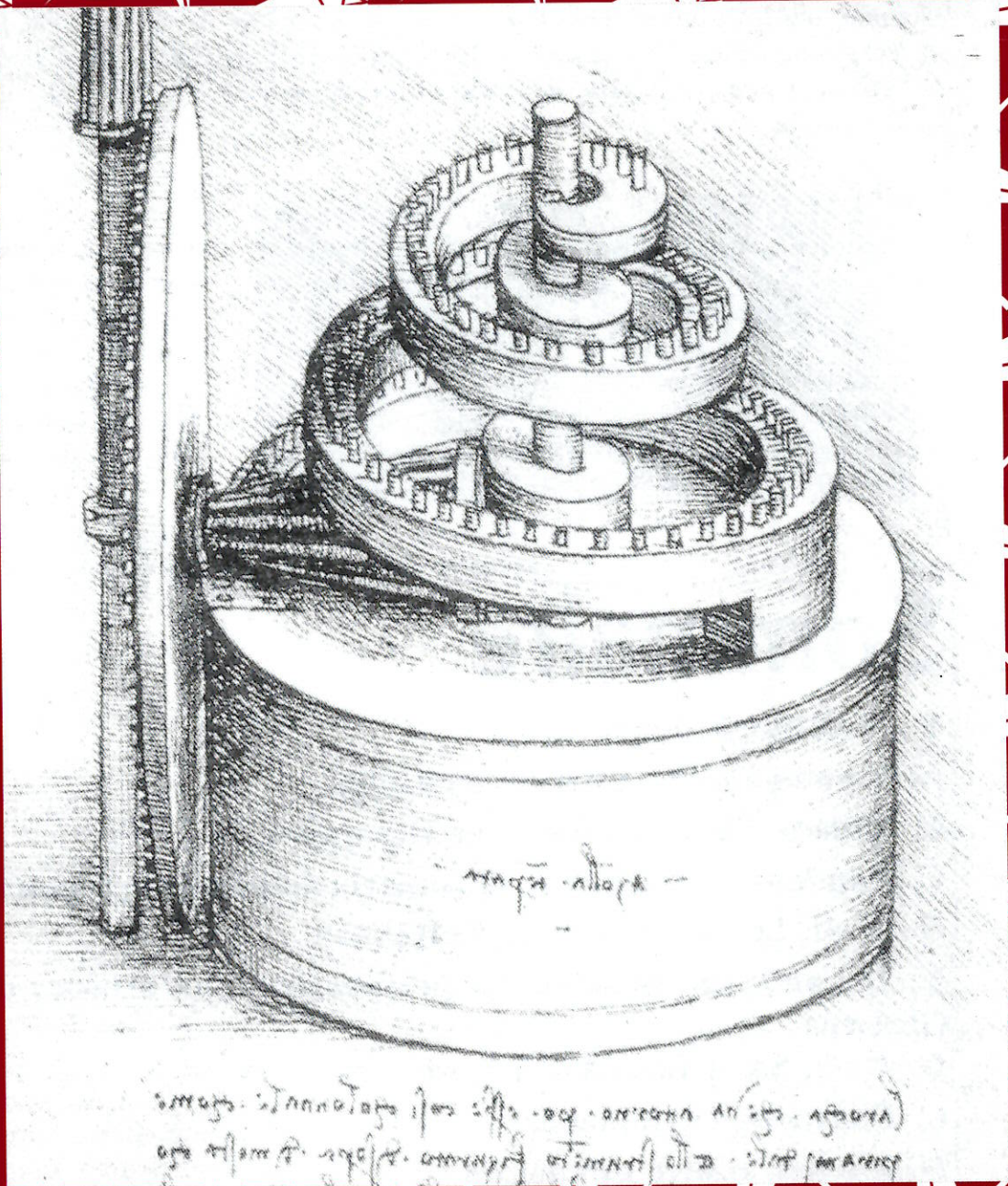


Janvier 2006 – 27^e année – N 113 S



Math-Jeunes

Mathématique et Art



Leonardo da VINCI (1452–1519)

"Que nul ne me lise s'il n'est pas mathématicien", *Quaderno d'Anatomia*, 1485.



Peintre italien, né près de Florence dans le village du même nom. À 16 ans le jeune Leonardo entre dans l'atelier de Verrochio qui lui enseigne la sculpture, la peinture, la décoration et la gravure. Il a pour compagnons d'autres peintres devenus célèbres tels que Botticelli, Le Perugien et Ghirlandaïo.

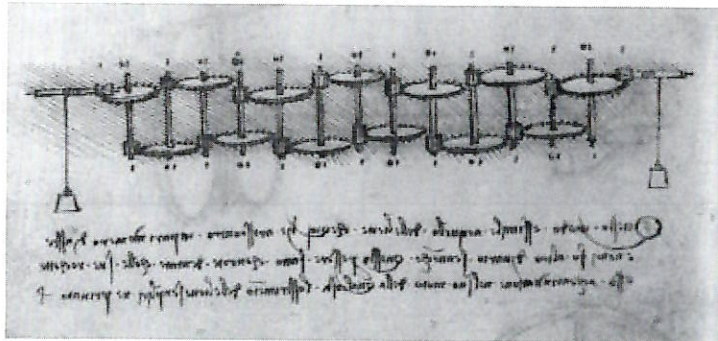
A 20 ans il entre dans l'atelier d'Ucello et se passionne comme lui pour la géométrie et la perspective. C'est en autodidacte qu'il se familiarise avec toutes les sciences de l'époque. Il est appelé à Milan par Ludovic le More en 1482 et reste à son service jusqu'en 1501.

Les activités de Leonardo da Vinci sont incroyablement variées : il sculpte, peint, décore, invente des dispositifs automatiques pour les divertissements, est ingénieur, urbaniste... Il écrit un traité de peinture, et d'autres de botanique, de géologie, d'anatomie, d'hydraulique,

le tout illustré de très nombreux dessins.

Comme tous les peintres de la Renaissance, il se déplace de ville en ville, d'après ses protecteurs et leurs commandes. François 1er le fait venir en 1516 au château de Cloux, près d'Amboise avec le titre de « premier peintre, ingénieur et architecte du roi ». Il ne reste que 15 des 30 tableaux qu'il a peints.

S. Trompler



Ci-contre, le schéma par Leonardo da Vinci d'une machine qui pourrait être une additionneuse. Quand une roue effectue 10 tours, sa voisine en effectue un. Treize roues étant alignées, les frictions sont trop fortes pour qu'une telle machine puisse fonctionner.

En couverture : un dessin de Leonardo da Vinci représentant un engrenage en forme de spirale hélicoïde. Comme le précédent, ce dessin est extrait du « Codex de Madrid ».

Sommaire

Y. Noël-Roch, Jeux	2
N. Vandenabeele, L'art au quotidien	6
C. Villers, Photographie avec Desargues	10
C. Randour et J. Drabbe, Géométrie descriptive et anamorphoses	14
G. Noël, Les aquarelles de F. Robaux	17
Y. Durand, La construction perspective d'un tableau de Petrus Christus	19
G. Noël, Saint-Léon sur Vézère	25
C. Festraets, Olympiades	29
N. Miewis, Rallye problèmes	31

Math-Jeunes

Art et Mathématique

Réaliser un numéro de *Math-Jeunes* sur le thème « Art et Mathématique » peut paraître étrange. Nombreux sont ceux qui estiment ces deux domaines antagonistes. Ils opposent un « tempérament artistique » spontané, libre à un « tempérament mathématique » qui serait aride, calculateur. Ils croient en une opposition entre intuition et déduction. Ceux-là se fourvoient complètement. Dans la pièce « Partition », présentée récemment au *Rideau de Bruxelles*, le grand mathématicien anglais G. Hardy s'exprime ainsi :

Un mathématicien, comme un peintre ou un poète, est créateur de formes. Ses formes, tout comme les leurs, doivent être belles si elles sont créées pour durer. Oscar Wilde croyait en l'art pour l'art. Je crois aux mathématiques pour l'art, comme tout vrai mathématicien.

Ces propos ne sont pas simples propos de théâtre. Dans ses commentaires sur la pièce, Luc Lemaire, professeur à l'ULB, ajoutait

Au départ de toute invention mathématique, on a un acte de création tout à fait comparable à la création artistique.

Oui, le mathématicien se passionne pour la mathématique parce qu'il y rencontre la beauté, comme le peintre en peinture ou le musicien en musique. Mais les rapports entre art et mathématique ne s'arrêtent pas là. Il est également souhaitable de mettre en évidence les interactions directes entre ces deux domaines.

Bien entendu, nous devons faire des choix. Nous renoncerons donc à décrire les rapports de la mathématique avec la musique ou avec la littérature, ou encore avec l'histoire de l'art. Un sujet incontournable est la peinture, notamment l'apprentissage des techniques de représentation en perspective par les peintres de la Renaissance. *Math-Jeunes* a déjà abordé ce sujet à plusieurs reprises (voir notamment les n° 92 et 107). Cette fois, c'est l'analyse par Y. Durand

d'un tableau d'un peintre brugeois du XV^e siècle, Petrus Christus, qui sert de base au rappel des principes qui sous-tendent ces représentations.

Quatre autres peintres fameux font l'objet d'une rubrique « jeu » très différente de l'habitude. Deux d'entre eux ont également vécu à l'époque de la Renaissance : Leonardo da Vinci, génie universel s'il en est, et Albrecht Dürer, peintre, graveur et géomètre. Les deux autres sont modernes : Vasarely, célèbre pour ses tableaux à motifs géométriques et Escher pour ses pavages ingénieux.

Dans le domaine des pavages, Nadège Vandebaele nous rappelle comment découvrir tous les pavages réguliers ou semi-réguliers du plan. Des motifs géométriques de ce genre se retrouvent dans de nombreux monuments, notamment dans la décoration des bâtiments arabes.

Avec C. Randour et J. Drabbe, nous entrons dans le monde des déformations strictement géométriques. Un tableau célèbre de Holbein, *Les ambassadeurs*, comporte un crâne démesurément allongé au point de n'être reconnaissable que sous un angle de vue déterminé. Une telle déformation est une *anamorphose*. C. Randour et J. Drabbe nous expliquent les principes des *anamorphoses cylindriques*. Dans ses aquarelles, une artiste belge, Françoise Robaux, réalise en quelque sorte aussi des anamorphoses, mais sans aucune contrainte géométrique. Elle nous explique sa méthode dans l'article-interview qu'elle nous a accordé.

Quittant le domaine de la peinture, nous rencontrons celui de la photographie. C. Villers étudie le problème de la profondeur de champ et de la netteté des images d'objets situés dans des plans différents. Cette étude le ramène à un théorème célèbre de Girard Desargues. Enfin, G. Noël a promené son regard sur une petite église romane de Dordogne. Il y a trouvé le nombre d'or, un classique des liens entre mathématique et art !

Jeux

Yolande Noël-Roch

Un pliage

Une paire de ciseaux, un cutter et du papier collant te permettront de réaliser ce jeu.

1. Détache la page suivante. En utilisant les repères sur les grands côtés, marque trois plis parallèles de manière à avoir quatre colonnes de trois dessins. Assouplis les plis en les marquant dans les deux sens (Photo 1).
2. Déplie la feuille, découpe les bords du rectangle, puis dépose la feuille à plat sur un carton en laissant visible la face qui contient le front de Léonard de Vinci. Au cutter, dégage trois côtés du rectangle 2×1 central (Photo 2).
3. Rabats vers la droite le rectangle dégagé et replie sous la feuille le carré qui déborde (Photo 3).
4. En pliant deux fois la partie de gauche suivant les plis marqués plus tôt, tu couvres le trou (Photo 4). Léonard apparaît d'un côté, Vasarely de l'autre (Photo 5).
5. Du côté Vasarely, à l'aide de papier collant, fixe la partie rabattue (au centre à gauche) à sa voisine de droite (Photo 6).
6. Retourne le montage du côté de Léonard et plie-le en deux comme sur la photo 7. Tu peux maintenant l'ouvrir en faisant apparaître le portrait de Dürer en deux parties mal assemblées (Photo 8).
7. Tu peux à nouveau plier le montage en deux (Photo 9), puis l'ouvrir pour obtenir la photo de Escher (Photo 10).
8. À l'envers, tu retrouves Dürer cette fois bien assemblé (Photo 11), et en pliant, puis ouvrant tu reviens à Léonard mal assemblé, puis à Vasarely (Photo 12).
9. Tu peux poursuivre aussi longtemps que tu veux !



