possible.

## 2. Des produits à décrypter.

Chacun des symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représente un entier compris entre 1 et 10. À droite et sous la grille sont indiqués les produits par ligne et par colonne. Retrouve la valeur de chacun des symboles.

Grille facile

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♥ | ♠ | ♣ | ♣ | ♦ | 800 |
| ♣ | ♣ | ♣ | ♠ | ♠ | 8000 |
| ♥ | ♦ | ♠ | ♥ | ♠ | 256 |
| ♦ | ♥ | ♣ | ♦ | ♠ | 640 |
| ♣ | ♠ | ♣ | ♠ | ♠ | 12800 |
| 100 | 1280 | 5000 | 1280 | 16384 | |

Grille difficile

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♥ | ♥ | ♠ | ♠ | ♦ | 256 |
| ♣ | ♦ | ♥ | ♣ | ♥ | 144 |
| ♣ | ♣ | ♦ | ♠ | ♦ | 4608 |
| ♦ | ♠ | ♣ | ♦ | ♠ | 6144 |
| ♦ | ♦ | ♦ | ♥ | ♣ | 384 |
| 576 | 768 | 768 | 1536 | 768 | |

# 3. Vitesse de croissance

La série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

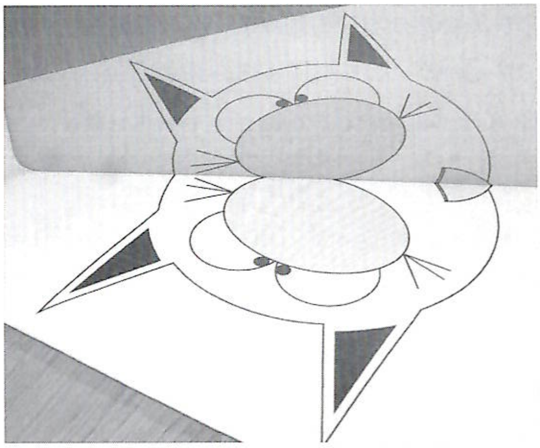
est signalée comme étant divergente dans l'article « Des écritures sans fin » : les valeurs des sommes $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ deviennent aussi grandes que l'on veut.

Une très brève ébauche de démonstration y est donnée en marge de la page 15. Cette ébauche peut vous aider à trouver une valeur de $n$ pour laquelle

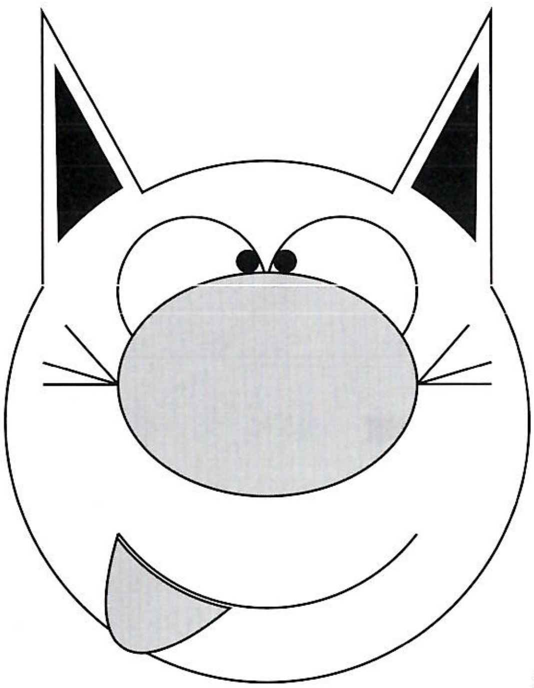
a) $s_n > 3{,}5$ b) $s_n > 4$ c) $s_n > 10$

Si un ordinateur exécute une opération en 1 microseconde, combien de temps mettra-t-il pour additionner suffisamment de termes de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$ pour que le résultat soit supérieur à 100 ?

