3e Année - N° 11 Septembre-Octobre 1981

MATH JEUNES

En-tête de Philippe DUCHENE
A.R. Jules DELOT, Ciney

Cher élève ami,

Au seuil de cette nouvelle année scolaire, MATH-JEUNES te présente deux concours.

Si tu es un ancien abonné tu connais le premier : c'est notre rallye-problèmes. Comme l'an dernier tu trouveras dans chaque numéro du journal des énoncés de problèmes marqués d'un astérisque et d'un couple de nombres. Le premier élément du couple indique le nombre maximum de points attribués à ce problème pour un élève du cycle inférieur, le deuxième les points pouvant être obtenus par un élève du cycle supérieur.

Les réponses aux problèmes posés dans les numéros 11 et 12 devront parvenir à la rédaction (M. Jules Miewis) avant le 31 janvier; ceux des numéros 13 et 14 devront être résolus avant le 1 mai . Le numéro 15 contiendra le classement final (par sommation des points récoltés) des meilleurs, et des solutions sélectionnées parmi celles que vous nous aurez fait parvenir.

A côté de ce rallye problème, nous te proposons un autre travail de recherche. Celui-ci concerne surtout les élèves du dernier cycle secondaire mais tout le monde peut concourir. Nous attendons tant des envois individuels que des participations de groupes.

Dans de nombreux domaines de la vie courante on est amené à représenter dans un plan des objets de l'espace. Certaines de ces représentations ont pour but de provoquer chez ceux qui les regardent une vision spatiale de l'objet. Nous pensons par exemple à la photographie, à certaines peintures, à des dessins. D'autres sont utilisées pour permettre par des mesures ou par la lecture d'indications de reconstruire l'objet ou de recevoir des indications le concernant. Il en est ainsi pour des plans de bâtiments, des croquis de pièces de machines, des cartes géographiques, de représentations de cristaux, etc...

A la base de chacune de ces représentations se trouvent des transformations géométriques de l'espace.

Tu choisis (seul ou avec un groupe de camarades) une représentation, tu cherches à mettre en évidence les transformations utilisées, tu rédiges un petit article (3 à 4 pages maximum) expliquant ce que tu as trouvé et tu nous l'envoie avant le 1 mai. Les meilleurs articles seront primés et publiés.

Tu peux utiliser toute documentation que tu rencontres mais nous te demanderons de citer tes sources.

Nous te donnerons dans un prochain numéro des indications précises sur le mode de présentation que tu devras adopter.

Il s'agit ici d'un travail de longue haleine que tu pourras largement étaler sur ton année. N'attends pas le dernier mois pour t'y mettre.

Bon travail et surtout ... bon amusement!

LA REDACTION

La géométrie de Platon

Avec SOCRATE et ARISTOTE, PLATON nous a donné les bases de notre philosophie occidentale. Fils d'une famille athénienne aisée, né vers 428 avant Jésus-Christ, il abandonna de légitimes ambitions politiques (*car il n'y a pas de place en politique pour l'homme de conscience !*). Il fonda en 387 l'ACADEMIE où il poursuivit l'étude systématique de la philosophie et la recherche scientifique.

Dans son oeuvre, - abondante et parvenue en entier -, les passages relatifs aux sciences et spécialement aux mathématiques ne manquent pas. L'extrait ci-contre est repris à une oeuvre majeure : la REPUBLIQUE, rédigée au moment de sa maturité (en 375).

Sur le chemin de la SAGESSE (du BIEN , de l'IDEE ETERNELLE),se présentent dans l'ordre d'apprentissage les sciences suivantes : l'ARITHMETIQUE *(que l'on songe à la fascination qu'exerçaient les nombres auprès des Pythagoriciens !)*, la GEOMETRIE *(que l'on se rappelle l'importance de l'arpentage dans la vallée du Nil !)*, la STEREOMETRIE *(l'étude en fut laissée en suspens faute de crédits, mais Euclide en reparlera)*, l'ASTRONOMIE *(que l'on s'interroge sur un monde clos - un monde ouvert)*, l'HARMONIE *(que l'on déplore la négligence dans laquelle la musique est laissée dans nos écoles)*.

L'oeuvre (et notre extrait) apparait sous la forme d'un dialogue entre Platon (P) et ses disciples intimes Adimante et Glaucon (A). On y découvre que la géométrie est un art martial...

On doit à l'un des disciples de Platon, THEETETE,la découverte de l'octaèdre et de l'icosaèdre (l'étoile de M-J 7). Dans une autre oeuvre (le TIMEE), Platon décrira la construction des trois autres solides réguliers : le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre... La géométrie dans l'espace naissait...

P: Et bien, que l'arithmétique soit instituée la première science de notre formation ! Quant à la seconde, qui s'y rattache, examinons de quelle manière elle nous convient ...

A: Laquelle ? Est-ce la géométrie que tu veux dire ?

P: C'est d'elle en effet qu'il s'agit.