Photo 1

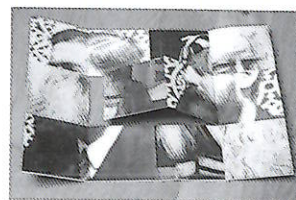


Photo 2

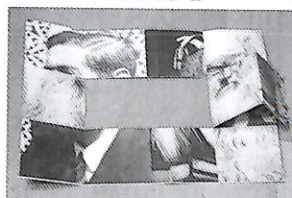


Photo 3



Photo 4



Photo 5

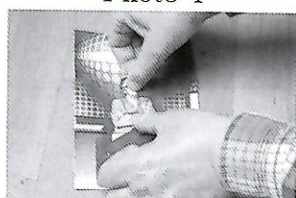


Photo 6



Photo 7



Photo 8

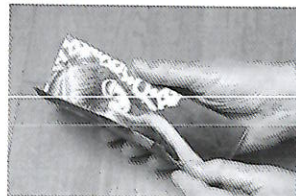


Photo 9

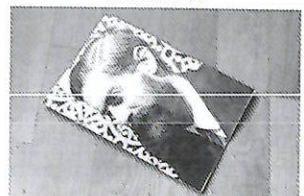


Photo 10

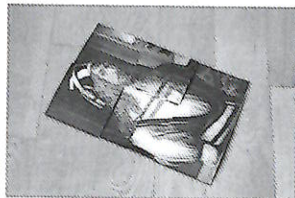


Photo 11

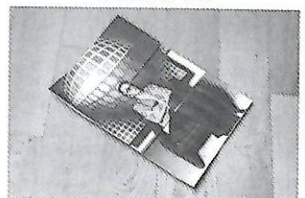
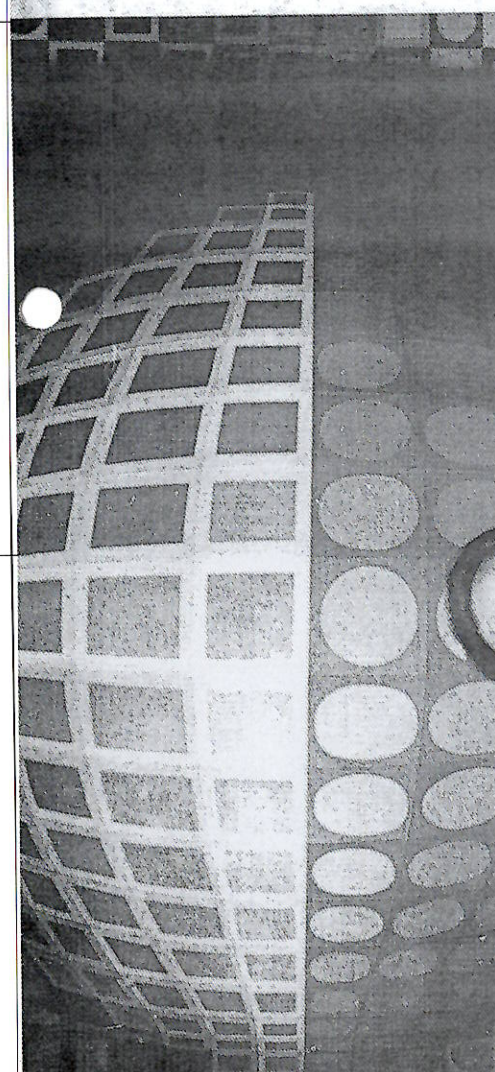
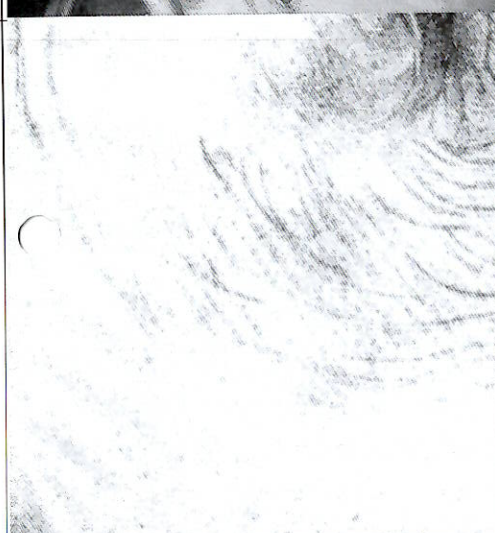
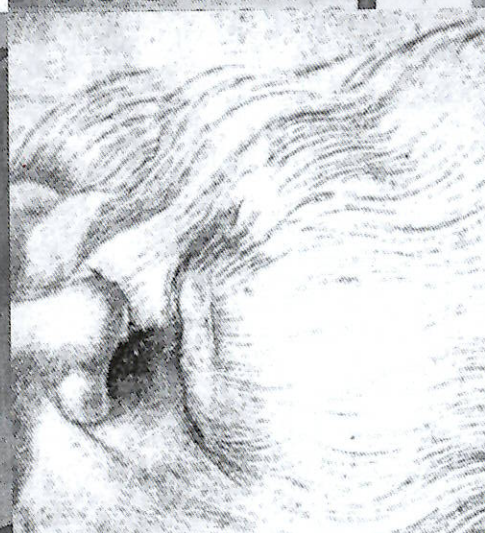
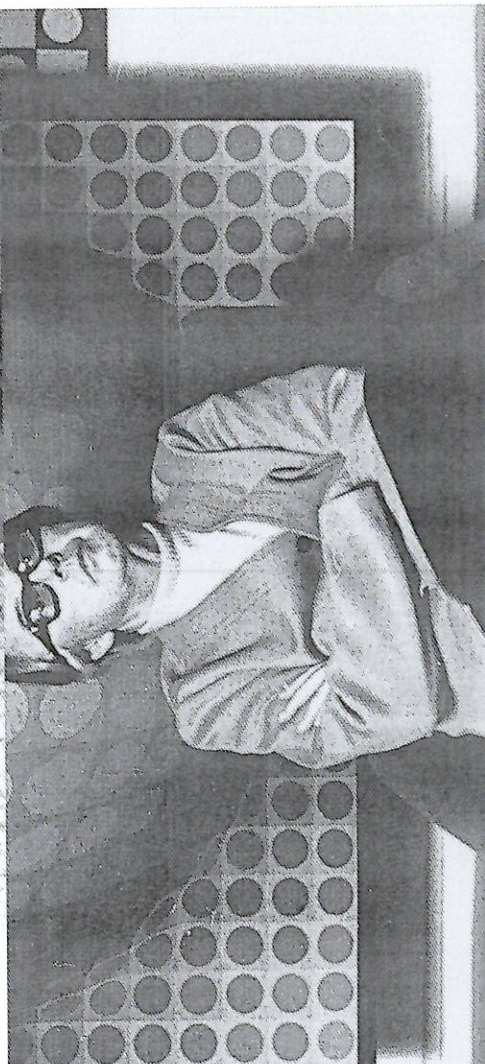
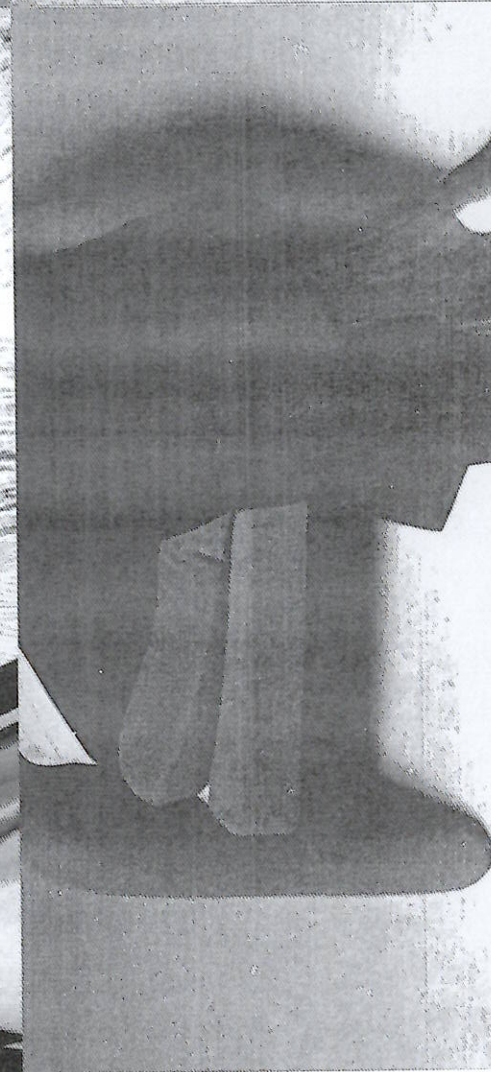
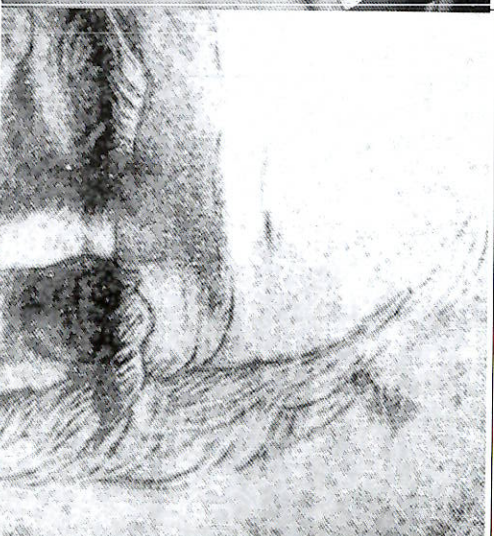
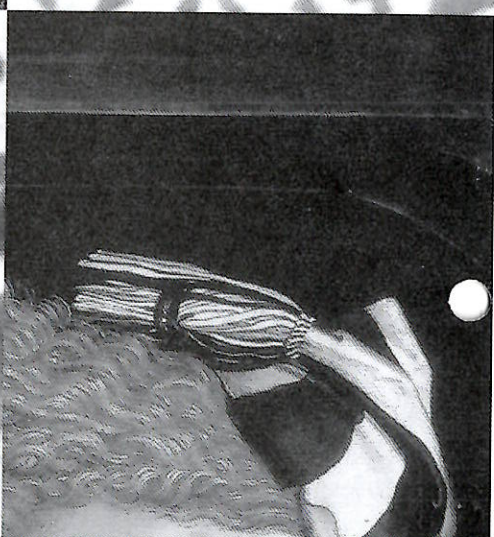
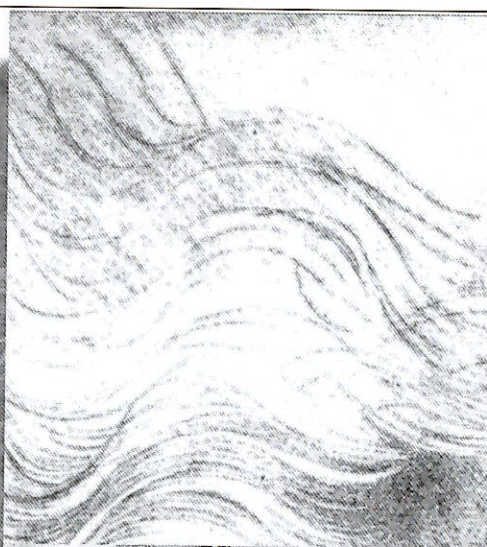


Photo 12

(D'après *Pythagoras*, Vol. 44, n° 6, juin 2005.)





Albrecht DURER (1471-1528)

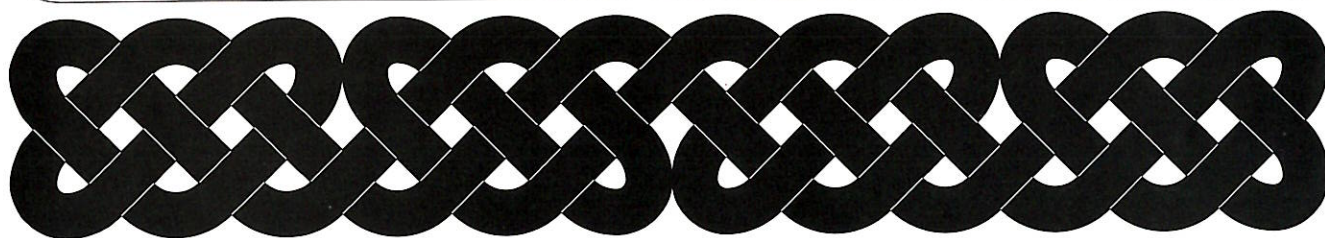


Peintre-graveur allemand. Son père était orfèvre et Albrecht apprit le métier, mais il était attiré par la peinture et suivit des cours de peinture et de gravure. Ensuite il voyagea, s'arrêtant de ville en ville, travaillant dans les ateliers de maîtres.

La géométrie était pour lui un instrument d'analyse et de perfectionnement. Il étudia la perspective et utilisa des méthodes géométriques pour transformer des figures en d'autres figures. Il écrivit en allemand un traité : *Instructions concernant l'usage du compas*.

Petit à petit, il était devenu célèbre. Il fut le portraitiste des célébrités et des riches de son temps, ainsi que de l'empereur Maximilien et du roi du Danemark. En 1520, il fit un voyage aux Pays-Bas où il fut reçu avec tous les honneurs. Il y fit la connaissance d'Erasme et assista à l'entrée solennelle de Charles-Quint à Anvers.

Pendant les dernières années de sa vie il se consacra à la recherche des principes de l'art et publia un nouveau traité : *L'art de mesurer : instructions sur la manière de mesurer à l'aide du compas et de l'équerre les lignes, les plans et les solides*. Il publia aussi *Traité des proportions* et, dans un tout autre domaine, un *Traité de la fortification des villes, des châteaux et des bourgs*. Ses œuvres sont très nombreuses et se trouvent notamment au musée du Louvre, à la pinacothèque de Munich, au British museum.



Maurits Cornelius ESCHER (1898-1972)

Artiste néerlandais. Il fit ses études primaires et secondaires à Arnhem entre 1912 et 1918. Il ne brillait en rien, mais manifesta très tôt de l'intérêt pour la musique et la menuiserie. Il raconte lui-même qu'il avait beaucoup de difficultés d'abstraction en arithmétique et en algèbre et qu'il fut meilleur en géométrie de l'espace, qui faisait appel à son imagination. En 1920, il partit à Haarlem : son père espérait lui faire faire des études d'architecture. Mais le jeune homme préféra les arts graphiques, plus proches de son habileté. Il étudia aussi la gravure sur bois.

Il voyagea beaucoup en Italie et en Espagne où il fut fasciné par l'Alhambra de Grenade. Ce monument fut une source d'inspiration pour lui et il chercha dès lors à « remplir le plan » avec des motifs à répétition.

Il se mit à lire des livres de mathématiques sur ce sujet et comprit les 17 groupes de symétrie du plan. Il réalisa de nombreuses gravures sur bois qui les utilisaient. Vers 1956, il commença à représenter l'infini sur un plan et réussit à comprendre la notion d'espace hyperbolique. Il était fasciné par la topologie. Il dit avoir eu plus de facilité de contacts avec les mathématiciens qu'avec les artistes.



S. Trompler

La biographie de Vasarely se trouve à la page 32.

L'art au quotidien

Nadège Vandenabeele

Analyse

Observe les cinq figures suivantes.

Que représentent ces photos ? À quoi te font-elles penser ? Quel est leur point commun ?

Fig.1

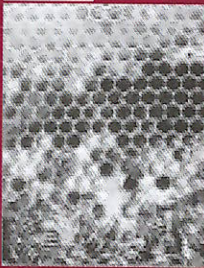


Fig.2



Fig.3

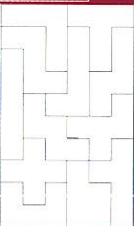


Fig.4

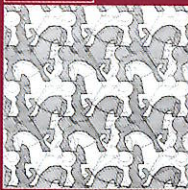
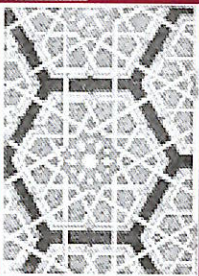


Fig.5



Nous allons décrire chacune des images afin de découvrir le sujet de cet article.

- La première figure représente les alvéoles d'une ruche. Ce sont de petits hexagones qui recouvrent une surface.
- La deuxième image est un carrelage qui recouvre le sol.
- La troisième est un jeu qui consiste à agencer les douze pentaminos afin de recouvrir un rectangle.
- La quatrième photo est une reproduction d'un détail d'une œuvre de M.C. ESCHER (1898–1972).
- La dernière image est une photographie d'une mosaïque de la mosquée du sultan Hassan qui consiste en un assemblage d'hexagones.

Tu l'as compris : nous allons étudier quelques principes de base des pavages.

Paver un plan signifie recouvrir ce plan par juxtaposition sans chevauchement de copies d'un motif unique.

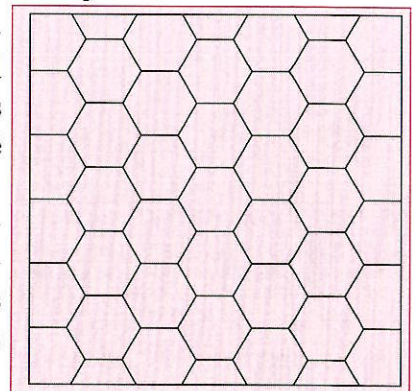
Dans un pavage, chaque pavé est l'image de n'importe quel autre par une *isométrie* (ce n'est pas le cas à la figure 3). Pour rappel, une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs et donc aussi les angles. Tu connais certainement les translations, les rotations, les symétries orthogonales et les symétries glissées (symétries orthogonales « suivies » d'une translation).

Nous nous intéresserons ci-dessous aux pavages dont les motifs sont des polygones réguliers.

Les pavages réguliers

Commençons par étudier les pavages dits *réguliers* c'est-à-dire ceux pour lesquels des polygones réguliers isométriques sont utilisés. De plus, quand deux de ces polygones se touchent, ils ne peuvent avoir en commun qu'un côté complet.

L'observation des figures 1 et 5 permet facilement d'imaginer le pavage ci-contre. Ce sont des hexagones réguliers mis les uns à côté des autres qui forment le pavage.



Existe-t-il d'autres façons de réaliser un pavage en n'utilisant qu'un seul type de polygones réguliers ? Combien de pavages réguliers peut-on dessiner ?

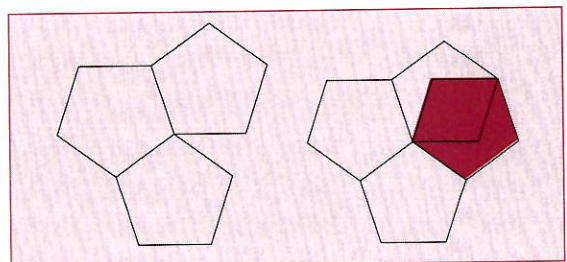
Réfléchissons : le premier polygone régulier est le triangle équilatéral puis viennent le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier ...

A toi de reproduire ces figures et d'essayer de les assembler afin de réaliser des pavages réguliers. Ci-contre, tu trouves des modèles de quelques polygones réguliers (ayant tous la même longueur de côté) qu'il te suffit de décalquer plusieurs fois et de découper afin d'expérimenter. Tu peux aussi utiliser un logiciel tel que **Apprenti Géomètre** (voir la rubrique « Actualités » de *Math-Jeunes* n°112).

On sait déjà qu'un pavage à l'aide d'hexagones est possible. Sans doute penseras-tu aussi aux pavages à l'aide de carrés ou de triangles. Peut-on encore utiliser d'autres polygones réguliers pour créer des pavages réguliers du plan ? Essayons avec un pentagone.

Si on assemble trois pentagones réguliers en un point, il y a un « trou » : on ne tourne pas complètement autour du point. Et si on en assemble quatre, il y a un chevauchement.

Un pavage régulier formé uniquement de pentagones est donc impossible.



Étudions la question de façon plus complète. Considérons un polygone régulier à n côtés. Notons α l'angle au sommet et β l'angle au centre. Puisque la somme des angles d'un triangle vaut 180° , on a $\beta = 180^\circ - \alpha$. Le polygone étant régulier et ayant n côtés, on a $n \cdot \beta = 360^\circ$. Il vient donc $n \cdot (180^\circ - \alpha) = 360^\circ$, d'où

$$\alpha = \frac{n-2}{n} 180^\circ$$

Le nombre de polygones du pavage qui se touchent en un sommet donné, est obtenu en divisant 360 par la mesure de l'angle α : $\frac{360}{\frac{n-2}{n} 180}$.

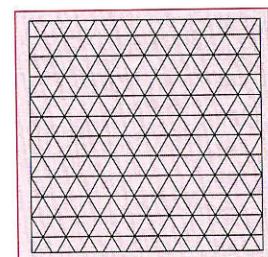
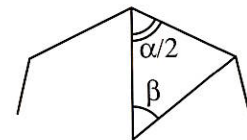
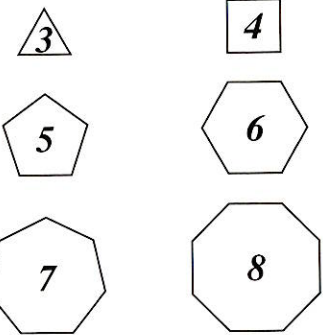
Ainsi chaque sommet du pavage est commun à $\frac{2n}{n-2}$ polygones. Cela nous conduit à chercher les valeurs de n qui rendent $\frac{2n}{n-2}$ entier.

Écrivons $\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, ce qui simplifie le problème : $n-2$ doit être un diviseur de 4. Donc $n-2 = 1$ ou $n-2 = 2$ ou $n-2 = 4$ et

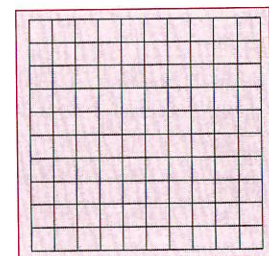
n ne peut prendre que les valeurs 3, 4 ou 6.

Par conséquent, nous venons de prouver qu'il n'existe que trois pavages réguliers. Le premier est constitué de triangles équilatéraux. On désigne ce pavage par la notation (3, 3, 3, 3, 3, 3) que l'on appelle aussi la *configuration du pavage*. Elle explicite le fait qu'en chaque sommet se joignent six polygones, et que ceux-ci sont tous des triangles équilatéraux.

Pour $n = 4$, ce sont des carrés que l'on assemble. En chaque sommet, se joignent quatre carrés : c'est le pavage (4, 4, 4, 4). Et enfin, pour $n = 6$, nous retrouvons le pavage hexagonal que nous avons déjà rencontré : 3 hexagones en un sommet, la configuration est (6, 6, 6).