# 4. Des symétries « miroir »

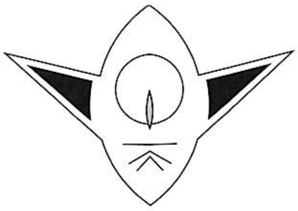


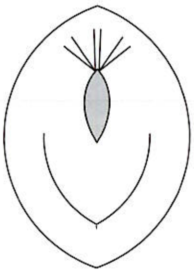
Placez le miroir inséré dans ce numéro de *Math-Jeunes* sur la figure ci-dessous de manière à créer les figures de la page suivante.
*Attention : conservez précieusement le miroir, nous le réutiliserons dans le prochain numéro de Math-Jeunes !*

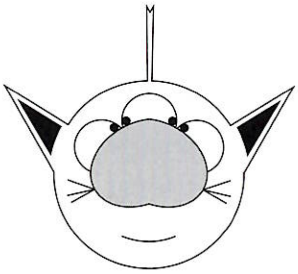


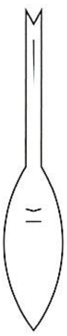
D'après Ph. Geluck

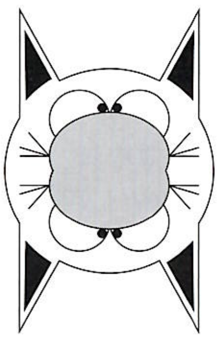
*Solutions des jeux, page 3 de couverture.*

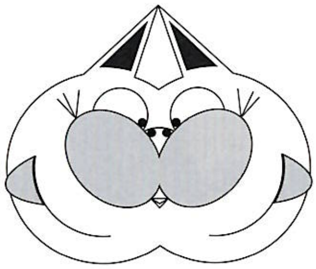

1.

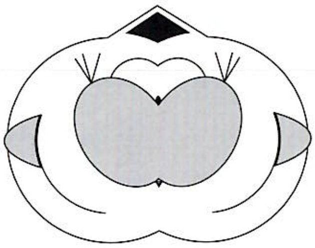

2.

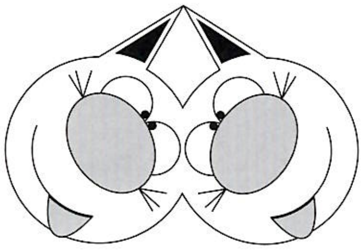

3.

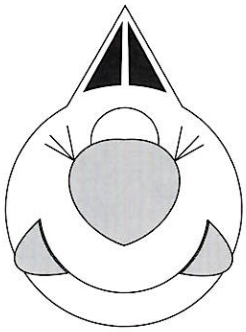

4.

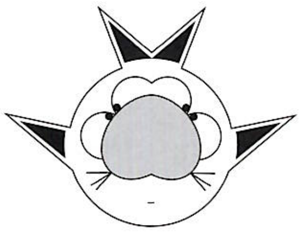

5.

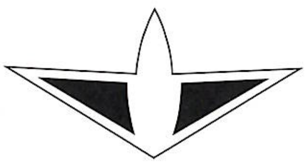

6.


7.

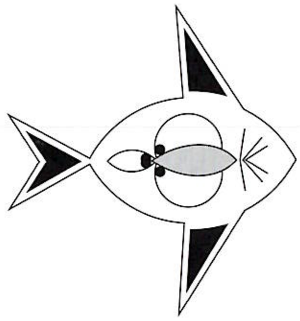

8.

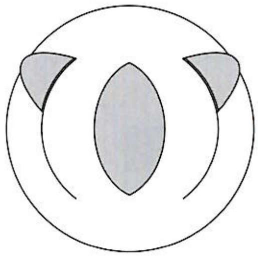

9.

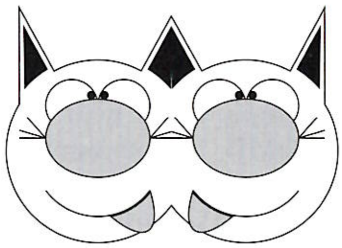

10.

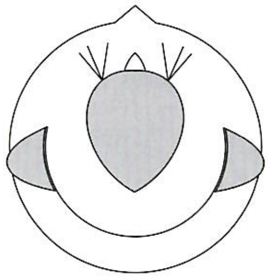

11.

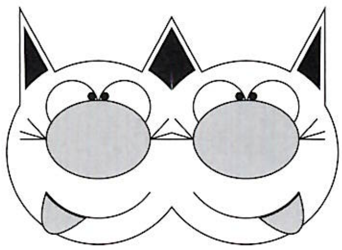

12.


13.


14.


15.


16.


17.

À chacun de ces dessins, on peut en associer un autre (éventuellement dessiné à une autre échelle et orienté autrement) qui lui est en quelque sorte complémentaire : il s'obtient en plaçant le miroir au même emplacement sur l'image de la page 28, mais en inversant les deux faces du miroir. Pouvez-vous reconstituer les associations ? (Les dessins 15 et 17 ont le même complémentaire.)

