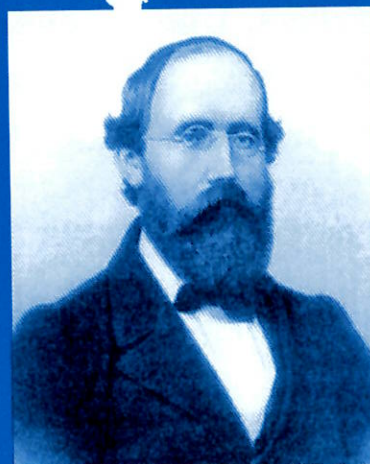
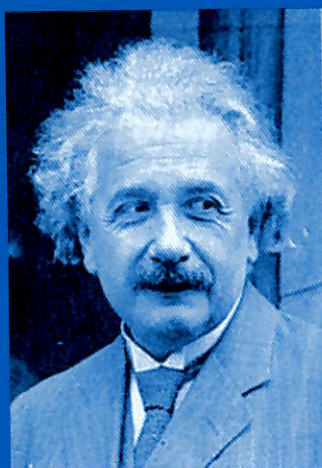


Math Jeunes



LES GEOMETRIES



26ème année - N°111 S - Avril 2005

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revue trimestrielle publiée par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎ 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Math-Jeunes

Comité de Rédaction : J.-P. Cazzaro, C. Festraets, N. Lambelin, J. Miewis, N. Miewis, G. Noël, Y. Noël-Roch, F. Pourbaix, C. Randour, P. Tilleuil, A. Tilleuil-Lepoutre, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Van Hooste, C. Villers.

Couvertures : F. POURBAIX

Math-Jeunes Junior

Comité de Rédaction : F. Drouin, C. Festraets, B. Honclaire, G. Laloux, G. Noël, Y. Noël-Roch, A. Paternotte, F. Pourbaix, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.

Mise en page et dactylographie : M.-C. Carruana

Tarifs

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBP-Mef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

| Abonnements groupés (5 exemplaires au moins) | | | | |
|--|---------------------|------|-----------------|---------|
| | Une des deux revues | | Les deux revues | |
| Belgique | 4 € | | 7 € | |
| | ☒ | ☑ | ☒ | ☑ |
| Europe | 7 € | 9 € | 13 € | 17 € |
| Autres pays | 10 € | 14 € | 15 € | 20 € |
| Abonnements individuels | | | | |
| | Une des deux revues | | Les deux revues | |
| Belgique | 6 € | | 11 € | |
| | ☒ | ☑ | ☒ | ☑ |
| Europe | 13 € | 16 € | 16,50 € | 20,50 € |
| Autres pays | 15 € | 21 € | 20 € | 25 € |

Non prior : ☒, Prior : ☑

Sommaire

| | |
|---|----|
| S. Trompler, Albert Einstein | 2 |
| G. Noël, Les rectangles existent-ils ? | 4 |
| S. Trompler, Des géométries non euclidiennes | 8 |
| C. Villers, Une géométrie des empilements | 11 |
| F. Buekenhout, La Boule d'Uccle et les axiomes de Falek | 15 |
| N. Lambelin, Le « pentagone » de Sierpinski | 18 |
| S. Trompler, Carl-Friedrich Gauss | 22 |
| Y. Noël-Roch, Jeux | 24 |
| C. Festraets, Olympiades mathématiques | 27 |
| N. Miewis, Rallye Problèmes | 29 |

En couverture : David HILBERT (biographie : page 3 de couverture), Nicolas LOBACHEVSKI (biographie : page 10), Albert EINSTEIN (biographie : page 2) et Bernhard RIEMANN (biographie : page 23).

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

- pour Math-Jeunes : G. NOËL, Rue de la Culée, 86, 6927 Restaigne
 - pour Math-Jeunes Junior : A. PATERNOTTE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu
- © SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.

Faites-nous savoir quel article, ou quelle rubrique, vous avez préféré(e). Envoyez un SMS au 0473-973808 ou un e-mail à sbpm@sbpm.be

Math-Jeunes

Les géométries

Le premier article de ce dernier numéro (déjà !) de l'année 2004-2005 est consacré à Albert Einstein. Pour bien situer l'apport de celui-ci, il n'est pas mauvais de rappeler les expériences de l'américain Albert MICHELSON (1852 - 1931), qui furent à la base de la révolution einsteinienne.

Michelson, avait mesuré la vitesse de la lumière dès 1878 et trouvé 299 840 km/s (à 50 km/s près). Mais un problème se posait : dans quel milieu la lumière se déplace-t-elle ? La nature ondulatoire de la lumière et du son était alors reconnue. Mais si le son ne peut se déplacer dans le vide, la lumière franchit sans problème les espaces interstellaires. Aussi certains avancèrent-ils l'idée que ces espaces étaient remplis d'une « substance » baptisée « éther » dont les vibrations assureraient le déplacement de la lumière. Michelson entreprit de vérifier cette hypothèse. Se disant que si la lumière se déplaçait dans l'éther, et si celui-ci à son tour était parcouru par des « vents », la vitesse de la lumière devrait être plus grande si elle se déplaçait dans le sens du vent d'éther, plus petite si elle se déplaçait en sens contraire. Une nouvelle série d'expériences ne lui permit de détecter aucune variation. Non seulement on devait en déduire que l'hypothèse d'existence d'un éther ne se confirmait pas, mais en plus il apparaissait que la vitesse de la lumière était la même par rapport à des objets se déplaçant dans des directions différentes, ce qui remettait en question les théories de Newton.

C'était bien de cela qu'il s'agissait, et ce fut le mérite d'Einstein, d'oser le faire. Raisonnant axiomatiquement, il créa la théorie de la relativité restreinte. D'un point de vue mathématique, le cadre naturel de cette théorie est constitué d'un espace-temps de dimension quatre, un espace dont l'allemand Hermann MINKOWSKI (1864-1909) étudiait la géométrie dès 1908. Étrange géométrie que celle-

là, où la distance entre deux points peut être nulle sans que les points soient confondus, et où cette distance peut même être négative.

Ainsi au début du vingtième siècle, une géométrie très différente de celle à laquelle nous sommes habitués se révélait jouer un rôle important pour l'explication des phénomènes physiques. Une telle conception n'était envisageable que grâce aux mathématiciens des siècles précédents. Leurs travaux, destinés à démontrer le postulat d'Euclide, avaient débouché sur la constatation que des géométries où ce postulat est faux, étaient parfaitement valables. L'histoire des géométries non euclidiennes est abordée dans les articles de Guy Noël et Simone Trompler.

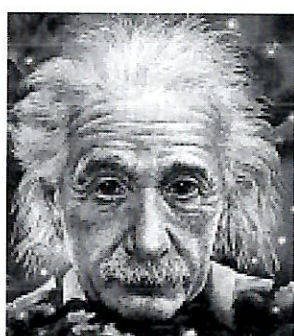
Même en géométrie euclidienne « classique », des problèmes nombreux et intéressants subsistent. Claude Villers nous parle de la géométrie des empilements de sphères : quelle est donc la façon la plus économique de ranger des oranges dans une boîte parallélépipédique ? Quant à Francis Buekenhout, il décrit des polyèdres ayant comme particularités d'être à la fois utilisés pour la fabrication de certains matériaux nouveaux et de pouvoir être construits à partir des « Îles de Paix » du père Pire.

Un numéro consacré aux géométries aurait été incomplet sans un article consacré aux fractals, ces objets, extraordinaires par leur beauté, par leur dimension fractionnaire et leurs propriétés. Popularisés par Benoît MANDELBROT (1924—), — l'ensemble de Mandelbrot est reproduit en filigrane — ils étaient néanmoins connus dès le début du vingtième siècle grâce aux travaux de précurseurs dont nous ne citerons ici que le français Gaston JULIA (1893-1978). C'est Nicole Lambelin qui nous présente un des objets fractals, le pentagone de Sierpinski, qui par la présence du nombre d'or, nous renvoie aux mathématiciens de l'antiquité grecque. La boucle est bouclée.

ANNIVERSAIRE

Albert Einstein

Simone Trompler



Albert Einstein
(1879-1955)

Cette année, on célèbre un double anniversaire concernant Einstein : le centenaire de la théorie de la relativité et le cinquanteenaire de sa mort.

Albert Einstein est né allemand, d'une famille juive. La sévérité et le rigorisme des écoles prussiennes le révol-

taient et il suivit ses parents en Suisse, renonçant à sa nationalité allemande, pour acquérir quelques années plus tard la nationalité suisse. Il obtint un diplôme de professeur de physique et de mathématique, mais sans trouver de situation. Il devint alors employé à l'Office des Brevets à Berne et y resta de 1902 à 1909, montrant beaucoup de conscience professionnelle. Cela ne l'empêcha pas de publier de très nombreux articles en physique théorique.

Il y a exactement 100 ans, à 26 ans, il publia un article qui révolutionna la physique. Il y exposait la théorie de la relativité restreinte. Il n'est pas le seul à avoir contribué à l'élaboration de cette théorie mais il a osé pousser les conclusions jusqu'au bouleversement des idées adoptées par tous, depuis toujours.

Jugeons-en : ni le temps, ni l'espace ne sont absolus. Deux personnes ne peuvent plus affirmer que deux événements sont simultanés, si elles sont en mouvement l'une par rapport à l'autre et il leur est impossible de donner la distance entre deux points, car elle n'a pas la même valeur pour tous.

Il est impossible de se déplacer plus vite que la lumière et plus la vitesse d'un mobile se rapproche de celle de la lumière, plus sa masse augmente jusqu'à devenir infinie.

Einstein établit aussi l'équivalence de la masse et de l'énergie par la relation $E = mc^2$ (c est la vitesse de la lumière, soit approximativement 300 000 km/s). C'est sans aucun doute la formule la plus célèbre dans le monde, sinon la mieux comprise !

Tout cela est très déroutant et heurte profondément notre bon sens. Une question vient tout de suite à l'esprit : si c'est vrai, pourquoi ne s'en est-on pas aperçu plus tôt ?

La réponse est simple : il faut atteindre des vitesses très élevées, proches de celle de la lumière pour que ces phénomènes soient mesurables. A l'heure actuelle, grâce aux rayons cosmiques, notamment, de nombreuses vérifications ont été réussies et plus aucun doute ne peut subsister sur la validité de la théorie de la relativité restreinte, (restreinte parce qu'elle ne s'applique qu'aux mouvements rectilignes uniformes).

La même année 1905, Einstein publia quatre autres articles, eux aussi très importants. L'un d'entre eux, consacré à l'effet photoélectrique, établit l'aspect corpusculaire de la lumière, alors qu'elle était considérée comme une onde à l'époque. Il recevra le prix Nobel, en 1921, pour ce travail.

Entre-temps sa renommée scientifique était bien établie et il devint professeur à l'université de Prague, puis à Zurich pour enseigner finalement à l'université de Berlin, en 1914. C'était un pacifiste convaincu et il ne prit aucune part à la

première guerre mondiale, travailla avec acharnement et mit au point, après une longue période d'essais et de corrections, sa théorie de la relativité générale, publiée en 1916.

La relativité générale envisage tous les types de mouvements et, en particulier, ceux dus à la gravitation.

Einstein montra que les lois de Newton ne sont qu'une approximation, excellente tant que les vitesses ne sont pas trop grandes. Selon Einstein, à cause de l'équivalence entre l'énergie et la masse, la lumière devrait être déviée quand elle s'approche d'une masse telle que le soleil, par exemple.

Il fallut attendre une éclipse totale de soleil pour qu'une expédition britannique confirme ses prédictions d'une manière indiscutable.

Einstein était maintenant connu mondialement, invité partout, notamment aux U.S.A. En 1932, il quitta l'université de Berlin pour l'université de Princeton ; il s'installa dans cette ville, non sans voyager partout en Europe. Il visita souvent notre pays, car des liens d'amitié l'unissaient à la Reine Elisabeth et au Roi Albert. Très musicien, il jouait du violon avec la Reine. Il ne remit plus les pieds en Allemagne où l'arrivée au pouvoir des Nazis avait fait éclater l'antisémitisme toujours latent et où sa vie était menacée malgré sa célébrité. Hitler fit interdire d'enseigner les théories d'Einstein !!

Dans les années 30, la physique nucléaire avait fait un grand bon en avant. La radioactivité artificielle avait été découverte, de même que la fission de l'uranium par bombardement de

neutrons. On était encore loin de la bombe atomique, mais les physiciens, tant les Allemands que les autres Européens et les Américains entrevoyaient la possibilité d'une réaction en chaîne qui pourrait être catastrophique.

En 1939, des physiciens réfugiés aux U.S.A, qui avaient fui le nazisme, Szilard et Teller, très inquiets de la situation mondiale, essayèrent sans succès de prévenir l'administration américaine du danger. Ils décidèrent finalement de profiter de la renommée d'Einstein et lui demandèrent d'écrire une lettre au président Roosevelt pour que les U.S.A. prennent de vitesse les Allemands et empêchent Hitler de disposer de cette bombe qui lui donnerait la victoire après un massacre sans précédent. On connaît la suite : entamé en 1941 sous commandement de l'armée, le projet Manhattan conduira à la mise au point de la bombe A qui, larguée sur Hiroshima et Nagasaki contre l'avis des scientifiques, provoquera effectivement un massacre sans précédent.

Il peut paraître étonnant que le pacifiste Einstein ait pu pousser à la fabrication de cette bombe, mais les horreurs nazies lui avaient fait prendre conscience que le pacifisme est parfois insuffisant pour combattre le mal.

Einstein ne prit pas part au projet Manhattan et continua ses travaux, dans la voie de l'unification de la physique. Dans les années suivantes, il s'écarta de plus en plus des autres physiciens qui élaboraient la mécanique quantique, née d'ailleurs en partie de ses travaux, mais qui ne lui plaisait pas. Sa santé se dégradait et il mourut, il y a cinquante ans.

Math-Jeunes a consacré son numéro 107 à un autre thème géométrique : *Les Courbes*.

Rappelons-en le sommaire :

- S. Trompler, La double hélice
- C. Carleer, L'ADN, une molécule à la fois biologique et mathématique
- C. Randour, Des représentations d'une hélice circulaire
- C. Villers, La parabole du bon téléspectateur !
- J. Opsomer et P. Tilleuil, Le déroulement de la spirale d'Archimède
- G. Noël et P. Tilleuil, Peano, Hilbert... et le Minotaure

Ce fascicule est encore disponible pour le prix de 0,5€, plus frais de port. S'adresser au secrétariat de la SBPMef (voir au verso de la couverture).

Les rectangles existent-ils?

Guy Noël

C'est une longue histoire que je veux conter ici. Elle débute 300 ans avant Jésus-Christ et ne s'est achevée qu'à la fin du XIX^e siècle. C'est l'histoire du postulat d'EUCLIDE. De cet auteur, on ne sait pas grand-chose. Seulement qu'il a vécu aux alentours de -300, et qu'il habitait la ville d'Alexandrie, dont il pouvait certainement fréquenter la fameuse bibliothèque. EUCLIDE est l'auteur d'un des ouvrages les plus lus de l'histoire humaine : les *Eléments*.

Dans les *Eléments*, EUCLIDE présentait l'essentiel des mathématiques de son temps sous une forme cohérente, organisée, déductive. Peut-être le premier ouvrage de ce genre, ce traité a fait autorité jusqu'il y a peu. Les *Eléments* sont divisés en 13 « livres » dont 8 de géométrie, les 5 autres d'arithmétique.

Ce sont surtout les 8 livres de géométrie qui ont eu une influence considérable, au point de devenir finalement une espèce de texte sacré, intouchable. Même non démontrée, une affirmation d'EUCLIDE ne pouvait qu'être vraie.

Cette attitude non scientifique a eu pour conséquence qu'il fallut attendre 1829 pour que quelqu'un ose présenter une géométrie non-euclidienne, alors que d'autres mathématiciens auraient pu le faire dès le siècle précédent.

Euclide

Au tout début de l'histoire des mathématiques, la vérité d'une affirmation se jugeait uniquement par référence à la **réalité physique** : des constatations expérimentales suffisaient pour affirmer qu'une proposition était vraie.

Une telle conception ne nécessite pas d'organiser l'ensemble de la géométrie en un système cohérent.

À l'époque de THALÈS DE MILET (~ 600 av. J.-C.), un premier progrès est fait : on comprend que l'expérience peut être trompeuse, et qu'un raisonnement convaincant est préférable. La géométrie s'organise de façon **déductive**.