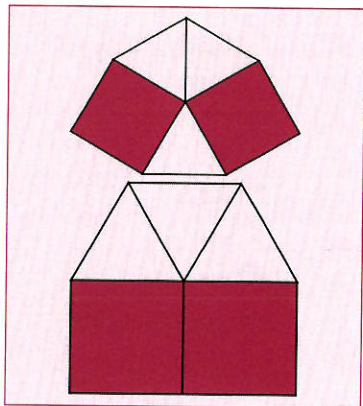


(3,3,3,3,3,3)



(4,4,4,4)

Les pavages semi-réguliers



Intéressons-nous maintenant aux pavages constitués uniquement de polygones réguliers (pas nécessairement tous les mêmes) et qui respectent la condition supplémentaire suivante : « *En chaque sommet, on doit trouver les mêmes polygones, dans le même ordre et en tournant dans le même sens.* »

Voici par exemple deux façons d'assembler trois triangles et deux carrés ayant un sommet commun.

La première configuration comporte deux triangles adjacents, puis un carré suivi d'un triangle et d'un autre carré. Nous notons cette configuration (3, 3, 4, 3, 4).

Dans la deuxième configuration, les trois triangles se suivent, puis viennent les deux carrés : (3, 3, 3, 4, 4). Ces deux configurations sont différentes, bien qu'elles comportent le même nombre de carrés et le même nombre de triangles !

A toi d'essayer ! A l'aide des polygones réguliers que tu as découpés tout à l'heure, réalise des pavages semi-réguliers.

Tu as fini d'expérimenter ? Je te propose de continuer notre réflexion.

Combien de polygones réguliers peut-on assembler autour d'un point ? L'angle au sommet d'un polygone régulier vaut toujours au moins 60° . Il est donc clair qu'il y en a au maximum 6 qui peuvent avoir un sommet en commun, sans se chevaucher. C'est le cas du pavage régulier (3, 3, 3, 3, 3, 3). Et en chaque sommet, au minimum 3 polygones doivent se toucher. Sinon, il faudrait utiliser un polygone régulier dont l'angle au sommet vaille 180° ou plus, ce qui est impossible.

En résumé, le nombre de polygones d'un pavage régulier ayant un sommet commun peut varier de 3 à 6. Cela nous donne quatre cas à examiner.

Cas de trois polygones

Notons P_1 , P_2 et P_3 trois polygones ayant un sommet commun. α_1 , α_2 et α_3 seront les amplitudes des angles aux sommets de ces polygones et n_1 , n_2 , n_3 seront leurs nombres de côtés. Nous savons que $\alpha_i = \frac{n_i-2}{n_i}180^\circ$. Comme P_1 , P_2 et P_3 doivent entourer complètement leur sommet commun sans se chevaucher, on doit avoir $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ$. Exprimons cette condition

en remplaçant les α_i par leurs valeurs en fonction des n_i :

$$\frac{n_1-2}{n_1}180 + \frac{n_2-2}{n_2}180 + \frac{n_3-2}{n_3}180 = 360$$

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3} = 2$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Le problème se ramène donc à trouver les triplets de nombres entiers (n_1, n_2, n_3) qui vérifient la dernière relation ci-dessus.

Avec un peu de patience, on élabore le tableau ci-contre. Mais attention : la condition $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ est une condition *nécessaire* pour qu'existe un pavage de configuration (n_1, n_2, n_3) . Elle n'est pas *suffisante* ! En essayant de construire les pavages qui seraient associés aux différentes lignes du tableau, on constate que seules quatre configurations sont acceptables : (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8) et (6, 6, 6) (la dernière correspond à un pavage régulier déjà connu).

Cas de quatre polygones

En effectuant un calcul similaire au cas précédent, nous obtenons la condition

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

n_1	n_2	n_3
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

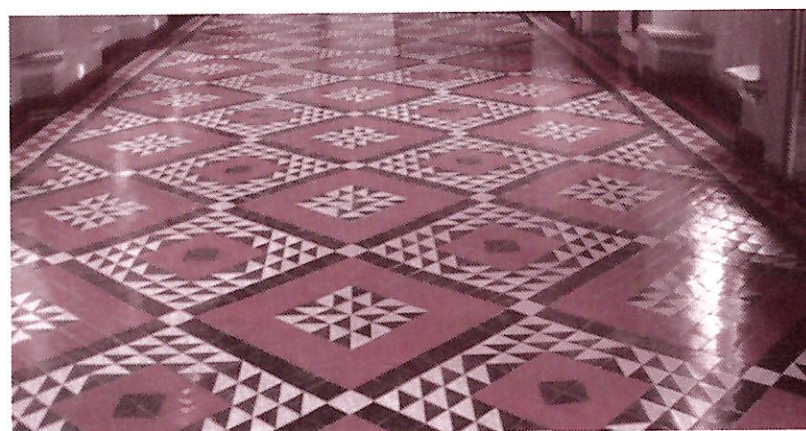
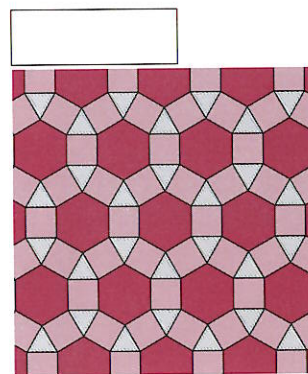
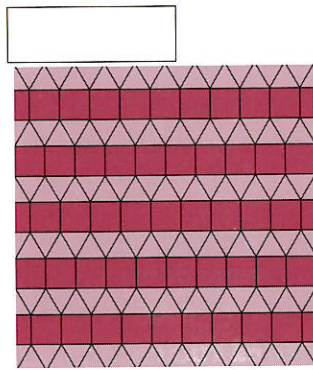
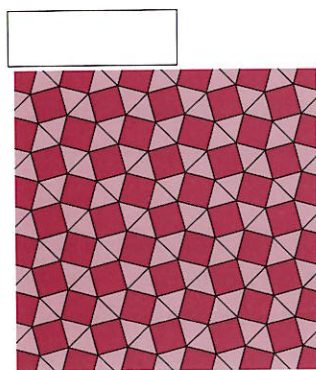
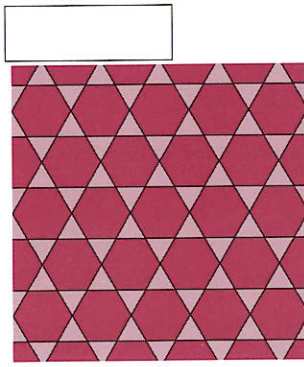
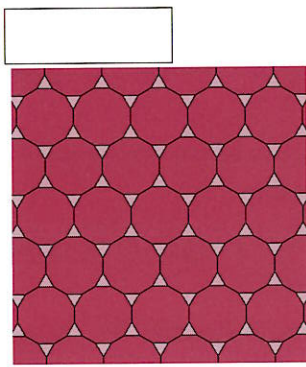
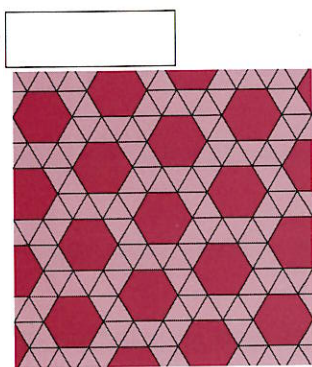
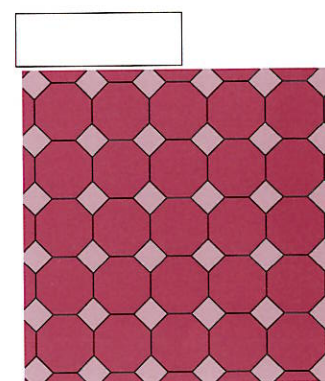
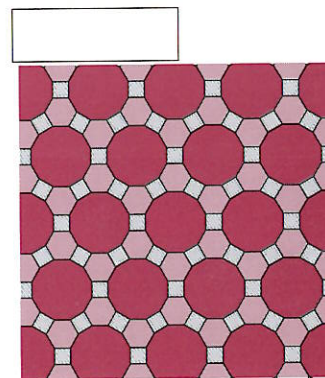
Cas de cinq ou six polygones

De même, les conditions pour cinq ou six polygones sont :

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

Dans chacune de ces cas, il s'agit de déterminer les solutions entières des équations obtenues, puis de déterminer celles qui constituent des configurations acceptables. En procédant de cette façon, on obtient au total huit pavages semi-réguliers en plus des trois pavages réguliers qui étaient déjà connus. Les voici. Écris la configuration de chacun.

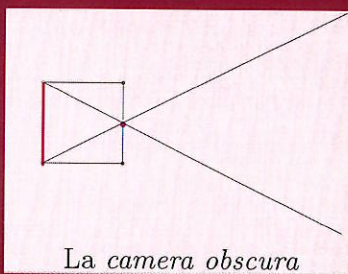


Un pavement dans le Palais Jacques Cœur à Bourges.

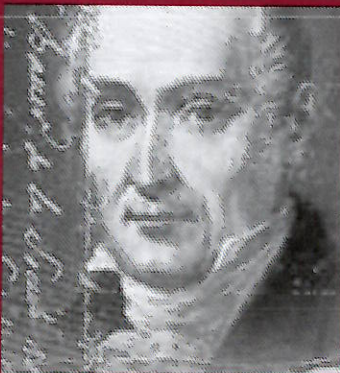


Girard DESARGUES
1591-1661

Architecte et ingénieur, Girard Desargues s'est intéressé particulièrement à la perspective, à la coupe des pierres pour l'architecture et à la conception des cadrans solaires. Il s'est efforcé de trouver des méthodes géométriques synthétisant ces techniques. En 1639, il publie en 50 exemplaires le « Brouillon Project », consacré à une nouvelle théorie géométrique des sections coniques, ce qui lui vaut d'être reconnu comme un des créateurs de la géométrie projective.



La camera obscura



Joseph Niepce

Photographier avec Desargues

Claude Villers

La photographie est un art. C'est mieux qu'un art ; c'est un phénomène où l'artiste collabore avec le soleil.

Lamartine

Précisions

Il peut sembler étrange d'associer Desargues à la photographie. Et pourtant ... ! Voici donc, pour débiter, quelques brefs points de repère sur le sujet.

Quatre siècles avant J.-C., Aristote remarque l'image du soleil projetée sur le mur d'une pièce obscure.

Vers 1495, Léonard de Vinci se sert de la *camera obscura* pour reproduire des images par dessin.

Il est par ailleurs assez remarquable de constater que le principe de la *camera obscura* continue à être utilisé actuellement pour la réalisation d'images photographiques, directement sur papier sensible ou sur pellicule de très grand format.

Une paroi d'une boîte quelconque bien noire intérieurement soutient la feuille sensible tandis que la paroi opposée est percée d'un très fin orifice.

Cet ensemble porte le nom de « sténopé ». La réalisation d'une image par sténopé demande un très long temps d'exposition — souvent plusieurs minutes — à déterminer par essais successifs. Faut-il préciser que cet appareil rudimentaire n'est utilisé que pour des prises de vue de sujets statiques.

Des photographes connus ont même transformé une caravane en sténopé de manière à réaliser des images de très grand format.

En 1816, Joseph Nicéphore NIEPCE réalise des photographies sur papier au chlorure d'argent fixé par l'acide nitrique.

En 1837, DAGUERRE met au point le daguerréotype, plaque de cuivre argentée et iodée.

En 1849, LEGRAY met au point le procédé au collodion humide.

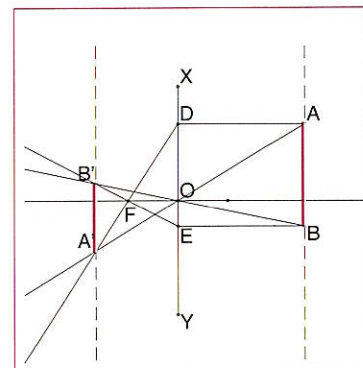
En 1878 apparaît le procédé au bromure d'argent et à la gélatine.

Mais quelle est donc la relation qui lie Desargues, à cette pratique si répandue actuellement de la photographie ? C'est ce que nous allons essayer de montrer.

Quelques rappels

La formation de l'image d'un point dans un appareil photographique classique est régie par les lois bien connues de l'optique.

Soit XY parallèle à $[AB]$ (le sujet), dans le plan de l'objectif de foyer F et de centre optique O . L'image de A s'obtient comme suit : le rayon lumineux AD parallèle à l'axe optique OF est réfracté selon DF tandis que le rayon lumineux AO ne change pas de direction. L'image de A est A' situé à l'intersection de DF et de AO .



L'image B' de B s'obtient de la même manière. Remarquons que dans un appareil photographique classique, les images A' et B' sont captées sur le plan de la pellicule sensible placée parallèlement au plan de l'objectif. Dès lors, homothétie aidant, il n'y aura netteté de l'image de $[A'B']$ que si $[AB]$ est lui-même parallèle au plan de l'objectif. Dans la pratique, l'action de mise au point place $[A'B']$ sur la pellicule par déplacement du système optique ou parfois simplement par déplacement du plan de la pellicule. Une certaine tolérance est de mise et est appelée « profondeur de champ ». Elle dépend de la longueur focale $|OF|$, de l'ouverture du diaphragme et de la distance du sujet par rapport à l'objectif.

Les appareils photographiques de type « compacts » ne possèdent aucun système de mise au point mais ils ont une grande tolérance de netteté par leur courte distance focale et par leur réglage d'origine de l'optique leur donnant la plus grande profondeur de champ possible. (Voir aussi l'article de Guy Noël « A quelle distance est l'infini ? » paru dans *Math-Jeunes* n°109 S en novembre 2004). Remarquons également qu'en ce qui concerne l'appareil photographique, il va de soi que $|AD|$ doit être supérieure à $|OF|$.

Un peu de mathématiques

Désignons $|AD|$ par d , $|OF|$ par f et $d(A', XY)$ par d' .

L'emploi de relations géométriques (homothéties, triangles semblables, théorème de Thalès...) permet aisément d'exécuter les travaux suivants.

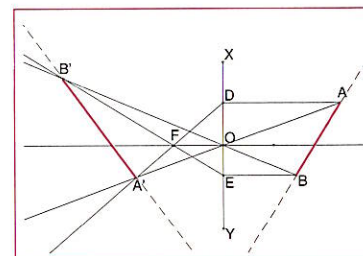
- Démontrez que $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$ (ce qui montre que f est la demi-moyenne harmonique entre d et d').
- En raisonnant sur la variation des valeurs des fractions précédentes, montrez que d et d' varient « en sens contraires ».
- Soit $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{d'}{d}$ (c'est le grandissement). Justifiez que pour obtenir une image de même taille que le sujet il faut $d = d' = 2f$ (un seul cas donc pour f fixé).
- Vous photographiez un arbre de 2 m de hauteur situé à 10 m de distance de l'appareil photographique muni d'un objectif de 50 mm de distance focale. Quelle sera la taille de l'image nette de l'arbre sur la pellicule ?

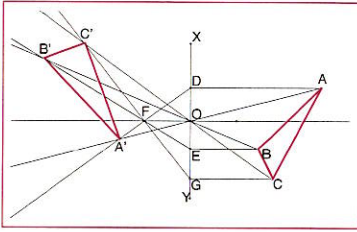
Où est donc le problème ?

La plupart du temps le sujet photographié ne se trouve pas confiné dans un plan parallèle au plan de l'objectif.

Cela pose donc un problème pour la netteté de l'image de ce sujet.

En effet, sur la surface sensible placée parallèlement au plan de l'objectif, l'image B' de B sera floue si on met au point sur A ou l'image A' de A sera floue si on met au point sur B . Il faut alors utiliser au mieux





la profondeur de champ (zone de netteté) pour obtenir une image acceptable.

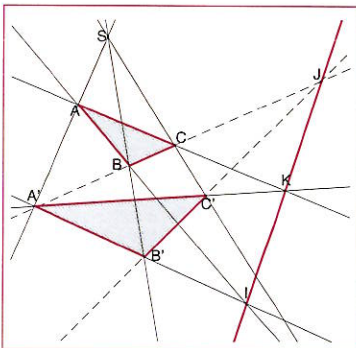
C'est encore plus flagrant quand on se rappelle que le sujet est une partie de l'espace de dimension 3.

Les images des points du plan ABC non parallèle au plan de l'objectif ne peuvent pas être toutes nettes en même temps.

C'est ici qu'une propriété géométrique de l'espace appelée « théorème de Desargues » va venir en aide aux photographes qui souhaitent qu'au moins les points du plan $A'B'C'$ soient nets. C'est le cas, par exemple, des photographes professionnels qui réalisent des photos publicitaires.

Voici cette propriété applicable aussi bien à l'espace qu'au plan.

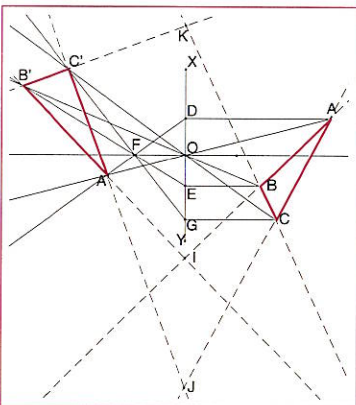
Si trois points A, B, C et trois points A', B', C' sont tels que AA', BB' et CC' sont soit parallèles soit concourantes alors les points d'intersection de AB et $A'B'$, de BC et $B'C'$ et de AC et $A'C'$ sont trois points alignés.



Il existe plusieurs façons (géométrie projective et rapports anharmoniques, calcul barycentrique...) de démontrer cette propriété. Voici une justification simple en ce qui concerne l'espace.

AA' et BB' ont S en commun donc AB et $A'B'$ sont deux droites du plan SAB . Les plans ABC et $A'B'C'$ se coupent selon une droite. Dès lors le point I commun à AB et à $A'B'$ est un point de cette droite. Il en est de même pour J point commun à BC et $B'C'$ et K point commun à AC et $A'C'$.

I, J et K sont donc alignés.



Dans le cas de l'appareil photographique, la situation est illustrée comme suit. Puisque AA', BB' et CC' sont concourantes (en O), le théorème de Desargues nous assure que I, J et K sont alignés.