# Olympiades

Claudine Festraets

## Participer à l'Olympiade !

Cette année scolaire aura lieu la trentième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). En voici le calendrier : éliminatoire, le 19 janvier 2005 ; demi-finale, le 2 mars 2005 ; finale, le 20 avril 2005 ; proclamation, le 14 mai 2005.

## Se préparer !

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras ci-dessous quelques exercices posés dans le passé. Les solutions se trouvent à la page 15. Ne les regarde pas tout de suite. Pour peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB, ils contiennent toutes les questions posées de 1994 à 2002, demande à ton professeur comment on peut se les procurer.

## S'exercer !

**1. Valeur d'une fonction** (demi-finale – 1991)

Si $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $f\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) =$

(A) $\sin^2 x$ (B) $\cos^2 x$ (C) $\operatorname{tg}^2 x$ (D) $\operatorname{cotg}^2 x$ (E) $\frac{1}{\sin^2 x}$

**2. Simplifions !** (demi-finale – 1993)

$$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} =$$

(A) $\sqrt{2}$ (B) 16 (C) 32 (D) $12^{\frac{2}{3}}$ (E) 512, 5

**3. Nombre naturel** (éliminatoire – 1993)

Quel est le plus petit nombre naturel qui soit non nul, multiple de 90 et cube parfait ?

(A) 90 (B) 125 (C) 300 (D) 27 000 (E) 243 000

**4. Divisibilité** (éliminatoire – 1991)
La différence des carrés de deux entiers impairs

(A) peut être impaire
(B) est toujours divisible par 2 mais pas toujours par 4
(C) est toujours divisible par 4 mais pas toujours par 8
(D) est toujours divisible par 8 mais pas toujours par 16
(E) est toujours divisible par 16

**5. Reste d'une division** (éliminatoire – 1988)
Le reste de la division de $3^{1988} + 6$ par 11 est

(A) 0 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 10

**6. Des sommes** (demi-finale – 1990)
Quatre nombres entiers, additionnés trois à trois, donnent 180,197, 208 et 222. Quel est le plus grand des quatre ?

(A) 77 (B) 83 (C) 89 (D) 95
(E) sa valeur n'est pas déterminée par les données

**7. Suite d'entiers** (demi-finale – 1992)
La suite croissante d'entiers positifs $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... satisfait $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Si $a_7 = 120$, alors $a_8$ est

(A) 128 (B) 168 (C) 193 (D) 194 (E) 210

**8. Polygone** (éliminatoire – 1989)
Dans un plan, un certain polygone convexe possède $n$ côtés et $2n$ diagonales (joignant deux sommets non consécutifs). Que vaut $n$ ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 14

**9. Aire du triangle** (demi-finale – 1989)
Un triangle est inscrit dans un cercle. Les sommets du triangle divisent le cercle en trois arcs de longueurs 3, 4 et 5. Quelle est l'aire du triangle ?

(A) 6 (B) $\frac{18}{\pi^2}$ (C) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$ (D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$
(E) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$

**10. Cordes d'un cercle** (demi-finale – 1991) Le point $p$ se trouve à la distance 9 du centre d'un cercle de rayon 15. Combien de cordes de ce cercle contiennent $p$ et ont aussi une longueur entière ?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 29

# Rallye problèmes

Nicole Miewis

Les 2 vainqueurs ex-aequo du rallye problèmes de Math-jeunes senior 2003-2004 sont Françoise Bemelmans, en 5e au Collège St-Louis de Liège et Thierry Caebergs, en 6e à l'Athénée Royal de Thuin. Leurs prix leurs ont été remis lors de la cérémonie de proclamation des *Olympiades Mathématiques Belges* à Namur. Toutes nos félicitations à ces amateurs de problèmes.

Le rallye problèmes 2004–2005 comportera deux étapes publiées dans les numéros 109 et 110 de cette revue. À chaque étape, cinq problèmes seront proposés à votre sagacité : à vous de trouver le bon raisonnement et d'avoir l'esprit logique. Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas ; il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Par contre vous pouvez nous envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu qu'une partie du problème et estimez que la suite est trop difficile pour vous ou si vous aboutissez à des équations dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Certains problèmes rapporteront plus de points que d'autres car ils demandent un raisonnement un peu plus long. Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tout un problème, ni tous les problèmes, pour être primé. L'essentiel est de participer : plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances de gagner un prix.