Pour EUCLIDE, un exposé déductif de la géométrie part nécessairement d'un certain nombre de propriétés affirmées sans démonstration. Il énonce explicitement ces propriétés, de façon que chacun sache ce qui peut être, ou ne pas être, utilisé. Bien sûr ces propriétés doivent **avoir l'air vraies**. EUCLIDE les choisit donc aussi simples et naturelles que possible. Il les répartit en deux groupes. Le premier (les axiomes) rassemble des énoncés qui sont plutôt des règles logiques. Le second (les postulats) est constitué des propriétés géométriques de base.

En lisant les énoncés des postulats, nous pouvons constater d'importantes différences entre le vocabulaire d'EUCLIDE et le nôtre :

- 1 On demande de mener une ligne droite d'un point quelconque à un point quelconque.
- 2 On demande de prolonger continuellement en direction une droite finie.
- 3 On demande de décrire un cercle d'un centre et avec une distance quelconques.
- 4 On demande que tous les angles droits soient égaux entre eux.

Ces propositions sont suffisamment proches de ce que nous montrent nos sens pour ne pas donner lieu à discussion. Elles figurent encore dans les exposés modernes, soit en tant qu'axiomes, soit comme théorèmes.

Il en va autrement pour le **cinquième postulat**. Pour comprendre la situation, il faut savoir que les 28 premières propositions démontrées

par EUCLIDE ne dépendent pas de cet énoncé. Or la 27^e et la 28^e sont les suivantes (avec le vocabulaire et les notations modernes) :

P27. Si la droite A coupe les droites B et C de façon que les angles alternes-internes α et β soient de même amplitude, alors les droites B et C sont parallèles.

P28. Si la droite A coupe les droites B et C de façon que les angles correspondants β et γ soient de même amplitude, alors les droites B et C sont parallèles.

Ces propositions P27 et P28 ne sont guère difficiles à démontrer. Intuitivement, il est clair que la proposition réciproque P29 devrait aussi être vraie :

P29. Si la droite A coupe les droites parallèles B et C , alors les angles alternes-internes α et β sont de même amplitude, ainsi que les angles correspondants β et γ .

Nous pouvons supposer qu'EUCLIDE a essayé de démontrer cette réciproque... sans jamais y parvenir. Plutôt que de renoncer à son projet, il introduisit un 5^e postulat, qui n'est autre que la proposition P29 elle-même énoncée sous une forme équivalente :

On demande que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

C'est évidemment la somme des angles intérieurs d'un même côté qui doit être inférieure à deux droits !

A partir de là, EUCLIDE démontre sans difficulté la proposition P29 et il poursuit son œuvre l'âme tranquille. Il a, sans le savoir, déclenché un processus qui ne s'arrêtera qu'au XIX^e siècle, avec notamment Nicolas LOBACHEVSKI (1793–1856), Janos BOLYAI (1802–1860) et Carl Friedrich GAUSS (1777–1855).

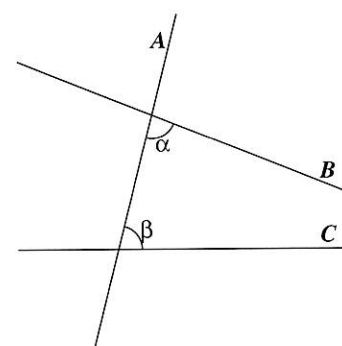
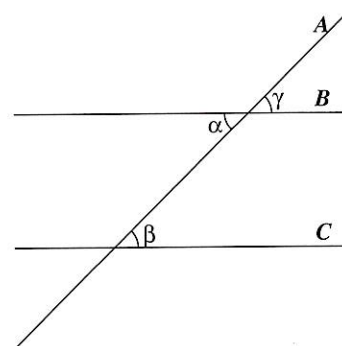
Car, pour l'époque, la situation n'est pas satisfaisante. Sept cents ans plus tard, PROCLUS DE LYCIE (412–486) s'indigne encore :

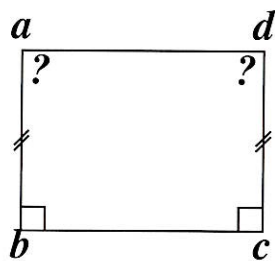
Comment ne serait-il pas ridicule d'assigner comme indémontrables des théorèmes dont les réciproques sont démontrables ?

La vérité de l'énoncé n'est pas mise en doute. Mais la nécessité d'une démonstration est évidente à tous : on connaît des courbes qui se rapprochent aussi près qu'on le veut l'une de l'autre, sans jamais se toucher. Il convient de démontrer qu'un tel comportement est impossible pour deux droites. Ne pas démontrer une affirmation que l'on voudrait pouvoir démontrer, est ressenti comme une atteinte à la rigueur. Le 5^e postulat d'EUCLIDE est ainsi devenu le point faible de son exposé.

KHAYYĀM et SACCHERI

Pendant des siècles, les tentatives de démonstration du 5^e postulat vont buter sur divers obstacles. Des progrès sont réalisés cependant, des géomètres prennent conscience de ce que beaucoup d'énoncés sont équivalents au 5^e postulat. Ils obtiennent des résultats intermédiaires pouvant être considérés comme des étapes dans la démonstration.





Des énoncés équivalents au 5^e postulat

- Le lieu des points situés à une distance donnée d'une droite est constitué de deux droites.
 - La somme des angles d'un triangle vaut deux droits.
 - Par tout point extérieur à une droite passe une et une seule parallèle à cette droite.
- Cet énoncé, introduit par l'écossais John PLAYFAIR (1748–1819), a remplacé la formulation d'EUCLIDE dans les manuels scolaires. Il est connu sous le nom d'axiome de Playfair.
- Trois points non alignés appartiennent à un et un seul cercle.
 - Il existe deux triangles semblables.
 - Les médiatrices d'un triangle se coupent.

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS;
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIENTUR
Prima ipsa universæ Geometrix Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Mathematicæ Professore.
OPUSCULUM
EX. MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dedicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorem præcipit.

Ainsi, le persan Omar AL KHAYYĀM (1024–1123) considère le quadrilatère ci-contre, où les angles \widehat{abc} et \widehat{bcd} sont droits et où les côtés $[ab]$ et $[cd]$ ont même longueur.

En utilisant le 5^e postulat, on montre que les angles \widehat{bad} et \widehat{adc} sont droits, de sorte que le quadrilatère est un rectangle. La réciproque est vraie : si on sait que ce quadrilatère est nécessairement un rectangle, alors on peut démontrer le postulat. Il reste donc à démontrer que les angles \widehat{bad} et \widehat{adc} sont droits sans utiliser le 5^e postulat.

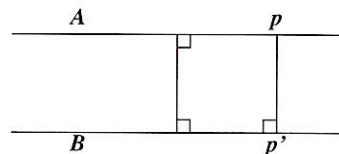
Sans utiliser le postulat, KHAYYĀM montre que les angles \widehat{bad} et \widehat{adc} ont même amplitude. De plus, ils sont aigus si et seulement si $|bc| > |ad|$, ils sont droits si et seulement si $|bc| = |ad|$ et ils sont obtus si et seulement si $|bc| < |ad|$.

Ainsi apparaissent trois possibilités connues sous les noms d'hypothèses de l'angle aigu, de l'angle droit et de l'angle obtus. Démontrer le 5^e postulat revient à prouver que les hypothèses de l'angle aigu et de l'angle obtus sont impossibles.

Six cents ans plus tard, le Jésuite italien Girolamo SACCHERI (1667–1733) s'intéresse aux quadrilatères étudiés par KHAYYĀM, qui depuis lors portent le nom de « quadrilatères de Saccheri », et montre que l'hypothèse de l'angle obtus est fausse. Sa démonstration est correcte, il ne lui reste plus qu'à en faire autant pour l'hypothèse de l'angle aigu.

Essayant une démonstration par l'absurde, SACCHERI suppose que les angles aux sommets d'un quadrilatère de Saccheri sont aigus et en tire toute une série de conséquences.

Il montre par exemple que si deux droites ont une perpendiculaire commune, la longueur $|pp'|$ est minimum lorsque pp' est la perpendiculaire commune, et tend vers l'infini lorsque p s'éloigne sur A dans n'importe laquelle des deux directions.



Ces déductions sont irréprochables. Mais SACCHERI interrompt soudain son exposé en déclarant

L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse, car elle est contraire à la nature de la droite.

Cependant, il se rend compte que c'est là un argument bien faible car il enchaîne :

Je pourrais m'arrêter tranquillement là-dessus ; mais je ne veux pas renoncer à la tentative de démontrer que cette opiniâtre hypothèse de l'angle aigu que j'ai déjà extirpée se contredit elle-même.

Il recommence donc une nouvelle série de déductions (toujours correctes). Il étudie notamment le lieu des points équidistants d'une droite. SACCHERI commet alors une erreur qui lui permet de rejeter l'hypothèse de l'angle aigu. Cependant il n'est pas satisfait :

Je ne puis passer sous silence la différence entre les démentis apportés aux deux hypothèses. Dans l'hypothèse de l'angle obtus, tout est simple comme bonjour... Quant à réfuter l'hypothèse de l'angle aigu, je ne puis y parvenir autrement qu'en montrant que cette longueur est égale à celle de sa base rectiligne.

SACCHERI était aveuglé par sa volonté de prouver à tout prix le 5^e postulat. Il ne pouvait accepter ni même envisager l'idée que cet énoncé ne soit pas démontrable.

BOLYAI, LOBACHEVSKI et GAUSS.

Au début du XIX^e siècle, la situation paraît bloquée. Beaucoup comme Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833), cherchent encore à démontrer le 5^e postulat dont on connaît alors de nombreuses propositions équivalentes. D'autres, plus pessimistes, renoncent à s'occuper du problème. Lisez ci-contre ce que le hongrois Farkas BOLYAI (1775–1856) écrit en 1820 à son fils Janos.

Janos BOLYAI n'écouta pas son père, ce en quoi il eut raison puisqu'il est aujourd'hui considéré comme un des fondateurs de la géométrie non euclidienne. Dès 1825, il en avait établi les principes. Il les publia en 1832, en annexe à un manuel scolaire de mathématiques rédigé par... son père. En fait, il avait été devancé par le russe Nikolaï LOBACHEVSKI qui avait indépendamment élaboré la même théorie et l'avait publiée dès 1829 dans une revue confidentielle : le *Messenger de Kazan*.

Au départ, LOBACHEVSKI et BOLYAI essayent aussi de démontrer le 5^e postulat par l'absurde. Ils développent donc l'hypothèse de l'angle aigu mais ils finissent par se convaincre que cette hypothèse peut très bien être vraie. Une fois débarrassés de l'obsession euclidienne, ils obtiennent des résultats étonnants. Ils montrent en particulier que dans cette nouvelle géométrie, dite *hyperbolique*, l'espace admet une courbure constante *négative*, alors que l'espace de la géométrie euclidienne admet une courbure *nulle*. Il existe aussi des espaces dits *elliptiques*, à courbure constante *positive* : la sphère en est un exemple. Le géomètre a dès lors le choix entre plusieurs géométries reposant sur des systèmes axiomatiques différents.

Je t'en supplie, garde-toi de tenter toi aussi de venir à bout de la théorie des parallèles. Tu y perdras tout ton temps, mais tous tant que vous êtes, vous n'arriverez pas à démontrer cette proposition. Ne cherche pas à avoir raison de cette théorie ni par le procédé que tu me communique, ni par aucun autre. J'ai exploré à fond toutes les voies possibles : je n'ai pas laissé une seule idée sans l'étudier. J'ai traversé cette nuit noire et j'y ai enseveli toutes les joies de la vie. Pour l'amour de Dieu, je t'en supplie, abandonne ce thème, crains-le autant que les passions, car il peut te dérober tout ton temps, ta santé, ta tranquillité, tout le bonheur de ta vie...

Signalons encore que GAUSS avait obtenu lui aussi des résultats analogues à ceux de LOBACHEVSKI et BOLYAI, mais sans les publier.

En guise de conclusion

La construction de la géométrie hyperbolique est une longue histoire, étalée sur plus de 2000 ans. C'est une collaboration, à travers le temps et l'espace, de nombreux hommes cherchant à rationaliser leurs connaissances. Elle a débouché sur la mise au point de la méthode axiomatique, permettant les énormes progrès réalisés par les mathématiciens du XX^e siècle.

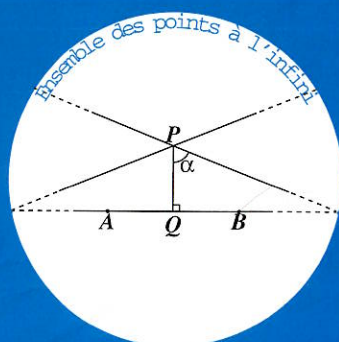
Tant en mathématique qu'en physique, elle a remis en cause les idées reçues. Vivons-nous dans un espace euclidien, elliptique ou hyperbolique ? Avec les théories de la relativité générale et de la gravitation, cette dernière question a sans doute changé de sens. Néanmoins, à l'échelle où nous vivons, il ne nous est pas possible de distinguer l'espace euclidien d'un espace hyperbolique dont la courbure serait très faible.

Des géométries non euclidiennes

Simone Trompler

Vous avez lu les mésaventures du cinquième postulat d'Euclide et vous savez maintenant qu'il peut être nié et remplacé par un autre. Evidemment, les résultats obtenus de cette manière ne sont plus intuitifs et leur compréhension demande un sérieux effort d'abstraction. Les dessins qui les illustrent choquent nos yeux « euclidiens » et nous devons à tout moment nous méfier de ce que nous considérons comme évident depuis toujours.

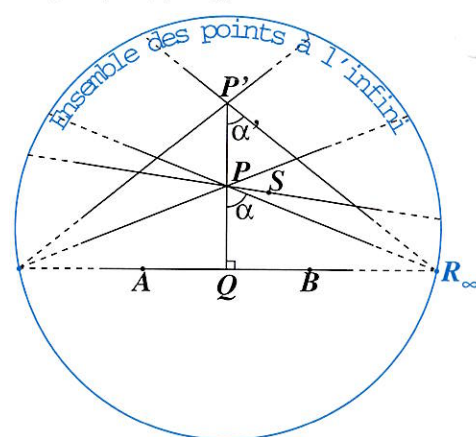
Jugez-en : admettons que toute droite comporte deux points à l'infini : un « de chaque côté », et considérons un point P extérieur à une droite AB . Si on appelle « parallèles » deux droites qui « se coupent à l'infini », on obtient deux parallèles à AB passant par P en « joignant » P aux deux points à l'infini de AB .



En géométrie euclidienne, ces deux droites coïncident (ce qui entraîne qu'une droite ne comporte qu'un seul point à l'infini : sinon, deux droites parallèles auraient deux points différents en commun !). En géométrie de Lobachevsky, elles sont différentes.

Dans cette géométrie, l'angle α entre une des parallèles à AB passant par P (par exemple PR_{∞}) et la perpendiculaire à AB passant par P est ce qu'on appelle un « angle limite ou angle de parallélisme ». Il dépend de la distance PQ et décroît lorsque $|PQ|$ augmente.

Les droites passant par P qui font avec la perpendiculaire à AB un angle inférieur à l'angle limite, sont sécantes à AB . Celles pour lesquelles l'angle est plus grand (par exemple PS) ne coupent pas la droite AB . Il y a donc trois possibilités : deux droites d'un plan peuvent être sécantes, être parallèles ou ne pas se couper.



Peut-on concrétiser les géométries non euclidiennes ?

Il a été démontré que le cinquième postulat est équivalent à l'affirmation que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° . Si on nie ce postulat, la somme des angles d'un triangle sera toujours soit inférieure, soit supérieure à 180° . Sur le plan, nous ne pouvons pas représenter un tel triangle. Pour concrétiser les géométries non euclidiennes, nous remplaçons le plan usuel par d'autres surfaces, en appelant « droite » (d'une de ces surfaces) toute courbe qui réalise le plus court chemin entre deux points (une telle courbe est appelée une *géodésique*).

La géométrie elliptique

Peut-on par exemple imaginer une surface telle que la somme des angles d'un triangle soit supérieure à 180° ? Sur la sphère, les géodésiques sont les grands cercles, c'est-à-dire les sections de la sphère par les plans passant par le centre. Comme la droite, ils sont définis par deux points (excepté si les deux points sont les extrémités d'un diamètre).

Un triangle sphérique est formé de trois « segments de droites ». La somme des angles de ce triangle est toujours plus grande que 180° . Visualisons la situation sur la Terre : choisissons un sommet au pôle, le côté opposé sur l'équateur et deux méridiens quelconques pour les deux autres côtés. Les angles à la base sont deux droits, donc en ajoutant le troisième angle, on dépassera nécessairement 180° .

Qu'en est-il du parallélisme de « droites » ? Par un point extérieur à un grand cercle, impossible sur une sphère de tracer un autre grand cercle qui ne coupe pas le premier ! Cette fois des droites ne peuvent être parallèles.

La géométrie de la sphère est une géométrie non euclidienne. Ce type de géométrie, étudié par Riemann, a reçu le nom de géométrie elliptique, parce que, comme l'ellipse, elle n'a pas de point à l'infini.

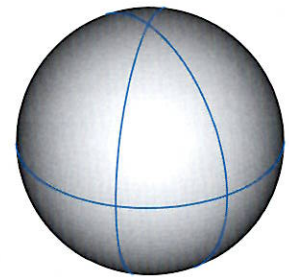
La géométrie hyperbolique

Peut-on imaginer une surface sur laquelle la somme des angles d'un triangle est plus petite que 180° ? Il y en a plusieurs, parmi lesquelles une qu'on appelle *pseudo-sphère*. Elle ne ressemble pas du tout à une sphère, mais elle a, comme elle une courbure constante, négative au lieu d'être positive (voir l'encadré page 10.)

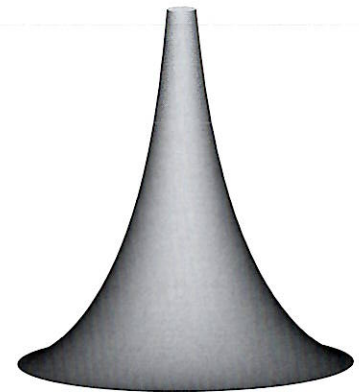
La pseudosphère est obtenue par la rotation d'une tractrice autour de son asymptote (la tractrice est une courbe telle que la longueur du segment de tangente $|PB|$, limité à la courbe et à une droite fixe OY , est constante (pour tout B , $|PB| = |OA|$). Cette courbe fut considérée par Newton.)

Les géométries hyperbolique et elliptique semblent sortir de l'imagination des mathématiciens, sans aucun rapport avec la réalité. Pourtant, la théorie de la Relativité Générale d'Einstein montre que l'Univers n'est pas euclidien. On hésite encore sur sa géométrie : si elle est elliptique, l'Univers est fini ; si elle est hyperbolique, l'Univers est infini.

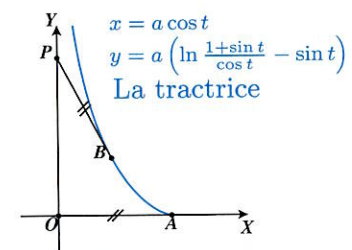
Mais, de toute façon, à notre échelle, sur notre tout petit coin de Terre, elle-même minuscule dans l'Univers, c'est la bonne vieille géométrie euclidienne qui s'observe !



Une sphère



et une pseudo-sphère.



Janos BOLYAI (1802-1860)



Mathématicien hongrois. Son père, Farkas Bolyai, ami de Gauss, prit son éducation en main. Il était professeur de mathématiques, physique et chimie. Il souhaitait que son fils devienne mathématicien. Heureusement, Janos avait les dispositions voulues pour atteindre ce but. C'était un élève brillant, non seulement en sciences mais aussi en langues (il connut 9 langues, dont le chinois et le tibétain !) et en musique (il jouait du violon, suffisamment bien pour donner des concerts à Vienne).

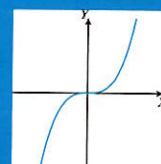
A 13 ans, il maîtrisait le calcul différentiel et intégral. Entre 1820 et 1823 il prépara un système complet de géométrie non euclidienne, indépendamment de Gauss qui n'avait jamais publié ses recherches.

La famille n'ayant que de petits moyens financiers, la seule solution pour lui de se procurer une formation avancée en mathématiques était de passer par l'armée et de suivre les cours de l'Académie pour ingénieurs de Vienne. Il passa ainsi 11 ans à l'armée, tout en faisant des recherches en mathématiques. Outre sa contribution à la géométrie non euclidienne, il développa l'aspect géométrique des nombres complexes.

À sa mort, on trouva près de 2000 pages manuscrites mais il ne publia que les quelques pages de géométrie non euclidienne, en appendice à une œuvre de son père.

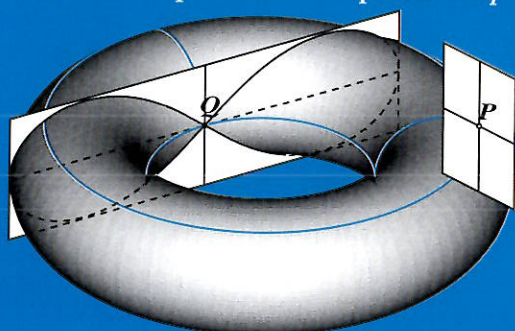
Points elliptiques ou hyperboliques et courbure

Pour les courbes planes, on connaît la notion de « point d'inflexion » : c'est un point où la tangente à la courbe traverse celle-ci. Un des exemples les plus simples est la courbe ci-contre, d'équation $y = x^3$. Sur une surface un phénomène analogue peut se produire : il arrive que le plan tangent traverse la surface.

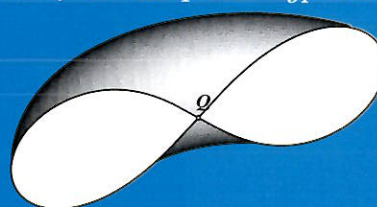


Un tore est engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan qui ne le coupe pas. Tout point du tore est à l'intersection d'un « parallèle » et d'un « méridien ». Le plan tangent en un point est celui qui passe par les droites tangentes à ces deux cercles.

Au point P , le plan tangent ne traverse pas le tore : on dit que P est un point *elliptique*.



Par contre, en Q , la tangente au « parallèle » perce le tore et le plan tangent traverse celui-ci. La section du tore par ce plan tangent est une courbe appelée « lemniscate de Bernoulli ». Q est un point *hyperbolique*.



La notion de *courbure* d'une surface a été définie par Carl-Friedrich GAUSS au XIX^e siècle. Les surfaces à courbure positive sont celles dont tous les points sont elliptiques. Quant aux surfaces à courbure négative, ce sont celles dont tous les points sont hyperboliques. Tous les points du plan euclidien sont *paraboliques* : la courbure y est nulle.

Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKI (1792-1856)

Ce savant russe est né dans une famille pauvre. Son père meurt quand il a sept ans et sa mère s'installe avec ses trois fils à Kazan, une ville proche de la Sibérie. Grâce à des bourses du gouvernement, les trois fils suivent les cours du gymnase de Kazan. Nikolai est diplômé en 1807 et entre à l'Université de Kazan pour y étudier la médecine, mais il change vite d'avis, pour se consacrer aux sciences.

L'Université n'a ouvert ses portes que deux ans plus tôt. Des professeurs allemands de grande envergure ont été invités à y donner cours. Lobachevski reçoit un enseignement de grande qualité, notamment en mathématiques. L'un de ses professeurs, Martin Bartels, est un ami de Gauss. Lobachevski est un étudiant brillant, dans tous les domaines. Il devient professeur à l'Université.

C'est une période difficile : le Tsar Alexandre Ier se méfie de l'influence exercée par la Révolution française sur les intellectuels et les considère comme une menace pour la religion orthodoxe. De nombreux professeurs étrangers quittent l'Université, dont Bartels. Malgré ces conditions défavorables, Lobachevski arrive à maintenir et même à améliorer le niveau des études.

En 1826 Nicolas Ier a remplacé Alexandre et le régime est plus tolérant, l'atmosphère s'améliore. Lobachevski devient recteur et le restera pendant 19 ans. Sous son rectorat, l'Université devient florissante : la bibliothèque est bien fournie, un observatoire astronomique, des laboratoires de physique, chimie et anatomie sont construits. Lobachevski encourage aussi la recherche dans les arts, notamment en littérature. Sa capacité de travail est incroyable. Malgré ses lourdes tâches administratives, il enseigne de nombreuses branches mathématiques et physiques, trouve le temps de faire des conférences pour un large public, et, bien entendu, poursuit ses travaux originaux en géométrie et en algèbre.

Après sa mise à la retraite, sa santé se détériore, la perte d'un de ses fils, les soucis financiers l'accablent. Il meurt aveugle en 1856. De son vivant, ses recherches en mathématiques n'ont pas été reconnues comme elles le méritaient. Lobachevski n'a jamais su à quel point son œuvre allait marquer la géométrie et n'a pas imaginé la célébrité qu'il allait atteindre.

Une géométrie des empilements

Claude Villers

Il est assez courant de rencontrer des empilements d'objets du type de celui représenté sur le croquis ci-dessous.



C'est le cas par exemple dans des commerces pour la présentation de marchandises, fruits, conserves...

Chaque élément d'une couche repose sur plusieurs éléments de la couche immédiatement inférieure.

Ce genre de construction n'est certainement pas récent. Il était applicable, par exemple, pour des empilements de boulets de canon dans des forteresses.

En voici quelques illustrations.



Une première observation rapide de ces empilements nous fait constater qu'ils sont formés de couches, ayant chacune la forme d'un carré.

Combien d'éléments ces empilements contiennent-ils ?

Il est immédiat que la première couche (celle du dessus) comporte 1 élément, la deuxième 4 (deux rangées de 2 éléments), la troisième 9 (trois rangées de 3 éléments), la quatrième 16 (quatre rangées de 4 éléments)... et la n^{e} (celle du bas) en compte n^2 . Le nombre total d'éléments est alors

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Ainsi, s'il y avait 100 couches, le nombre serait donné par

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 99^2 + 100^2 = ??$$

(Je vous laisse le soin d'effectuer ce calcul... si vous le souhaitez). Il serait certainement plus efficace d'utiliser une loi (ou formule) qui donne le résultat d'un tel calcul, de manière générale pour n couches (n étant, bien entendu, un nombre naturel non nul). Pour information, la formule est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Le nombre d'éléments dans l'empilement proposé de 100 couches est donc

$$\frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338350$$

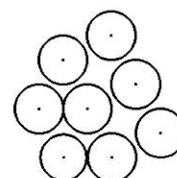
Il est évident qu'il existe bien d'autres manières d'empiler des sphères de même rayon que celle qui a été présentée ci-contre. On peut, par exemple, ranger ces sphères dans des contenants de formes diverses comme des parallélépipèdes rectangles, des cônes...

Un problème d'optimisation

Une préoccupation de ceux qui sont chargés de conditionner ces sphères est d'obtenir une optimisation de leur empilement en couches successives.

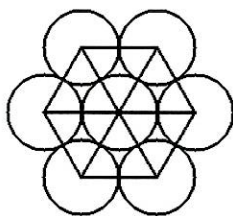
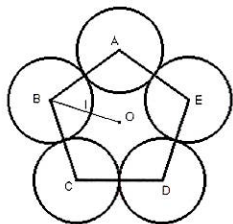
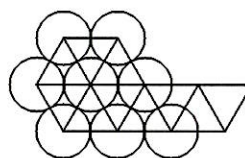
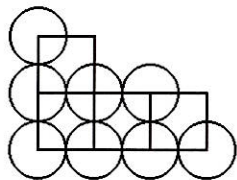
Dans le cas de la pyramide à base carrée qui a été le point de départ de notre réflexion, les centres des sphères (de même rayon) de chacune des couches sont des éléments d'un même plan. Nous dirons plus simplement que chaque couche est « une partie d'un plan de sphères ».

Les sphères d'un même plan peuvent être disposées de manière anarchique ce qui n'est certainement pas économe d'espace.



La disposition de ces sphères — donc de leurs centres — peut être plus compacte ce qui permet de densifier la structure.

Une première idée est de considérer que ces centres peuvent être les sommets de carrés ou de triangles équilatéraux puisque ces deux figures peuvent paver le plan.



Il n'est pas utile de considérer le cas où les centres des sphères d'un plan de sphères sont les sommets de pentagones réguliers car ceux-ci ne peuvent paver le plan. En effet, l'angle intérieur formé par deux côtés consécutifs du pentagone régulier convexe $ABCDE$ mesure 108° qui n'est pas diviseur de 360° .

Bien que des hexagones réguliers pavent le plan (l'angle intérieur de deux côtés consécutifs est de 120° , diviseur de 360°), ce cas peut être ramené au cas du triangle équilatéral dans l'optique d'une recherche d'occupation optimale de l'espace disponible puisqu'une septième sphère peut venir prendre place dans l'espace compris entre les six autres.

Superposition de deux couches

Comment est-il possible d'organiser des empilements de deux plans de sphères de même rayon r ?

Commençons par définir la notion de distance de deux couches successives. Nous dirons que c'est la distance qui sépare les deux plans auxquels appartiennent respectivement les centres des sphères composant un plan et les centres des sphères composant l'autre.

Nous allons maintenant envisager différentes situations selon que chaque sphère de la couche portée est mise en contact avec une seule sphère, avec deux sphères, avec trois sphères ou avec quatre sphères de la couche porteuse.

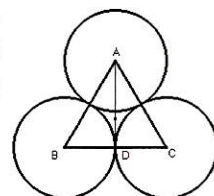
Premier cas : Chaque sphère d'une couche est en contact avec une seule sphère de la couche inférieure.

Les deux couches sont directement superposées. Comme r est le rayon de toutes les sphères alors $d = |O'O''| = 2r$.

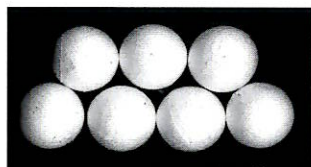
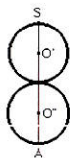
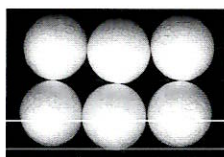
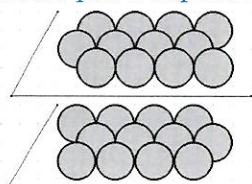
Deuxième cas : Chaque sphère d'une couche est en contact avec deux sphères de la couche inférieure. Elle est, en quelque sorte venue se nicher dans le creux des deux sphères inférieures. La couche supérieure est décalée par rapport à la couche inférieure.

B et C sont les centres des sphères porteuses et A est le centre de la sphère portée. A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté $2r$. Dès lors

$$d = |AD| = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3} \approx 1,73205 \cdot r$$



Nous utiliserons les vocables de « plan de sphères porteuses » et de « plan de sphères portées » qui ne demandent pas d'explication.



Troisième cas : Chaque sphère d'une couche est en contact avec trois sphères de la couche inférieure. Elle est venue se nicher dans le creux de trois sphères tangentes deux à deux.

Si A , B et C sont les centres des trois sphères « porteuses » dans la couche inférieure alors le triangle ABC est équilatéral de côté $2r$.

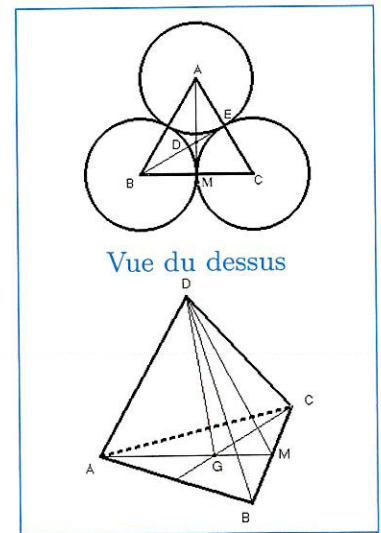
Le centre D de la sphère « portée » est aussi à distance $2r$ de chacun des points A , B et C . D n'appartient donc pas au plan des centres A , B , C . $ABCD$ est alors un tétraèdre régulier de côté $2r$ car $|DA| = |DB| = |DC| = |AB| = |BC| = |AC| = 2r$.

Soit M le milieu de $[BC]$. On a $|AM| = r\sqrt{3}$ (Cfr. deuxième cas)

Soit G , le centre de gravité du triangle équilatéral ABC . On a donc $|AG| = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

G est la projection orthogonale de D sur le plan ABC d'où, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DGA , nous obtenons

$$d = \frac{2r\sqrt{6}}{3} \approx 1,63299 \cdot r$$



Vue du dessus

$$\begin{aligned} d = |DG| &= \sqrt{4r^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{4r^2 - \frac{12r^2}{9}} \\ &= \frac{2r\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Quatrième cas : Chaque sphère d'une couche est en contact avec quatre sphères de la couche inférieure.

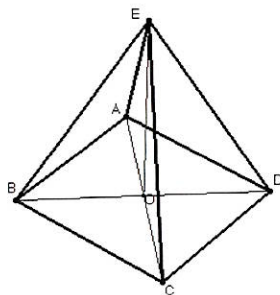
Les centres A , B , C et D des quatre sphères porteuses sont les sommets d'un carré de côté $2r$ (et de centre O).

On a donc $|AC| = 2r\sqrt{2}$ et $|IJ| = 2r\sqrt{2} - 2r = 2r(\sqrt{2} - 1) < 2r$.

Si une sphère de la couche supérieure peut venir se loger dans le « creux » des quatre sphères, elle ne peut toutefois devenir une sphère de la couche inférieure.

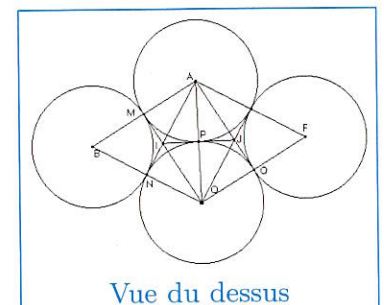
Si E est le centre de cette sphère portée alors $EABCD$ est une pyramide à base carrée dont les arêtes ont toutes la longueur $2r$.

$[EO]$ est perpendiculaire au plan $ABCD$. En considérant le triangle rectangle EOA , nous avons :



$$|EO| = r\sqrt{2} \approx 1,41421 \cdot r$$

$$\begin{aligned} |EO| &= \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} \end{aligned}$$



Vue du dessus

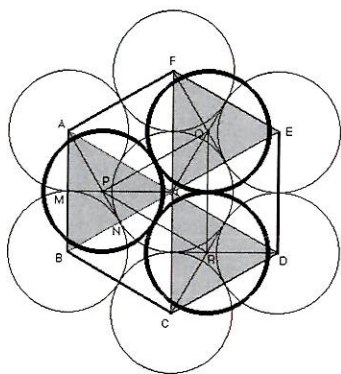
Pour ne pas clore le sujet : reprenons le cas où les centres des sphères porteuses sont les sommets d'un maillage de triangles équilatéraux de côtés $2r$. Il est intéressant à plus d'un titre.

La figure précédente laisse peut-être croire que les quatre sphères de centres A , O , B et F laissent deux « creux » disponibles pour loger deux sphères.

Si c'était le cas, la distance des centres de ces deux sphères serait celle de I et de J qui désignent les centres de gravité des triangles équilatéraux OAB et OAF .

Comme $|BP| = r\sqrt{3}$, on a $|BF| = 2r\sqrt{3}$ et $|IJ| = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

De $\frac{2r\sqrt{3}}{3} < 2r$ (puisque $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$) découle qu'il n'est pas possible de placer simultanément une sphère dans chacun des deux « creux » voisins.



Les sphères portées peuvent trouver place de façon alternée dans un creux sur deux de la première couche. La figure suivante illustre cela.

En outre, il est immédiat que $|PQ| = |AF| = 2r$, $|QR| = |ED| = 2r$ et $|PR| = |BC| = 2r$.

Les sphères de centres P , Q et R sont tangentes comme le sont des sphères voisines de la couche inférieure.

Une couche de sphères portées peut donc être posée dans les creux d'une couche de sphères porteuses mais un creux sur deux reste inoccupé.

Pour clore ce sujet : le problème des empilements de sphères est ancien. Il continue à faire l'objet de recherches et d'études poussées.

En 1611, Johannes Kepler émet la conjecture que c'est l'empilement présenté dans le quatrième cas qui permet d'atteindre la plus grande densité de sphères. Les creux qui existent dans chaque plan de sphères y sont utilisés au mieux. Kepler trouve que la densité de sphères atteint alors 74%. Mais il a fallu attendre 1998 pour qu'une démonstration validée à 99% soit présentée par Thomas Hale de l'Université de Michigan.

Mais ce qui précède n'a d'autre but que d'ouvrir des perspectives, sans plus. Si votre curiosité est éveillée et si vous voulez en savoir plus, vous pouvez consulter divers sites Internet en utilisant un moteur de recherche et en lui demandant de trouver, p. ex., Sphères + Empilements. Alors ... bonnes investigations.

Compléments

De nombreux corps chimiques simples forment des cristaux pouvant être modélisés par l'empilement de sphères. Par exemple les atomes de magnésium, de zinc et de cadmium s'assemblent suivant un empilement compact de symétrie hexagonale.

Les atomes d'aluminium, de nickel, de cuivre et d'or s'empilent plutôt en choisissant une symétrie identique au cube, mais toujours de la manière la plus compacte.

Cependant certains métaux adoptent une troisième méthode d'empilement qui n'est plus strictement le plus compact mais qui s'organise comme un cube centré. C'est le cas du fer, symbolisé par un des édifices les plus célèbres de Belgique : l'Atomium.



La boule d'Uccle et les axiomes de Falek

Francis Buekenhout

Je veux vous conter une histoire peu banale. Celle d'une authentique découverte d'un objet mathématique nouveau et intéressant accomplie par quatre rhétoriciennes de l'Athénée d'Uccle 2 le mercredi 4 février 2004. Elles s'occupaient du Module de Paix. Vous avez rencontré ce petit bonhomme plat en plastique possédant 4 membres écartés en extension et une tête soit 5 appuis où il lui est possible de se joindre à un ou plusieurs autres modules.



Le module est produit par l'œuvre humanitaire *Iles de Paix* basée à Huy en prolongement de l'action du Père Dominique Pire, prix Nobel de la Paix en 1958, un authentique grand homme Wallon.



Dominique Pire,
1910-1969

Le module possède un « look » intermédiaire entre un véritable personnage et une figure géométrique. Il a été créé par l'artiste bruxellois Paul Gonze en 1987. Il s'inspire d'un dessin célèbre dû à Léonard de Vinci (1452-1519). C'est ce qu'on appelle l'*Homme de Vitruve* en raison du fait que Léonard s'était inspiré d'un texte de Vitruve (vers 50 avant notre ère), grand ingénieur militaire et architecte romain qui a rédigé le *Traité d'Architecture* le plus fameux de l'Antiquité. Soit dit en passant, ce livre ne comporte aucun dessin. A mes yeux, il peut être considéré comme une œuvre de mathématique appliquée. Il peut prétendre au titre de seul texte mathématique original rédigé en latin durant l'Antiquité. Le suivant est dû à Alcuin (c. 735-804) qui fut le « Ministre de l'Education » de Charlemagne.



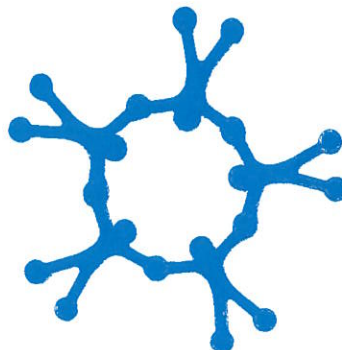
L'homme de Vitruve par
Léonard de Vinci

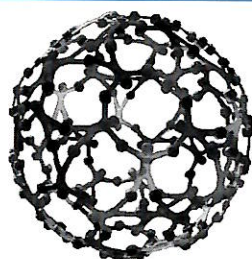


L'homme de Vitruve figure sur
la pièce italienne d'un euro.

Revenons aux modules. D'abord, il serait excitant que vous réussissiez à en rassembler un nombre assez élevé en unissant les fonds de tiroir de chacun dans la classe et quelques forces familiales ou autres. Le mieux serait d'en avoir soixante. Vous verrez pourquoi.

Une des idées de Paul Gonze imprégnées dans son module est qu'il permet de constituer des chaînes de personnages se tenant par la main. A vrai dire, ils peuvent se joindre aussi par les pieds et une jonction tête-pied est également possible parmi d'autres encore.





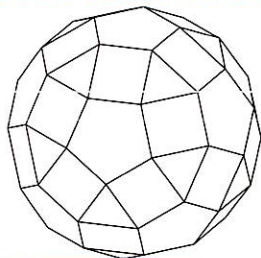
Voici quelques traits de la boule de Gonze.

La boule de Gonze est constituée de soixante modules. On distingue des cycles de cinq modules se tenant par la main et en cercle. A leurs pieds, il y a des cycles de trois modules se tenant par le pied.

La boule possède un groupe de 120 symétries, la même symétrie que le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Si vous en avez le courage, lancez-vous dans un inventaire de ce groupe.

Pour vous aider, il y a 15 demi-tours ou rotations de 180° dont l'axe passe par le milieu de deux arêtes opposées du dodécaèdre. Le nombre total de rotations est 60. Il y a 60 retournements comprenant des symétries bilatérales mais aussi des anti-rotations.



Une autre idée était celle de personnages se tenant par un appui et couvrant le monde. Paul Gonze a dû découvrir ce que nous appelons la « boule » que je préfère désormais appeler la « boule de Gonze » car il y en a d'autres. C'est un objet fabuleux. Je veux bien le décrire mais à contrecœur. Il est si excitant de le découvrir. Quelle émotion pour mon ami géomètre Edmond Dony de voir entrer la boule de Gonze, accompagnée, dans un restaurant le 13 janvier 2001. Il l'acheta et construisit bientôt un polyèdre en carton pour le modéliser. La création de l'artiste venait de rencontrer un mathématicien.

L'objet fut transmis et commenté à moi-même, puis à Claudine Da Conceição Silva et Alain Gottcheiner. À quatre, nous en avons fait une étude mathématique liée à la notion de polyèdre. Un article résume notre étude. Il est possible de télécharger librement cet article sur le site du CeDoP. En voici la référence :

F. Buekenhout, E. Dony, C. Da Conceição Silva, A. Gottcheiner. *Polyèdres de Paix*, CeDoP-ULB. 2004, 12 pages.

Il y a désormais des « Polyèdres de Paix ». Des animations en classe ont été accomplies par divers professeurs de mathématiques à divers endroits notamment par Claudine Da Conceição Silva, Stéphanie Ory, Liliane Falek et Francis Buekenhout. Un des buts est chaque fois de faire découvrir la boule de Gonze par des élèves ravis. Il est possible de réaliser cette animation dans votre classe en me contactant (fbueken@ulb.ac.be ou falek@europe.com).

Brûlons les étapes pour en venir à Uccle. Je me réfère à un rapport écrit excitant rédigé par Liliane Falek, professeur de mathématique à l'Athénée d'Uccle 2. Une classe de rhétorique enthousiaste constituée de 8 filles et 16 garçons ignorant tout des polyèdres de Paix et des modules. Ils ont cours de math de 9.05 à 9.55 puis de 11.00 à 11.50. Madame Falek doit s'absenter de 9.10 à 10.30. Elle confie la clé du local aux élèves et donne des consignes :

- constituer 4 groupes de 5 élèves et un groupe de 4 ;
- chaque groupe reçoit un sachet contenant des modules de Paix ;
- tous les sachets ont le même nombre de modules.

Il faut relier les modules en respectant certaines règles. Ces règles sont ce que j'appelle les Axiomes de Falek. Les voici.

- Construire une boule, utiliser tous les modules du sachet.
- On ne peut relier que deux mains ou deux pieds entre eux, jamais un pied avec une main, jamais plus de deux mains (ni pieds).
- Ne jamais laisser un pied ou une main libre.
- Ne jamais relier les têtes.

A la fin de l'heure, ils devaient laisser leurs constructions sur le banc, fermer le local et se rendre au cours suivant. Les retrouvailles furent chargées d'émotion. Quatre groupes avaient construit une boule de Gonze. Des effets de couleur avaient été obtenus, notamment une boule patriotique dont chaque module était noir, jaune ou rouge. Un des groupes fixa l'événement par une photo.

Surprise pour Liliane Falek. Un groupe de filles avait, sans le faire exprès comme elles disent, construit une boule tout à fait différente par sa structure. Je fus consulté quelques jours après et je fus en mesure de confirmer l'originalité de la découverte. La Boule d'Uccle était née. Un tout grand bravo à ses mamans Pauline de Wurstemberger, Coline Van der Vorst, Audrey Verbaeys, Anne-Liv Myren sans oublier les mérites du professeur Liliane Falek. La Boule d'Uccle possède le même groupe de 120 symétries que la Boule de Gonze.

Voici une description de la Boule d'Uccle. Elle est constituée de soixante modules. On distingue à nouveau des cycles de cinq modules se tenant par la main et en cercle. Aux pieds de chaque module s'attache un autre module par les pieds. Ceci est la brillante trouvaille des rhétoriciennes.

Un modèle polyédrique simple apparaît rapidement à l'observateur : il s'agit de l'icosaèdre tronqué ou [5,5,6] découvert par Archimède dans l'Antiquité.

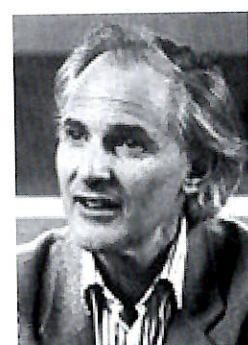
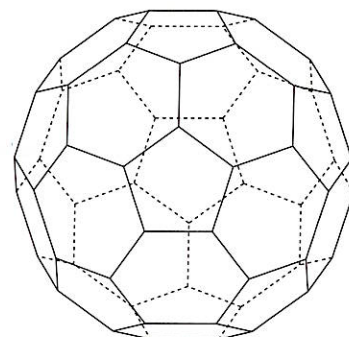
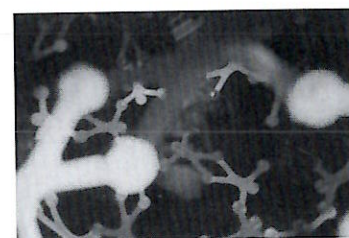
Ce polyèdre comporte deux sortes d'arêtes : celles, au nombre de 60 qui séparent un pentagone et un hexagone et celles, au nombre de... (à vous de trouver) qui séparent deux hexagones. Je dirai que les premières sont simples et les deuxièmes sont doubles. En tout sommet, vous voyez deux arêtes simples et une double. Sur la Boule d'Uccle, un sommet du polyèdre correspond à un module et une arête double correspond aux deux jambes liées de deux modules.

Un autre rapprochement s'impose en passant : l'icosaèdre tronqué représente un ballon de football ou plus exactement l'assemblage des pièces pentagonales et hexagonales constituant le ballon. Il y a mieux ! C'est la molécule de carbone C_{60} découverte en 1985. Elle valut le Prix Nobel de Chimie en 1996 à l'anglais Harold KROTO (1939-) et aux américains Robert CURL (1933-) et Richard SMULLEY (1943-).

Cette molécule a donné lieu à une foule de nouvelles molécules de carbone de plus en plus allongées qui sont appelées *Fullerènes* ou *Nanotubes*. Ces molécules sont appelées à révolutionner la chimie et l'industrie de notre siècle notamment dans le domaine des fibres et des câbles. Ricanez si vous le voulez mais une compagnie américaine étudie la construction d'un ascenseur Terre-Lune sur cette base.

Un modèle de Carbone 60 est fait de 60 boules représentant des atomes de carbone. Chaque atome est lié à deux autres par une liaison simple et à un autre par une liaison double ou covalente. Quel rapport avec la Boule d'Uccle ? Le lien m'est apparu clairement le 21 octobre après une longue et intense séance de travail la veille avec Liliane Falek : la Boule d'Uccle et la molécule de Carbone 60 sont ISOMORPHES.

Partant d'un modèle de C_{60} , on pose un module sur chaque atome. Les jambes sont orientées selon la liaison atomique double. Les bras se mettent bien et accrochent un voisin.



Harry Kroto

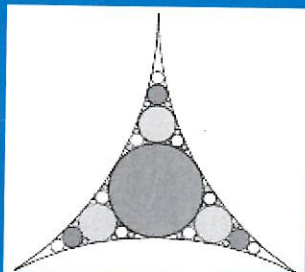
Quelles merveilles et que de perspectives ! Il existe d'autres Boules et déjà un Tube de Paix.

Le « pentagone » de Sierpinski

Nicole Lambelin

La géométrie fractale

Le premier objet fractal qui intrigua les mathématiciens fut, sans doute, la baderne d'Apollonius de Perge, trois siècles avant J.-C.



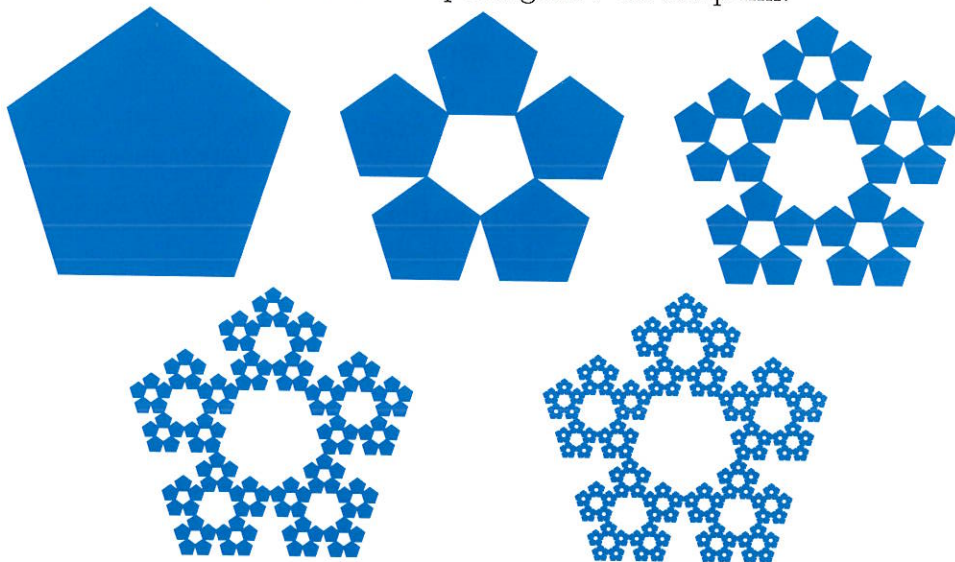
Ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle que débute l'étude de la géométrie fractale, avec notamment Georg CANTOR (1845–1918), Giuseppe PEANO (1858–1932) et Helge VON KOCH (1870–1924).

Elle est ensuite étudiée par des mathématiciens tels que Waclaw SIERPINSKI (1882–1969), Félix HAUSDORFF (1868–1942) et Gaston JULIA (1893–1978).

Il faudra cependant attendre Benoît MANDELBROT (1924—) et les progrès de l'informatique pour que cette géométrie prenne un réel essor et se vulgarise.

1. Introduction

Observons la construction du « pentagone » de Sierpinski.



Le premier pentagone est régulier. A chaque étape, on remplace chaque pentagone par cinq pentagones semblables, ayant chacun un angle commun avec le pentagone initial et un sommet commun avec deux des autres petits pentagones.

En appliquant cette transformation un nombre infini de fois, on obtient le « pentagone » de Sierpinski.

Notre but est de calculer les aires et les périmètres de ces différentes figures.

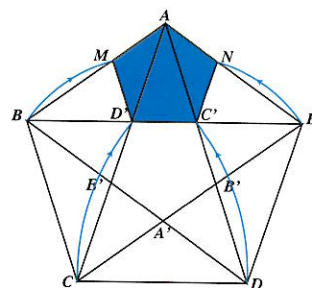
2. Pentagone et pentagramme

Soient $ABCDE$ un pentagone régulier, $ACEBD$ le pentagramme (polygone étoilé) correspondant. Soient $A'B'C'D'E'$ le pentagone régulier délimité par les côtés du pentagramme. Traçons $D'M \parallel CB$ et $C'N \parallel DE$. On a aussi $BE \parallel CD$.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AD'|}{|AC|} = \frac{|AC'|}{|AD|} = \frac{|AN|}{|AE|} = \frac{|D'C'|}{|CD|}$$

de sorte que les pentagones $ABCDE$ et $AMD'C'N$ sont semblables. Nous allons calculer le rapport de similitude.



Supposons que les côtés du pentagone $A'B'C'D'E'$ mesurent 1. Calculons les longueurs $|AD'|$, $|AB|$ et $|AC|$.

$$\cos \widehat{C'D'A} = \frac{\frac{|D'C'|}{2}}{|AD'|} = \frac{1}{2|AD'|}$$

D'où :

$$|AD'| = \frac{1}{2 \cos \widehat{C'D'A}}$$

Or la somme des angles d'un pentagone vaut $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ et donc chaque angle vaut 108° : $\widehat{E'D'C'} = 108^\circ$ et $\widehat{C'D'A} = 72^\circ$. Et donc :

$$|AD'| = \frac{1}{2 \cos 72^\circ}$$

Une calculatrice nous fournirait une valeur approchée de $\cos 72^\circ$ mais nous pouvons trouver une valeur exacte. Celle-ci est $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Le calcul est fait dans l'encadré ci-dessous. Il peut être passé car il nécessite la connaissance de trois formules étudiées en cinquième.

Ainsi

$$|AD'| = \frac{1}{2 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Calcul de $\cos 72^\circ$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}\cos 144^\circ &= \cos(-144^\circ) = \cos 216^\circ \\ \cos(2 \times 72^\circ) &= \cos(3 \times 72^\circ)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cdot \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) \\ &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

Ainsi $\cos(3 \times 72^\circ) = 4 \cos^3 72^\circ - 3 \cos 72^\circ$ et $\cos(2 \times 72^\circ) = 2 \cos^2 72^\circ - 1$
Donc

$$\begin{aligned}2 \cos^2 72^\circ - 1 &= 4 \cos^3 72^\circ - 3 \cos 72^\circ \\ 4 \cos^3 72^\circ - 2 \cos^2 72^\circ - 3 \cos 72^\circ + 1 &= 0 \\ (\cos 72^\circ - 1)(4 \cos^2 72^\circ + 2 \cos 72^\circ - 1) &= 0\end{aligned}$$

$\cos 72^\circ$ étant différent de 1 :

$$\begin{aligned}4 \cos^2 72^\circ + 2 \cos 72^\circ - 1 &= 0 \\ \cos 72^\circ &= \frac{-2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

À quoi servent les fractals ?

- À construire, stocker ou compresser des images simulant le réel (montagnes, fougère...).
- À modéliser le découpage des côtes marines, la propagation de la foudre, l'appareil respiratoire, le réseau sanguin, la structure de l'univers, des mécanismes boursiers...
- À concevoir des électrodes poreuses pour la catalyse, des murs anti-bruits.
- À aider à la création d'œuvres d'art en peinture et en musique.

Le nombre d'or

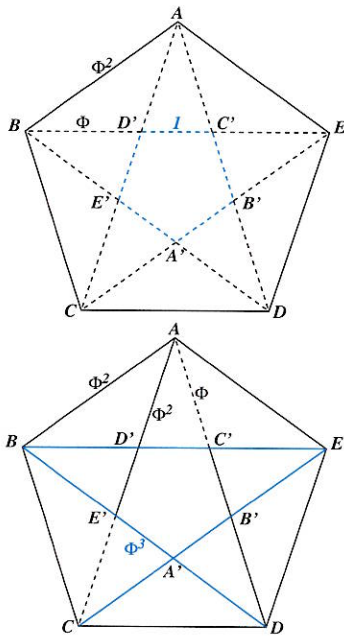
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or (phi).

$$\begin{aligned}\Phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \Phi\end{aligned}$$

Notons aussi l'égalité
 $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$



Sierpinski (1882-1969)



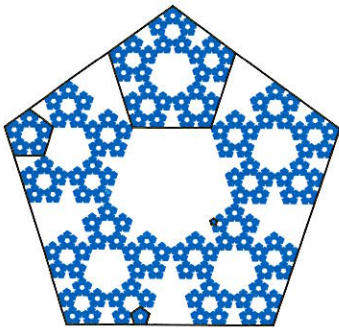
Calculons maintenant $|AB|$ et $|AC|$.

$$\begin{aligned}
 |AB|^2 &= \Phi^2 + \Phi^2 - 2\Phi^2 \cos 108^\circ & |AC| &= |AD'| + |D'E'| + |E'C'| \\
 &= 2\Phi^2(1 + \cos 72^\circ) & &= \Phi + 1 + \Phi \\
 &= 2\Phi^2 \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right) & &= \Phi + \Phi^2 \\
 &= 2\Phi^2 \left(1 + \frac{\Phi - 1}{2}\right) & &= \Phi(1 + \Phi) \\
 &= \Phi^2(2 + \Phi - 1) & &= \Phi^3 \\
 &= \Phi^2(\Phi + 1) = \Phi^4 & & \\
 |AB| &= \Phi^2
 \end{aligned}$$

Les égalités $|AB| = \Phi^2$, et $|AC| = \Phi^3$ montrent que la longueur de la diagonale d'un pentagone régulier vaut celle du côté multipliée par Φ .

Puisque les côtés des pentagones isométriques $AMD'C'N$ et $A'B'C'D'E'$ mesurent 1 et que le côté du pentagone $ABCDE$ mesure Φ^2 , le rapport de la similitude qui applique $ABCDE$ sur $AMD'C'N$ vaut $\frac{1}{\Phi^2}$.

3. Le « pentagone » de Sierpinski



Par analogie, on dessine les quatre autres pentagones de la première étape de la construction du « pentagone » de Sierpinski.

A chacune des étapes de la construction de ce dernier, chacun des pentagones déjà construits est remplacé par cinq pentagones qui lui sont semblables avec un rapport de similitude égal à $\frac{1}{\Phi^2}$. À la limite, le « pentagone » de Sierpinski est semblable à une infinité de ses parties propres qui peuvent être de taille aussi petite que l'on veut.

Soit c la mesure du côté du pentagone initial. Calculons les périmètres et aires à chacune des étapes.

Périmètres

Aires

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 5c \\
 P_2 &= 5 \cdot \left(5c \cdot \frac{1}{\Phi^2}\right) \\
 P_3 &= 5c \cdot \left(\frac{5}{\Phi^2}\right)^2 \\
 P_n &= 5c \cdot \left(\frac{5}{\Phi^2}\right)^{n-1} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

(P_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{\Phi^2} > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_1 \\
 A_2 &= A_1 \cdot \frac{5}{\Phi^4} \\
 A_3 &= A_1 \cdot \left(\frac{5}{\Phi^4}\right)^2 \\
 A_n &= A_1 \cdot \left(\frac{5}{\Phi^4}\right)^{n-1} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

(A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{\Phi^4} < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$$

Le « pentagone » de Sierpinski a donc un périmètre infini et une aire nulle.

Le « pentagone » dit « de Dürer » ne diffère de celui de Sierpinski que par la présence du pentagone central.



4. Dimension du « pentagone » de Sierpinski.

En géométrie euclidienne élémentaire, un point est de dimension 0, une ligne de dimension 1, une surface de dimension 2, un volume de dimension 3... Quelle pourrait être la dimension du « pentagone » de Sierpinski ?

Lui attribuer la dimension 1 serait peu compatible avec le fait que son périmètre est infini. Lui attribuer la dimension 2 serait peu compatible avec le fait que son aire est nulle. On peut aussi penser à changer la définition de dimension. La nouvelle définition doit, évidemment, être compatible avec les situations familières.

Hausdorff fut le premier à proposer une nouvelle définition. Nous en présentons ci-dessous une variante appelée dimension de similitude interne. Elle est valable pour des ensembles qui, comme le « pentagone » de Sierpinski, sont la réunion d'au moins deux parties propres qui lui sont semblables (les rapports de similitude étant égaux).

Notons N le nombre de parties constituant l'ensemble, et r le rapport de similitude. Dans le cas du « pentagone » de Sierpinski, $N = 5$ et $r = \frac{1}{\Phi^2}$. Remarquons que les formules donnant le périmètre et l'aire aux différentes étapes de la construction sont les suivantes :

$$\text{Périmètre : } P_n = 5c \cdot \left(\frac{5}{\Phi^2}\right)^{n-1} = P_1 \cdot (Nr)^{n-1}$$

$$\text{Aire : } A_n = A_1 \left(\frac{5}{\Phi^4}\right)^{n-1} = A_1 \cdot (Nr^2)^{n-1}.$$

La longueur du « pentagone » est infinie du fait que $Nr > 1$. Son aire est nulle du fait que $Nr^2 < 1$. La suite $(Nr^d)^{n-1}$ ne converge vers un réel non nul que si $Nr^d = 1$ (et la limite de la suite est alors 1).

La valeur de d déterminée par cette condition est prise comme définition de la dimension de similitude interne. Ceux qui ont déjà rencontré la notion de logarithme peuvent calculer la valeur de d :

$$\log(Nr^d) = \log 1$$

$$\log N + d \log r = 0$$

d'où

$$d = -\frac{\log N}{\log r}$$

Le « pentagone » de Sierpinski est la réunion de cinq parties qui lui sont semblables dans le rapport $\frac{1}{\Phi^2}$ ou de vingt-cinq parties qui lui sont semblables dans le rapport $\frac{1}{\Phi^4}$ ou ...

$$d = -\frac{\log 5}{\log \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{\log 5}{\log \Phi^2} = \frac{\log 5}{\log \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1,67227594$$

Des dimensions de similitude interne

Un segment

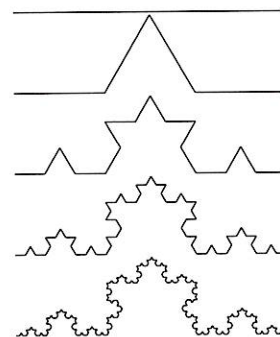
Quel que soit le naturel N , tout segment est la réunion de N petits segments N fois plus petits. Dans ce cas $r = \frac{1}{N}$ et l'exposant d tel que $Nr^d = 1$ vaut 1.

Un carré

De façon analogue, un carré est la réunion de N^2 petits carrés qui lui sont semblables avec un rapport de similitude $r = \frac{1}{N}$. Ainsi l'exposant d vaut 2.

La courbe de von Koch

Voici les cinq premières étapes de sa construction.



Pour cette courbe : $N = 4$ et $r = \frac{1}{3}$. D'où

$$d = -\frac{\log 4}{\log 1/3}$$

$$\approx 1,26185951$$

Les n -gones de Sierpinski.

Remplaçons le pentagone par n'importe quel polygone régulier à n côtés. Le rapport r_n de la similitude sera égal à

$$\frac{1}{2 \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{4})} \cos \frac{2k\pi}{n}}$$

ANNIVERSAIRE

Carl-Friedrich Gauss

Simone Trompler



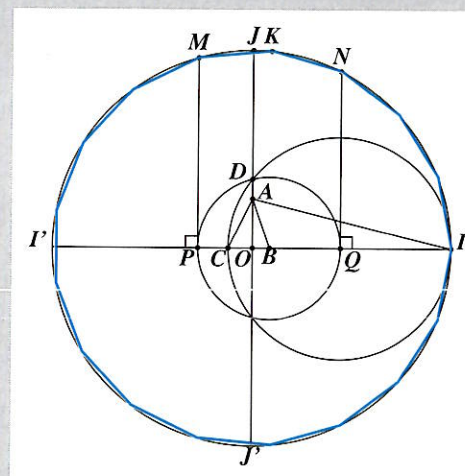
Gauss à 33 ans
(1777-1855)

Il y a cent cinquante ans mourait Carl Friedrich GAUSS, un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Très jeune, il montre de stupéfiantes dispositions pour les mathématiques. Par exemple, à 7 ans, il calcule la somme des 100 premiers nombres naturels en quelques instants, en les groupant par paires. La suite de sa vie ne démentira pas les promesses de l'enfant. En 1795 il entre à l'université de Göttingen. Parmi les étudiants, son seul ami est Farkas BOLYAI (1775-1856) dont le fils Johann sera un des fondateurs de la géométrie non euclidienne et avec lequel il correspondra pendant des années.

En 1798 il a déjà fait une de ses découvertes les plus connues : la méthode de construction d'un polygone à 17 côtés, avec la règle et le compas. En 1801, il publie le livre *Disquisitiones Arithmeticae*, presque entièrement consacré à la théorie des nombres. Il y prouve notamment qu'un polygone régulier ayant un nombre premier impair p de côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si p est du type $2^{2^k} + 1$. Pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4 , on trouve $p = 3, 5, 17, 257$ et 65537 . Pour $k = 5$, le nombre $p = 2^{2^5} + 1$ n'est pas premier. On ignore s'il existe d'autres nombres premiers de cette forme.

Comment construire à la règle et au compas un polygone régulier de 17 côtés ?

- Tracer un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires $I'I$ et $J'J$.
- Sur le segment $[OJ]$, placer un point A tel que $|OA| = \frac{1}{4}|OJ|$.
- Sur le segment $[OI]$, placer un point B tel que $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$.
- Soit C le point du segment $[I'O]$ tel que $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$ radians.
- Tracer le cercle de diamètre $[CI]$. Noter D le point d'intersection de ce cercle et de $[OJ]$.
- Tracer le cercle de centre B passant par D . Noter P et Q les points d'intersection de ce cercle avec $[I'I]$.
- Tracer les perpendiculaires à $[I'I]$ en P et Q . Noter M et N les points d'intersection de ces droites avec le demi-cercle supérieur.



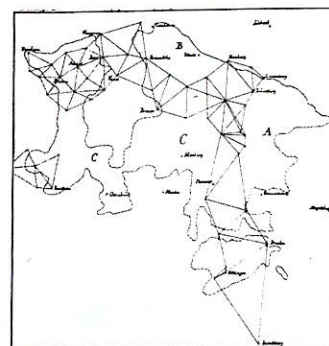
Le segment $[MN]$ est la corde d'un arc de $\frac{4\pi}{17}$ radians. Si K est le milieu de l'arc \widehat{MN} , la longueur du segment $[MK]$ est celle du côté du polygone régulier à 17 côtés.

Sources : J.-C. Carrega, *Théorie des corps, la règle et le compas*, (Ed. Hermann, 1981),
J. Miewis, *Dis Monsieur, dessine-moi un heptadécagone*, *Math-Jeunes* n° 36, (1987).

Gauss est aussi très intéressé par l'astronomie et calcule des prévisions excellentes sur la position des planètes. Il est nommé directeur de l'observatoire de Göttingen en 1807 et publie un livre, *Theoria motus corporum coelestium*, sur le mouvement des corps célestes en 1809. Mais il travaille également sur beaucoup d'autres sujets que l'astronomie, par exemple le traitement des séries, les problèmes de géodésie, ainsi que l'application d'une surface sur une autre, la mathématique statistique, etc.

Dès 1820, il s'intéresse à l'existence possible d'une géométrie non euclidienne, mais il ne publie pas ses travaux pour ne pas faire tort à sa réputation. Il publie, par contre, de nombreux articles sur la géométrie différentielle ainsi qu'un ouvrage fondamental sur ce sujet : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Il y définit notamment la *courbure* d'une surface. Les recherches de Gauss en géométrie différentielle furent le début d'un processus qui, via l'apport important de Riemann (voir ci-dessous), eut ultérieurement un impact décisif sur la théorie de la Relativité Générale. Gauss ne néglige pas pour autant la physique, particulièrement lorsque le physicien William WEBER arrive à Göttingen. Avec lui, il étudie le magnétisme terrestre et découvre les lois dites de Kirchhoff. Ensemble, ils construisent même un télégraphe électrique.

Jusqu'à la fin de sa vie, Gauss continue ses travaux, mais sans éprouver le besoin de publier ce qu'il trouve. Il suit de très près les recherches d'autres mathématiciens, comme LOBACHEVSKY. Son influence sur la mathématique de l'époque est très importante et il a été reconnu par ses pairs de son vivant, avec tous les honneurs.



Croquis de la main de Gauss relatif à la triangulation du royaume de Hanovre.

(Source : Carl-Friedrich Gauss, 1777-1977, Ed. Inter Nationes, Bonn-Bad Godesberg, 1977.)

Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826-1866)

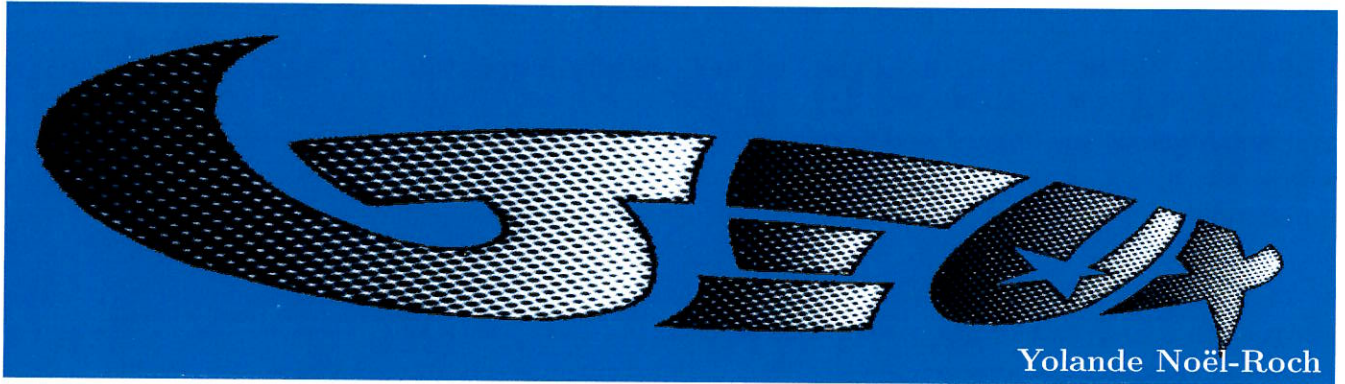
Mathématicien allemand, fils d'un pasteur luthérien, Riemann fut un bon élève, mais sans briller, excepté en mathématiques. Il montra très tôt un intérêt particulier pour cette branche et des aptitudes exceptionnelles, capable de lire en quelques jours un livre de 900 pages du mathématicien LEGENDRE sur la théorie des nombres ! A 20 ans, Riemann entre à l'université de Göttingen à la faculté de théologie, mais il demande rapidement à son père la permission de se consacrer plutôt aux mathématiques, ce qui lui est accordé. Il peut alors suivre les cours de GAUSS, notamment.

En 1847, Riemann part à l'université de Berlin. Il y continue ses études avec des maîtres de tout premier ordre. Retourné à Göttingen en 1849, il retrouve Gauss qui aura une influence primordiale sur sa pensée, de même que le physicien Weber. Il acquiert ainsi une connaissance approfondie de la physique mathématique.

La méthode de travail de Riemann est basée sur l'intuition, évitant les longs calculs dès que possible. Il contribue entre autres à la théorie des variables complexes et à l'étude des surfaces, appelées depuis *surfaces de Riemann*. Il s'intéresse aux propriétés locales des surfaces, c'est à dire à ce qui se passe sur de très petites distances autour d'un point, par le procédé de la géométrie différentielle. Mais les travaux de Riemann sont mal compris par les mathématiciens de son époque, excepté par quelques-uns comme Gauss.

Il faudra attendre plus de 60 ans, lors de l'application de ses surfaces à la relativité générale, pour que leur importance soit enfin reconnue. Riemann était de santé fragile et il contracta la tuberculose à l'âge de 36 ans. Il en mourut 4 ans plus tard avant que ses mérites aient été reconnus.





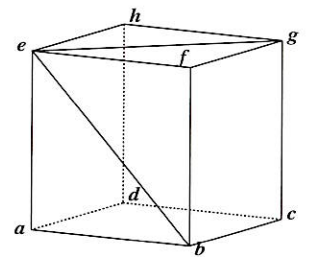
1. Des cubes patriotiques

On dispose de 27 cubes de bois blanc de 2 cm d'arête et de trois pots de couleur : noir, jaune et rouge. Comment peindre les faces des 27 cubes pour avoir la possibilité d'assembler de trois manières différentes les petits cubes peints :

- en un grand cube (6 cm d'arête!) dont l'extérieur est entièrement noir ?
- en un grand cube dont l'extérieur est entièrement jaune ?
- en un grand cube dont l'extérieur est entièrement rouge ?

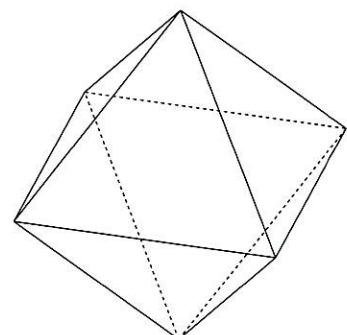
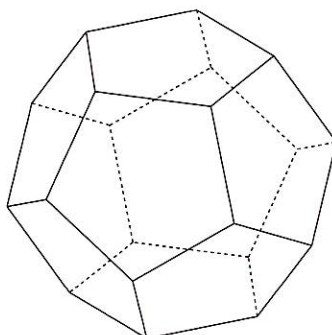
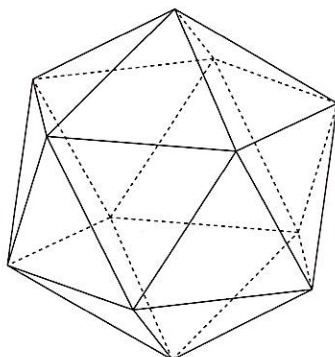
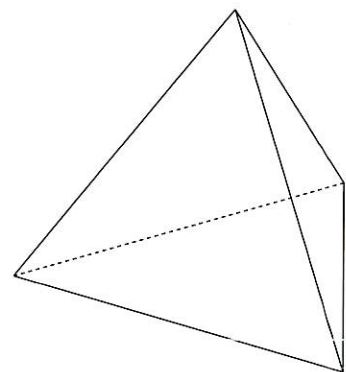
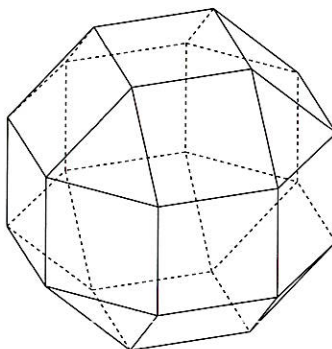
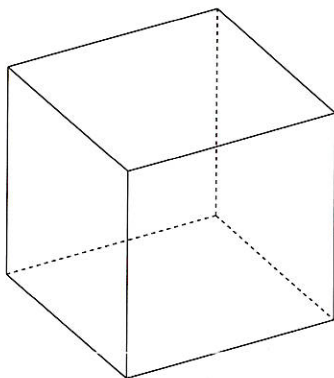
2. Un triangle trirectangle !

Dans le cube $abcdefgh$, $[eb]$ et $[eg]$ sont deux diagonales de faces, les angles \widehat{bef} et \widehat{feg} sont des angles de 45° . Ainsi, l'angle \widehat{beg} est un angle droit. De manière analogue, les angles \widehat{egb} et \widehat{gbe} sont droits ... et le triangle ebg est trirectangle ! Trouver l'erreur !

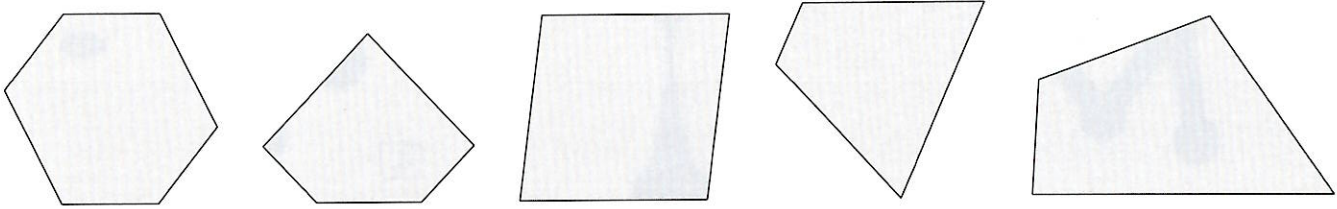


3. Trouver l'intrus

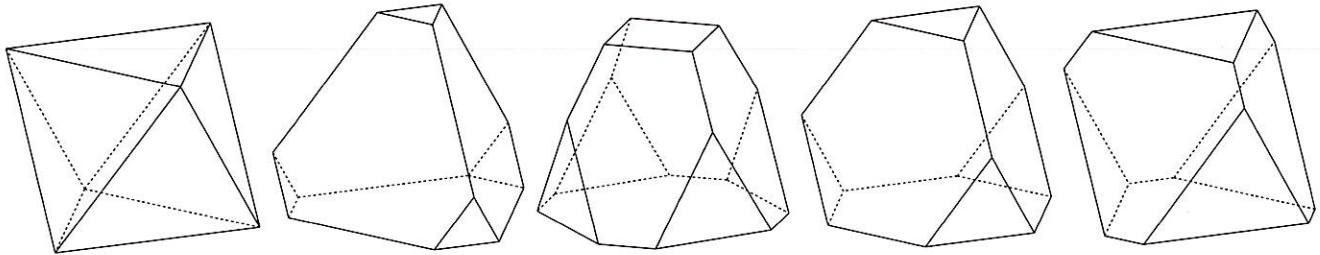
A. Parmi les polyèdres suivants, quel est l'intrus ?



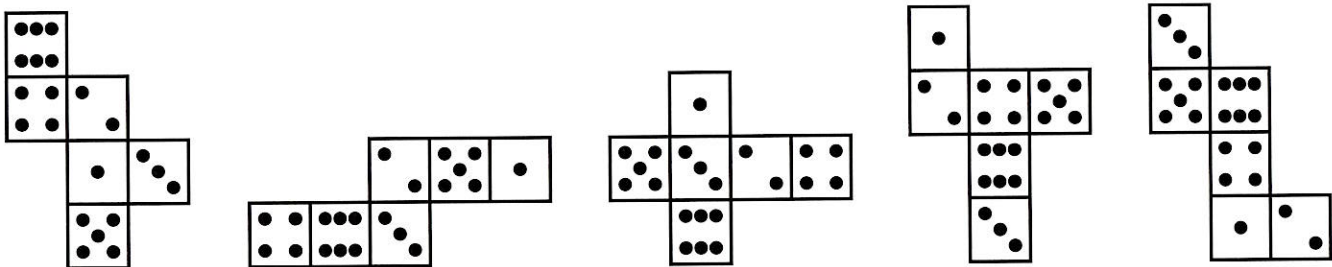
B. Parmi les cinq polygones suivants, quel est le seul qui ne peut pas être obtenu en coupant un cube par un plan ?



C. Parmi les polyèdres suivants, quel est l'intrus ?

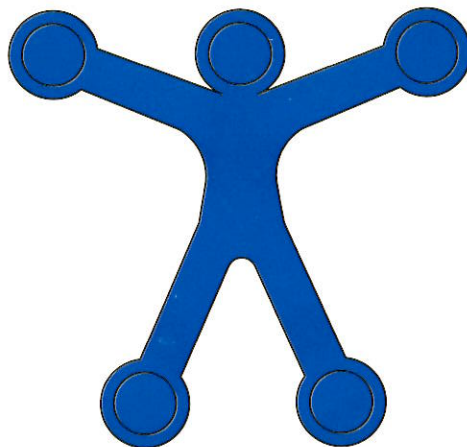


D. Parmi les assemblages de six carrés, quel est l'intrus ?



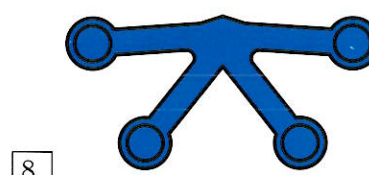
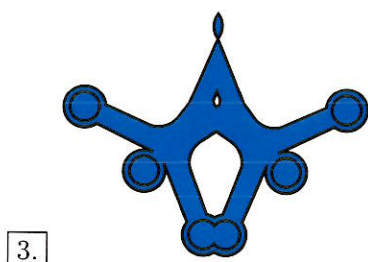
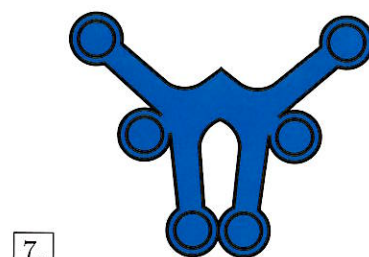
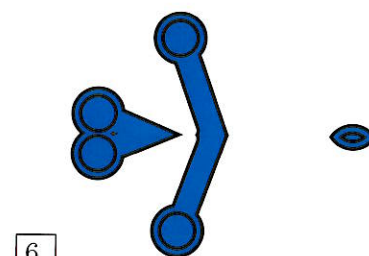
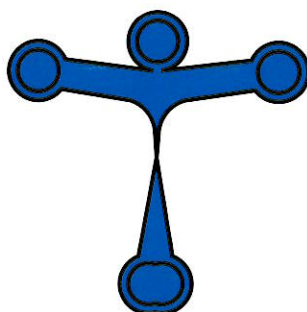
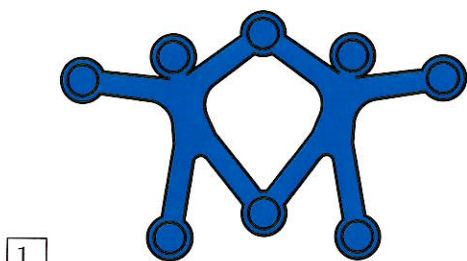
4. Des symétries « miroir »

Placez le miroir fourni dans le numéro 109 de *Math-Jeunes* sur le bonhomme de Gonze (voir l'article de F. Buekenhout dans ce numéro) de manière à créer les figures de la page suivante.

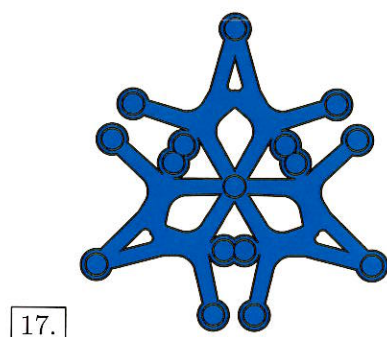
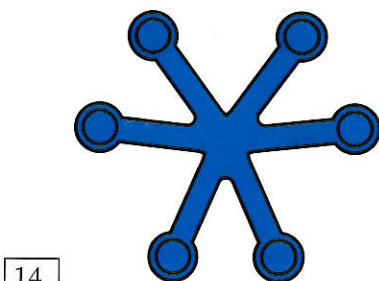
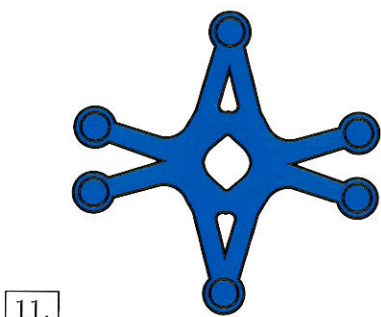
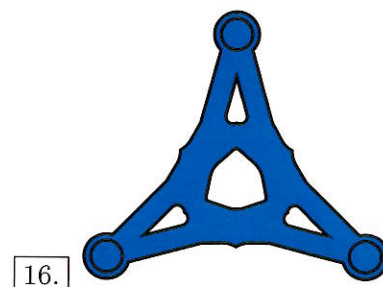
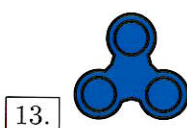
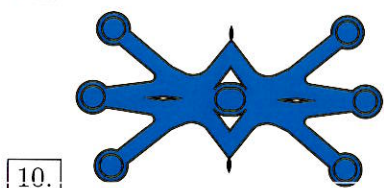
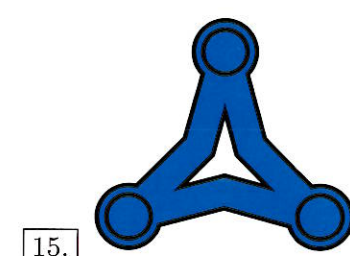
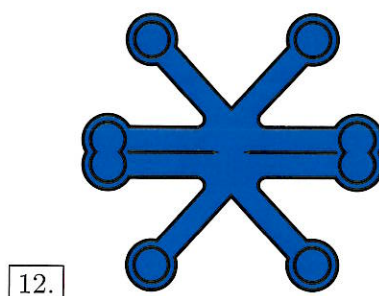
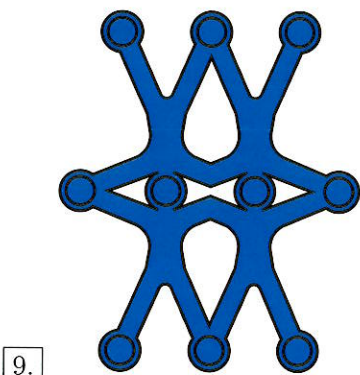


D'après Gonze

Les huit premiers dessins peuvent être associés en paires complémentaires : deux dessins complémentaires sont obtenus en plaçant le miroir au même emplacement sur le bonhomme, mais en inversant les deux faces du miroir. Les deux dessins d'une paire ne sont pas nécessairement à la même échelle, ni avec la même orientation. Pouvez-vous reconstituer les associations ?



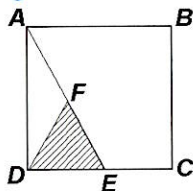
Les figures suivantes ne sont pas appariées. Pour les réaliser, vous avez besoin de DEUX miroirs, à placer ensemble sur le bonhomme de Gonze. Vous pouvez découper selon une médiane celui dont vous disposez.





Au moment où tu lis ce texte, les demi-finales de l'Olympiade Mathématique Belge ont déjà eu lieu et tu y as peut-être participé. Pour prolonger l'intérêt que tu apportes certainement à l'Olympiade et pour t'exercer en vue de ta prochaine participation, voici quelques-unes des questions des demi-finales « midi » et « maxi ».

Midi 2 - Maxi 5



Les côtés du carré $ABCD$ ont 1 cm de longueur. Le point E est le milieu de $[DC]$ et le point F est le milieu de $[AC]$. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du triangle DEF ?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{9}$

Solution

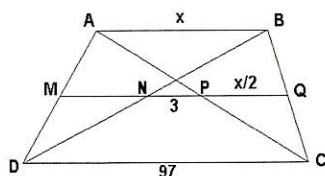
Le triangle ADE est rectangle, sa base $[DE]$ mesure $\frac{1}{2}$ cm et sa hauteur $[AD]$ mesure 1 cm, donc son aire en cm^2 vaut $\frac{1}{4}$.

Dans le triangle ADE , $[DF]$ est une médiane et divise ce triangle en deux triangles de même aire. D'où, en cm^2 , $\text{aire}[DEF] = \frac{1}{2}\text{aire}[ADE] = \frac{1}{8}$.

Midi 6

Sans réponse préformulée — Dans un trapèze, la longueur de la plus grande base vaut 97 et la longueur du segment joignant les milieux des diagonales vaut 3. Quelle est la longueur de l'autre base ?

Solution



Soit x la longueur de la petite base. Soit MQ la médiane du trapèze ; elle est parallèle aux deux bases et coupe les diagonales en leurs milieux N et P .

On sait que la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle vaut la moitié de la longueur du troisième côté. Donc dans le triangle ACB , $|PQ| = \frac{x}{2}$ et dans le triangle CBD , $|NQ| = \frac{|CD|}{2}$.
Ce qui donne $3 + \frac{x}{2} = \frac{97}{2}$ et de là $x = 97 - 6 = 91$.

Midi 11 - Maxi 11

Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

d'inconnue réelle x ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solution

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } x^2+1 = 0. \end{aligned}$$

L'équation $x^2 = -1$ n'admet aucune solution réelle, la seule solution réelle de l'équation donnée est $x = -1$.

Maxi 12

Sans réponse préformulée — Quel est le plus petit naturel de la forme $n^2 + n + 1$ qui est aussi la somme d'un carré parfait et d'un cube parfait, n étant un naturel non nul ?

Solution

Pour $n = 1, 2, \dots$, passons en revue les carrés parfaits inférieurs à $n^2 + n + 1$:

$$n = 1 : n^2 + n + 1 = 3 = 1^2 + 2.$$

$$n = 2 : n^2 + n + 1 = 7 = 1^2 + 6 = 2^2 + 3.$$

$$n = 3 : n^2 + n + 1 = 13 = 1^2 + 12 = 2^2 + 9 = 3^2 + 4.$$

$$n = 4 : n^2 + n + 1 = 21 = 1^2 + 20 = 2^2 + 17 = 3^2 + 12 = 4^2 + 5.$$

$$n = 5 : n^2 + n + 1 = 31 = 1^2 + 30 = 2^2 + 27 = 3^2 + 20 = 4^2 + 15 = 5^2 + 6.$$

Conclusion : le plus petit nombre naturel de la forme $n^2 + n + 1$ qui est la somme d'un cube parfait et d'un carré parfait est donc 31.

Midi 16

Quelle est la fraction dont l'écriture décimale est 0,125125 ?

- (A) $\frac{125}{1001}$ (B) $\frac{125}{999}$ (C) $\frac{1}{\frac{8}{3}}$ (D) $\frac{1,01}{8}$ (E) $\frac{3003}{24\,000}$

Solution

$$0,125125 = \frac{125\,125}{1\,000\,000} = \frac{125 \times 1\,001}{1\,000 \times 1\,000} = \frac{1\,001}{8 \times 1\,000} = \frac{3\,003}{24\,000}.$$

Midi 25

La factorisation réelle de $x^4 + 2$ est

- (A) $(x^2 + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$ (B) $(x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2})$
 (C) $(x^2 - 2x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + \sqrt{2})$ (D) $x^2(x^2 + 2)$
 (E) $(x^2 + \sqrt{2} + x\sqrt[4]{8})(x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt[4]{8})$

Solution

$$\begin{aligned} x^4 + 2 &= x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}x)^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{2} + x\sqrt[4]{8})(x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt[4]{8}) \end{aligned}$$

Maxi 14

Pour tout réel x , $\sqrt{1 - \sin 2x} =$

- (A) $1 - \sin x$ (B) $|\sin x - \cos x|$ (C) $\cos 2x$
 (D) $\cos x - \sin x$ (E) $\operatorname{tg} x$

Solution

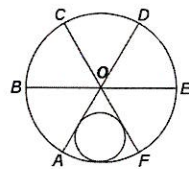
$$\begin{aligned} 1 - \sin 2x &= \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \\ &= (\cos x - \sin x)^2 \end{aligned}$$

Or on sait que $\sqrt{a^2}$ est égal à a si a est positif et égal à $-a$ si a est négatif, ce que l'on exprime par $\sqrt{a^2} = |a|$. D'où $\sqrt{1 - \sin 2x} = |\cos x - \sin x| = |\sin x - \cos x|$.

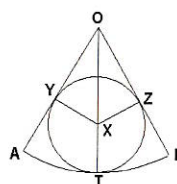
Midi 27 - Maxi 18

Sans réponse préformulée - $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit à un cercle de centre O .

Le petit cercle est tangent au grand cercle et tangent aux droites OA et OF . Que vaut le rapport de l'aire du grand disque à celle du petit disque ?



Solution



Soit X le centre du petit cercle. Traçons la droite OX , elle coupe le grand cercle en T point de tangence des deux cercles. Menons par X les droites XY et XZ perpendiculaires respectivement à OA et OF , Y et Z sont les points de tangence du petit cercle et des droites OA et OF . Soit r le rayon du petit cercle et R celui du grand cercle : $|XY| = |XZ| = |XT| = r$ et $|OT| = R$. L'angle YOZ est de 60° , donc dans le triangle rectangle OYX , $|XY| = |OX| \sin 30^\circ$ ou encore $r = \frac{1}{2}|OX|$. De là, $|OT| = |OX| + |XT| = 2r + r = 3r$.

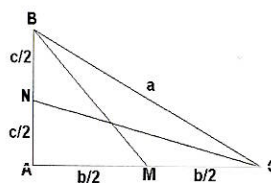
L'aire du grand disque vaut $\pi R^2 = 9\pi r^2$ et l'aire du petit disque vaut πr^2 ; le rapport des deux aires est donc 9.

Midi 30 - Maxi 20

Les médianes issues des sommets des angles aigus d'un triangle rectangle mesurent $\sqrt{20}$ et $\sqrt{40}$. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{40}+1}{2}$ (D) $\sqrt{20} + 2$
 (E) Une autre valeur

Solution



Soit BAC le triangle rectangle en A , M et N les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[AB]$. Les longueurs des médianes sont $|BM| = \sqrt{20}$ et $|CN| = \sqrt{40}$.

Avec les notations habituelles (voir figure), on a dans le triangle rectangle CAN :

$$b^2 + \frac{c^2}{4} = |CN|^2 = 40;$$

dans le triangle rectangle BAM :

$$c^2 + \frac{b^2}{4} = |BM|^2 = 20.$$

D'où $4b^2 + c^2 = 160$ et $4c^2 + b^2 = 80$. Additionnons ces deux égalités : $5b^2 + 5c^2 = 240$ d'où $5a^2 = 240$, $a^2 = 48$ et $a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

RALLYE

problèmes

Nicole Miewis

Solutions des problèmes proposés dans les numéros 109 et 110.

1. Le courrier urgent

Le motard a roulé 20 minutes en moins que d'habitude. Il aurait employé ce temps pour aller de son point de rencontre avec le vélo jusqu'à l'aéroport et retour. Il aurait donc mis 10 minutes pour parcourir ce trajet. Lorsqu'il a rencontré le cycliste, l'avion avait atterri depuis déjà 30 minutes : ce dernier était donc en avance de 40 minutes sur son horaire.

2. Alphabet secret

Le nombre y est le reste de la division entière de $29x$ par 26. La lettre A est associée à $x = 0$. Le quotient entier de 29×0 par 26 vaut 0 et le reste y vaut 0. La lettre B est associée à $x = 1$. Le quotient entier de 29×1 par 26 vaut 1 et le reste vaut 3.

Le quotient entier de $29x$ par 26 vaut x si $26x \leq 29x < 26(x+1)$ c'est-à-dire si $0 \leq 3x < 26$ ou encore $0 \leq x \leq 8$ (lettres A à I). Dans ce cas le reste y vaut $29x - 26x = 3x$.

Le quotient entier de $29x$ par 26 vaut $x+1$ si $26(x+1) \leq 29x < 26(x+2)$ c'est-à-dire si $0 \leq 3x - 26 < 26$ ou encore $9 \leq x \leq 17$ (J à R). Dans ce cas le reste y vaut $29x - 26(x+1) = 3x - 26$.

Le quotient entier de $29x$ par 26 vaut $x+2$ si $26(x+2) \leq 29x < 26(x+3)$ c'est-à-dire si $0 \leq 3x - 52 < 26$ ou encore $18 \leq x \leq 25$ (lettres S à Z). Dans ce cas le reste y vaut $29x - 26(x+2) = 3x - 52$.

On peut présenter le codage par un tableau :

| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|--------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| y | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 1 | 4 | 7 | 10 |
| Lettre codée | A | D | G | J | M | P | S | V | Y | B | E | H | K |

| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| y | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| Lettre codée | N | Q | T | W | Z | C | F | I | L | O | R | U | X |

Le texte

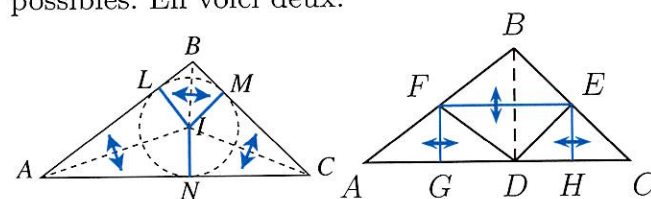
MCQTM ZMCFM YGY MF CM ZMTQCM

se décode en

ESOPE RESTE ICI ET SE REPOSE

3. Les soucis du fourreur

Soit ABC le morceau de fourrure qu'il s'agit de retourner à l'endroit tout en conservant la forme triangulaire désirée. Plusieurs découpages sont possibles. En voici deux.



Dans la figure de gauche, on a tracé le cercle inscrit au triangle ABC . Il est tangent aux côtés du triangle en L , M , N . Les quadrilatères $ALIN$, $BMIL$ et $CNIM$ sont des cerf-volants qu'il suffit de retourner autour de leur axe de symétrie.

Dans la figure de droite, on a mené $BD \perp AC$ et noté E et F les milieux des côtés BC et AB . La médiane DF du triangle rectangle ABD mesure la moitié de l'hypoténuse AB puisque F

est le centre du cercle circonscrit au triangle. On peut donc retourner le triangle isocèle AFD autour de sa médiane FG . De même, on retourne le triangle DEC autour de sa médiane EH .

Le quadrilatère $BEDF$ est un cerf-volant – puisque $|FB| = |FD|$ et $|EB| = |ED|$ – que l'on retourne suivant son axe de symétrie FE .

Le fourreur peut donc aussi découper ABC suivant les droites DE et DF , puis retourner les parties obtenues sur elles-mêmes et les recoudre.

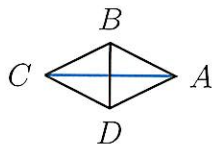
4. Les quatre points

• Configuration (1,5)

Une distance a , cinq distances b .

On place les trois premiers points au sommet d'un triangle équilatéral, ce qui donne trois distances b . Le quatrième point doit être placé de manière à donner deux distances b et une distance différente a . Ce quatrième point est le sommet du losange formé de deux triangles équilatéraux.

$$|AB| = |BC| = |CD| \\ = |DA| = |BD| = b$$

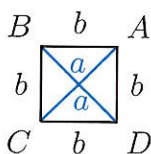


• Configuration (2,4)

Deux distances a , quatre distances b .

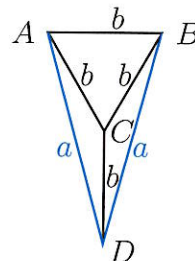
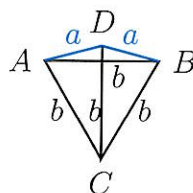
Il y a deux situations suivant que les deux segments de longueur a ont une extrémité commune ou non.

S'ils n'ont pas d'extrémité commune, notons-les $[AC]$ et $[BD]$. Les quatre segments de longueur b sont $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, de sorte que les deux triangles ABC et ADC sont isocèles et ont une « base » commune $[AC]$. Les points B et D étant distincts et à la distance b de A comme de C , ne peuvent être que de part et d'autre de AC et le quadrilatère $ABCD$ est un losange. De plus, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce losange ont même longueur, et $ABCD$ est un carré.



Si les deux segments de longueur a ont une extrémité commune, notons celle-ci D et A , B les deux autres extrémités. Le triangle ABC est alors équilatéral. Le quatrième point D doit se trouver sur le cercle de centre C et de rayon b , et à la distance a de A et B . Deux figures sont possibles selon que $a < b$

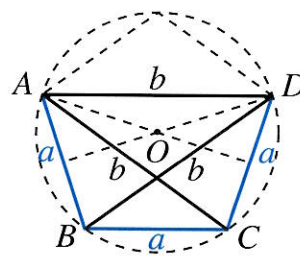
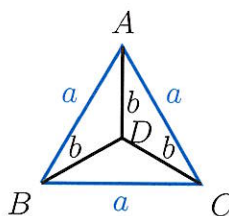
ou $a > b$. En particulier, si $a < b$, le quadrilatère $ABCD$ est un cerf-volant dont l'axe de symétrie a la même longueur que les deux grands côtés.



• Configuration (3,3)

Trois distances a , trois distances b .

Si les trois segments de longueur a sont les côtés d'un triangle équilatéral ABC , le quatrième point D ne peut être que le centre de gravité de ce triangle, situé à la distance b des trois sommets.



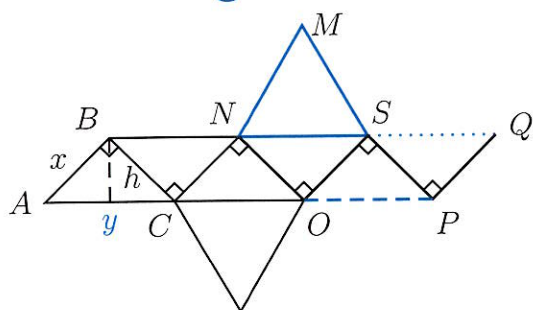
Les trois segments de longueur a peuvent ne pas constituer un triangle : si l'extrémité du troisième ne coïncide pas avec l'origine du premier. Dans ce cas, nous pouvons les noter $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$. Le point D est alors sur la médiatrice de $[AB]$ et le point A sur celle de $[CD]$. Le point O intersection de ces deux médiatrices est à égale distance de A , B , C et D . Le quadrilatère $ABCD$ est donc inscriptible.

Puisque $|AB| = |BC| = |CD|$, les angles inscrits \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{ADB} , \widehat{BDC} , \widehat{ACB} et \widehat{CBD} sont égaux. Notons α leur valeur commune. On a aussi $\widehat{ADC} = 2\alpha = \widehat{ACD} = \widehat{DBA} = \widehat{DAB}$. Enfin $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 3\alpha$ et $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 5\alpha$.

Or, dans un quadrilatère inscriptible, la somme de deux angles opposés vaut 180° .

Par conséquent $\alpha = 36^\circ$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 108^\circ$. Il en résulte que les points A , B , C et D sont quatre sommets consécutifs d'un pentagone régulier.

5. Le berlingot



Plions un demi-patron et observons la forme du demi-berlingot obtenu en ajustant les sommets M et Q . Puisque $|MN| = |OP|$ et que $|NO| = |PQ|$, le quadrilatère $MNOP$ est un parallélogramme.

Puisque $SO \perp ON$ et $ON \parallel MP$, on a $SO \perp MP$. Mais MP est aussi orthogonal à SP , donc MP est orthogonal au plan SOP . Dès lors $MP \perp PO$ et le parallélogramme $MNOP$ est un rectangle.

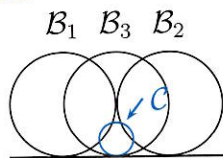
Ce demi-berlingot est ainsi une pyramide à base rectangulaire; sa hauteur est la hauteur h du triangle SOP issue de S puisque le plan de ce triangle est orthogonal au plan de la base $MNOP$ de la pyramide.

L'aire de la base est xy et le volume du berlingot entier est $\frac{2}{3} \times xyh$.

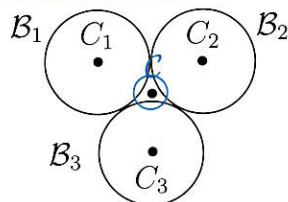
Puisque le triangle ABC est rectangle isocèle, on a $y = x\sqrt{2}$ et $h = x\frac{\sqrt{2}}{2}$: le volume du berlingot est $\frac{2}{3}x^3$. Si le volume est de $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$, alors, à 1 mm près, $x = 91 \text{ mm}$.

6. Le cochonnet

Vue parallèlement à la table



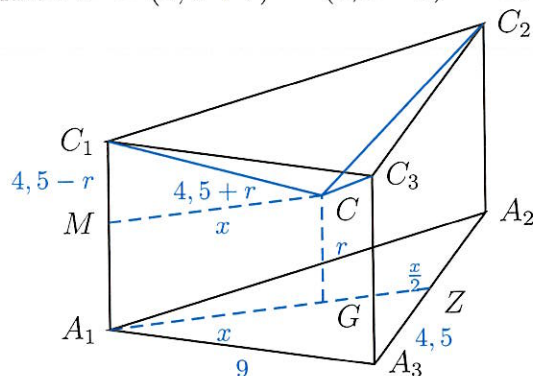
Vue perpendiculairement à la table.



Les centres C_1, C_2 et C_3 des trois boules B_1, B_2 et B_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral. Si l'on projette C_1, C_2, C_3 et le centre C du cochonnet sur la table, perpendiculairement à celle-ci, on obtient à nouveau un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ dont le centre de gravité G est la projection de C .

Le rayon des boules de pétanque est 4,5 cm. Soit r le rayon du cochonnet et x la longueur du segment $[A_1G]$. Soit M la projection orthogonale de C sur C_1A_1 . Remarquons que la médiane A_1GZ est aussi une hauteur du triangle $A_1A_2A_3$; le point G étant situé au tiers de A_1Z à partir de Z , on a $|GZ| = \frac{x}{2}$.

Dans le triangle C_1CM rectangle en M , on peut écrire : $x^2 = (4,5 + r)^2 - (4,5 - r)^2 = 18r$.



Dans le triangle A_1A_3Z rectangle en Z , on peut écrire : $(x + \frac{x}{2})^2 = 9^2 - 4,5^2$; d'où $x^2 = 27$.

Finalement, $18r = 27$ et $r = 1,5$. Le diamètre du cochonnet est de 3 cm, soit exactement le tiers du diamètre des boules de pétanque.

7. Le tableau

Ligne 0 : $f(0, n) = n + 1$

Ligne 1 : $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$ et $f(1, n) = f(0, f(1, n-1)) = 1 + f(1, n-1)$. D'où $f(1, 1) = 3$, $f(1, 2) = 4$, ... $f(1, n) = 2 + n$.

Ligne 2 : $f(2, 0) = f(1, 1) = 3$ et $f(2, n) = f(1, f(2, n-1)) = 2 + f(2, n-1)$. D'où $f(2, n) = 3 + 2n$.

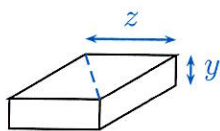
Ligne 3 : $f(3, 0) = f(2, 1) = 5$ et $f(3, n) = f(2, f(3, n-1)) = 3 + 2f(3, n-1)$. D'où $f(3, 1) = 13$, $f(3, 2) = 29$, $f(3, 3) = 61$, $f(3, 4) = 125$, $f(3, 5) = 253$... On remarque qu'en augmentant tous ces nombres de 3, on obtient la suite géométrique 8, 16, 32, 64, 128, 256... On peut donc conjecturer la formule $f(3, n) = 2^{n+3} - 3$.

Vérifions par récurrence : on a bien $f(3, 0) = 2^{0+3} - 3$ et si $f(3, n-1) = 2^{n-1+3} - 3$, alors $f(3, n) = 2(2^{n+2} - 3) + 3 = 2^{n+3} - 3$.

Par conséquent $f(3, 2004) = 2^{2007} - 3$.

8. Les calissons

Les calissons sont des losanges dont les angles sont de 60° et 120° .



Puisque l'aire d'un triangle équilatéral de côté z est $\frac{z^2\sqrt{3}}{4}$, le volume d'un calisson est $\frac{z^2\sqrt{3}}{4} \times 2 \times y = \frac{yz^2\sqrt{3}}{2}$. Puisque les 216 calissons occupent exactement un volume de 972 cm^3 , on a $108yz^2\sqrt{3} = 972$, d'où $y = \frac{3\sqrt{3}}{z^2}$.

Si 216 calissons sont disposés sur 8 couches, chaque couche est constituée de 27 calissons. L'aire d'une base de la boîte est donc

$$B = \frac{z^2\sqrt{3}}{4} \times 2 \times 27 = 27z^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or l'aire d'un hexagone de côté x est six fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté x . Donc $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \times 6 = 27z^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $x = 3z$.

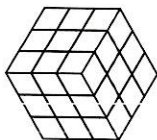
La surface latérale de la boîte se compose de 6 rectangles d'aire $x \times 8y = \frac{72\sqrt{3}}{z}$; l'aire latérale L vaut donc $\frac{432\sqrt{3}}{z}$.

L'aire totale de la boîte vaut $T = 2B + L = 2 \times 27z^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{432\sqrt{3}}{z} = \sqrt{3}\frac{27z^3+432}{z} = 3\sqrt{3}\frac{x^3+432}{x}$.

Il nous faut chercher la valeur de $x > 0$ qui rend minimum cette fonction $f(x) = 3\sqrt{3}\frac{x^3+432}{x}$. Sa dérivée $f'(x) = 6\sqrt{3}\frac{x^3-216}{x^2}$ s'annule en $x = 6$. Cette valeur conduit bien à un minimum comme on peut le voir en représentant la fonction, en étudiant le signe de la fonction dérivée ou en calculant la valeur en ce point de la dérivée seconde.

Ainsi $x = 6$, $z = 2$ et $y = \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1,29904$. Au mm près, $y = 13 \text{ mm}$.

Il y a plusieurs façons de partager un hexagone régulier en 27 losanges isométriques. En voici une.



9. Drôle de nombre

Notons $N = \overline{abcdefghi}$ le nombre cherché et C_n ($1 \leq n \leq 9$) la condition

« Le nombre formé des n premiers chiffres de N est divisible par n . »

Les conditions C_1 et C_9 sont satisfaites quel que soit l'ordre des chiffres 1, ..., 9. La condition C_5 impose $e = 5$. Les conditions C_2 , C_4 , C_6 et C_8 imposent que les chiffres b , d , f et h sont pairs.

Les conditions C_3 et C_6 imposent que les trois nombres \overline{abc} , \overline{def} et \overline{ghi} sont multiples de 3.

Puisque \overline{def} est multiple de 3, que d et f sont pairs et que $e = 5$, ou bien d et f valent (à l'ordre près) 2 et 8, ou bien ils valent 4 et 6. Mais \overline{cd} devant être multiple de 4, et c impair, d ne peut valoir ni 4 ni 8. Il nous reste deux possibilités : $N = \overline{abc258ghi}$ ou $N = \overline{abc654ghi}$.

Si $N = \overline{abc258ghi}$, h peut valoir 4 ou 6. Mais $\overline{8gh}$ doit être multiple de 8 et g est impair. Donc $h = 6$ (d'où $b = 4$) et g vaut 1 ou 9. Comme \overline{ghi} doit être multiple de 3, $g = 1$ ne convient pas, et si $g = 9$, alors $i = 3$. Ceci nous laisse deux nombres candidats : 147 258 963 et 741 258 963. Aucun des deux ne vérifie la condition C_7 .

Si $N = \overline{abc654ghi}$, h peut valoir 2 ou 8. Mais $\overline{4gh}$ doit être multiple de 8 et g est impair. Donc $h = 2$ (d'où $b = 8$) et $\overline{4gh} = 432$ ou $\overline{4gh} = 472$. Mais $\overline{g2i}$ doit être multiple de 3. Si g vaut 3, i peut valoir 1 ou 7; si g vaut 7, i peut valoir 3 ou 9. Ainsi $\overline{654ghi}$ peut valoir 654 321, 654 327, 654 723 ou 654 729. Dans chacun de ces cas, b vaut 8 mais a et c peuvent encore prendre deux valeurs. Nous avons donc cette fois huit nombres pour lesquels il reste à vérifier la condition C_7 :

789 654 321 ; 987 654 321 ; 189 654 327 ;
981 654 327 ; 189 654 723 ; 981 654 723 ;
183 654 729 ; 381 654 729 ;

Seul le dernier vérifie la condition C_7 . Ainsi $N = 381654729$.

10. Les gaufrettes

En perçant un trou, le fabricant enlève deux lamelles de chocolat ayant chacune la forme d'un rectangle d'aire $(50 - 2x) \times (22 - 2x)$. Mais il crée un trou dont les faces ont une aire totale de $[6 \times (50 - 2x) + 6 \times (22 - 2x)] \times 2$.

La quantité de chocolat utilisée ne change pas lorsque

$$(50 - 2x) \times (22 - 2x) = [6 \times (50 - 2x) + 6 \times (22 - 2x)] \times 2$$

d'où l'on tire l'équation $x^2 - 30x + 167 = 0$. Cette équation a deux solutions $x_1 = 15 + \sqrt{58} \simeq 22,616$ et $x_2 = 15 - \sqrt{58} \simeq 7,384$.

Comme x ne peut être supérieur à 11, seule la valeur 7,384 est acceptable.

Solutions des jeux

1. Des cubes patriotiques

Si deux petits cubes ont trois faces de même couleur, ces trois faces ont un sommet commun ; s'ils ont deux faces de même couleur, elles ont une arête commune.

Exemple de lecture du tableau : d'après la première colonne, un seul cube doit avoir trois faces jaunes et trois faces rouges.

| Nombre de cubes | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Noir | | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| Jaune | 3 | | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| Rouge | 3 | 3 | | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |

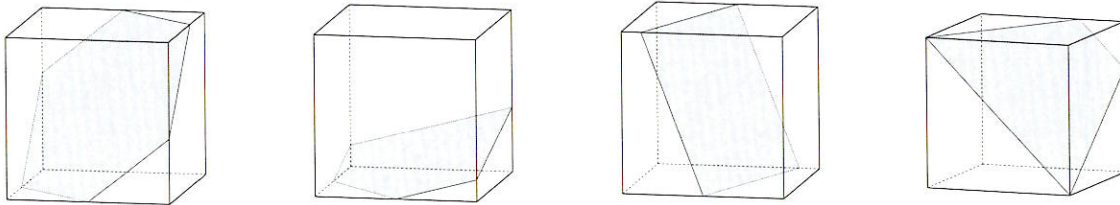
2. Un triangle trirectangle !

La mesure de l'angle \widehat{beg} n'est pas la somme des angles \widehat{bef} et \widehat{feg} qui sont situés dans des plans différents.

3. Trouver l'intrus

A. Cinq des six polyèdres sont les cinq polyèdres réguliers : cube (hexaèdre), tétraèdre, icosaèdre, dodécaèdre et octaèdre. L'intrus est le deuxième polyèdre, qui n'est pas régulier. Il s'agit du rhombicuboctaèdre.

B. L'intrus est le cinquième polygone : si un plan coupe quatre faces d'un cube, au moins deux côtés de la section doivent être parallèles. Les quatre premiers polygones sont obtenus comme suit :



C. Au moins deux polyèdres peuvent être considérés comme des intrus. Le premier est le seul à être régulier. Le troisième est le seul qui ne peut être obtenu à partir d'un tétraèdre régulier que l'on ampute de petits tétraèdres en ses quatre sommets.

D. Les cinq assemblages sont cinq développements d'un cube. Dans le deuxième, la somme des points marqués sur les faces opposées ne vaut pas toujours 7, ce n'est donc pas le développement d'un dé standard.

4. Des symétries « miroir »

Les dessins associés sont : 1 et 2, 3 et 6, 4 et 5, 7 et 8.



David HILBERT (1862-1943)

Célèbre mathématicien allemand, né à Königsberg, il y fait ses études primaires et secondaires, puis entre à l'université et y devient professeur ordinaire en 1893. En 1895, il est nommé à l'université de Göttingen où il se fixe jusqu'à sa retraite, malgré des offres très intéressantes, entre autres à Berlin.

Dès le début de sa carrière, il publie des travaux importants, notamment en théorie algébrique des nombres. Il est très connu pour son livre *Fondements de la géométrie*, publié en 1899. Il y fait une étude systématique des axiomes d'Euclide et fournit une axiomatique rigoureuse de la géométrie euclidienne. Ce livre a eu un retentissement énorme et une influence prédominante dans l'approche axiomatique des mathématiques qui a prévalu au vingtième siècle. Même l'enseignement moyen a répercuté cette tendance en introduisant ce qu'on a appelé les « mathématiques modernes ».

En 1900, lors d'un congrès international de mathématiciens à Paris, Hilbert fait une allocution qu'il titre *Problèmes mathématiques*. Il propose 23 problèmes qui représentent à peu près tous les sujets de recherche de ses successeurs. Sa préoccupation apparaît clairement dans son introduction :

« qui de nous ne serait heureux de lever le voile derrière lequel le futur est caché ; de jeter un regard sur les prochaines avancées de notre science et sur les secrets de son développement durant les futurs siècles ? [...] Quelles nouvelles méthodes et quels nouveaux faits les nouveaux siècles vont-ils révéler dans le champ vaste et riche de la pensée mathématique ? »

Beaucoup de mathématiciens du vingtième siècle se sont attelés à ces problèmes qui ne sont pas encore tous résolus.

S. Trompler

Math-Jeunes

Périodique trimestriel

15, rue de la Halle - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G. NOËL
Rue de la Culée 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
p.p.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu

Refusé

Décédé

Adresse insuffisante

N'habite plus à l'adresse
indiquée