Cependant, en allant un peu plus loin dans l'observation de cette figure, une conjecture apparaît assez vite.

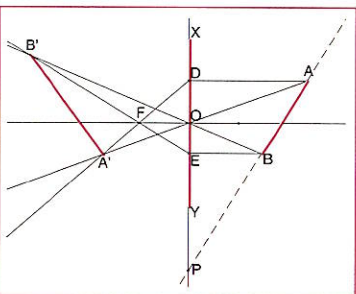
La droite IJK ne serait-elle pas une droite incluse dans le plan de l'objectif c'est à dire dans le plan comprenant le centre optique O et perpendiculaire à l'axe optique OF ?

La réponse est « oui » et c'est encore le théorème de Desargues qui permet de démontrer cette propriété.

Les droites AB et DE étant coplanaires, notons P leur point d'intersection (éventuellement à l'infini).

Les sommets des triangles OAB et FDE remplissent la condition initiale du théorème de Desargues puisque OF, AD , et BE sont parallèles donc concourent en un point à l'infini.

Dès lors les points communs à OA et FD (A'), AB et DE (P) et OB et FE (B') sont alignés. Ceci signifie que P est aussi un point de $A'B'$. Donc P n'est rien d'autre que le point I de la figure précédente et I est un point de DE . De la même manière on montre que J et K le sont aussi.



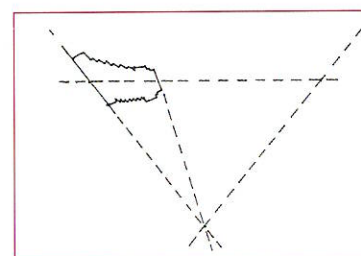
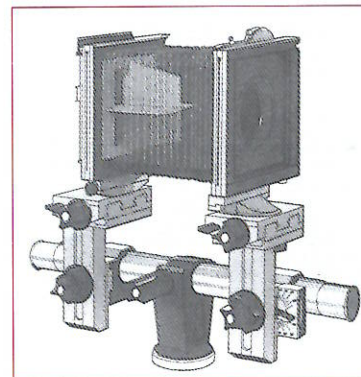
Retour à la photographie.

Pour obtenir, par application du théorème de Desargues, la netteté de l'image de points qui appartiennent à un plan non parallèle au plan de l'objectif, des constructeurs d'appareils ont créé un système qui permet de faire basculer le plan de l'objectif et/ou surtout celui de la surface sensible. Cela s'appelle une chambre technique.

Dans une telle chambre, les positions du plan du film (l'arrière) et du plan de l'objectif (l'avant) peuvent donc être modifiées, ce qui permet d'obtenir théoriquement la netteté des images des points de n'importe quel plan oblique.

Il existe des chambres techniques de toutes tailles. Leurs coûts sont évidemment à la mesure de leurs dimensions et de leurs éventuelles sophistications.

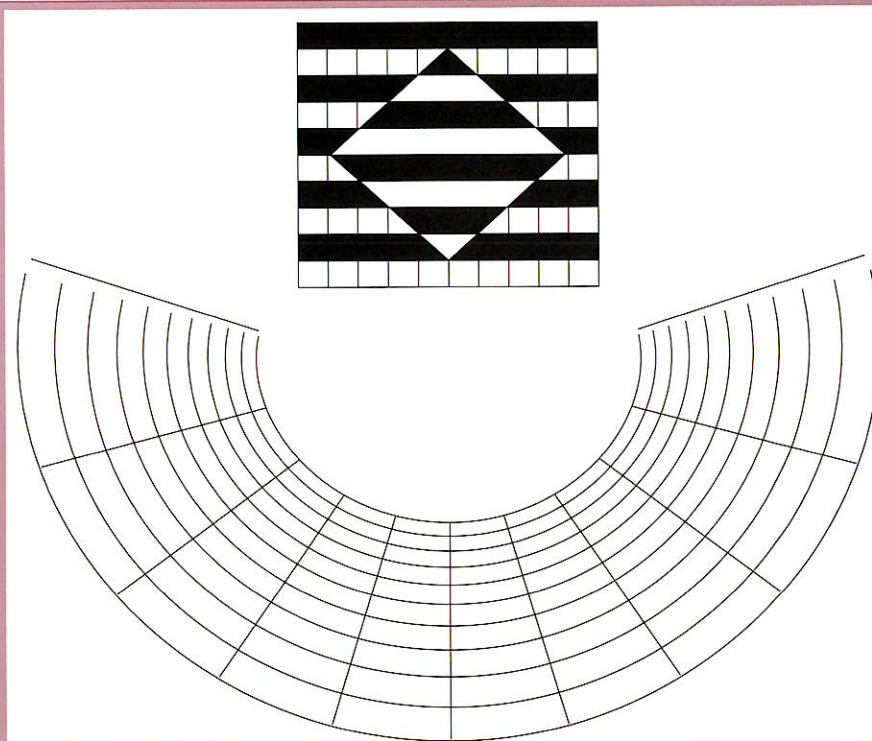
Pour que l'image d'un sujet soit la plus nette possible, les photographes veillent alors à ce que les plans de ce sujet, de l'objectif et de l'image se coupent selon une même droite. Dans le milieu des photographes, cette loi est connue sous le nom de « Règle de Scheimpflug » du nom d'un officier de l'armée autrichienne qui l'énonça en 1904. Après tout, elle aurait tout aussi bien pu s'appeler « Règle de Desargues » !

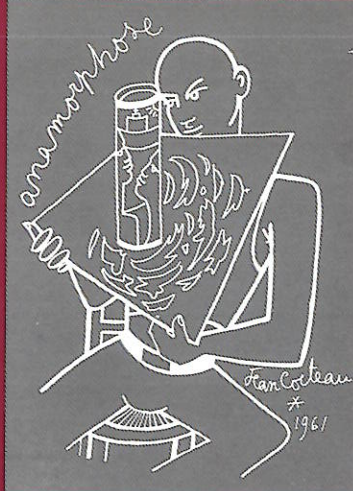


Sources

- R. Deaux, *Compléments de géométrie plane*, Ed. De Boeck, 1945.
- J.-P. Collette, *Histoire des mathématiques*, Ed. Vuibert/Erpi, 1973.
- A. Bailey et A. Holloway, *La photographie en couleur*, Ed. Larousse/Montiel, 1980.
- Chenz et J.-L. Sieff, *La photo*, Ed. Denoël, 1985.
- Divers sites Internet et en particulier,
http://www.galerie-photo.com/mise_au_point_à_la_chambre.htm
<http://www.xavier.hubaut.info/coursmath/app.photo.htm>

Si vous avez déjà lu l'article consacré aux anamorphoses (page 14), vous pouvez réaliser une anamorphose cylindrique « à la main » en reportant sur le réseau curviligne ci-contre l'image « op-art » dessinée sur le réseau rectangulaire.





Introduction

Le Nouveau Petit Robert (édition de 2003) propose la définition suivante qui convient à notre présentation.

Anamorphose

– Transformation par un procédé optique ou géométrique d'un objet qui le rend méconnaissable, mais dont la figure initiale est restituée par un miroir courbe ou par un examen hors du plan de la transformation

— Image résultant d'une telle transformation.

Les artistes ont créé des anamorphoses depuis fort longtemps. De nombreux sites Internet y sont consacrés. Ils offrent le plus souvent des images d'excellente qualité. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous n'aborderons pas l'aspect artistique. Nous nous limiterons à traiter mathématiquement la construction d'anamorphoses à restituer par des miroirs coniques ou cylindriques. La géométrie analytique élémentaire permet évidemment de résoudre le problème, mais au prix de calculs pénibles. Aussi, nous lui préférons des méthodes simples de la géométrie descriptive exploitables immédiatement par les logiciels graphiques.

Géométrie descriptive et anamorphoses

Chantal Randour et Jean Drabbe

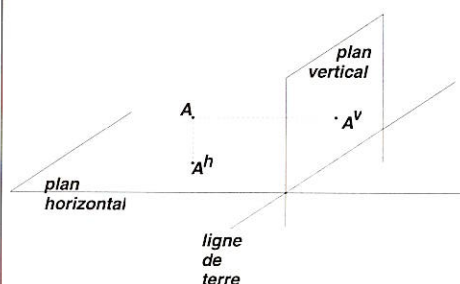
1. Géométrie descriptive

Quelques idées de base de la géométrie descriptive apparaissent déjà chez Albert DÜRER (*Underweysung* – 1525) et chez Piero DELLA FRANCESCA (*De Prospectiva Pingendi* – écrit entre 1474 et 1482) mais elles n'ont pas eu d'impact significatif.

Gaspard MONGE est généralement regardé comme le père de cette discipline.

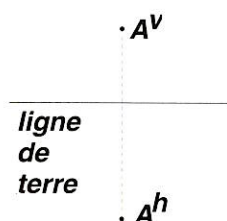
Nous souhaitons une représentation plane des figures de l'espace usuel à trois dimensions. Choisissons deux plans perpendiculaires : l'un est appelé **plan horizontal de projection** et l'autre **plan vertical de projection**. Leur intersection est la **ligne de terre**.

Projetons un point A de l'espace orthogonalement sur chacun de ces plans. On obtient A^v (dans le plan vertical) et A^h (dans le plan horizontal).

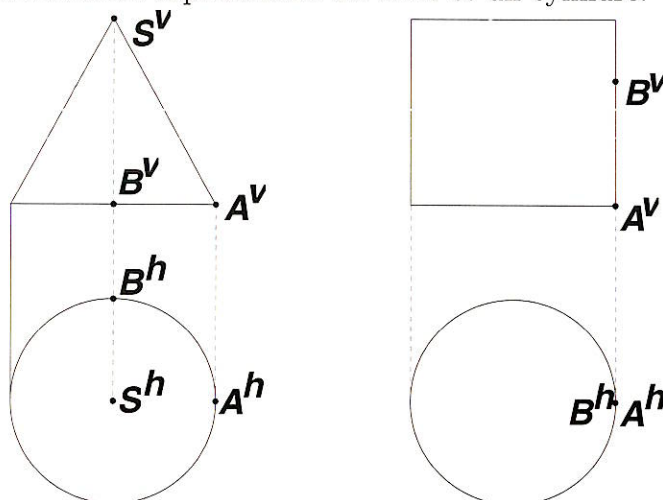


Afin d'obtenir une représentation plane, faisons tourner le plan vertical (par exemple) autour de la ligne de terre jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan horizontal.

(A^v, A^h) représente A .



Les figures suivantes représentent un cône et un cylindre.



2. Anamorphoses coniques

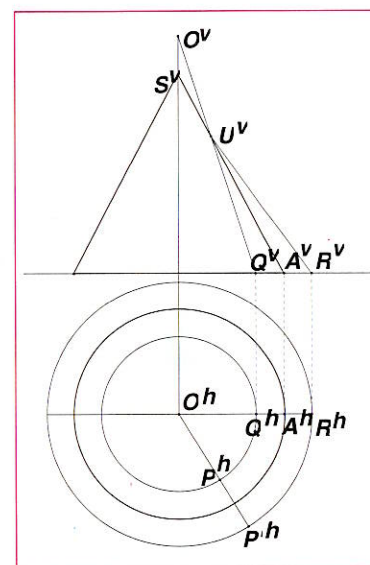
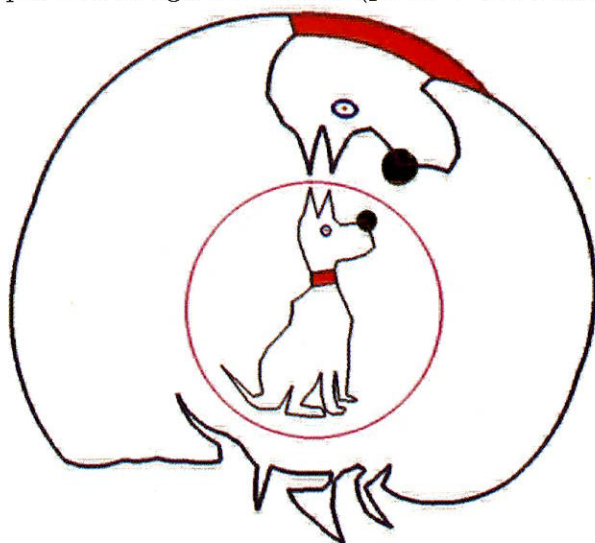
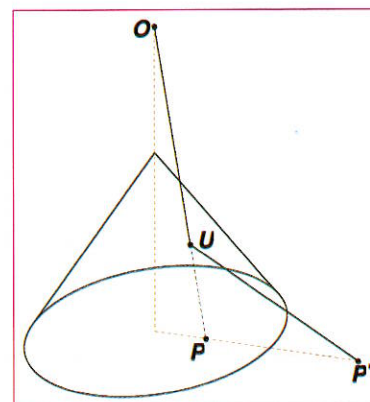
Imaginons qu'un cône réfléchissant soit posé sur le plan horizontal de projection et qu'un point d'œil O soit situé verticalement au-dessus du sommet du cône. Soit P un point dans le plan horizontal. On demande de trouver le point P' du plan horizontal tel que par réflexion — vu de O — il paraisse être P .

En d'autres termes, nous voulons qu'un rayon lumineux issu de P' soit réfléchi suivant la droite PO .

Notons π le plan parallèle au plan vertical de projection et passant par l'axe de symétrie du cône. Les lois de la réflexion fournissent une solution immédiate pour les points P situés dans π . Nous allons ramener le cas général à ce cas particulier.

Imposons à l'espace une rotation autour de l'axe de symétrie du cône qui amène le point P sur un point Q situé dans π . Notons U le point de percée de QO dans le cône. Le rayon réfléchi UO provient d'un rayon incident RU émanant d'un point R dans le plan horizontal. La rotation inverse de celle utilisée précédemment amène R en le point P' recherché.

La construction précédente a été employée par un logiciel graphique pour construire une anamorphose conique de l'image d'un chien (point d'œil à l'infini).



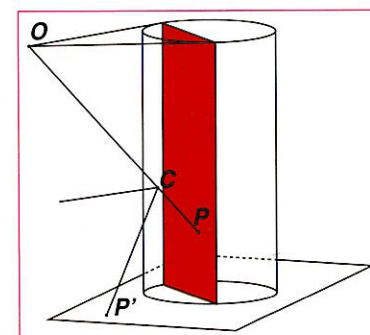
3. Anamorphoses cylindriques

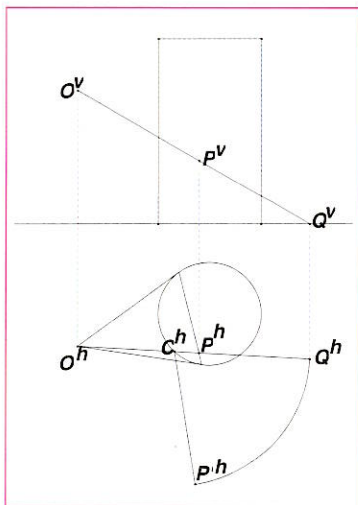
Considérons un cylindre réfléchissant posé sur le plan horizontal de projection et un œil placé en O . Rappelons que le plan polaire de O (par rapport au cylindre) est le plan passant par les deux génératrices de contact des deux plans tangents issus de O .

Il est commode de supposer que les rayons réfléchis arrivant en O proviennent de son plan polaire (un œil ponctuel ne pouvant distinguer l'origine d'un rayon lumineux, ce choix est dicté par la simplicité des constructions).

Soit P un point situé dans le plan polaire de O . Nous devons déterminer le point P' du plan horizontal tel qu'un rayon lumineux issu de P' soit réfléchi suivant la droite PO .

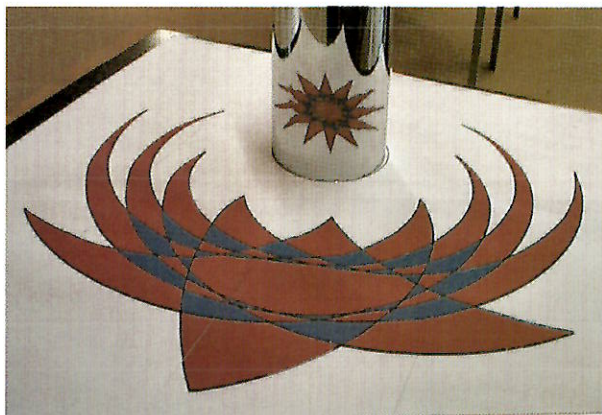
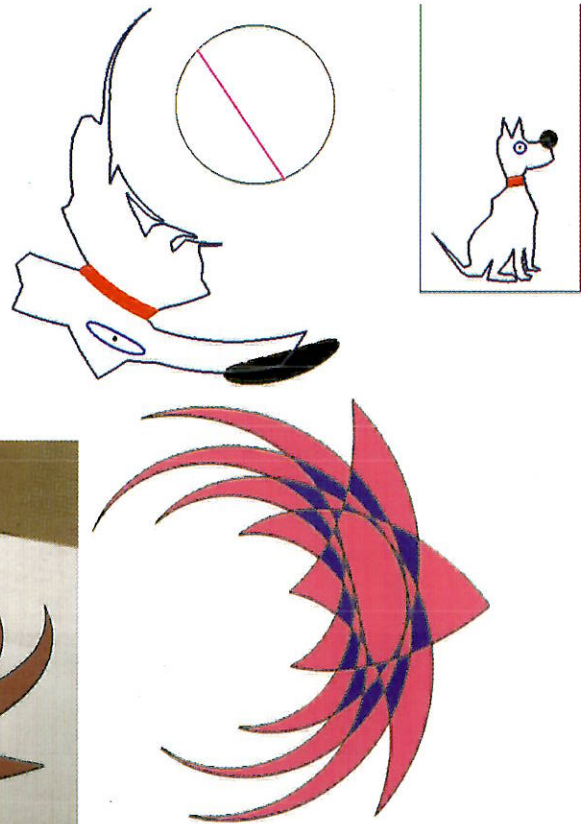
La construction fournie par Kirsti ANDERSEN (voir l'article cité dans les références) s'inscrit naturellement dans le cadre d'un traitement par la géométrie descriptive.





Soit Q le point de percée de OP dans le plan horizontal de projection. La droite OP rencontre la surface cylindrique en deux points. Notons C celui situé entre O et P . On peut montrer (voir le site [mathema](http://mathema.ulg.ac.be) mentionné dans les références) que les distances $|C^h P^h|$ et $|C^h Q^h|$ sont égales et que $O^h C^h$ et $P^h C^h$ forment des angles égaux avec la tangente en C^h au cercle de base. P' est ainsi complètement déterminé.

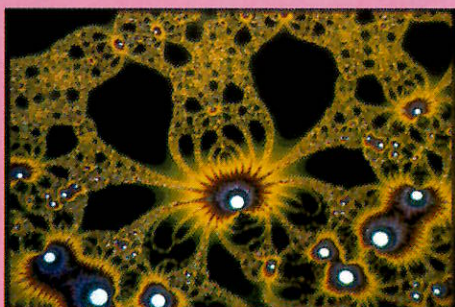
Voici deux anamorphoses cylindriques obtenues par la construction précédente



Références

- Andersen, K. *The mathematical treatment of anamorphoses from Piero della Francesca to Nicéron* in History of Mathematics : States of the Art, pp. 3-28, Academic Press, 1996.
- Hunt, J. et al. *Anamorphic images*, American Journal of Physics, 68 (2000), pp. 232-237.
- Monge, G. *Géométrie Descriptive*, augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective extraite des papiers de l'auteur par B. Brisson, Gauthier-Villars, Paris (1922). Disponible sur gallica.bnf.fr/
- Nicéron, J. *La perspective curieuse* (1652). Disponible sur gallica.bnf.fr/
- Voir également le site users.skynet.be/mathema de Jean Drabbe.
- Pour contacter les auteurs : ch.randour@bruttele.be et jdrabbe@ulb.ac.be.

Des objets mathématiques peuvent être de véritables œuvres d'art. Voici par exemple deux « fractals » :



Les aquarelles de F. Robaux

Guy Noël

Lors d'un congrès de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*, les participants ont découvert avec plaisir une exposition d'aquarelles de Mme Françoise Robaux. Celle-ci, d'abord intéressée par la BD durant ses études, s'est ensuite consacrée à l'aquarelle. Pourquoi ? Laissons-lui la parole :

Pour la fraîcheur, la joie de la couleur, la rapidité, la spontanéité, et puis la surprise que donne le papier lorsque la couleur sèche sur le papier à grains.

Sa spécialité ? Déformer des bâtiments, car

les maisons en brique, les bâtiments sont parfois tristes, et leur redonner vie en les déformant leur donne un aspect plus gai avec d'autres couleurs, plus vives !

Jugez-en. Voyez ci-contre deux photos de bâtiments liégeois et les aquarelles réalisées par Mme Robaux.

Adresse de l'artiste :

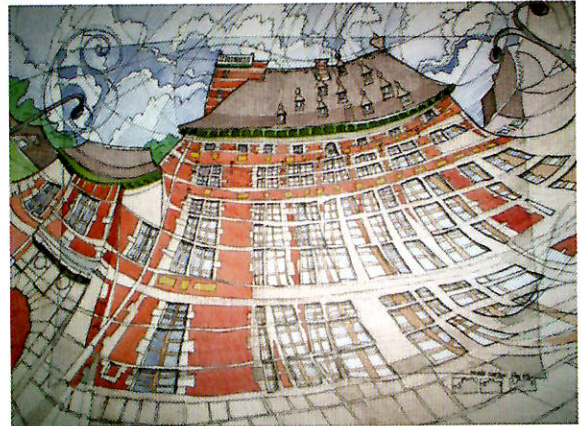
Françoise Robaux
150, rue de Tilff,
4031 Angleur

e-mail :

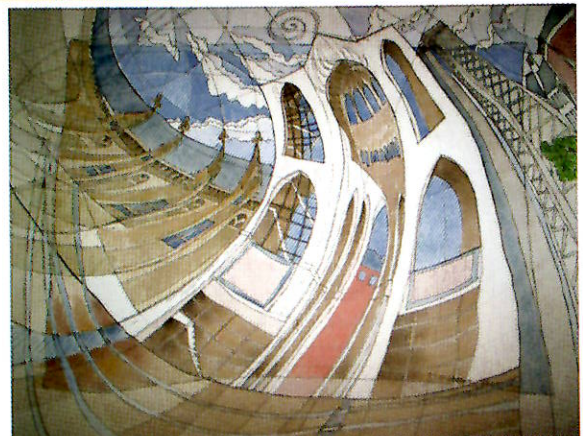
robauxfrancoise@yahoo.fr



Le musée Curtius.



Le chœur de la Cathédrale Saint-Lambert de Liège, reconstitué à l'aide d'échafaudages et de toiles.



Mme Robaux utilise-t-elle des transformations mathématiques pour déformer les bâtiments ? Elle nous répond :

Une formule mathématique ? Non pas du tout
Un logiciel ? Non plus
La démarche est purement artistique, l'utilisation d'un procédé de déformation pas toujours le même, au gré de la fantaisie, de l'humeur.

J'essaye d'abord, de trouver un sujet qui m'inspire. J'essaye de prendre la photo moi-même, pour avoir des vues déjà plus originales, et aussi avoir un beau ciel bleu.

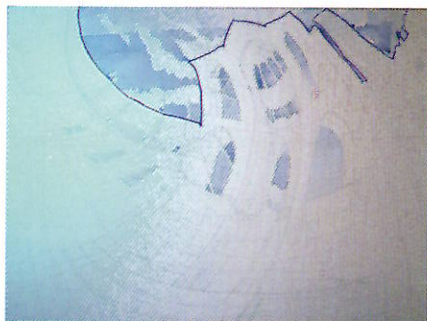
La première ligne que je tire est en général celle des toits (Dessin 1). A ce moment-là, la déformation commence, une courbe est déjà présente, c'est elle qui détermine le reste du tableau.

Ensuite je tire les lignes perpendiculaires pour obtenir le bâtiment en hauteur (Dessin 2). Même chose pour tous les bâtiments et objets environnants.

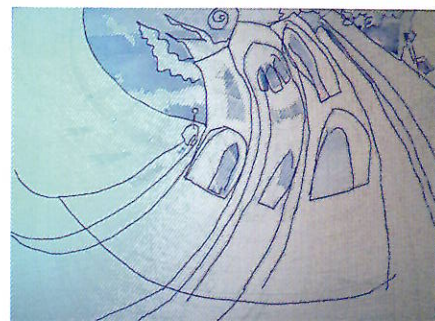
Les détails viennent ensuite, au gré de la reconstruction des bâtiments. (Dessin 3). J'essaye de préserver le bâtiment en respectant une certaine logique, pour ne pas m'y perdre non plus.

Et en dernier je tire les traits qui termineront de composer l'image (Dessin 4).

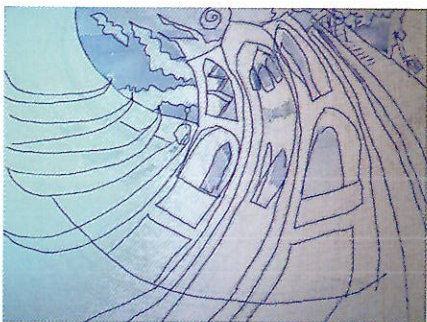
Après la construction, c'est la mise en couleurs (Dessin 5), et puis à l'encre, avec du crayon de couleur pour relever éventuellement (Dessin 6).



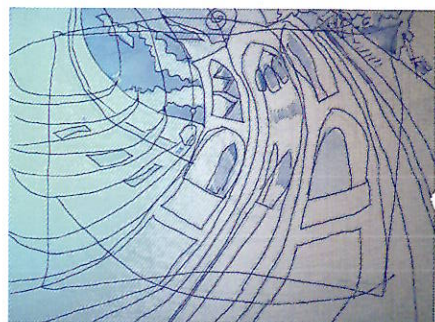
Dessin 1



Dessin 2



Dessin 3



Dessin 4



Dessin 5



Dessin 6

Mme Robaux dessine à main levée et réalise ainsi des aquarelles superbes. N'ayant pas les mêmes dons artistiques, nous avons recherché dans Photoshop une transformation qui produirait une image intéressante à partir de la photo du musée Curtius. Nous avons retenu un « passage en coordonnées polaires » : le réseau d'horizontales et de verticales est remplacé par un réseau de cercles et de rayons. Voici le résultat :



On remarque tout de suite une parenté certaine avec les anamorphoses cylindriques présentées dans l'article de Ch. Randour et J. Drabbe. Il y a cependant quelques différences. Recherchez-les. À ces transformations strictement géométriques, Mme Robaux ajoute spontanément des variations qui sont pour beaucoup dans le charme de ses aquarelles !

La construction perspective d'un tableau de Petrus Christus

Yves Durand

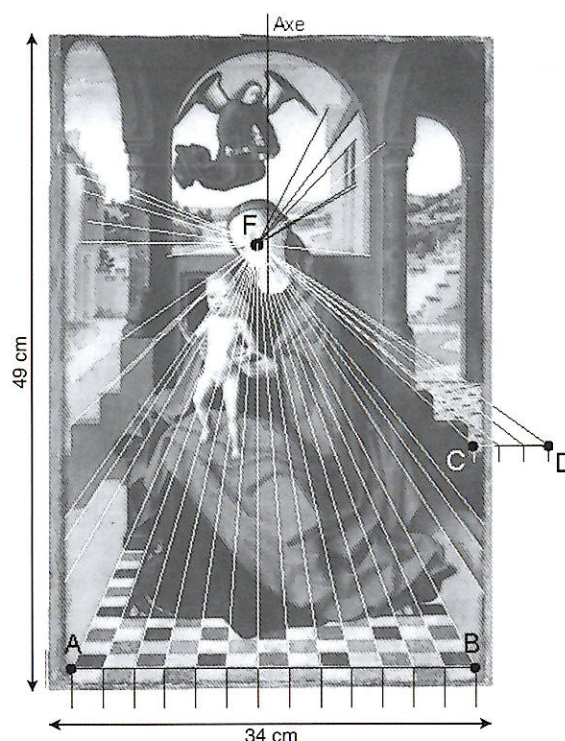
Au xv^e siècle, entre 1445 et 1475, un peintre brugeois a signé un ensemble d'œuvres picturales qui font date dans l'histoire de la peinture des Pays-Bas Bourguignons à la Renaissance : Petrus Christus a été le premier des Primitifs Flamands à construire des tableaux qui répondaient — dans une certaine mesure cependant — aux lois de la perspective linéaire.

Ces lois avaient été définies de façon rigoureuse et déjà très exhaustive en 1435, à Florence, par le mathématicien Leon Battista ALBERTI, dans un traité de géométrie à l'usage des Peintres, intitulé : « *De Pictura* ».

Le tableau de Petrus Christus — la « *Vierge à l'Enfant sur le trône dans un portique* » — est conservé au Musée du Prado à Madrid. Sa réalisation date probablement du milieu de la décennie 1460, soit une trentaine d'années après le traité d'Alberti.

Bien que ce tableau soit fréquemment cité au titre de premier exemple septentrional d'une application « exacte » des lois de la perspective (sans que l'on ne sache cependant si Petrus Christus était au courant des préceptes définis par Alberti), nous allons montrer que, à côté de constructions irréprochables, il en contient aussi d'autres, erronées.

1. Les perpendiculaires au tableau



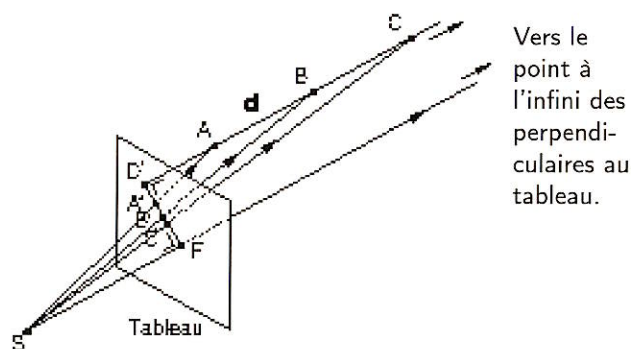
Petrus CHRISTUS a composé le décor architectural dans lequel s'inscrit la scène comme un ensemble défini par des segments de droites, d'une part parallèles, d'autre part perpendiculaires au plan du tableau.

Comme la figure ci-dessus le montre, tous les segments de droites qui sont perçus comme perpendiculaires au tableau **se rencontrent** — s'ils sont prolongés — **en un point unique F** , appelé « Point de fuite principal », légèrement décentré vers la gauche par rapport à l'axe de symétrie vertical du tableau.

Comme cette figure le montre aussi, les droites perpendiculaires au tableau qui représentent les joints des deux carrelages (sous le trône d'une part, en contrebas et en arrière à droite du trône d'autre part) joignent le point de fuite F à des points régulièrement répartis sur deux droites horizontales AB et CD parallèles au tableau.

La jonction de toutes les droites perpendiculaires au tableau en un seul point de fuite F est parfaitement conforme à la théorie de la perspective linéaire.

Considérons en effet l'œil du peintre — le point S — en avant du tableau : il se projette orthogonalement sur le tableau en F . En arrière du tableau, considérons aussi une droite d , perpendiculaire au tableau



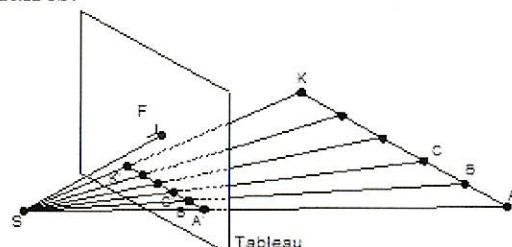
et dont le pied sur ce tableau est le point D' ; soient A, B, C, \dots des points de cette droite à représenter en perspective sur le tableau. Appliquons le principe de base de la perspective : la projection perspective de tout point est l'intersection du tableau avec le rayon (visuel) allant de l'œil S au point à représenter. Les points A', B', C' , intersections des rayons SA, SB et SC avec le tableau sont ainsi les projections perspectives des points A, B, C .

Considérons aussi le point à l'infini sur d (en arrière du tableau) : le rayon joignant S à ce point est la parallèle à d , menée à partir de S , c'est-à-dire aussi la perpendiculaire menée de S au tableau. Son pied est le point F , qui est donc aussi la projection perspective du point à l'infini sur d .

Tous ces points A', B', C', \dots sont alignés sur le segment $D'F$ puisque ce segment est l'intersection du tableau avec le plan (S, d) qui contient toutes les droites $SA, SB, SC, \dots SF$.

Comme ce raisonnement est valable pour toutes les droites perpendiculaires au tableau, tous les segments qui en sont les représentations perspectives convergent vers F , puisque ce point F représente le point à l'infini de chacune d'elles.

Considérons ensuite un segment AK , modélisant un joint de carrelage parallèle au tableau. Le carrelage étant constitué de carrés isométriques, AK est subdivisé en intervalles égaux AB, BC, \dots par les joints qui lui sont perpendiculaires.



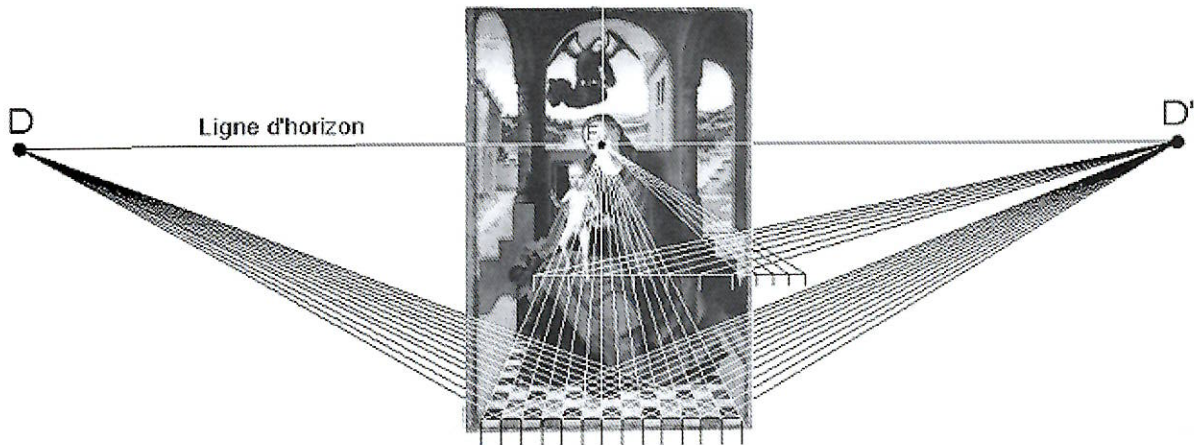
Les projections $A', B', C', \dots K'$ des points $A, B, C, \dots K$ sur le tableau sont alignées parce que le segment $A'K'$ est l'intersection du tableau avec le plan SAK contenant chacune des droites SA, SB, \dots ; de plus, ce segment $A'K'$ est parallèle au segment AK .

Comme $|AB| = |BC| = \dots$, le théorème de Thalès entraîne $|A'B'| = |B'C'| = \dots$.

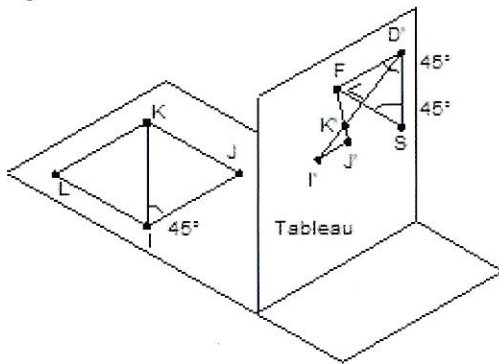
Ainsi, la subdivision régulière en largeur des images des joints de carrelage parallèles au tableau, telle que l'a réalisée Petrus Christus, est tout aussi exacte que son dessin des joints perpendiculaires au tableau. Ceux-ci concourent vers le point de fuite principal F , comme y concourent également, les autres lignes perpendiculaires au plan du tableau : les nez des marches situées de part et d'autre du trône, les arêtes des murets en « escalier » bordant ces marches et les arêtes des linteaux, seuils et corniches des bâtiments représentés en arrière-plan.

2. La subdivision des espaces en profondeur

Une fois la répartition des joints opérée en largeur et les « lignes de fuite » (les images perspectives des perpendiculaires au tableau, concourant au point de fuite F) dessinées, il est facile de déterminer la subdivision en profondeur. Sur la « ligne d'horizon » (c'est-à-dire sur l'horizontale passant par le point de fuite F), on reporte de part et d'autre du point de fuite F , la « distance principale », c'est-à-dire la distance SF entre l'œil de l'observateur S et le tableau. Les deux points D et D' ainsi obtenus sont appelés les « points de distance ». Nous allons voir que les droites joignant ces deux points aux subdivisions du premier joint de carrelage parallèle au tableau représentent les diagonales du carrelage. Les joints parallèles au tableau passent donc par les intersections de ces droites avec les lignes de fuite.



Considérons en effet une dalle de carrelage $IJKL$. Sa diagonale IK forme avec le côté IJ parallèle au tableau un angle de 45° et cette diagonale appartient aussi au plan horizontal du carrelage.



L'image perspective de son point à l'infini s'obtient donc en menant à partir de l'œil S du peintre un rayon visuel SD' parallèle à cette diagonale : SD' est donc une horizontale qui forme avec le tableau un angle de 45° .

Clairement, le triangle rectangle SFD' est isocèle et, par suite, $|FS| = |FD'|$. Le point à l'infini de toute diagonale du carrelage faisant avec le tableau un angle de 45° est donc représenté par le point D' . De même, le point à l'infini de toute diagonale du carrelage faisant un angle de 135° est représenté par le point D , symétrique de D' par rapport à F .

Soit I' et J' les images perspectives déjà connues des sommets I et J de la dalle de carrelage (au § 1 précédent, nous avons montré comment les construire par subdivision des espaces en largeur). L'image de la droite JK est la ligne de fuite $J'F$. L'image perspective K' de K est donc sur cette droite. Elle est aussi sur la droite $I'D'$

puisque D' est l'image du point à l'infini sur ID .

Ainsi, il est permis de confirmer que la construction des subdivisions en profondeur établie par Petrus Christus dans le tableau analysé était tout à fait exacte.

3. Le point de fuite principal et la ligne d'horizon



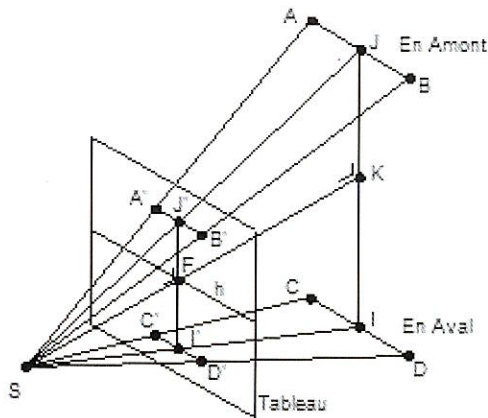
Sur le tableau de P. Christus, nous avons tracé l'horizontale passant par le point de fuite principal F : la « ligne d'horizon ». Elle contient l'image des points à l'infini de n'importe quel plan horizontal.

Dans le paysage d'arrière-plan, Petrus Christus a représenté un long fleuve tranquille et sinueux ; dans le lointain, le niveau de ce cours d'eau est nettement au-dessus de la « ligne d'horizon », à 2,6 cm (sur le tableau) au-dessus de celle-ci.

Par conséquent, le fleuve représenté dans le lointain est plus haut que l'œil du peintre, dont le niveau est donné par le point de fuite (sans quoi, Petrus Christus aurait commis une grave erreur). Or, la scène principale, le trône où est

assise la Vierge tenant l'Enfant, est manifestement déjà située à un niveau supérieur au niveau du fleuve en contrebas, comme le montre bien le muret « en escalier » bordant une volée de marches descendant vers le fleuve (non visibles mais dont la présence est suggérée par ce muret) ; l'œil du peintre est donc aussi à un niveau supérieur au niveau du fleuve en contrebas de la scène. Ainsi, en arrière de la scène principale, le fleuve est **en amont** et en contrebas de cette scène, il est **en aval**.

Procédons alors à une analyse plus approfondie. Supposons que, dans le lointain, là où le fleuve disparaît à la vue entre les collines, on ait tendu, au niveau de l'eau, une corde parallèle au tableau entre les deux rives : puisque cette partie du fleuve est en amont par rapport à S , cette corde AB sera dessinée selon $A'B'$, plus haut que la ligne d'horizon, comme c'est le cas dans le tableau de Petrus Christus.



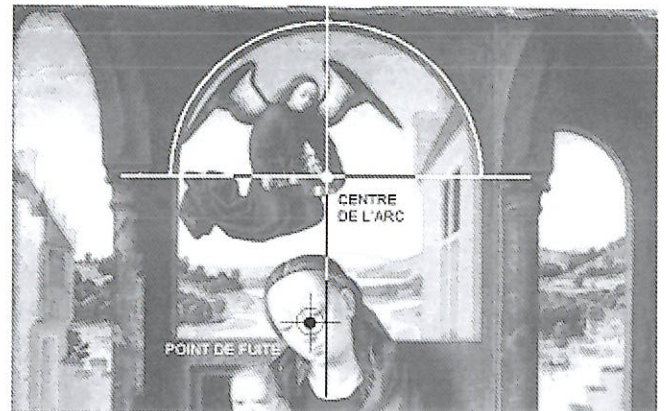
La similitude des triangles rectangles SFJ' et SKJ (ou le théorème de Thalès) implique que $\frac{FJ'}{KJ} = \frac{SF}{SK}$. Or, $|SF|$ est la distance principale. On peut la mesurer sur une épure ayant servi à la construction des points D et D' . En tenant compte de l'échelle de l'épure, on trouve $|SF| = 67,5$ cm. Comme $|FJ'|$ vaut 2,6 cm ; voyons ce que vaudrait $|KJ|$ pour des distances $|SK|$ comprises entre 5 et 10 km : pour $|SK| = 5$ km, $|KJ| = 193$ m et pour $|SK| = 10$ km, $|KJ| = 385$ m.

Pour de telles différences de niveau, ce n'est plus au fleuve tranquille représenté par Petrus Christus que l'on a affaire, mais bien à un impétueux torrent de montagne ! L'embarcation représentée par Petrus Christus et dont la proue est orientée vers l'amont est dépourvue de voiles :

comment pourrait-elle ainsi remonter un tel courant ?

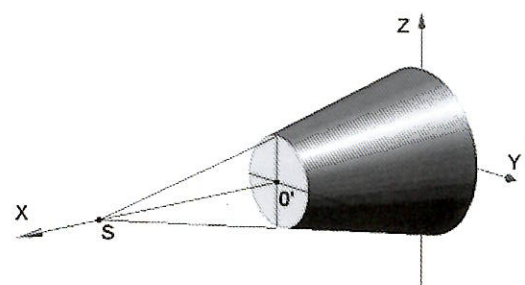
4. L'image de l'arc de circonférence

L'arête avant de l'arc de voûte située à l'arrière et en haut du trône, appartient à un plan parallèle au plan du tableau. Doit-elle être représentée par un arc de circonférence comme l'a fait Petrus Christus ou par un arc d'ellipse ?

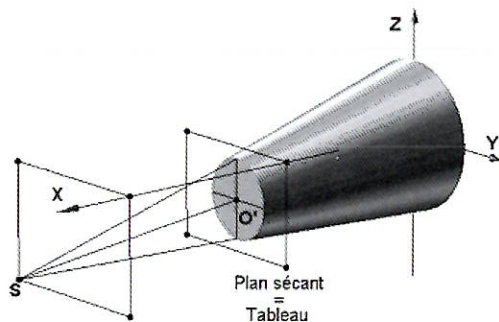


La réponse ne serait immédiate que si le point S (l'œil du peintre) était sur la perpendiculaire au plan de la circonférence passant par son centre : le cône des rayons issus de S vers les points de la circonférence serait un cône droit de révolution et sa section par un plan perpendiculaire à son axe serait une circonférence.

Modélisons graphiquement en trois dimensions cette situation « idéale » : considérons que la circonférence formant la base du cône appartient au plan de référence Oyz et que son centre est confondu avec l'origine O , tandis que le sommet S du cône appartient à l'axe Ox . Le centre de la circonférence, section du cône par le tableau, est appelé « O' ».

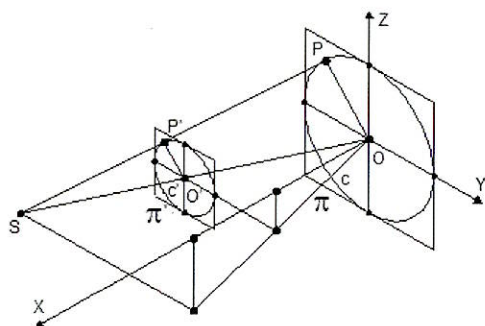


La réponse est moins évidente dans le cas où l'œil de l'observateur quitte l'axe Ox , comme c'est le cas dans l'œuvre de Petrus Christus où le point de fuite principal est non seulement plus bas (vers les z négatifs) que le centre de la circonférence, mais encore se trouve décalé vers la gauche (vers les y négatifs) par rapport à ce centre. La modélisation revient alors à situer le sommet du cône sous le plan Oxy et à gauche du plan Oxz .



Considérons ce dernier cas, le plus général, en ne retenant du tronc de cône que les deux courbes de ses bases, de centres O et O' ; le plan π' (le plan du tableau), contenant la courbe c' de centre O' est parallèle au plan π ($= Oyz$) qui contient la circonférence c , de centre O .

Soit P un point de la circonférence c .



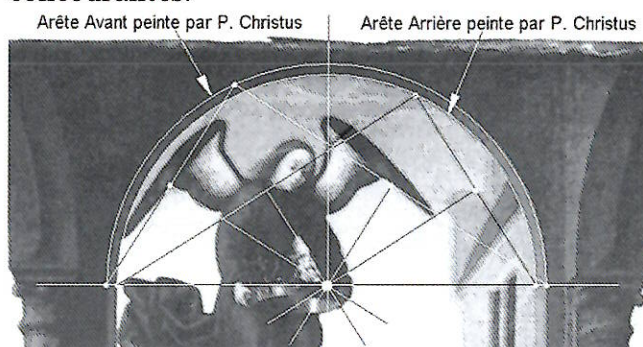
Considérons le plan SOP : il est coupé selon OP et $O'P'$ par les deux plans parallèles π et π' et, dès lors, $O'P'$ est parallèle à OP .

Les deux triangles $SO'P'$ et SOP sont donc semblables et, par suite : $|O'P'| = |OP| \cdot \frac{|SO'|}{|SO|}$. Comme $|OP|$ est le rayon du cercle c et que $\frac{|SO'|}{|SO|}$ ne dépend pas de P , la distance $|O'P'|$ est constante, autrement dit, la courbe c' est aussi une circonférence.

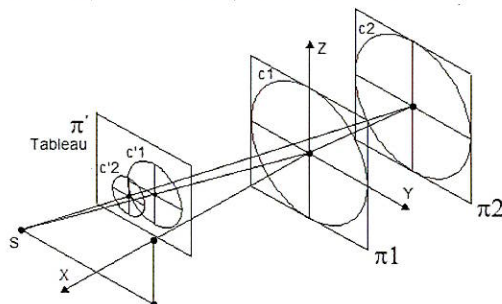
Si l'intrados (c'est-à-dire la face inférieure) de la voûte voulue par Petrus Christus était bien une surface cylindrique admettant comme directrice un arc

de circonférence situé dans un plan parallèle au tableau, le peintre avait parfaitement raison de représenter les images des arêtes de cette voûte comme des arcs de circonférences.

Toutefois, en examinant les deux arêtes en demi-circonférences dessinées par Petrus Christus et en traçant, pour chacune d'elles, deux cordes et leurs médiatrices, il apparaît que l'artiste a, en fait, superposé les centres des deux circonférences puisque les quatre médiatrices sont concourantes.



Or, comme non seulement ces deux circonférences appartiennent à deux plans parallèles distincts, mais encore comme l'œil du peintre (le point S) est décalé par rapport au plan vertical de symétrie de l'arc de voûte, ces deux centres auraient dû, eux aussi, être distincts.



L'arc de circonférence correspondant à l'arête arrière de l'arc de voûte, tel qu'il aurait dû être dessiné, s'obtient très facilement par voie graphique sur le tableau lui-même :

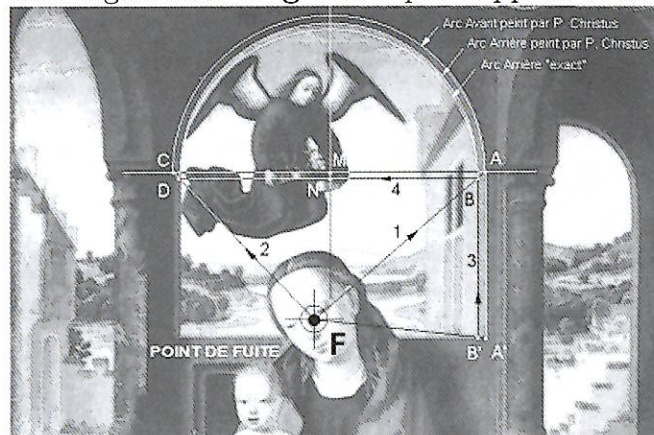
(1) et (2) : joindre le point de fuite principal F aux deux extrémités A et C du diamètre horizontal de l'arc Avant ;

(3) : tracer l'arête verticale arrière $B'B$ du piédroit (c'est-à-dire un montant vertical qui supporte l'arc de voûte) et, par intersection avec FA , déterminer B ;

(4) : tracer une horizontale à partir de B et déterminer son intersection D avec FC : BD est le diamètre « exact » de l'arc de circonférence Arrière de centre N , milieu de BD .

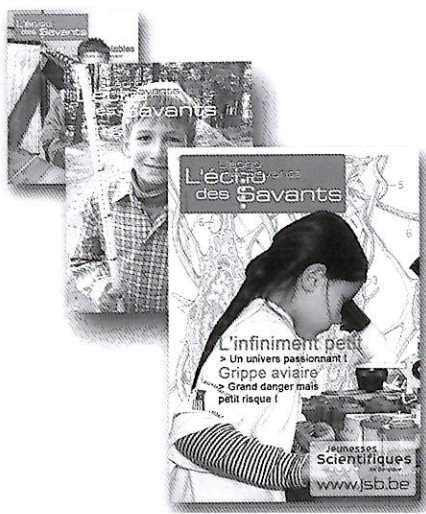
Ainsi, il est manifeste que le **procédé utilisé par Petrus Christus, consistant à superposer les centres des deux arcs de circonférences était erroné**; de plus, comme la construction précédente le montre bien, le centre N de l'arc de circonférence Arrière aurait dû être, pour une construction exacte, non seulement situé nettement **plus bas** que le centre M de l'arc de circonférence Avant, mais en-

core légèrement **à gauche** par rapport à M .



5. Conclusion

Pour l'époque et compte tenu du fait que Petrus Christus n'exerçait pas son talent en Italie où, contrairement à lui, des peintres comme MASACCIO, CRIVELLI ou DA MESSINA avaient pu être directement informés des travaux théoriques d'Alberti, l'analyse qui vient d'être développée montre que Petrus Christus a joué, dans les Pays-Bas Bourguignons, un rôle de novateur. Le premier, il réalise des œuvres sous-tendues par des constructions géométriques déjà fort exactes, même si toutes n'étaient pas irréprochables : une analyse plus approfondie de ce tableau, la « *Vierge à l'Enfant sur le trône dans un portique* » montre encore d'autres imperfections qui n'ont pas été explicitées ici.



L'écho des Savants

Le bon réflexe pour mieux comprendre le monde !

> Tous les deux mois, des articles sur un thème de société, des expériences à réaliser à la maison, l'agenda des activités des Jeunesses Scientifiques, des jeux, des infos, etc.



JE DÉSIRE RECEVOIR L'ÉCHO DES SAVANTS

Pendant 1 an et je verse 7,50 € sur le compte n° 001-0015784-49 de l'association.

Nom, prénom _____
 Date de naissance ____ / ____ / ____ Sexe F / M
 Rue : _____ n° ____ bte ____
 N° Postal : _____ Localité : _____
 Tél : _____

Bulletin à renvoyer à

Jeunesses Scientifiques
 de Belgique

✉ av. Latérale, 17/1 - 1180 Bxl

☎ 02 / 537.03.25

☎ 02 / 537.08.02

www http://www.jsb.be

Saint-Léon sur Vézère

Guy Noël



Photo 1

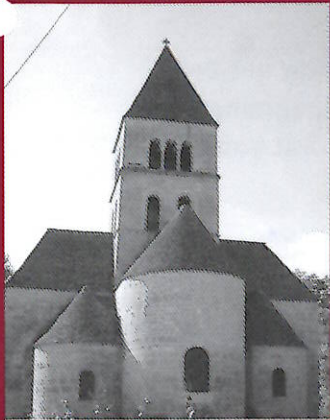


Photo 2

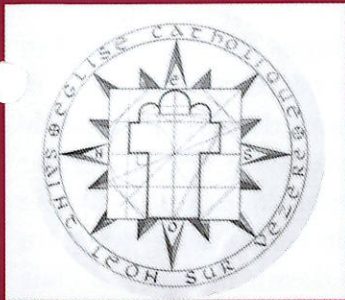


Photo 4

Dans la suite, apparaît le nombre d'or qui déterminerait une dimension symbolique essentielle de l'église. Précisons qu'il n'y a pas d'unanimité sur le fait de savoir si le nombre d'or a été utilisé volontairement par les architectes romans ou si sa présence est accidentelle.

Connaissez-vous la Vézère ? Cette petite rivière de Dordogne est située dans une région renfermant une quantité impressionnante de sites pré-historiques. Un des plus fameux est la grotte de Lascaux. Un autre est l'abri dit de Cro-Magnon dont il n'est pas nécessaire de rappeler ce qui y fut découvert. Mais ce n'est pas aux hommes de la préhistoire que nous allons nous intéresser ici, c'est à l'œuvre d'hommes du XI^e siècle, en particulier à une petite église romane qu'ils ont bâtie dans le village de *Saint-Léon-sur-Vézère*.

La photo 1 nous montre la nef, le transept nord et la tour de l'église de Saint-Léon, tandis que le chevet apparaît sur la photo 2. Sur les deux photos, on reconnaît sans peine les arcs en plein cintre typiquement romans. Au chevet, on remarque l'abside semi-circulaire contenant le chœur, flanquée de deux absidioles de même forme.

Si nous nous intéressons à cette église, c'est qu'à l'intérieur, nous avons découvert un panneau méritant toute notre attention :

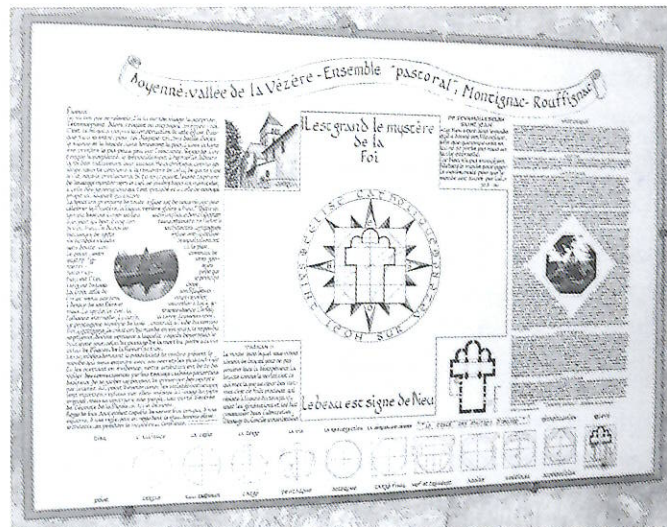


Photo 3

Remarquez d'abord la magnifique rosace centrale (photo 4). Sur un fond constitué par une rose des vents, on y voit le plan de l'édifice, un plan comportant les lignes de construction utilisées pour le réaliser.

Le vocabulaire utilisé pour désigner les différentes parties d'une église dont le plan est basé sur une croix latine est rappelé sur la figure 1.

La présence de la rose des vents nous permet de vérifier l'orientation du bâtiment : comme c'est généralement le cas dans une église, le chœur est à l'est, la nef s'ouvre à l'ouest, le transept est orienté nord-sud.

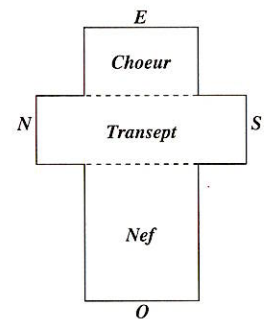


Figure 1

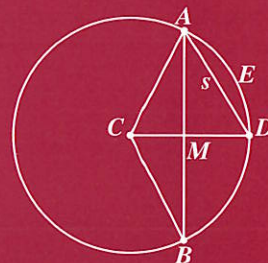
LONGUEUR DE LA CORDE D'UN ARC EN FONCTION DE CELLE DE LA CORDE DE L'ARC DOUBLE.
 Dans la figure ci-contre, l'arc de cercle \widehat{ADB} est double de l'arc \widehat{AED} . Calculer la longueur de la corde $|AD|$ en fonction du rayon du cercle et de la corde de $|AB|$.

Notons R le rayon du cercle, ℓ la longueur de $[AB]$ et s la longueur de $[AD]$. M est le milieu de $[AB]$ et le triangle AMD est rectangle. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

$$s^2 = |AM|^2 + |MD|^2 = \frac{1}{4}\ell^2 + (R - |CM|)^2 = \frac{1}{4}\ell^2 + R^2 + |CM|^2 - 2R \cdot |CM|$$

Comme $|CM|^2 = R^2 - |AM|^2 = R^2 - \frac{1}{4}\ell^2$, on obtient finalement

$$s^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\ell^2} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell^2}$$



Dans la partie gauche du panneau, le texte mentionne notamment un des principes mis en œuvre lors de la construction :

Bâtir un temple destiné à créer un lieu sacré implique l'adoption d'un plan qui doit, d'une certaine manière refléter le divin, Dieu. Ainsi les architectes—compagnons bâtisseurs de cette église ont—ils utilisé six symboles à l'aide desquels ils en ont sans doute conçu le plan.

Et le texte énumère les six symboles, en leur attribuant une signification liée aux croyances religieuses : le point, la croix, le cercle, le carré, le pentagone, l'octogone. Il conclut :

Regarde bien, tout enfant capable de se servir d'un compas, d'une équerre, d'une règle, peut en regardant le plan, devenir élève—architecte, en pénétrer le mystère...

Au bas du panneau les six symboles sont reproduits (voir au bas de cette page), avec la mention de leur interprétation symbolique. Sur le dessin du pentagone figure la lettre grecque φ . C'est la seule lettre figurant sur un des six symboles. Elle a donc certainement une grande importance pour l'auteur du panneau. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Les dessins qui suivent sur le panneau (photo 6, page 27) décrivent les étapes du tracé du plan de l'église. Le premier est constitué d'un cercle, d'un carré circonscrit à ce cercle et des deux médianes NS et EO du carré (la croix). Le deuxième donne les indications pour dessiner la nef et le transept. Les indications $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ portées au long des bords verticaux nous permettent de positionner verticalement le transept. En observant attentivement ce même dessin, on remarque la présence de trois côtés de l'octogone rencontré précédemment. De plus, le côté avant de la nef coïncide avec l'un de ces côtés. Nous pouvons ainsi dessiner complètement la nef. Bien que le dessin ne soit pas clair à ce sujet, une simple mesure suffit à se convaincre que les bords latéraux du transept sont à mi-distance entre les prolongements des bords latéraux de la nef et les bords correspondants du carré.

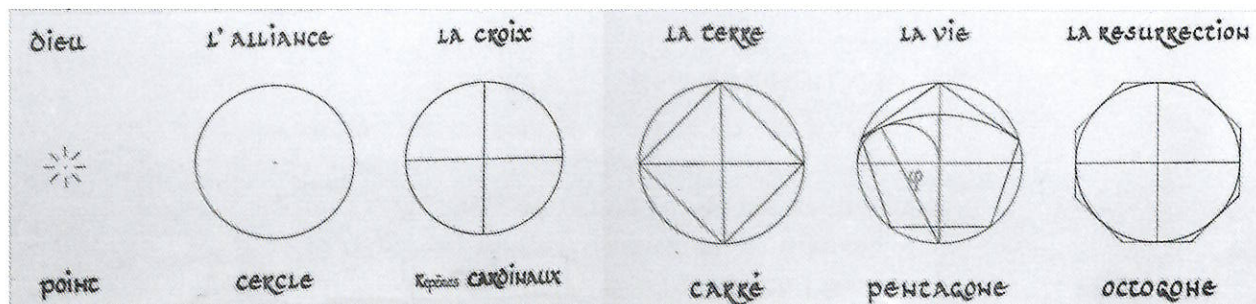


Photo 5

Nous obtenons donc la figure 2 ci-contre où nous avons marqué le centre C du cercle, du carré et de l'octogone.

Le troisième dessin de la photo 6 montre l'étape suivante : un carré « sur pointe » est inscrit au cercle et l'espace situé derrière le transept est divisé en deux parties égales par un trait horizontal. Ces deux éléments servent à dessiner le fond de l'abside : un demi-cercle dont le centre et les extrémités sont situés sur le trait horizontal qui vient d'être tracé. Comme il se doit, le centre est aussi sur l'axe Ouest-Est de l'église (segment $[OE]$). En portant ces éléments sur la figure 2, on obtient la figure 3.

Les quatrième et cinquième dessins de la photo 6 sont à examiner ensemble. Ils montrent qu'on inscrit au cercle un pentagone régulier ayant un sommet en E . On trace ensuite un arc de cercle centré au point O et joignant les deux sommets du pentagone adjacents au sommet E . Notons A le point intersection de cet arc avec $[OE]$. On trace alors l'horizontale passant par A et on achève le tracé de l'abside par des segments verticaux limités à cette horizontale (figure 4). Comme l'abside, les absidioles ont un fond semi-circulaire. Les deux centres sont situés sur les côtés du carré inscrit, à la hauteur du point A . Les murs extérieurs sont prolongés par des segments jusqu'au mur arrière du transept (figure 5). Les constructions sont terminées. Supprimons les traits devenus inutiles et abattons les cloisons qui séparent les trois parties de l'église (figure 6).

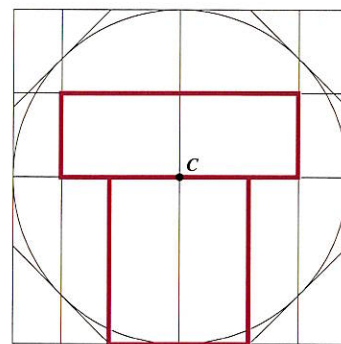


Figure 2

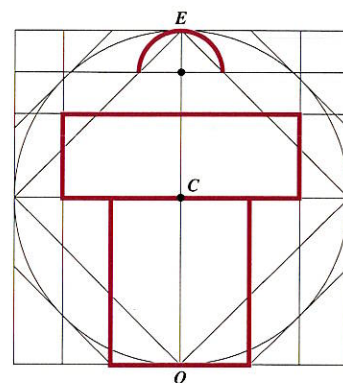


Figure 3

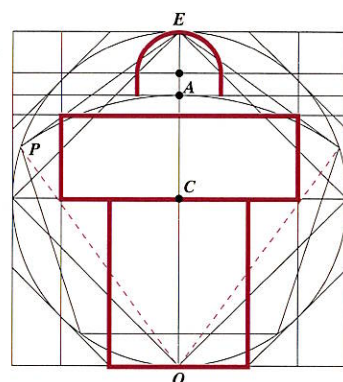


Figure 4

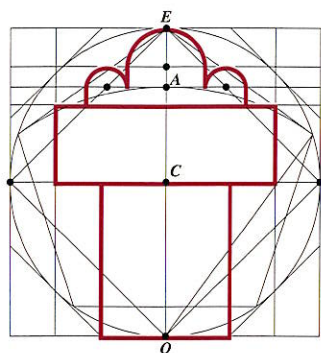


Figure 5

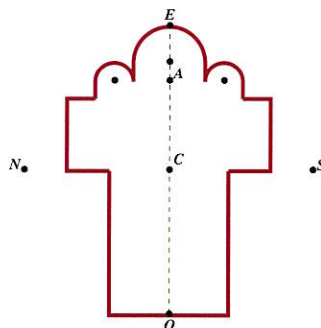


Figure 6

Revenons à présent à la lettre φ qui figure sur la photo 5 et qui désigne la longueur $|OP|$, donc aussi la longueur $|OA|$, c'est-à-dire la distance de l'entrée de la nef à l'entrée de l'abside, deux points dont la signification symbolique est certainement importante.

La lettre φ est elle-même un symbole que certains d'entre vous ont probablement déjà rencontré,

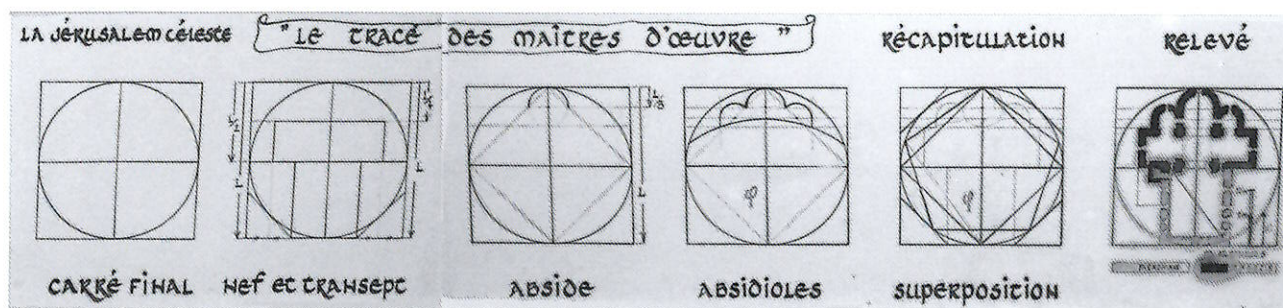
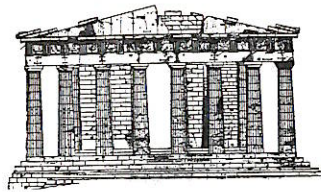


Photo 6

notamment à propos des suites de Fibonacci. Cette lettre désigne le plus souvent le « nombre d'or », aussi appelé la « divine proportion » ou la « section dorée ». Il détermine les proportions de nombreux bâtiments considérés comme des chefs-d'œuvre esthétiques, par exemple le Parthénon. Sa valeur est la racine positive de l'équation $x(x-1) = 1$, c'est-à-dire $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se pourrait-il que le φ de Saint-Léon-sur-Vézère soit le même que celui du Parthénon ?

L'encadré ci-dessous vous montre que la réponse est positive. La distance de l'entrée de la nef de l'église de Saint-Léon à l'entrée de l'abside vaut donc le nombre d'or lorsque la longueur de la nef est prise comme unité. Cela peut s'écrire $\frac{|OA|}{|OC|} = \varphi$ et, cela entraîne

$$\frac{|OC|}{|CA|} = \frac{|OC|}{|OA| - |OC|} = \frac{1}{\varphi - 1} = \varphi$$



Nous découvrons là peut-être la véritable raison de l'utilisation d'un pentagone régulier pour déterminer la position du point A : il fallait faire en sorte que le point C — centre de tous les symboles explicités par les concepteurs de l'ouvrage — divise dans la proportion divine l'espace compris entre l'entrée de l'église et celle de l'abside. L'architecte aurait exploité ses connaissances géométriques pour implémenter des symboles ésotériques ou mystiques dans la structure même du bâtiment. Des mathématiques au service de l'art, ou de la religion ? Les deux à la fois évidemment. Rien d'étonnant à cela puisque de tous temps l'art a été un moyen privilégié d'expression religieuse, que ce soit en peinture, en sculpture ou en ... architecture. Le Parthénon lui-même n'est-il pas un temple consacré à la déesse *Athena* ?

La figure 6 isole le pentagone et le segment $[OP]$ de la figure 5 : Comme $\widehat{ECP} = 72^\circ$, on a $\widehat{PCS} = 18^\circ$ et $\widehat{PCO} = 108^\circ$. Autrement dit, PCO est un triangle isocèle semblable à PEQ et nous pouvons donc l'incorporer aussi à un pentagone régulier.

Complétons (figure 7) le triangle PCO en un pentagone régulier et traçons les diagonales de ce pentagone de façon à faire apparaître au surplus une étoile à cinq branches.

Cette figure est truffée de propriétés intéressantes. Pouvez-vous montrer que les droites OT et $O'T'$ sont parallèles ? Du théorème de Thalès, vous déduirez alors

$$\frac{|PO|}{|PT'|} = \frac{|PC'|}{|PO'|}$$

Vérifiez aussi les égalités

$$|PC'| = |PT'| = |OC| \text{ et } |PO'| = |PU'| = |PO| - |OU'| = |PO| - |OC|$$

En utilisant ces résultats, vous obtenez

$$\frac{|PO|}{|OC|} = \frac{|OC|}{|PO| - |OC|}$$

Le moment est venu de se rappeler que $|OC|$ a été choisi comme unité de longueur : $|OC| = 1$. Donc $|PO| = \frac{1}{|PO| - 1}$. Autrement dit, $|PO|$ est une racine de l'équation $x(x-1) = 1$ et comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule racine positive de cette équation, on a bien

$$|PO| = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

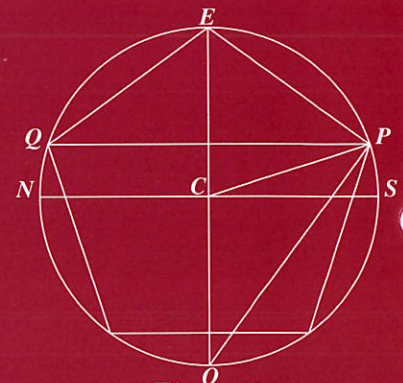


Figure 6

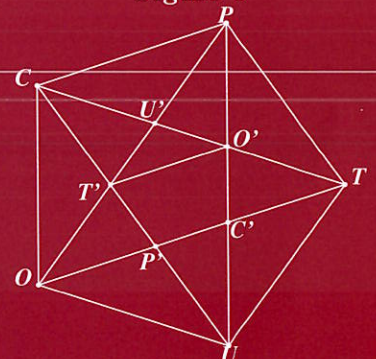


Figure 7

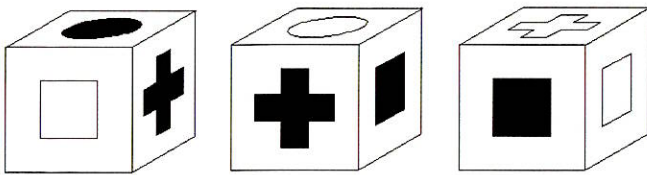
Olympiades

Claudine Festraets

L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 18 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques-uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

Maxi 3 - Midi 8

Voici trois vues d'un même cube :

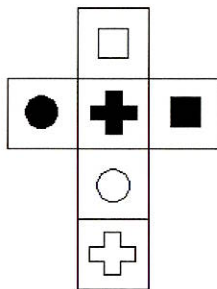


Sur les faces de ce cube se trouvent les figures suivantes : disque blanc, disque noir, carré blanc, carré noir, croix blanche, croix noire. Quelle est la figure se trouvant sur la face opposée au disque noir ?

- (A) disque blanc (B) carré blanc (C) carré noir
(D) croix blanche (E) croix noire

Solution

Voici le seul développement du cube qui tient compte des trois vues. Le disque noir est donc opposé au carré noir.



Maxi 4 - Midi 12

Selon le compteur placé à l'entrée, 75 personnes sont entrées hier dans ce magasin. Les relevés faits aux caisses indiquent que l'on a vendu ce jour-là 12 GSM, 18 jeux vidéo et 24 CD. Vingt des clients ont acheté exactement deux articles : six d'entre eux ont acheté un GSM et un jeu vidéo, quatre ont acheté un GSM et un CD et dix ont acheté un jeu vidéo et un CD. Un seul client a acheté trois articles différents. Les autres acheteurs n'ont pris qu'un seul article. Combien de personnes sont sorties sans achat ? (A)

- 21 (B) 32 (C) 33 (D) 43
(E) Personne n'est sorti sans rien acheter.

Solution

Additionnons les achats des personnes qui ont acheté plusieurs articles :

$$(6 + 4 + 1) \text{ GSM} = 11 \text{ GSM}$$

$$(6 + 10 + 1) \text{ jeux video} = 17 \text{ jeux video}$$

$$(4 + 10 + 1) \text{ CD} = 15 \text{ CD}$$

Nous connaissons ainsi le nombre de personnes qui ont fait un seul achat : 1 personne a acheté un GSM, 1 un jeu video et 9 un CD.

Le nombre de clients ayant fait des achats est $20 + 1 + 1 + 1 + 9 = 32$, donc 43 personnes n'ont rien acheté.

Maxi 5 - Midi 13

Si on calcule le produit $2^{2005} \times 5^{2006}$, on obtient un très grand nombre ; quelle est la somme de tous ses chiffres ?

- (A) 5 (B) 7 (C) 32 (D) 3 057 (E) 15 657

Solution

$2^{2005} \times 5^{2006} = 2^{2005} \times 5^{2005} \times 5 = 5 \times 10^{2005}$, ce qui s'écrit 5 suivi de 2005 zéros. La somme des chiffres de ce nombre est donc 5.

Maxi 6 - Midi 14

Le guide d'un groupe de touristes récolte l'argent pour une excursion. S'il demande à chacun 75 euros, il manque 440 euros au total exigé ; s'il demande à chacun 80 euros, il y a un excès de 440 euros. Combien y a-t-il de personnes dans le groupe (le guide ne fait pas partie du groupe) ?

- (A) 88 (B) 176 (C) 220 (D) 440 (E) 501

Solution

Soit x le nombre de touristes et y la somme totale nécessaire pour l'excursion.

$$\begin{cases} 75x = y - 440 \\ 80x = y + 440 \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient $5x = 880$, d'où $x = 176$.

En soustrayant ces deux équations, on obtient $5x = 880$, d'où $x = 176$.

Maxi 8 - Midi 16

Deux nombres naturels sont tels que le produit de leur somme par leur différence est égal à 97. Que vaut leur somme ?

- (A) 11 (B) 19 (C) 23 (D) 37 (E) 97

Solution

Soient a, b les deux nombres naturels.

On a $(a + b)(a - b) = 97$, or 97 est un nombre premier, d'où la seule possibilité est $a + b = 97$ et $a - b = 1$. Ce qui donne les nombres naturels $a = 49$ et $b = 48$.

Maxi 9 - Midi 17

Sans réponse préformulée - Dans une classe de 21 élèves, chaque élève a au moins un ami. À la salle d'informatique, devant un ordinateur, s'assoient soit un seul élève, soit deux élèves amis. Combien faut-il prévoir d'ordinateurs au minimum pour être certain que les 21 élèves pourront s'asseoir devant un ordinateur ?

Solution

Il se peut que 20 des élèves de cette classe aient tous un seul ami : le 21^e élève et qu'il n'y ait aucun autre lien d'amitié dans la classe. Le 21^e élève et un de ses 20 amis s'assièront devant un ordinateur et il faudra encore 19 ordinateurs pour les autres élèves, soit 20 ordinateurs en tout.

Maxi 14 - Midi 28

Sans réponse préformulée - Le questionnaire de l'OMB comporte 30 questions. Une bonne réponse rapporte 5 points, une abstention rapporte 2 points et une réponse fausse aucun point. Quel est le nombre de scores possibles ?

Solution

Soit a le nombre de bonnes réponses et b le nombre d'abstentions, le score est alors $5a + 2b$.

Pour $a \leq 30$ et $b = 0$, le score est $5a$, donc de 0 à 150, tous les multiples de 5 sont des scores possibles. Pour $a \leq 29$ et $b = 1$, le score est $5a + 2$, donc de 2 à 147, tous les nombres de la forme $5a + 2$ sont des scores possibles.

Pour $a \leq 28$ et $b = 2$, le score est $5a + 4$, donc de 4 à 144, tous les nombres de la forme $5a + 4$ sont des scores possibles ; 149 n'est pas dans cette liste.

Pour $a \leq 27$ et $b = 3$, le score est $5a + 6 =$

$5(a + 1) + 1$, donc de 6 à 141, tous les nombres de la forme $5(a + 1) + 1$ sont des scores possibles ; 1 et 146 ne sont pas dans cette liste.

Pour $a \leq 26$ et $b = 4$, le score est $5a + 8 = 5(a + 1) + 3$, donc de 8 à 138, tous les nombres de la forme $5(a + 1) + 3$ sont des scores possibles ; 3, 143 et 148 ne sont pas dans cette liste.

Il y a donc 6 entiers entre 0 et 150 qui ne sont pas des scores, le nombre de scores possibles est 145.

Maxi 15 - Midi 29

Le nombre réel strictement positif x satisfait à $x^{-1} < x < \sqrt{2x}$. Alors x appartient à l'intervalle

- (A) $]0, \frac{1}{2}[$ (B) $[\frac{1}{2}, 1[$ (C) $]0, 2[$ (D) $]1, 2[$ (E) $]2, +\infty[$

Solution

$x^{-1} < x \Leftrightarrow 1 < x^2$, d'où $x > 1$, car x est positif.

$x < \sqrt{2x} \Leftrightarrow x^2 < 2x$, d'où $x < 2$, car x est positif.

Dès lors $x \in]1, 2[$.

Maxi 22

Une suite harmonique est une suite de réels non nuls (s_1, s_2, s_3, \dots) dont les inverses forment la suite arithmétique $\left(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}, \dots\right)$.

Les deux premiers termes d'une suite harmonique sont 3 et 4. Que vaut la somme des quatre premiers termes de cette suite ?

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) 18 (C) 21 (D) 23 (E) 25

Solution

Les deux premiers termes de la suite arithmétique sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. La raison de cette suite vaut $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$. Les termes suivants de la suite arithmétique sont donc $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

D'où les quatre premiers termes de la suite harmonique : 3, 4, 6, 12 et leur somme est 25.

Maxi 24

Le symbole $n!$ (où n est un nombre naturel non nul) désigne le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Quel est le nombre de diviseurs entiers positifs de $10!$?

- (A) 17 (B) 40 (C) 180 (D) 210 (E) 270

Solution

Les facteurs premiers de $n!$ sont 2, 3, 5 et 7.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

On obtient le nombre de diviseurs en augmentant chaque exposant d'une unité et en effectuant le produit des nombres ainsi obtenus : $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$.

Rallye problèmes

Nicole Miewis

Voici les sept problèmes constituant la seconde étape du rallye Problèmes 2005-2006. Nous vous demandons d'en résoudre au moins quatre. Effectuez votre choix, en fonction du nombre de points rapportés par chaque problème, mais aussi de la confiance que vous avez en vos réponses. Quoi qu'il en soit, n'oubliez pas que *l'essentiel, c'est de participer*.

Rédigez les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Expliquez et justifiez soigneu-

sement vos solutions. Vous pouvez aussi nous envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu qu'une partie du problème. Sur chaque feuille, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Votre participation doit être envoyée à N. MIÉWIS, avenue de Péville, 150, 4030 Grivegnée, munie de la mention « Concours Rallye Math-Jeunes Senior » pour le 1^{er} mars 2006. Les meilleures réponses seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

8. Les bougies

(5 points)

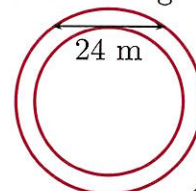
Tout à coup, l'éclairage s'éteignit dans l'appartement; les fusibles venaient de sauter. J'allumai deux bougies qui se trouvaient là et je continuai à travailler jusqu'à ce que le réseau fût réparé.

Le lendemain, je voulus savoir combien de temps l'appartement était resté privé de courant. Je n'avais pas noté l'heure à laquelle l'éclairage s'était éteint, ni celle à laquelle il s'était rallumé. Je ne connaissais pas non plus la longueur initiale des bougies : je me souvenais qu'elles étaient neuves, de même longueur, l'une prévue pour brûler 5 heures et l'autre 4. Maman, qui avait jeté les restes des bougies se souvenait que l'une était quatre fois plus longue que l'autre. Quelle a été la durée de la panne ?

9. La moquette

(5 points)

On doit poser une nouvelle moquette dans un couloir en forme d'anneau circulaire. L'architecte — distrait — n'a renseigné sur son plan que la longueur d'une corde tangente au mur intérieur. Quelle est l'aire de la moquette ?



10. Carré et triangle

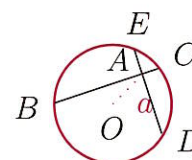
(10 points)

Un carré $PQRS$ est inscrit dans un triangle ABC , P est situé sur le côté AB , Q sur le côté AC et RS repose sur le côté BC de longueur 6 cm. Le carré occupe les $(\frac{4}{9})^e$ de la surface du triangle ? Que vaut la hauteur AH du triangle ?

11. Les deux cordes

(10 points)

À l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon r , on fixe un point A . On note $|OA| = a$ ($a < r$). Par A , on mène deux cordes perpendiculaires BC et DE . Pour quelle position de ces deux cordes, la somme des longueurs $BC + DE$ est-elle la plus grande possible ?



14. Question d'âges.

(5 points)

L'âge d'Aude est égal à l'âge de Béatrice augmenté de la racine cubique de l'âge de Coralie. L'âge de Béatrice est égal à l'âge de Coralie augmenté de la racine cubique de l'âge d'Aude, puis de quatorze ans. L'âge de Coralie est égale à la racine cubique de l'âge d'Aude augmenté de la racine carrée de l'âge de Béatrice. Quels sont les âges –**en nombre entier d'années**– des trois amies ?

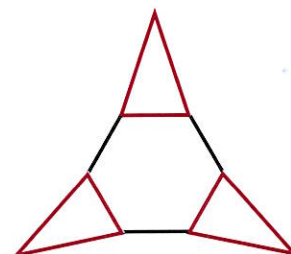
12. Les bicyclettes

(5 points)

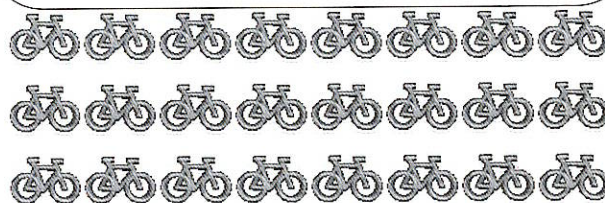
Dans une petite ville de Chine, vivent 3 333 familles qui ont chacune au moins une bicyclette. Aucune famille ne possède plus de trois bicyclettes ; il y a autant de familles propriétaires de trois bicyclettes que de familles qui n'en ont qu'une ; le nombre de familles qui possèdent deux bicyclettes est neuf fois plus grand que le nombre de celles qui en possèdent trois. Combien y a-t-il de bicyclettes dans cette ville ?

13. L'angle dièdre

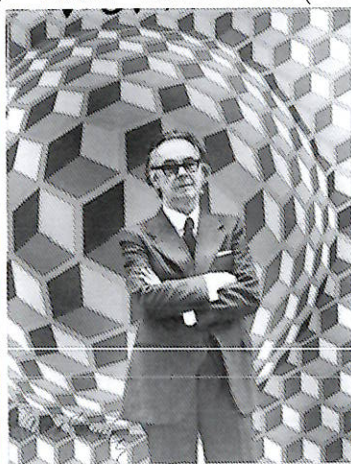
(10 points)



Cet hexagone régulier est découpé dans du carton avec **les trois triangles** qui lui sont attachés. **Chaque triangle a pour base un côté de l'hexagone et pour hauteur correspondante une fois et demie cette base.** Les triangles sont repliés en pivotant sur leur bases communes avec l'hexagone jusqu'à ce que leurs sommets libres se touchent. Quel est l'angle dièdre entre les plans de deux quelconques des triangles ?



Victor VASARELY (1908-1997)



Artiste hongrois. Il commença son éducation à l'Académie de Budapest, où il étudia la médecine. Il se tourna ensuite vers l'art et partit à Paris en 1930. Il y travailla comme décorateur et publiciste. Au début, il travaillait en noir et blanc, mais plus tard il ajouta la couleur. Vasarely fut une des grandes figures de la peinture abstraite géométrique, appelée aussi pop-art. Ce mouvement d'art s'intéresse aux propriétés scientifiques de la couleur et des lignes et étudie l'information sur la rétine et l'interprétation qu'en fait le cerveau : il se crée ainsi, par exemple, des illusions d'optique. Mais l'œuvre de Vasarely ne se limite pas à cet aspect scientifique : il voulait aussi créer une forme d'art démocratique que tout le monde pouvait comprendre. Il était également inspiré par la nature

S. Trompler

Le numéro 114 de *Math-Jeunes* sera consacré au thème *Les grands problèmes*. Au sommaire : les problèmes grecs, les graphes, le volume de la pyramide, la détermination de la longitude, les nombres premiers ...

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-F 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : <http://www.sbp.be>.

Math-Jeunes

Comité de Rédaction : C. Festraets, N. Lambelin, J. Mie-
wis, N. Mievis, G. Noël, Y. Noël-Roch, F. Pourbaix, C. Ran-
dour, P. Tilleuil, A. Tilleuil-Lepoutre, S. Trompler, N. Vande-
nabeele, C. Villers.

Math-Jeunes Junior

Comité de Rédaction : F. Drouin, C. Festraets, B. Hon-
claire, G. Laloux, G. Noël, Y. Noël-Roch, A. Paternotte,
F. Pourbaix, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.
Mise en page et dactylographie : M.-C. Carruana

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour
connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix
selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire
sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez
vos paiements :

- ✉ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-
29 de S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- ✉ pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- ✉ pour les autres pays : par virement international au Compte
IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBP-
Mef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire
un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat
postal international. Tout chèque bancaire non encaissable
en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	4 €		8 €	
Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (par APMEP)	8 €		16 €	
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Non prior : ☐, Prior : ☑

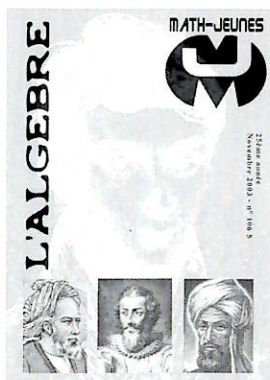
Anciens numéros :

Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition

Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition

Frais d'expédition : consulter le secrétariat

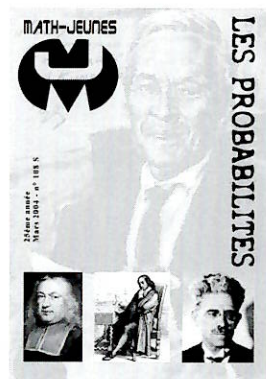
Complétez votre collection de Math-Jeunes.



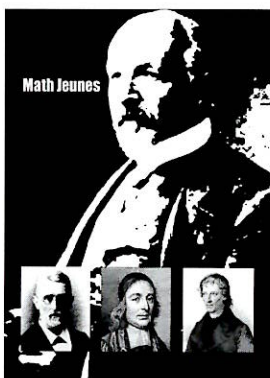
N°106
L'algèbre



N°107
Les courbes



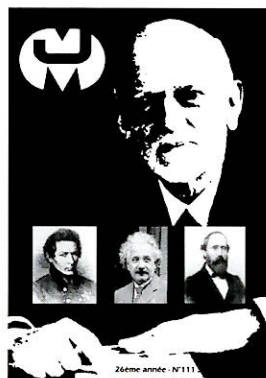
N°108
Les probabilités



N°109
L'infini



N°110
Le codage



N°111
Les géométries

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € pour les
trois numéros 106 à 108; 1,5 € pour les trois numéros 109 à 111, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont
accessibles à l'adresse www.sbp.be/mj2.htm

Math-Jeunes

Périodique trimestriel

15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G. NOËL
Rue de la Culée, 86 – 6927 Resteigne
Bureau de dépôt: Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu

Refusé

Décédé

Adresse insuffisante

N°habite plus à l'adresse
indiquée