Vos solutions à ces cinq premiers problèmes doivent être envoyées à N. Miéwis, avenue de Péville, 150, 4030 Grivegnée, muni de la mention « Concours Rallye Math-Jeunes Senior » pour le 15 décembre 2004. Les meilleures seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

## 1. Le courrier urgent

(3 points)

L'avion étant arrivé en avance sur l'horaire prévu, on confia le courrier urgent à un cycliste, pour qu'il le portât à la poste centrale sans attendre le motard qui devait venir spécialement le chercher.

Le cycliste roulait depuis une demi-heure, lorsqu'il rencontra le motard ; celui-ci prit le courrier et, faisant demi-tour, arriva à la poste centrale 20 minutes plus tôt que prévu.

Avec combien de minutes d'avance l'avion s'est-il posé ?

## 2. L'alphabet secret

(3 points)

On numérote de 0 à 25 les lettres de l'alphabet dans l'ordre habituel. Pour coder un mot, on remplace chacune de ses lettres, numérotée $x$ par la lettre obtenue de la façon suivante :

1. on multiplie $x$ par 29 ;
2. on soustrait du résultat obtenu un multiple de 26 permettant d'obtenir un nombre $y$ compris entre 0 et 25 ;
3. on code par la lettre de numéro $y$.

Décoder le message
MCQTM ZMCFM YGY MF CM ZMTQCM

## 3. Les soucis du fourreur

(5 points)
On apporta un jour à un fourreur un manteau d'astrakan qui avait été brûlé sur une petite surface triangulaire. Prenant une pièce de fourrure de même couleur et de même qualité, il y découpa un morceau triangulaire égal à la surface endommagée, mais, dans sa hâte, il commit une erreur regrettable :

*Le morceau découpé ne coïncidait avec le trou qu'à l'envers.*

Que faire ? Ce serait dommage de laisser perdre un précieux morceau de fourrure. N'y avait-il pas moyen de le *retourner à l'endroit tout en conservant la forme triangulaire désirée* ?

Notre fourreur se rendit bien vite compte qu'il suffisait de *découper le triangle en plusieurs parties susceptibles d'être retournées sans se trouver déplacées pour autant.*

Comment procéda-t-il pour réparer son erreur ?

## 4. Les quatre points

(10 points)
Considérons toutes les configurations de quatre points distincts $A$, $B$, $C$, $D$ du plan dont les *distances mutuelles* $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$ et $|CD|$ *ne prennent que deux valeurs exactement*, notées $a$ et $b$.

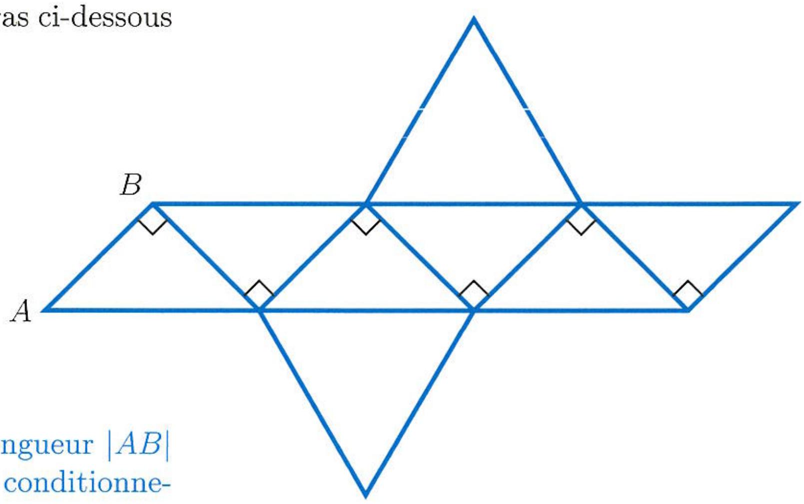
Lorsque l'une des distances vaut $a$ et que les cinq autres valent $b$, la configuration sera (1,5).

À l'ordre des points près, dessiner au moins une des configuration(s) (1,5), (2,4) et (3,3).

## 5. Le berlingot

(10 points)

Pour lancer sa nouvelle marque de jus d'orange, un fabricant souhaite utiliser une nouvelle forme d'emballage dont tu trouveras ci-dessous un patron.