A: Dans la mesure où elle tend vers les opérations militaires, il est clair qu'elle nous convient : car, en vue de campements ou d'enlèvements de positions, en vue de resserrements ou de déploiements de troupes, en vue de toutes autres évolutions, soit dans les combats eux-mêmes, soit dans les marches, un chef sera différemment apte selon qu'il est ou n'est pas géomètre.

P: Précisément; en vue de tels exercices une part rudimentaire de géométrie et de calculs sera suffisante. Il faut plutôt considérer si le fond de cette science et ses prolongements extrêmes tendent vers notre objectif, c'est-à-dire faire remarquer plus facilement l'idée du bien.

A: Exactes sont tes paroles.

P: Donc, si la géométrie nous force à contempler l'essence, elle convient, tandis que si elle nous montre ce qui naît (le mortel), elle ne convient pas.

A: Certes.

P: Sur ce point, toutes les personnes quelque peu expertes en géométrie ne nous le contesteront pas : cette science a un objet tout opposé aux affirmations des manipulateurs à son propos.

A: Comment ?

P: Ils en causent d'une manière passablement risible et mécanique. En effet, c'est en praticiens et en vue de la pratique qu'ils expriment de telles paroles, par exemple lorsqu'ils disent carrer (rendre carré), construire telle figure sur une ligne donnée, ajouter et autres redondances, alors que toute cette discipline est exercée en vue de la connaissance.

A: Tout à fait d'accord !

P: Est-ce qu'il ne faut pas encore convenir de ceci ?

A: De quoi ?

P: Qu'on exerce la géométrie pour connaître ce qui toujours est, mais non pas ce qui à un moment quelconque naît et périt.

A: C'est une convention bien établie, car la géométrie est la connaissance de ce qui toujours est.

P: Elle est donc apte à tirer l'âme vers la vérité et à susciter la réflexion philosophique, qui élève vers le haut notre esprit au lieu de l'avoir, comme actuellement, vers le bas.

A: Elle y est particulièrement apte.

P: Nous prescrirons instamment aux citoyens de ta noble cité de ne s'abstenir, en aucune façon, de la géométrie.

Au surplus, elle a des avantages supplémentaires non négligeables.

A: Lesquels ?

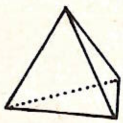
P: Ceux précisément que tu as toi-même mentionnés au sujet de la guerre, sans oublier les avantages qui concernent tous les autres savoirs que la géométrie aide à mieux comprendre. A cet égard, nous savons qu'il y a une différence absolue entre la personne qui a étudié la géométrie et celle qui l'ignore.

A: C'est totalement vrai, par Zeus !

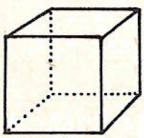
P: En conclusion, voilà la deuxième discipline que nous promulguerons aux jeunes, n'est-ce pas ?

A: Promulguons-la !

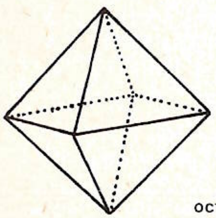
Les polyèdres réguliers de Platon



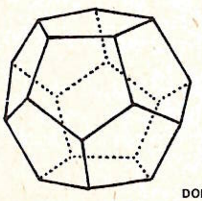
TETRAEDRE



CUBE



OCTAEDRE

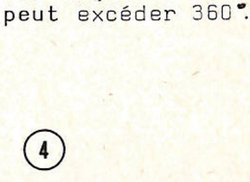


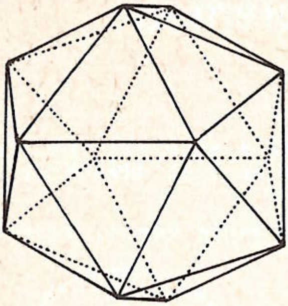
DODECAEDRE

Polyèdre: Solide de R^3 limité par un ensemble fini E de polygones plans, appelés faces, tels que chaque côté d'un polygone quelconque de E soit commun avec un côté d'un autre polygone de E. Les sommets et les arêtes de ces polygones sont les sommets et les arêtes du polyèdre.

Régulier: Un polyèdre est régulier si ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si ses angles polyèdres sont égaux.

Angle polyèdre: Angle solide de sommet O dont une section plane est un polygone A,B, C,... . Les angles plans AOB,... sont les angles de l'angle polyèdre. La somme des angles d'un angle polyèdre ne peut excéder 360°.





ICOSAEDRE

5: Pourquoi y-a-t'il 5 polyèdres réguliers ?

Supposons que l'on veuille former un polyèdre régulier avec des triangles équilatéraux : l'angle d'un triangle équilatéral vaut 60°. Trois angles sont nécessaires pour créer l'angle polyèdre. Il est possible d'en prendre 3,4 ou 5 mais pas plus. Ainsi existent le tétraèdre (3 triangles par angle polyèdre), l'octaèdre (4 triangles par angle polyèdre) et l'icosaèdre (5 triangles par angle polyèdre).

Formons à présent nos polyèdres avec des carrés : angle 90° : 3 faces de 90° pour un angle polyèdre est la seule possibilité. Le cube existe (3 carrés par angle polyèdre).

Le polygone suivant est le pentagone dont l'angle vaut 108° : 3 angles de 108° forment les faces d'un angle polyèdre et c'est la seule possibilité : voici le dodécaèdre.

Les polygones réguliers convexes à 6 côtés et plus, ont un angle égal ou supérieur à 120° et ne peuvent donc pas être les faces d'un polyèdre régulier. Voilà pourquoi Platon concluait à l'existence de cinq polyèdres réguliers.

Pourtant les définitions données n'excluent pas la possible existence de polyèdres réguliers dont les faces sont des polygones réguliers étoilés. Képler (1571-1630) et Poinsot (1777-1859) devaient trouver et décrire chacun deux autres polyèdres réguliers. Ces découvertes portaient à 9 le nombre des polyèdres réguliers. Pour s'y retrouver, les cinq premiers reçurent le nom de polyèdres réguliers platoniciens et les quatres derniers devinrent les polyèdres de Képler-Poinsot. On peut prouver que toutes les possibilités sont ainsi épuisées, mis à part les solides composés.

Les quatre polyèdres de Képler-Poinsot sont le petit dodécaèdre étoilé, le grand dodécaèdre et le grand dodécaèdre étoilé *(L'étoile de Noël de M-J 7)* tous trois composés de 12 pentacles. Le quatrième est le grand icosaèdre composé de 20 pentacles. Nous vous promettons bientôt un article sur la construction de ces quatre polyèdres ; en attendant vous pouvez déjà construire les cinq polyèdres platoniciens...

Terminons pour cette fois ce sujet en signalant qu'Euler (1707-1783) a montré que le nombre de faces d'un polyèdre platonicien, augmenté du nombre d'angles polyèdres dépassait toujours de deux unités le nombres des arêtes. *(Ce résultat étant d'ailleurs vérifié pour tous les polyèdres convexes).*

Sur une idée et une traduction de
JEAN MASAI.

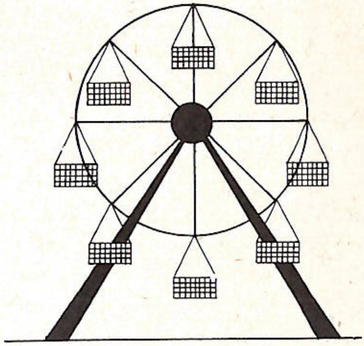
Le coin des problèmes

44 PGCD et PPCM.

Le PGCD de deux nombres naturels a et b est 504. Le PPCM de a et b est 66528. Déterminer a et b et dénombrer toutes les possibilités.

(proposé par Bruno RASE, 1R, Institut du Sacré Coeur, Burnot)

47 La grande roue.

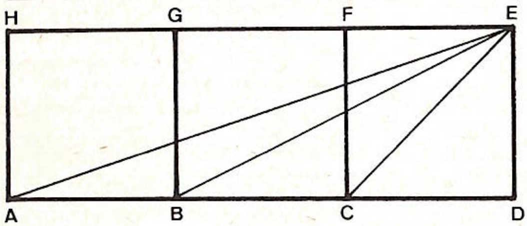


Monsieur Hercule Savinien de Cyrano de Bergerac est assis dans l'une des nacelles de cette grande roue de foire. Il est immobile dans sa nacelle et la roue tourne à vitesse constante. Quelle est la trajectoire décrite par le bout du nez de Cyrano ?

48 Problème médical.

Un médecin reçoit trois malades dont le produit des âges vaut 2450 et la somme, le double de l'âge de l'infirmière. Avec ces données, l'infirmière est incapable de trouver l'âge des malades. Mais il suffit que son patron lui précise être plus âgé que le plus vieux des malades pour qu'elle soit capable de répondre avec certitude. On demande l'âge des trois malades, l'âge du médecin et l'âge de l'infirmière.

50 Trois carrés.* (10,8)



Pouvez-vous démontrer cette relation entre les mesures des angles ?

$$\widehat{ECD} = \widehat{EBD} + \widehat{EAD}$$

51 Les dix chiffres.* (8,2)

Comment peut-on déterminer un nombre entier N, de telle sorte que les dix chiffres de 0 à 9 soient nécessaires une fois et une seule, chacun pour écrire N^3 et N^4 ?

52 L'essuie-glace.

Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur L articulés autour de deux points distants de L. Chacun d'eux couvre ainsi un demi-cercle. Quelle est la surface totale balayée ?

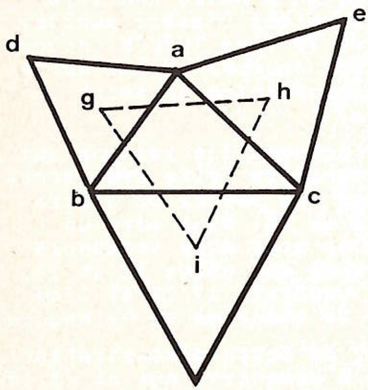
53 Arithmétique espagnole.

```
  C U A T R O
+ C U A T R O
+ C U A T R O
+ C U A T R O
+ C U A T R O
= V E I N T E
```

Comment les dix chiffres sont-ils représentés par les dix lettres pour que cette addition soit exacte ?

54 Le théorème de Napoléon. ✱ (10,10)

Historiquement, le résultat suivant est connu sous le nom de théorème de Napoléon, bien qu'il ne fasse aucun doute que Napoléon n'était pas suffisamment fort en géométrie pour l'avoir découvert et démontré lui-même !



abc est un triangle quelconque, abd, ace et bcf sont des triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle abc. Il faut montrer que les centres g,h et i de ces triangles forment un triangle équilatéral.

55 A la gare. ✱ (8,5)

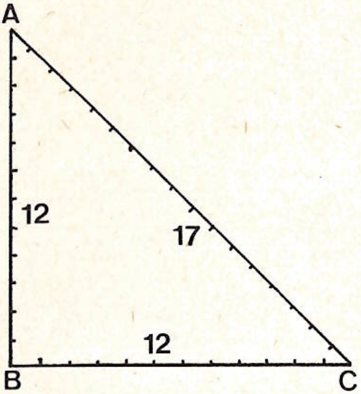
Deux amis décident de se rencontrer, un certain jour, devant la gare. Chacun arrive indépendamment, au hasard, entre 12 et 13 heures, et n'attend pas l'autre plus de quinze minutes. Quelle est la probabilité pour que les deux amis se rencontrent effectivement ?

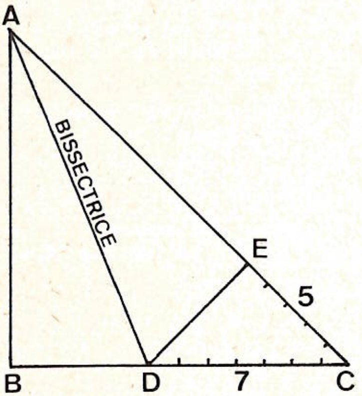
56 Rithmomachie.

→ voir page 14.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

La démonstration la plus courte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que nous ayons vue a été proposée à une classe de jeunes professeurs de Cambridge par John Conway. Il produit un grand triangle rectangle isocèle et en montrant un petit côté et l'hypoténuse successivement, il déclare: 12 et 17. Ensuite, il plie le triangle suivant une des bissectrices d'un angle de 45° et en montrant le petit triangle ainsi formé, il dit de la même manière 5 et 7.





Il dit ensuite "$\sqrt{2}$ est irrationnel"! dépose son modèle et la classe applaudit....

Nous empruntons cette étonnante démonstration à notre confrère Tony Andrews qui l'avait publiée en Juillet 79 dans TRIGON (*School Mathematics Journal of the Mathematical Association of South Australia*).

Voyons à présent les raisons qui font reconnaître cette démonstration comme une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Bien sûr, un triangle ne peut être rectangle isocèle avec des côtés 12 et 17, sinon $\sqrt{2}$ vaudrait 17/12 si l'on en croit le théorème de Pythagore!

L'essence de cette démonstration consiste à démontrer que si $\sqrt{2}$ est égal à 17/12, une construction géométrique simple permet de découvrir une autre valeur de $\sqrt{2}$, à savoir 7/5, et puisque 17/12 n'est certainement pas égal à 7/5 (car sinon 85 = 84 !!!), $\sqrt{2}$ ne peut être égal à aucune de ces fractions, ce qui est une contradiction avec notre hypothèse déclarant que $\sqrt{2}$ vaut 17/12.

Examinons la démonstration géométrique suggérée par les graphiques. Supposons que $\sqrt{2}$ = 17/12, que AD est la bissectrice de l'angle BAC (qui vaut 45°), que AD rencontre BC en D, et construisons la perpendiculaire à AC issue de D, rencontrant AC en E.

Le triangle de sommets ADB est congruent au triangle de sommets ADE (côté AD commun, angles droits B et E, $\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$), aussi AE = 12 et EC = 17 - 12 = 5.

$\widehat{DCE} = 45°$ dans un triangle rectangle, donc DE = 5 et puisque les triangles ADB et ADE sont congruents, BD = 5 et DC = 7.

Ainsi le triangle DEC est rectangle isocèle et $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$.

Les plus futés parmi vous vont m'objecter que l'on a seulement montré ainsi que $\sqrt{2}$ n'est pas égal à 17/12 ! C'est vrai, les nombres 17 et 12 ne furent choisis que pour montrer la forme de la démonstration d'une manière simple et rapide.

Plus généralement , soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers positifs. Nous admettons que le PGCD(p,q) = 1 , ceci nous prouvera que la nouvelle fraction ne sera pas une forme simplifiée de $\frac{p}{q}$. Soit AB = q et AC = p. La construction décrite donne : ED = p - q et DC = 2q - p.

Donc si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $\sqrt{2}$ vaut aussi $\frac{2q - p}{p - q}$

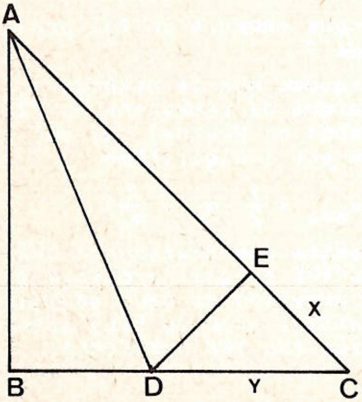
2q - p est entier (puisque p et q le sont) et strictement positif ($2q - p > 0 \leftrightarrow 2q > p \leftrightarrow 2 > \frac{p}{q} = \sqrt{2}$,ce qui est vrai)

p - q est entier (puisque p et q le sont) et strictement positif ($p - q > 0 \leftrightarrow p > q \leftrightarrow \frac{p}{q} > 1$,ce qui est vrai).

$2q - p < p$ ($\leftrightarrow 2q < 2p \leftrightarrow \frac{p}{q} > 1$,ce qui est vrai).

$p - q < q$ ($\leftrightarrow p < 2q \leftrightarrow \frac{p}{q} < 2$,ce qui est vrai).

Ainsi par la méthode de la descente infinie, $\sqrt{2}$ ne peut être égal à une fraction car on peut indéfiniment trouver d'autres fractions constituées de nombres indéfiniment plus petits et pourtant toujours positifs et entiers.



Inversons notre démarche : soient x et y les côtés du petit triangle. Cherchons les côtés du grand !

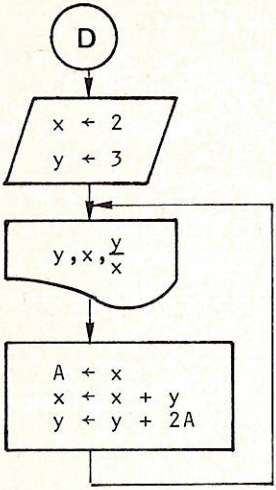
BD = DE = EC = x
BC = BD + DC = x + y
AE = AB = BC = x + y
AC = AE + EC = x + x + y = 2x + y

Ainsi, lorsque $\frac{y}{x}$ est une approximation de $\sqrt{2}$ (côtés du petit triangle) $\frac{2x + y}{x + y}$ sera une meilleure (?) approximation de $\sqrt{2}$ (côtés du grand triangle).

On peut en déduire un algorithme pour rechercher $\sqrt{2}$:

$$x_{n+1} = x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = 2x_n + y_n = x_n + x_{n+1}$$



Voici un programme-type : (HP97).

```
001    *LBLA        21 11
002        2           02
003     ST01        35 01
004        3           03
005     ST02        35 02
006    *LBL1        21 01
007     RCL2        36 02
008     DSP0       -63 00
009     PRTX          -14
010     RCL1        36 01
011     PRTX          -14
012        ÷          -24
013     DSP9       -63 09
014     PRTX          -14
015     RCL2        36 02
016     ST+1     35-55 01
017     LSTX        16-63
018     ST+2     35-55 02
019     ST+2     35-55 02
020     GT01        22 01
```

Et voici les résultats fournis par cette calculatrice :

Etapes	y	x	Approx. de $\sqrt{2}$
1	3	2	1,5
2	7	5	1,4
3	17	12	1,416666667
4	41	29	1,413793103
5	99	70	1,414285714
6	239	169	1,414201183
7	577	408	1,414215686
8	1393	985	1,414213198
9	3363	2378	1,414213625
10	8119	5741	1,414213552
11	19601	13860	1,414213564
12	47321	33461	1,414213562
13	114243	80782	1,414213562

La convergence semble assez rapide. Remarquons que l'on pourrait imaginer un programme calculant un x et un y de 100 chiffres chacun et qui n'effectuerait qu'une seule division en fin de programme.

Qui nous enverra un tel programme ?

Remarquons que la méthode classique de recherche de $\sqrt{2}$ (méthode de Newton) qui est basée sur l'algorithme

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

nécessite une division A CHAQUE ETAPE ce qui complique la programmation si nous voulons travailler avec de très grands nombres (de 100 chiffres).

Soyez « VIEUX JEUX »

Apprenez la RITHMOMACHIE

Il subsiste encore au moins trois manuscrits du XIe s. qui décrivent ce jeu médiéval provenant de Byzance ou d'Alexandrie et qui était basé sur la philosophie des nombres de Pythagore. La toute première mention de ce jeu est de Hermannus Contractus (1013 - 1054).

Les plus éminents intellectuels du Moyen-Age s'adonnaient régulièrement à la rithmomachie et considéraient le jeu comme étant supérieur aux échecs. Il est aujourd'hui complètement oublié et nous le regrettons, car basé sur la théorie des nombres, il mérite un regain d'intérêt .

On jouait au jeu de rithmomachie sur un damier de 8 x 16 carrés et les pièces avaient la forme de ronds, de triangles, de carrés et de pyramides. Il y avait deux camps les blancs et les noirs. Un petit point sous les nombres servait à distinguer le 6 du 9, le 18 du 81, etc.

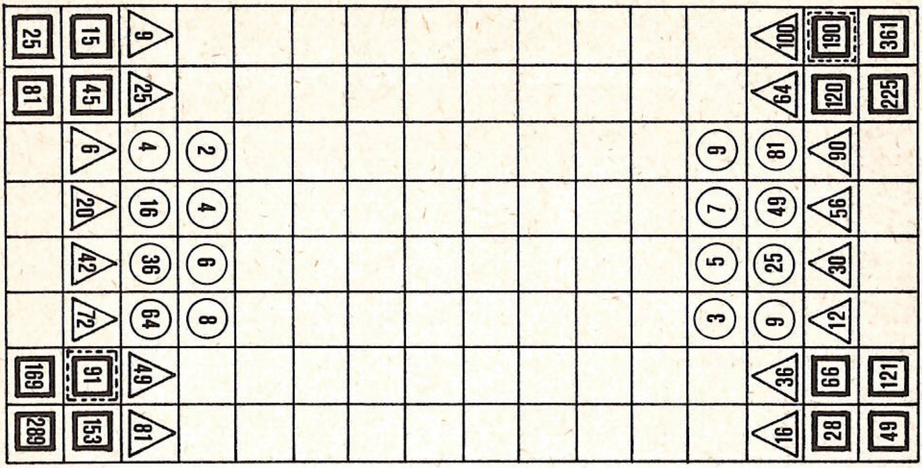
Les pièces étaient rangées sur le damier figuré page suivante ; cette figure est extraite d'un livre datant de 1554. Les joueurs déplaçaient leurs pièces alternativement : un cercle se déplaçait jusqu'à n'importe quelle case adjacente ; un triangle se déplaçait de trois cases dans n'importe quelle direction ; un carré de quatre cases, quelle que soit la direction ; la pyramide se déplaçait comme n'importe quelle partie dont elle est composée, au choix du joueur (choix variable d'un coup à l'autre). Aucune pièce ne pouvait sauter par-dessus une autre et le mouvement en "L" du cavalier aux échecs n'était pas autorisé.

Bien que les pièces soient déposées le long des largeurs du damier, les joueurs se plaçaient de part et d'autre de la longueur. Le but du jeu était de capturer les pièces de l'adversaire afin de former une combinaison particulière décidée d'avance.

METHODE DE CAPTURE :

1. Par ***RENCONTRE*** *:* Si le triangle blanc 25, en avançant de trois cases, peut arriver sur le cercle noir 25, le triangle ne bougera pas mais il prendra le pion de son adversaire.

2. Par ***ASSAUT*** *:* Si une pièce portant un nombre peu élevé, si ce nombre multiplié par le nombre de cases qui la sépare d'une pièce adverse donne le nombre de cette pièce adverse, alors elle peut la prendre. Par exemple, le cercle noir 5 peut prendre le carré blanc 45 si neuf cases alignées les séparent.



Blancs **Noirs**

3. *Par* *EMBUSCADE :* Si deux pièces dont la somme égale le nombre inscrit sur une pièce adverse peuvent se déplacer dans les cases situées de part et d'autre de cette pièce adverse, celle-ci peut être retirée du jeu.

4. *Par* *SIEGE :* Si une pièce est entourée de quatre côtés par des pièces ennemies, elle est prise et retirée du jeu.

Il y a une pyramide dans chaque camp, elles sont construites en empilant les différents types de pièces. La pyramide 91 du camp blanc est formée de deux carrés (36 et 25), de deux triangles (16 et 9) et deux cercles (4 et 1). La pyramide 190 du camp noir est formée des carrés 64 et 49, des triangles 36 et 25 et du cercle 16. Les pyramides étaient rarement capturées, sauf par siège. Elles faisaient donc l'objet d'une attaque spéciale et elles étaient considérées comme menacées lorsqu'un seul de leurs constituants était attaqué par une des quatre méthodes vues ci-dessus. Le rachat était permis : une pièce de même valeur que le constituant menacé était offerte ; si une telle pièce n'était plus disponible, n'importe quelle autre pièce pouvait être offerte, si l'adversaire l'acceptait.

Le but du jeu était de capturer les pièces de l'adversaire afin d'obtenir la victoire, possible de huit manières différentes. Avant d'engager la partie, les joueurs se mettaient d'accord sur le type de victoire qu'ils recherchaient. Cinq victoires étaient plus particulièrement adaptées aux débutants.

1. *De* *corpore* *:* Les joueurs se mettaient d'accord à l'avance sur un nombre-cible, par exemple 20. Dès qu'un joueur parvenait à prendre vingt pièces adverses, il avait gagné.

2. *De* *bonis* *:* Cette victoire dépendait de la valeur des pièces capturées. Supposons que le nombre cible fixé de commun accord soit 160, il suffisait de posséder des pièces adverses pour un total de 160 pour gagner.

3. *De* *lite* *:* Cette victoire dépendait de la valeur des pièces et du nombre de chiffres inscrits dessus. Si 160 était choisi, il y avait comme condition supplémentaire que le nombre de chiffres sur les pièces capturées soit égal à un petit nombre, soit 8 par exemple. Un joueur essayera donc de prendre des pièces comme 56,64,28 et 15, soit 8 chiffres, plutôt que 121,9 et 30 soit 6 chiffres.

4. *De* *honore* *:* Cette victoire dépendait du nombre de pièces et de leur valeur. Soit 160 comme nombre cible, on choisira par exemple 5 comme nombre de pièces ; donc 56,64,28 et 12 ou 121, 9 et 30 n'apportent pas la victoire alors que 64,36,30,25 et 5 oui car les deux conditions sont remplies.

5. *De* *honore liteque* *:* Les joueurs fixent ensemble le nombre-cible (par exemple 160), le nombre de pièces (par exemple 5) et le nombre de chiffres ((soit 9 par exemple). Le joueur noir peut gagner avec 64,36, 42,16 et 2 et le joueur blanc avec 64,36,30,25 et 5.

Les victoires pour joueurs experts résultent de combinaisons des progressions arithmétique , géométrique et harmonique . Dans chacune de ces victoires, les pièces dont une au moins devait appartenir à l'adversaire, étaient alignées dans le camp adverse selon la progression choisie.

6. *Victoria Magna* *:* Il fallait aligner trois pièces selon une des trois progressions. Il y a 41 combinaisons possibles selon la progression arithmétique, 18 selon la géométrique et 17 selon l'harmonique. Les possibilités sont plus grandes pour le camp blanc dans la progression arithmétique et pour le camp noir dans la géométrique. Elles sont égales dans la progression harmonique. Un arrangement possible selon la progression harmonique est 6,8,12.

7. *Victoria Major* *:* Elle consistait en la combinaison de deux des trois progressions : arithmétique et géométrique , géométrique et harmonique ou harmonique et arithmétique. Cette victoire s'obtenait en alignant quatre pièces dans le territoire ennemi,trois d'entre elles devant appartenir à l'une des progressions, trois à l'autre. Par exemple, 2,3,4,8 donne la victoire aussi bien au camp blanc qu'au camp noir, car 2,3,4 sont en progression arithmétique et

2,4,8 sont en progression géométrique. Or 2,4,8 sont des pièces du camp blanc et 3 est du camp noir. Il existe ainsi 61 doubles progressions, toutes accessibles au camp noir et 60 d'entre elles sont possibles également pour le camp blanc.

8. Victoria Excellentissima : c'est la victoire la plus difficile: elle nécessite 4 nombres alignés, représentant les trois progressions. Il n'y a que 6 solutions possibles :(2,3,4,6),(4,6,8,12),(7,8,9,12),(4,6,9,12),(3,5,15,25) et (12,15,16,20).

Sur une idée de Guy NOEL, un texte de Philippe BERGHE.

a,b,c sont en progression

arithmétique si $\frac{a+c}{2} = b$

géométrique si $\sqrt{a.c} = b$

harmonique si $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

◎◎◎◎

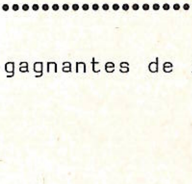
56 Rithmomachie.

Aidez-nous à retrouver les 76 combinaisons gagnantes de la victoria Magna.

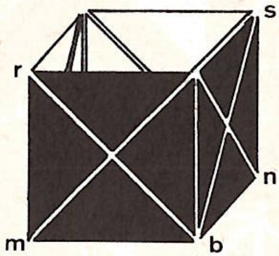
Le FLEXACUBE

Dans un carton assez fin, mais rigide, découpez 4 carrés de 10 cm de côté et chacun d'eux en quatre triangles isocèles suivant les diagonales. Recommencez ensuite l'opération dans un carton d'une autre couleur. Votre choix est bien sûr libre, mais pour la clarté de l'exposé, nous supposerons que vous possédez maintenant 16 triangles rouges et 16 triangles blancs. Collez-les deux par deux de façon à obtenir 16 triangles blancs d'un côté et rouges de l'autre.

Ensuite, avec du papier collant, recomposez les carrés en prévoyant un espace d'environ 2 mm le long des bords. Ayez soin de placer du papier collant sur les deux faces. Vous obtenez ainsi une articulation qui vous permet de plier et déplier le carré suivant les diagonales (en deux ou même en quatre). Les faces rouges devront toutes se trouver du même côté.



Toujours avec du papier collant, et en respectant les espacements de 2mm, reliez bord à bord les quatre carrés pour obtenir les faces latérales (toutes rouges à l'extérieur !) d'un cube. Par pliage, on peut retourner le montage de façon que la face blanche intérieure se retrouve à l'extérieur. Le pliage ne peut s'effectuer que le long des lignes articulées, sans déformation.



<u>Premier pliage</u> :
le long des quatre diagonales pour obtenir sur un plan la figure 1.
La ligne rs indique le bord ouvert.
Le point a était le sommet caché du flexacube (dessin du haut).

<u>Deuxième pliage</u> :
On rabat le sommet a sur le sommet b de manière que le bord "ouvert" soit à l'extérieur.
Entre les deux lèvres rs sont mobiles deux triangles arm et bsn. (fig 2)

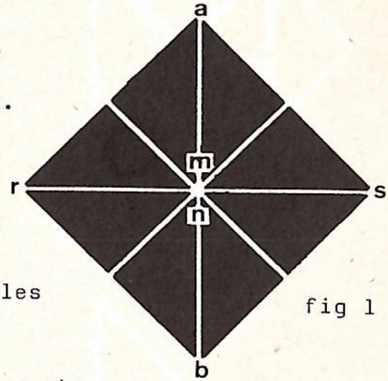


fig 1

<u>Troisième pliage</u> :
Rabattre r sur s en faisant monter m et descendre n. Puis remettre à plat comme sur la figure 3.
Au centre du carré, placer un point p au-dessus et un point q en-dessous. (q est caché).

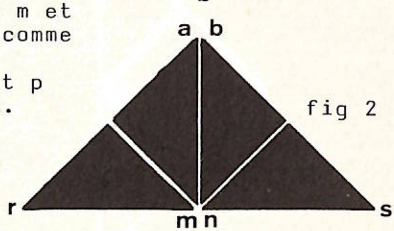


fig 2

<u>Quatrième pliage</u>:
Amener p comme sur la figure 4.

<u>Cinquième pliage</u>:
Amener q comme sur la figure 5
Nous avons réalisé ainsi une surface latérale d'un cube, plus petit que le précédent.

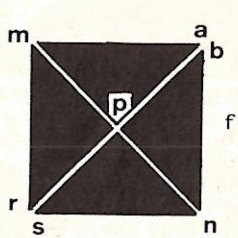


fig 3

<u>Sixième pliage</u>:
En le déroulant, plaçons-le autrement, comme sur la figure 6.
Il faut maintenant effectuer à partir de cette position les pliages inverses des précédents.

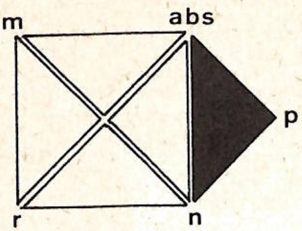


fig 4

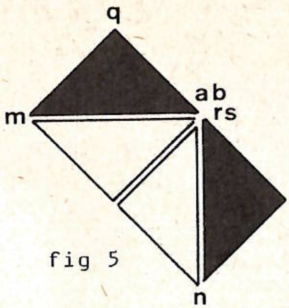


fig 5

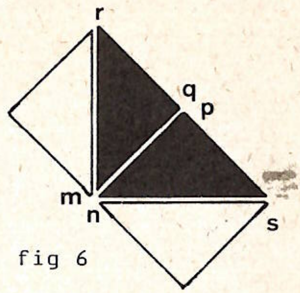
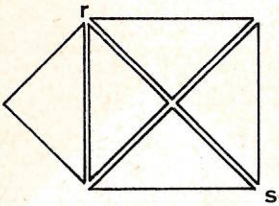
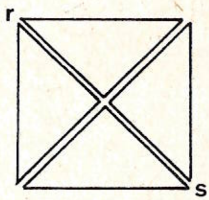


fig 6



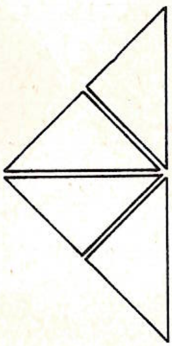


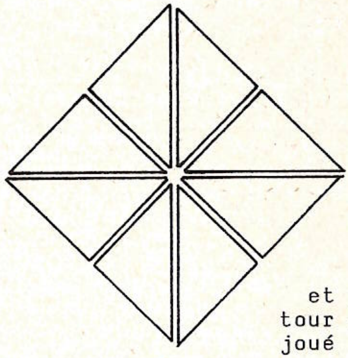
<u>Septième pliage</u>: ↑

<u>Huitième pliage</u>: ↑

<u>Neuvième pliage</u>: ↓

<u>Dixième pliage</u>: ↓





et le
tour est
joué !

MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge de Professeurs de Mathématique d'Expression Française.
(S.B.P.M.e.f. Association sans but lucratif)

Editeur responsable: *W. VANHAMME,* *Rue Firmin Martin,2,* *1160 - Bruxelles*

Rédacteur (et courrier): *J. MIEWIS,* *Avenue de Péville, 150,* *4030 - Liège-Grivegnée*

Abonnement: *(5 numéros)* *BENELUX : 50FB* *Etranger:100FB*

Les abonnements sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur. Abonnement à verser au compte 001-0828109-96 de Math-Jeunes, chemin des Fontaines, 14bis, 7460 - CASTEAU.