Quelle doit être au mm près la longueur $|AB|$ pour que le volume de ce nouveau conditionnement soit d'un demi-litre ?

# Solutions des jeux

## 1. Avec les chiffres de 1 à 9

### 1.1 Le cent millième.

La liste comprend 362 880 nombres et 358 926 471 occupe la 100 000e place.

### 1.2 Des carrés parfaits.

$111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$

Le nombre 98 765 432 123 456 789 n'est pas un carré parfait car

$$314\,269\,680^2 < 98\,765\,432\,123\,456\,789 < 314\,269\,681^2$$

### 1.3 Des multiples de 11.

Le plus grand multiple de 11 qui répond aux conditions est 987 652 413 et le plus petit est 314 256 789.

## 2. Des produits à décrypter.

Grille facile

| ♥ | ♦ | ♣ | ♠ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 8 |

Grille difficile

| ♥ | ♦ | ♣ | ♠ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 8 |

## 3. Vitesse de croissance

Généralisons la remarque formulée dans la note en marge de la page 15.

Quel que soit le naturel $n > 1$, la somme $\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$ comprend $2^{n+1} - (2^n + 1) + 1 = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ termes tous au moins égaux à $\frac{1}{2^{n+1}}$. Par conséquent

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Ce résultat permet d'obtenir le tableau suivant :

| Nombre de termes | 1 | 2 | $2+2=2^2$ | $2^2+2^2=2^3$ | $2^3+2^3=2^4$ | $2^5$ | $\cdots$ | $2^n+2^n=2^{n+1}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Somme | $s_1 = 1$ | $s_2 = 1,5$ | $s_4 > 2$ | $s_8 > 2,5$ | $s_{16} > 3$ | $s_{32} > 3,5$ | $\cdots$ | $s_{2^{n+1}} > 1,5 + 0,5n$ | $\cdots$ |

Ainsi, nous dépasserons certainement 10 si nous calculons la somme des $2^{18}$ premiers termes. . .soit une somme de 262 144 termes . . .

Dans le même contexte, la somme des $2^{197}$ premiers termes donnerait une somme supérieure à 100.

Pour additionner un terme $\frac{1}{k}$, l'ordinateur effectue deux opérations (d'abord l'inversion de $k$, puis l'addition elle-même). À raison de 1 microseconde par opération, l'ordinateur additionne donc chaque terme en 2 microsecondes. Tenant compte de ce que $2^{10}$ est proche de $10^3$, le temps nécessaire au calcul est de l'ordre de $10^{60}$ microsecondes, soit $\frac{10^{52}}{36}$ heures, soit $\frac{10^{51}}{31\,536}$ années . . . soit une durée de l'ordre de $3.10^{47}$ années (c'est-à-dire des milliards de . . . de milliards d'années) !

### Commentaire

Les minorations effectuées en groupant les termes de la série par 2, 4, . . .$2^n$ termes sont un peu grossières. L'usage d'un tableur le montre puisque, si nous affichons les sommes successives jusqu'à $s_{1000}$, nous voyons que $s_{11} > 3$, $s_{31} > 4$, $s_{83} > 5$, $s_{227} > 6$, $s_{616} > 7$.

Une approche plus fine est possible à partir d'un résultat que vous n'avez probablement pas encore rencontré.

*Lorsque le naturel $n$ tend vers l'infini, la différence $s_n - \ln n$ tend vers une constante $\gamma \simeq 0{,}577\,215\,664$ appelée « constante d'Euler ».*

Partant de $s_n \simeq \ln n + \gamma$, nous remplaçons la condition $100 < s_n$ par $100 < \ln n + \gamma$ ou encore $100 - \gamma < \ln n$. Il « suffit » donc de calculer la somme jusqu'au premier terme $\frac{1}{k}$ avec $k > e^{100}$. Comme $2 \times e^{100} \mu s \simeq 1{,}7.10^{30}$ années, le temps requis pour effectuer le calcul est encore supérieur à l'âge de l'univers !

## 4. Des symétries « miroir »

Les dessins associés sont : 1 et 6, 2 et 12, 3 et 9, 4 et 15 (ou 17), 5 et 14, 7 et 13, 8 et 11, 10 et 16.

**Math-Jeunes**
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G . NOËL
Rue de la Culée 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée