Avril 2006 – 27e année – N 114 S

# Math-Jeunes

De grands problèmes

**Renouvelez dès à présent votre abonnement à *Math-Jeunes* pour l'année scolaire 2006–2007. (Voyez les tarifs en page 3 de couverture). Durant cette année, *Math-Jeunes* traitera des thèmes suivants :**

- **La cartographie.**
- **Les nombres.**
- **Les jeux.**

## Un grand problème au XVIII$^e$ siècle

Avec le développement du commerce maritime au dix-huitième siècle, il devient impératif de fournir aux marins des techniques leur permettant de déterminer avec précision leur position en mer. L'observation des astres, de la lune en particulier, est à cet égard indispensable. La mécanique newtonienne, élaborée au siècle précédent, fournit aux astronomes l'outil théorique nécessaire. Le développement des instruments d'optique leur permet de réaliser des observations ... trop d'observations parfois !

En effet, du fait des erreurs inhérentes à toute mesure expérimentale, les résultats obtenus sont incompatibles. Les astronomes sont amenés à devoir résoudre des système d'équations comportant plus d'équations que d'inconnues. Devant l'impossibilité de trouver des solutions exactes, ils recherchent les solutions qui sont les meilleures — ou les moins mauvaises — possibles. Mais comment déterminer si un jeu de solutions est meilleur qu'un autre ? Les recherches des mathématiciens déboucheront sur la méthode des moindres carrés, énoncée en 1805 par Legendre, puis approfondie et justifiée par Gauss et Laplace. *Math-Jeunes* a abordé cette question dans son numéro 112.

En couverture : photo de la lune prise le 24 juin 2002 alors que la lune était âgée de 14 jours, 3h et 20 min. (voir `www.pa.msu.edu/people/frenchj/moon/index3.html`)

# Sommaire

N°114 Vingt-septième année 2006

# Math-Jeunes

## Les grands problèmes

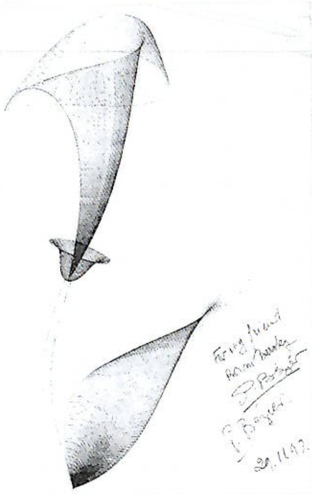
En parcourant les précédents numéros de *Math-Jeunes*, vous vous rendrez vite compte que rares sont ceux qui ne font aucune allusion à un « grand problème ». Le numéro 113 évoquait l'apparition de la perspective dans la peinture de la Renaissance (Y. Durand, *La construction perspective dans un tableau de Petrus Christus*). Dans le numéro 112, l'article *Tout droit dans le nuage*, de P. Tilleuil, était consacré à la méthode des moindres carrés, une méthode issue du problème de l'incompatibilité des observations astronomiques (voir ci-contre *Un grand problème au* XVIII$^{e}$ *siècle*). Si nous remontons dans les numéros antérieurs, nous trouverons le problème de la « démonstration » du postulat d'Euclide, celui de la création d'un code secret indéchiffrable (un problème dont la solution doit sans cesse être améliorée), celui de la distinction de divers infinis, etc.

Rien d'étonnant, dès lors, à ce qu'un numéro complet soit consacré à *des* grands problèmes.

Les problèmes mathématiques sont d'origine variée. Certains émergent dans toute communauté dont l'organisation sociale est suffisamment élaborée. Ainsi dans l'ancienne Egypte, pour percevoir les impôts, les scribes de Pharaon ont dû résoudre des problèmes mathématiques pour effectuer des recensements, mesurer des terrains ou l'importance des alluvions du Nil.

Citons un autre exemple — récent — de développements mathématiques ayant pour origine des besoins pratiques, dans une société technologiquement très avancée, la nôtre.

Pour résoudre simplement des problèmes de modélisation des courbes et des surfaces, un ingénieur des usines Renault, Pierre BÉZIER (1910–1999), introduisit vers 1970, un type de courbes (connues depuis lors sous son nom) qui sont aujourd'hui utilisées systématiquement par tous les logiciels de conception assistée ou de dessin sur ordinateur. Il y a gros à parier que la carosserie de votre voiture familiale a été ainsi dessinée à l'aide de courbes de Bézier avant d'être réalisée.



Si les courbes de Bézier ont été inventées en fonction des besoins industriels, rien n'empêche de les utiliser à des fins artistiques. Ci-contre, une œuvre d'art due à Pierre Bézier lui-même.

À côté des problèmes de type « utilitaire » que nous venons de rencontrer, on trouve des problèmes suscités par les mathématiques elles-mêmes. Ils relèvent de la volonté humaine de toujours mieux comprendre son environnement. Et la mathématique fait partie de l'environnement du mathématicien.

La « saga » des tentatives de démonstration du postulat d'Euclide constitue un bel exemple de ce phénomène. EUCLIDE (3$^{e}$ siècle avant J.-C.) ayant inscrit sans démonstration dans ses *Éléments* un énoncé signifiant que *par tout point extérieur à une droite passe une et une seule parallèle à cette droite*, ses successeurs estimèrent qu'il ne suffisait pas que cet énoncé ait « bien l'air » d'être vrai, il était *intellectuellement insatisfaisant* qu'il ne soit pas rigoureusement établi. Les tentatives de démonstration se sont succédé durant 2000 ans avant que la situation soit élucidée : on a fini par *démontrer qu'il est impossible de démontrer, à partir des autres propriétés géométriques démontrées ou postulées, ni que le postulat d'Euclide est vrai, ni qu'il est faux.*

Rien que la forme de cette dernière phrase montre qu'en 2000 ans la conception de la vérité en mathématique a fortement évolué. Les efforts portant sur la résolution d'un problème sans utilité pratique ont débouché sur une réflexion bénéfique relativement aux fondements des mathématiques elles-mêmes.

Les grands problèmes sont ceux qui ont été particulièrement difficiles à résoudre ou qui restent sans solution depuis longtemps. Parmi eux figure le « *grand théorème de Fermat* » : *Le seul entier naturel $n > 1$ pour lequel il existe des entiers naturels non nuls $x$, $y$ et $z$ vérifiant l'équation $x^n + y^n = z^n$ est le nombre 2.* Énoncé en 1637 par Pierre DE FERMAT (1601–1665), qui affirmait l'avoir démontré mais n'a jamais publié de démonstration, il ne fut établi qu'en 1994 par l'Anglais Andrew WILES (né en 1953) qui y consacra sept années de travail.


Ce problème est simple à énoncer, mais sa démonstration utilise des outils récents et sophistiqués. Une autre démonstration qui fut particulièrement difficile est celle du théorème des quatre couleurs dont N. Lambelin nous parle dans son article *À propos de graphes.* Cette démonstration fut même — et est parfois encore — contestée, car elle a été réalisée en très grande partie par un programme informatique. Peut-on considérer comme valable un raisonnement qui ne peut être contrôlé pas à pas par un humain ?

Les anciens Grecs ont légué à leurs successeurs d'autres problèmes que le postulat d'Euclide, notamment à propos de constructions à la règle et au compas. Dans *Les problèmes grecs célèbres*, S. Trompler nous parle de trois d'entre eux : *la quadrature du cercle, la duplication du cube* et *la trisection de l'angle.* Le premier est à l'origine d'une expression toute faite du langage courant : « c'est la quadrature du cercle » signifie « c'est impossible ». Il fallut cependant attendre le XIX$^e$ siècle pour démontrer cette impossibilité. Encore faudrait-il ajouter que la quadrature du cercle est bel et bien possible à condition d'utiliser d'autres outils que la règle et le compas.

Dans *Le mystère des puzzles*, P. Tilleuil nous parle du calcul du volume d'un tétraèdre. Où est le problème direz-vous, Eudoxe (encore un ancien Grec) donnait déjà la formule $\frac{1}{3}$ (base × hauteur) ? Pourtant, en 1900, D. HILBERT énonce 23 problèmes qu'il aimerait voir résolus au cours du XX$^e$ siècle. Le troisième problème concerne précisément le volume du tétraèdre. Il fait remarquer que la démonstration d'Eudoxe utilise un passage à la limite et qu'on ne connaît aucune démonstration qui n'utilise pas cette méthode. Il demande *que l'on démontre que toute démonstration de cette formule utilise nécessairement un passage à la limite.* Ce problème fut très rapidement résolu, mais certains des 22 autres problèmes restent encore sans solution. C'est le cas du huitième problème connu sous le nom de *Hypothèse de Riemann.* Il serait difficile de l'énoncer dans le cadre de cet article. Signalons seulement qu'une démonstration de cette hypothèse permettrait d'améliorer sensiblement les résultats concernant la distribution des nombres premiers et fournirait un point de départ pour tenter de résoudre le problème de Goldbach. Ces deux questions sont abordées par Y. Noël-Roch et G. Noël dans *Autour des nombres premiers.*

Depuis Hilbert, de nouveaux « grands problèmes » sont apparus, notamment sous l'influence de l'informatique ! On en trouvera un exemple dans l'encadré ci-dessous. Il y aura toujours du travail pour les mathématiciens !

**Un problème ouvert : P=NP. Ce problème, dont l'énoncé prendrait beaucoup trop de place ici est lié à la complexité des algorithmes, c'est-à-dire au nombre d'opérations élémentaires qu'un ordinateur doit effectuer pour exécuter un algorithme donné. Ce problème a été posé en 1970 pour la première fois. Celui qui arrivera à le résoudre recevra le prix Clay (plus de 1000000 \$). Pour plus de détails :** `fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_la_complexité`

*Math-Jeunes n°114 S, 3–7, 2006*

# Les problèmes "grecs" célèbres

**Simone Trompler**

### Des problèmes antiques

**En plus des droites et des cercles, les géomètres de l'Antiquité grecque connaissaient beaucoup d'autres courbes : les coniques, des spirales...**

**Leur construction se faisait toujours point par point, à l'aide d'une règle et d'un compas. Si l'on relit attentivement les treize livres d'Euclide, on s'aperçoit que, dans ce traité aussi, toutes les constructions se font de cette manière.**

**Ainsi, il était très important pour les Grecs que des constructions géométriques puissent être réalisées uniquement à la règle et/ou au compas. Dès l'Antiquité également, des problèmes importants étaient posés, notamment**

- **la quadrature du cercle,**
- **la duplication du cube,**
- **la trisection de l'angle,**
- **la construction de certains polygones réguliers.**

**Les Grecs ont donc tenté de les résoudre en n'utilisant qu'une règle et un compas ... et n'ont pas trouvé de solution.**

Après les grecs, ces problèmes ont continué de hanter les mathématiciens et à résister à toutes les tentatives de résolution. Au XVI^e^ siècle, Charles Quint crée un prix pour celui qui réalisera la quadrature du cercle. François VIÈTE (1540–1603) montre que le problème de la trisection de l'angle est lié à la résolution d'une équation du troisième degré. DESCARTES (1596–1650), dans sa « *Géométrie* », démontre que l'on peut construire à la règle et au compas toute longueur qui s'exprime algébriquement à l'aide des quatre opérations et de la racine carrée. Mais il ne démontre pas l'impossibilité de construire les autres longueurs.

Ce n'est qu'au XIX^e^ siècle, que GAUSS (1777–1855), en 1801, puis WANTZEL (1814–1848) plus complètement, en 1837, ont prouvé qu'il était impossible de résoudre les problèmes grecs. Ils mettaient ainsi fin à ces recherches effrénées et infructueuses. D'une certaine manière, l'*Académie des Sciences* de Paris avait anticipé les résultats de Gauss et Wantzel puisque dès 1775, elle refusait tout travail sur le sujet. Cela n'empêche pas certains naïfs, encore aujourd'hui, d'envoyer leur solution de la quadrature du cercle à des mathématiciens. La SBPMef en a encore reçu un exemplaire, il y a quelques années.

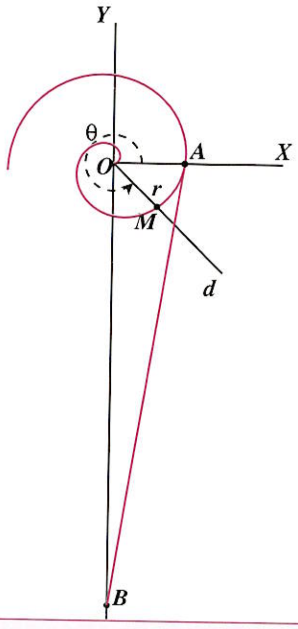
S'il est impossible de résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus par la règle et le compas, c'est-à-dire en construisant des points par intersection de droites et de cercles, il est néanmoins possible d'y arriver par l'utilisation d'autres courbes. Nous allons prendre ces problèmes un à un et, pour chacun d'entre eux, donner une solution de ce type.

## 1. La quadrature du cercle

Il s'agit de construire un carré de même aire que celle d'un cercle donné. Les Anciens savaient que l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré de son rayon. Au fil du temps, ils avaient calculé $\pi$ avec une précision de plus en plus grande. Il s'agit donc de construire un carré de côté $r\sqrt{\pi}$.

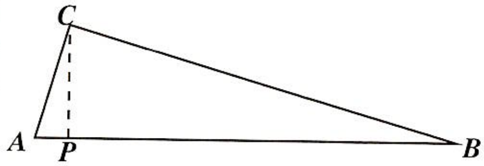
Pour mesurer la longueur du cercle, ARCHIMÈDE s'est servi de la spirale qui porte son nom. Décrivons cette courbe :

*La spirale d'Archimède s'obtient en faisant tourner une demi-droite $d$ autour d'un point $O$, d'un mouvement circulaire uniforme, tandis qu'un point $M$, parti de $O$, parcourt $d$ à vitesse constante.* Pour fixer les idées, admettons qu'au temps $t = 0$, la demi-droite $d$ coïncide avec le demi-axe $OX$, que sa vitesse angulaire (constante) vaut $\frac{1}{2\pi}$ tour par unité de temps. Alors au temps $t$, l'angle $\theta$ de $d$ avec $OX$ est toujours égal à $t$. Pour $t = 2\pi$, $d$ est revenue à sa position initiale. Notons $A$ la position de $M$ à cet instant et $a$ la distance $|OA|$. La vitesse de $M$ au long de $d$ est alors $\frac{a}{2\pi}$, de sorte que la distance $r = |OM|$ en un instant $t$ quelconque vaut toujours $r = \frac{a}{2\pi}t$. Ainsi, $r = \frac{a}{2\pi}\theta$ Cette dernière formule est *l'équation polaire* de la spirale.




Archimède montre alors que la tangente à la spirale en $A$ coupe l'axe $Y$ en un point $B$ tel que $|OB| = 2\pi a$. L'encadré ci-dessous établit ce résultat en utilisant la technique moderne du calcul différentiel qui est étudiée en cinquième année. Puisqu'on dispose d'un segment de longueur $2\pi a$, une simple application d'une des propriétés liées au théorème de Pythagore permet de construire un carré de côté d'aire $\pi a^2$.

$ABC$ étant un triangle rectangle en $C$ et $P$ le pied de la hauteur issue de $C$, on a $|AC|^2 = |AP| \cdot |AB|$ donc $|AC|^2 = \pi a^2$ si $|AP| = \frac{a}{2}$ et $|AB| = 2\pi a$.




Évidemment la tangente $AB$ à la spirale ne peut pas être construite à la règle et au compas sinon la quadrature du cercle serait elle-même possible à la règle et au compas !

**Calcul de $|OB|$**

À partir de l'équation polaire de la spirale, $r = \frac{a}{2\pi}\theta$, on calcule les équations paramétriques de cette courbe.

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{a}{2\pi}\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \frac{a}{2\pi}\theta\sin\theta \end{cases}$$

Les dérivées de $x$ et $y$ par rapport à $\theta$ sont les composantes d'un vecteur tangent à la spirale.

$$\begin{cases} x'(\theta) = \frac{a}{2\pi}(\cos\theta - \theta\sin\theta) \\ y'(\theta) = \frac{a}{2\pi}(\sin\theta + \theta\cos\theta) \end{cases}$$

Posons $\theta = 2\pi$.

$$\begin{cases} x(2\pi) = a \\ y(2\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(2\pi) = \frac{a}{2\pi} \\ y'(2\pi) = a \end{cases}$$

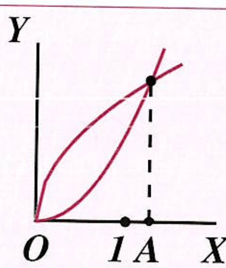
Les équations paramétriques de la tangente en $(a, 0)$ sont donc

$$\begin{cases} x(t) = a + \frac{a}{2\pi}t \\ y(t) = at \end{cases}$$

de sorte que les coordonnées du point $B$, intersection de cette tangente avec $Y$ sont $(0, -2\pi a)$.

## 2. La duplication du cube

Eratosthène (2e siècle av. J.-C.) fait état d'une légende qui expliquerait l'origine de ce problème : à Delos régnait la peste. L'oracle consulté affirma qu'Apollon voulait qu'on lui construise un autel cubique double de celui qui existait. Un autel de côté double de l'ancien fut érigé, mais la peste ne finit pas. L'explication de l'oracle fut que le volume devait être doublé et non le côté du cube. Depuis, ce problème s'appelle souvent le problème de Delos. Hélas ! Les habitants ne purent construire le nouvel autel. Ils savaient, comme nous, qu'il aurait fallu multiplier la longueur du côté par la racine cubique de 2.




**Les deux paraboles ont pour équations $y = x^2$ et $y^2 = 2x$.**
**Au point d'intersection, on a donc $x^4 = 2x$ et $|OA| = x = \sqrt[3]{2}$.**

Mais comment construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ ?

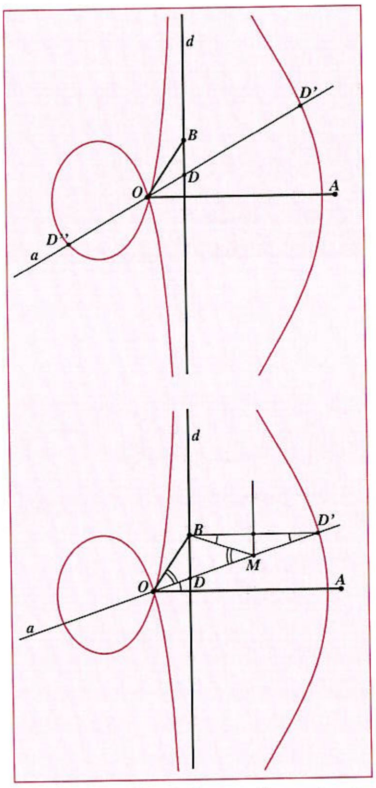
Menechme (4e siècle av. J.-C.) a eu l'idée de construire deux paraboles dont l'intersection permet de trouver un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$. L'encadré ci-contre explique cette idée en termes modernes.

# 3. La trisection de l'angle

Couper un segment en 2 ou 3 parties égales est facile. Couper un angle en 2 parties égales l'est aussi.

Comment découper un angle en trois parties égales ?

Par analogie avec les segments, on pouvait croire que ce n'était pas difficile. Et pourtant seuls quelques angles particuliers peuvent être divisés en trois à la règle et au compas.
Comment procéder alors ? NICOMÈDE (2e siècle av. J.-C.) s'est servi d'une courbe — appelée depuis la *conchoïde de Nicomède* — qui permet de résoudre le problème.
Commençons par construire cette courbe. Soit $\widehat{AOB}$ l'angle à couper en trois parties égales. Choisissons $O$ comme pôle, $OA$ comme axe et notons $d$ la perpendiculaire à $OA$ passant par $B$. Considérons ensuite une droite mobile $a$, passant par $O$. Si $D$ est le point d'intersection de $a$ et $d$, on reporte la distance $2.|OB|$ de part et d'autre de $D$ sur $a$, déterminant ainsi deux points $D'$ et $D''$. La conchoïde de Nicomède est la courbe engendrée par $D'$ et $D''$ lorsque $a$ tourne autour de $O$. Elle comporte deux parties ayant $d$ comme asymptote.




La courbe ayant été tracée (point par point), considérons la position de $D$ telle que la droite $BD'$ soit perpendiculaire à $d$. Soit $M$ le milieu de $[DD']$. La parallèle à $d$ passant par $M$ coupe le segment $[BD']$ en son milieu et lui est perpendiculaire, c'est donc la médiatrice de $[BD']$, de sorte que $|BM| = |MD'|$. De plus, puisque $|DD'| = 2.|OB|$, on a aussi $|OB| = |BM|$. Les deux triangles $OBM$ et $BMD'$ sont donc isocèles. On en déduit des égalités d'angles :

$$\widehat{BOM} = \widehat{OMB} \text{ et } \widehat{MBD'} = \widehat{MD'B}$$

Enfin l'angle $\widehat{OMB}$ est un angle extérieur au triangle $MBD'$, de sorte que $\widehat{OMB} = \widehat{MBD'} + \widehat{MD'B} = 2\widehat{MD'B}$ et $\widehat{MD'B} = \widehat{AOD'}$. Ainsi

$$\widehat{AOB} = 3\widehat{AOD'}$$

La trisection de l'angle $\widehat{AOB}$ a donc été réalisée, mais à condition de pouvoir construire le point $D'$, intersection d'une droite et d'une conchoïde, ce que l'on ne saurait réaliser à la règle et au compas (sauf dans des cas particuliers) !

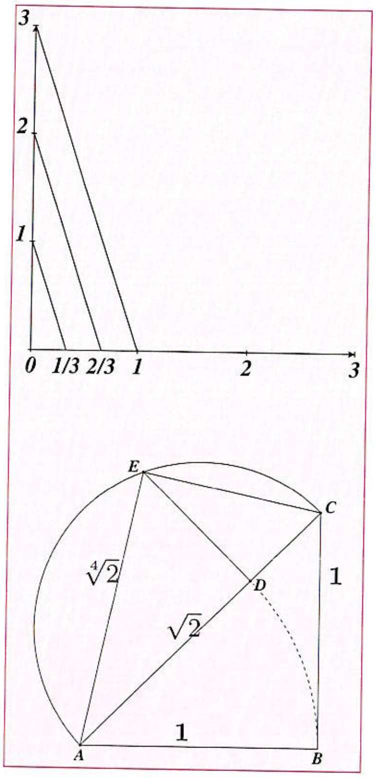
Beaucoup d'autres courbes ont été utilisées pour résoudre les trois problèmes précédents au cours de l'histoire des mathématiques. Citons-en quelques-unes.

La plus ancienne est la quadratrice de DINOSTRATE (4e siècle av. J.-C., frère de Menechme), la cissoïde de DIOCLÈS (2e siècle av. J.-C.), la strophoïde de NEWTON (1642–1727), la trisectrice de MACLAURIN (1698–1746), la cubique duplicatrice... Plusieurs de ces courbes ont été reproduites dans le numéro 107 de *Math-Jeunes*, consacré au thème *Le monde des courbes*.

# 4. Les polygones réguliers

Certains polygones réguliers sont faciles à inscrire dans un cercle : le triangle équilatéral, le carré, le pentagone, l'hexagone, l'octogone, le décagone, le dodécagone et ceux qui ont le double, le quadruple et les $2n$-uples de côtés de ceux-ci. Il suffit, pour ces derniers de tracer la bissectrice de l'angle au centre autant de fois qu'il le faut. On peut aussi construire le polygone à 15 côtés et Gauss a montré, à 19 ans, qu'on pouvait construire le polygone régulier à 17 côtés. Il serait pratique de pouvoir tripler ce nombre de côtés et obtenir ainsi de nouveaux polygones réguliers. Cela nécessite d'opérer la trisection de l'angle. Impossible à la règle et au compas !

## 5. Les nombres constructibles




**Pierre Laurent WANTZEL (1814–1848)**

**Mathématicien français. Très tôt, Pierre Wantzel montra une très grande aptitude pour les mathématiques. Il accumula les diplômes scientifiques se passionna avec autant de succès pour les mathématiques la philosophie, l'histoire, la musique. Il publia plus de vingt travaux dans sa courte vie, dont**

> ***« Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas ».***

**Il semble que sa mort soit due au surmenage : il dormait peu et mal, abusait du café et de l'opium.**

Nous avons affirmé à plusieurs reprises que les problèmes « grecs » classiques ne peuvent être résolus à la règle et au compas. Mais pourquoi ? L'explication repose sur la notion de nombre *constructible.*

Avec une règle et un compas, nous pouvons tracer des droites et des cercles. Donc nous pouvons construire des points par intersection de droites et de cercles.

Au départ, nous plaçons deux points n'importe où dans le plan. Ils serviront de base à nos constructions. Ils déterminent un segment que nous adoptons comme unité de longueur. Avec la règle, nous pouvons tracer la droite qui les joint. Avec le compas, nous pouvons graduer cette droite, en reportant l'unité de longueur. Nous avons donc construit des segments de longueur 2, 3, 4... Nous dirons que les nombres 2, 3, 4... sont *constructibles.*

De façon générale, un nombre réel positif $x$ est *constructible* si, à parti des points de base, il est possible de construire un segment de longueur $x$ en ne traçant que des droites et des cercles et en marquant des points aux intersections de ces lignes.

Grâce au théorème de Thalès, nous constatons facilement que tous les nombres rationnels sont constructibles.

Quant aux racines carrées, grâce au théorème de Pythagore, c'est facile aussi. La racine quatrième de 2 s'obtiendra par exemple dans un triangle rectangle. Bien sûr, les racines $2n^{\mathrm{e}}$ se dessineront en itérant ce processus.

D'après notre définition, un segment est constructible à la règle et au compas si et seulement sa longueur est un nombre constructible. Toute la question est donc de savoir quels sont les nombres constructibles. Il faudra attendre Wantzel pour avoir la démonstration :

> Si un nombre réel positif $x$ est constructible alors il est racine d'un polynôme à coefficients entiers dont le degré est une puissance de 2.

Par exemple, tout nombre rationnel est constructible : le nombre $\frac{a}{b}$ ($a$ et $b$ entiers positifs) est racine du polynôme $bx - a$ dont le degré (égal à 1) est bien une puissance de 2 : $1 = 2^0$.

Autre exemple : la racine carrée d'un entier positif, $\sqrt{a}$, est racine du polynôme de degré $2^1$, $x^2 - a$.

Le théorème de Wantzel est surtout utilisé pour monter qu'un nombre **n'est pas** constructible.

Par exemple, Ferdinand Lindemann (1852–1939) démontra en 1882 que $\pi$ est un nombre transcendant, c'est à dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. *A fortiori* il n'est pas racine d'un polynôme à coefficients entiers dont le degré est une puissance de 2. Donc $\pi$ n'est pas constructible et la quadrature du cercle à la règle et au compas est impossible.

La duplication du cube impose le calcul de la racine cubique de 2. Or $\sqrt[3]{2}$ est sans doute racine d'un polynôme à coefficients entiers, $x^3 - 2$, mais celui-ci est de degré 3 qui n'est pas une puissance de 2. On peut montrer que tout polynôme dont $\sqrt[3]{2}$ est racine est divisible par $x^3-2$, de sorte que son degré est un multiple de 3. Comme aucune puissance de 2 n'est un multiple de 3 ; $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible et la duplication du cube est impossible.

Pour opérer la trisection d'un angle, la trigonométrie nous apprend qu'il faut résoudre une équation du troisième degré : connaissant $\cos 3x$, on obtient $\cos x$ par la relation $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Donc, excepté dans certains cas particuliers, la trisection de l'angle est impossible

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x\\ &\quad -2\sin^2 x \cos x\\ &= \cos^3 x - (1-\cos^2 x)\cos x\\ &\quad -2(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

En ce qui concerne les polygones réguliers, Gauss a démontré que les seuls d'entre eux à être constructibles à la règle et au compas sont ceux pour lesquels

- $n$ est une puissance de 2,
- ou $n$ est un nombre premier de Fermat, c'est à dire un nombre premier qui peut s'écrire sous la forme $F_k = 2^{2^k}+1$, où $k$ est un naturel. Par exemple :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_k$ | 3 | 5 | 17 | 257 | 65 537 |

Le plus petit nombre de Fermat dont on ignore s'il est premier ou non est $F_{33} = 2^{2^{33}}+1$.

Ces cinq nombres 3, 5, 17, 257 et 65 537 sont premiers, les polygones réguliers correspondants sont donc constructibles à la règle et au compas. On ne connaît pas d'autre nombre de Fermat qui soit premier, mais c'est là un problème ouvert...

- ou $n$ est le produit d'un nombre premier de Fermat par une puissance de 2, par exemple 6, 12, 24, ..., 10, 20,...

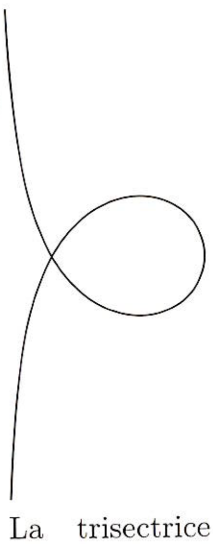
## Gauss et les polygones réguliers

**Dans une lettre du 6 janvier 1819, Gauss raconte à Gerling comment il a découvert quels polygones réguliers sont constructibles à la règle et au compas.**

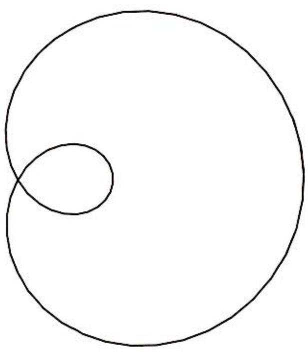
***C'était le 29 mars 1796 et le hasard n'y avait aucune part... Une réflexion intense... me permit, pendant des vacances à Brunswick, le matin de ce jour (encore avant que je me sois levé), de voir la solution avec une clarté totale, de sorte que je pus en faire sur-le-champ l'application particulière au polygone de 17 côtés et la confirmation numérique***

**Le 1er juin 1796, il publiait sa découverte dans l'*Intelligenzblatt des allgemeinen Litteratur-zeitung.***
**Extrait de *Carl-Friedrich Gauss*, par Karin Reich, Ed. Inter Nationes, (1977).**

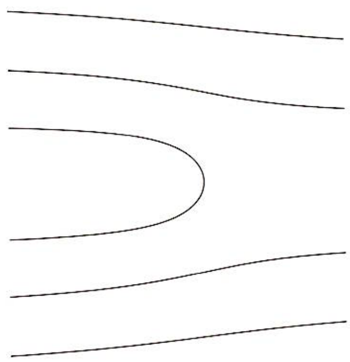
# Quatre trisectrices



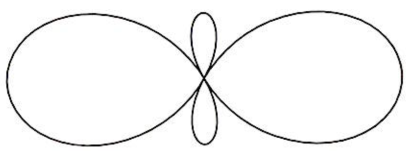
La trisectrice de Mac Laurin



Le limaçon de Pascal



La quadratrice de Dinostrate



La trisectrice de Ceva

*Math-Jeunes n°114 S, 8–12, 2006*

# Autour des nombres premiers

*Yolande Noël-Roch et Guy Noël*

## 1. Introduction

Le domaine des nombres premiers renferme de nombreuses questions non résolues, qui défient les mathématiciens parfois depuis des siècles. Pourtant, les énoncés de ces questions sont souvent simples. Nous allons en rencontrer quelques-uns dans la suite.

Rappelons tout d'abord qu'un nombre naturel est premier si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs. Ainsi 2 et 3 sont premiers, 1 et 4 ne le sont pas.

Si vous êtes patient et soigneux, vous pouvez, comme ÉRATOSTHÈNE (276 – 194 av. J.-C.) obtenir une liste de nombres premiers allant de 2 ... à la limite de votre persévérance. La méthode est très simple, elle a été décrite par NICOMAQUE DE GÉRASE, dans son *Introduction arithmétique* (fin du 1er siècle) et est connue sous le nom de **Crible d'Ératosthène**. Vous en connaissez probablement les étapes :

- Écrire une liste aussi longue que vous voulez des naturels à partir de 2.
- Conserver 2 et barrer dans la suite tous ses multiples.
- Conserver 3 (le premier nombre non barré après 2) et barrer dans la suite tous ses multiples.
- Conserver 5 (le premier nombre non barré après 3) et barrer dans la suite tous ses multiples.
- Conserver 7...

Voici deux questions dont la résolution vous mettra dans l'ambiance :

1. En continuant ainsi jusqu'à $k$, vous obtenez la liste des nombres premiers inférieurs à $k^2$. Si vous ne l'avez jamais pratiqué, imprégnez-vous du crible en l'appliquant aux nombres de 1 à 100.

2. Si nous désignons par

- $p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \ldots \; p_n$ les $n$ premiers nombres premiers,
- $q_n$ le produit $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$
- $s_n$ la somme $1 + q_n$

alors

$\boxed{s_n \text{ est-il premier ?}}$

*Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers.*

*Euclide, 3e s. av. J.-C.*

*Les mathématiciens ont cherché en vain de découvrir un ordre dans la suite des nombres premiers, et il y a de bonnes raisons de croire qu'il s'agit d'un mystère qui ne sera jamais résolu (par l'esprit humain).*

*L. Euler, 1751*

*Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, et de décomposer ceux-ci en leurs facteurs premiers, est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique.*

*C. F. Gauss, 1801*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99 | 98 | 97 | 96 | 95 | 94 | 93 | 92 | 91 | 90 |
| 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 89 |
| 65 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 55 | 88 |
| 66 | 37 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 29 | 54 | 87 |
| 67 | 38 | 17 | 4 | 3 | 2 | 11 | 28 | 53 | 86 |
| 68 | 39 | 18 | 5 | 0 | 1 | 10 | 27 | 52 | 85 |
| 69 | 40 | 19 | 6 | 7 | 8 | 9 | 26 | 51 | 84 |
| 70 | 41 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 50 | 83 |
| 71 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 82 |
| 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 |

Les nombres naturels écrits en spirale.
Les nombres premiers sont en blanc.

## 2. Pas de *dernier* nombre *premier*

La dernière question ci-dessus n'a rien d'anecdotique : elle conduit à la **démonstration** de ce que **l'ensemble des nombres premiers est infini**.

| $n$ | $p_n$ | $s_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | |
| 2 | 3 | 7 |
| 3 | 5 | 31 |
| 4 | 7 | 211 |
| 5 | 11 | 2311 |
| 6 | 13 | 30 031 |
| 7 | 17 | 510 511 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Le tableau ci-contre apporte la réponse à la question 2 : il n'est pas difficile de contrôler que 7, 31, 211, 2311 sont premiers mais le problème se corse rapidement et il faut un peu d'acharnement et une calculatrice pour trouver $30\,031 = 59 \times 509$. Ainsi, $s_i$ est premier pour certains indices $i$ et pas pour d'autres.

Le *résultat* est peu intéressant mais la *démarche* appliquée conduit bien plus loin !

- **Ou bien** $s_n$ est premier : alors nous avons trouvé un premier supérieur à $p_n$.
- **Ou bien** $s_n$ n'est pas premier : alors il est le produit d'au moins deux nombres premiers. Or $s_n = 1 + q_n$ n'est divisible par aucun $p_i$ avec $i \leqslant n$. Les facteurs premiers de $s_n$ sont donc supérieurs à $p_n$.

Dans les deux cas, nous avons trouvé un nombre premier supérieur à $p_n$.
Conclusion :

Il existe une infinité de nombres premiers.

Cette propriété était déjà connue d'*Euclide* (environ 300 av. J.-C.).

## 3. Primalité et factorisation

Dans ses *Recherches arithmétiques* publiées en 1801, Gauss explicite l'existence et l'unicité de la factorisation première d'un nombre. Euclide n'avait pas formulé cette propriété bien qu'il en ait été très proche dans le livre VII des *Éléments*.

Des procédés simples testent la *non primalité* d'un nombre : vous connaissez les critères de divisibilité par 2, 3, 5 qui permettent de voir très rapidement que certains nombres **ne sont pas** premiers. Des critères analogues existent pour 7, 11 (et d'autres nombres) qui relèvent des *chiffres* et de la *numération décimale*. Nous vous laissons le soin de vérifier que, à part les nombres 2 et 3, seuls les nombres du type $6k-1$ ou $6k+1$ *ont une chance* d'être premiers. Il s'agit là d'une *condition nécessaire mais non suffisante* pour qu'un nombre soit premier.

Ces critères simples s'appliquent sans peine à de petits nombres. Mais le problème se corse dès qu'il s'agit de savoir si un « grand » nombre est premier et s'il ne l'est pas, de le factoriser effectivement.

Ces questions ont fait l'objet de nombreuses recherches qui se sont étalées dans le temps. Les noms des plus grands mathématiciens sont liés à de nombreux résultats.

- Si le naturel $n$ n'est pas premier, le nombre $2^n - 1$ ne l'est sûrement pas non plus : si $n = pq$, alors $2^n - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

**Tout nombre naturel supérieur à 1 s'écrit d'une et d'une seule façon (à l'ordre des facteurs près) sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers différents.**
**Par exemple $288 = 2^5 \times 3^2$.**
**De façon générale, on peut écrire quel que soit le naturel $n$ :**

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

**où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers différents et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des naturels non nuls. C'est la formule de *factorisation d'un nombre*.**
***À partir de cette formule, pouvez-vous calculer le nombre de diviseurs de $n$ ?***

Marin Mersenne
1588–1648

Edouard Lucas
1842–1891

Et si $n$ est premier, $2^n - 1$ est-il premier ? Regardez le tableau suivant :

| $n$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n - 1$ | 3 | 7 | 31 | 127 | 2047 | 8191 |

Tous les nombres de la deuxième ligne sont effectivement premiers. Mais comme vous le savez, cela ne prouve rien. En 1644, un moine français, Marin MERSENNE qui correspondait avec la plupart des scientifiques de son époque, annonça que $2^n - 1$ était premier pour $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17\ 19, 31, 67, 127, 257$, et aucun autre nombre premier $n$ inférieur à 257.

Mersenne, qui n'avait fourni aucune preuve de son affirmation, n'avait ni tout à fait tort, ni tout à fait raison non plus. Mais il fallut plus de 100 ans pour que des résultats supplémentaires fussent obtenus. Ainsi EULER (1707–1783) démontra en 1772 que $2^{31} - 1$ est effectivement premier. Cent ans plus tard, E. LUCA montrait à son tour la primalité d'un des nombres de la liste : $2^{127} - 1$. Par contre, il montrait aussi que $2^{67} - 1$ N'EST PAS premier.

Aujourd'hui, les nombres premiers du type $2^n - 1$ sont appelés des **premiers de Mersenne**. On ignore s'il en existe un nombre fini ou une infinité. Seuls 43 d'entre eux sont connus, le dernier, qui est aussi le plus grand nombre premier actuellement connu est tout chaud : il a été découvert le 15 décembre 2005. Sa valeur :

$$2^{230402457} - 1$$

À côté des nombres premiers de Mersenne, nous pouvons aussi citer les nombres premiers de FERMAT (1601–1665) : il s'agit des nombres premiers du type $2^{2^n} + 1$. On n'en connaît que cinq. Gauss a relié ces nombres à la constructibilité des polygones réguliers à la règle et au compas (voir l'article de S. Trompler dans ce numéro).

- La correspondance entre Mersenne et Fermat témoigne de défis relevés par ce dernier. Pour voir si un nombre $n$ est composé, il s'appuie sur l'égalité $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ : partant du plus petit entier $x$ supérieur à $\sqrt{n}$ il recherche si $x^2 - n$ est un carré parfait. (Exemple : $7^2 - 40 = 9$ fait découvrir $40 = (7-3)(7+3)$. Si cela ne marche pas du premier coup, on essaie avec le nombre suivant .... Fermat est ainsi très heureux d'avoir découvert la décomposition $2\,027\,651\,281 = 46\,061 \times 44\,021$ en douze étapes !
- E. Lucas, pour sa part, a démontré que si $n$ est premier, la seule façon de l'écrire comme une différence de deux carrés est $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.
- Lucas est également l'auteur d'un test de primalité (ultérieurement remis en forme par D. H. LEHMER, 1905–1991) des nombres de Mersenne :

**Soit $p$ un nombre premier impair. Définissons une suite de nombres $S_n$ par la récurrence suivante :**

$$S_1 = 4$$
$$S_{n+1} = S_n^2 - 2$$

**Le nombre de Mersenne $2^p - 1$ est premier si et seulement s'il divise $S_{p-1}$.**

Le test de Lucas peut assez aisément être implémenté sur un ordinateur. C'est ce test qu'utilisent les membres du projet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), auteurs des plus récentes découvertes de « grands » nombres premiers. Mais pour quelle raison recherche-t-on de très grands nombres premiers ?

Le sujet, longtemps considéré comme réservé aux spéculations purement théoriques, a trouvé depuis une trentaine d'années des applications particulièrement importantes notamment en cryptographie. Savez-vous par exemple que les transactions financières réalisées via Internet, tant par les particuliers que par les entreprises, sont généralement encodées à l'aide d'algorithmes (le plus important est connu sous le nom de RSA([1])) qui font usage de nombres premiers ayant un grand nombre de chiffres ?

Le principe est simple : l'auteur du message utilise un nombre $N$, produit de deux très grands nombres premiers $p$ et $q$. Ce produit peut être connu de tous. Par contre, pour déchiffrer le message, il faut connaître les deux facteurs $p$ et $q$, lesquels sont tenus secrets.

L'indiscret qui veut s'approprier l'information secrète doit parvenir à factoriser $N$, une opération que même l'ordinateur le plus puissant ne parvient pas à effectuer en un temps raisonnable. Quand notre indiscret découvre l'information secrète — s'il y parvient — elle n'a plus aucun intérêt. Évidemment, comme la puissance et la rapidité des ordinateurs augmentent, il faut constamment allonger les nombres premiers utilisés !

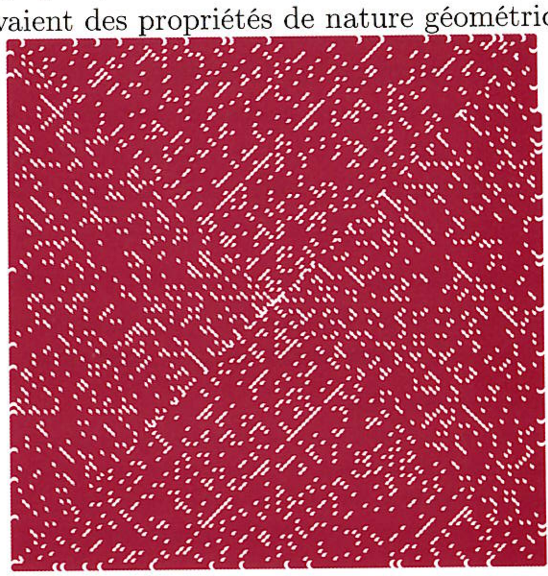
À côté des raisons pratiques, on peut invoquer aussi des raisons théoriques pour rechercher des nombres premiers toujours plus grands. L'une d'entre elles concerne la *répartition* des nombres premiers.

## 4. Comment les nombres premiers sont-ils répartis ?

Les nombres premiers ont l'air « insaisissables ». Impossible de trouver un critère simple et efficace de primalité ! Impossible de prévoir combien de nombres premiers on trouvera dans un intervalle de longueur donnée. Impossible de ...

Par exemple, entre 1 et 100, on dénombre 25 nombres premiers. Entre 9 999 900 et 10 000 000, on en trouve encore 9, mais entre 10 000 000 et 10 000 100, il n'y en a plus que 2. Ainsi leur fréquence a l'air de diminuer. Cependant des irrégularités apparaissent. On peut trouver des intervalles arbitrairement grands sans nombres premiers. Mais on peut aussi trouver des chaînes très longues de nombres premiers en progression arithmétique, sans qu'on sache s'il en existe de longueur quelconque...

En regardant la « spirale » des nombres de 1 à 100, page 8, vous avez sans doute remarqué des « obliques de nombres premiers », comme si ceux-ci avaient des propriétés de nature géométrique.



On peut se demander si le phénomène se poursuit quand on allonge la spirale. Considérons par exemple la spirale des nombres de 1 à 20000.

Il est difficile de la représenter sur une page, sauf si nous remplaçons les nombres par de petits points et si nous reserrons très fortement la spirale, au point qu'elle remplisse un carré. Voyez le résultat ci-contre (les points blancs représentent les nombres premiers inférieurs à 20000).

On y retrouve des alignements comme à la page 8. Qui plus est, ces alignements sont le plus souvent parallèles aux diagonales. Essayez d'expliquer ces phénomènes.

([1]) Le numéro 110 de *Math-Jeunes* (janvier 2005), consacré aux codages, a exposé cette méthode.

| $x$ | $\pi(x)$ | $x/\pi(x)$ |
|---|---|---|
| 10 | 4 | 2,5 |
| $10^2$ | 25 | 4 |
| $10^3$ | 168 | 6 |
| $10^4$ | 1229 | 8,1 |
| $10^5$ | 9592 | 10,4 |
| $10^6$ | 78 498 | 12,7 |
| $10^7$ | 664 579 | 15,0 |
| $10^8$ | 5 761 455 | 17,4 |
| $10^9$ | 50 847 534 | 19,7 |
| $10^{10}$ | 455 052 512 | 22,0 |

Les notions de base relatives aux logarithmes ont été présentées dans le n°112 de *Math-Jeunes*, consacré aux statistiques.

Les nombres premiers sont insaisissables… cependant après avoir constaté des « régularités locales » il est difficile de ne pas rechercher d'autres régularités, en particulier concernant leur répartition. Nous utiliserons dans ce but la fonction $\pi(x)$ définie comme suit :

**Pour tout réel $x$, $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers compris entre 1 et $x$.**

Le tableau ci-contre mentionne les valeurs de $\pi(x)$ pour $x = 10^k$, $k$ variant de 1 à 10. Il serait logique de s'intéresser au quotient $\frac{\pi(x)}{x}$ qui indique l'évolution de la densité des nombres premiers en fonction de $x$. Mais l'inverse de ce quotient se révèle plus instructif. Nous indiquons ses valeurs dans la troisième colonne du tableau.

Observons que les nombres de la dernière colonne augmentent successivement de 1,5 ; 2 ; 2,1 ; 2,3 ; 2,3 ; 2,3 ; 2,4 ; 2,3 ; 2,3. Voilà qui ressemble à une véritable régularité : quand $x$ est multiplié par 10, $\frac{x}{\pi(x)}$ augmente d'à peu près 2,3. Or 2,3 est le logarithme népérien de 10. De là à conclure qu'un lien doit exister entre les fonctions $\pi(x)$, $x$ et $\ell n(x)$, il n'y a qu'un pas qui fut franchi rapidement, Gauss par exemple ayant effectué cette démarche à l'âge de 15 ans ! Mais il fallut attendre 1896 pour que le *théorème des nombres premiers* soit démontré indépendamment par le Français J. Hadamard (1865–1963) et le belge Ch. de la Vallée Poussin (1866–1962). D'après ce théorème, le quotient $\dfrac{\pi(x)\,\ell n(x)}{x}$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers l'infini. Autrement dit, pour $x$ « assez grand », $\pi(x)$ vaut à peu près $\dfrac{x}{\ell n(x)}$.

L'étude de la répartition des nombres premiers ne s'est pas arrêtée avec le théorème des nombres premiers. À plusieurs reprises, l'approximation a été améliorée, des liens ont été établis avec d'autres questions, … Tous ces développements dépassent le cadre de cet article.

## 5. Des questions faciles à comprendre mais difficiles à résoudre

Pour terminer, énumérons trois questions qui restent sans réponse.

- Deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers qui diffèrent de 2 (comme 5 et 7). On ignore si les paires de nombres premiers jumeaux sont en nombre fini ou infini.
- La conjecture de GOLDBACH (1690–1764) affirme que tout entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Cet énoncé reste à démontrer, même si des résultats partiels ont été obtenus. Ainsi, VINOGRADOV (1891–1983) a montré en 1937 que tout entier suffisamment grand est la somme d'au plus quatre nombres premiers. Il en résulte que tout entier pair suffisamment grand est la somme de deux nombres premiers.
- Une variante de la conjecture de Goldbach est la *conjecture de Goldbach impaire* : *tout entier impair plus grand que 5 est la somme de trois nombres premiers.* On a démontré un résultat partiel : tout entier impair supérieur à $10^{43000}$ est la somme de trois nombres premiers.

**Pour en savoir plus**

A. Paternottre, Fascinants et énigmatiques nombres premiers, *Math-Jeunes Junior*, n°112 J, 11–13 et n°113 J, 2–5.
G. Troessaert, Comment se répartissent les nombres premiers ? *Math-Jeunes Junior*, n°95, 16–18, 2000.
D. Zagier, The first 50 Million Prime Numbers, *The Mathematical Intelligencer*, n°0, 7–19, août 1977.
The prime Glossary : Goldbach's conjecture, `http://primes.utm.edu`.
GIMPS, `http://www.mersenne.org`.

Math-Jeunes n°114 S, 13–17, 2006

# À propos de graphes

Nicole Lambelin

**La théorie des graphes**

**Le problème des ponts de Königsberg fut à l'origine de deux nouvelles disciplines mathématiques : la topologie et la théorie des graphes.**

**Après sa résolution par Euler en 1737, il a fallu attendre un siècle pour voir les graphes réapparaître : Kirchoff les utilisa pour déterminer la quantité de courant qui circule dans un circuit électrique.**

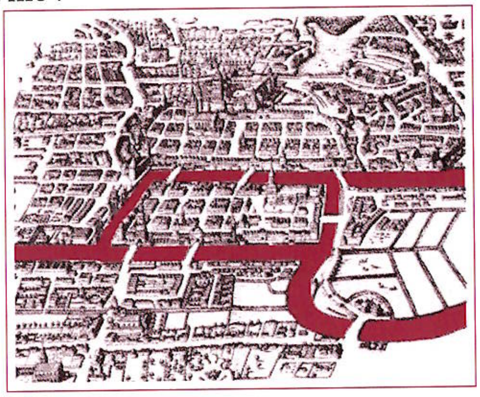
**Puis, en 1857, Cayley s'en servit en étudiant les isomères d'une molécule ayant $n$ atomes de carbones et $2(n+1)$ atomes d'hydrogène.**

**Ce n'est qu'en 1869, que les mathématiciens s'intéressèrent de nouveau aux graphes sous l'impulsion de Jordan et d'Hamilton.**

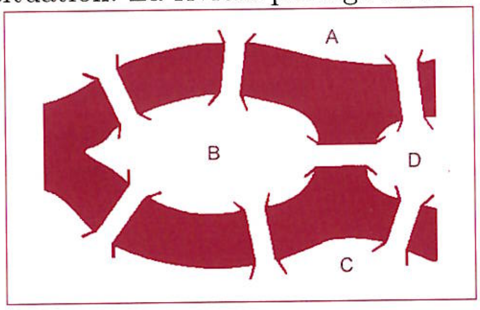
**Actuellement de nombreuses recherches sont menées en théorie des graphes.**

## 1. Le problème fondateur

Vers 1700, les habitants de Königsberg (ville de Prusse orientale traversée par la rivière Pregel) se posaient la question suivante : existe-t-il une promenade permettant de traverser exactement une fois chacun des sept ponts de la ville ?

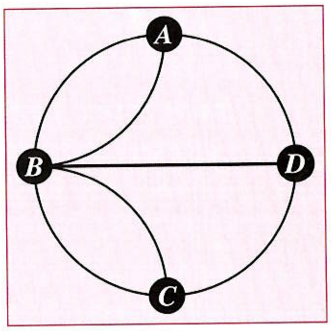


Schématisons la situation. La rivière partage la ville en quatre zones.




Essaie et constate qu'il reste toujours un pont non traversé.

C'est Euler qui, en 1737, a résolu ce problème ; son idée fut de transformer le diagramme ci-dessus en un graphe : chaque zone étant représentée par un point et chaque pont par un arc.




Il réduit ainsi le problème à la recherche d'un chemin sans saut passant exactement une fois par chaque arc. Euler a déterminé une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel chemin existe (le graphe est alors dit eulérien).

**Condition nécessaire et condition suffisante**

**Voici une implication :**

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$$

***Il suffit que $x$ soit égal à 2 pour que $x^2$ soit égal à 4. Il est nécessaire que $x^2$ soit égal à 4 pour que $x$ soit égal à 2 (il n'est pas suffisant que $x^2$ soit égal à 4 pour que $x$ soit égal à 2, il pourrait être égal à $-2$).***

**Dans cette implication, $x = 2$ est donc la condition suffisante et $x^2 = 4$ la condition nécessaire.**
**De manière générale, dans l'implication :**

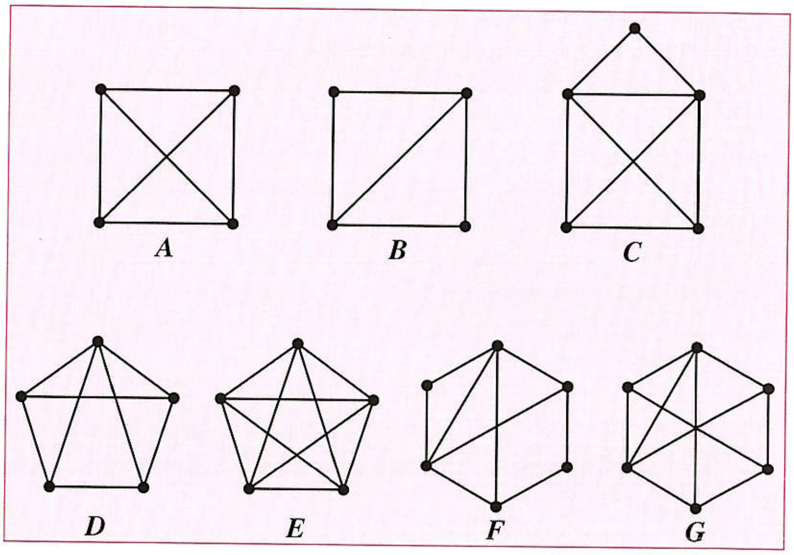
$$A \Longrightarrow B$$

**$A$ est la condition suffisante pour $B$ et $B$ est la condition nécessaire pour $A$.**

**Leonhard Euler**

**Ce mathématicien suisse, né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783, père de 13 enfants est, parfois, considéré comme le plus grand mathématicien de tous les temps. Il était doté d'une mémoire exceptionnelle : il pouvait, par exemple, réciter par cœur les 9000 vers de l'Enéïde !**

Essaie de retrouver ce théorème en observant les graphes suivants, détermine lesquels sont eulériens et calcule le nombre d'arêtes issues de chaque sommet (le degré du sommet).



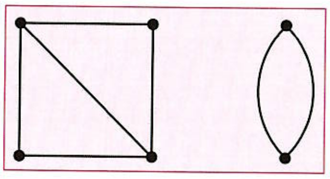

Les graphes $B$, $C$, $E$ et $F$ sont eulériens.

Si on calcule le degré de chaque sommet, on constate que nos graphes sont eulériens si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Peut-on généraliser ?

Oui, car chaque fois que l'on arrive en un sommet, on doit en repartir sauf si c'est le sommet de départ ou celui d'arrivée. Si le point de départ est différent du point d'arrivée, il y aura 2 sommets de degré impair ; sinon, tous les sommets seront de degré pair.

Observons le graphe suivant, il n'y a que 2 sommets de degré impair et pourtant le graphe n'est pas eulérien.



Il faut en plus que tout couple de sommets distincts soit relié par une chaîne, le graphe est alors dit connexe.

*Le théorème d'Euler est le suivant : un chemin eulérien existe si et seulement si le graphe est connexe et le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.*

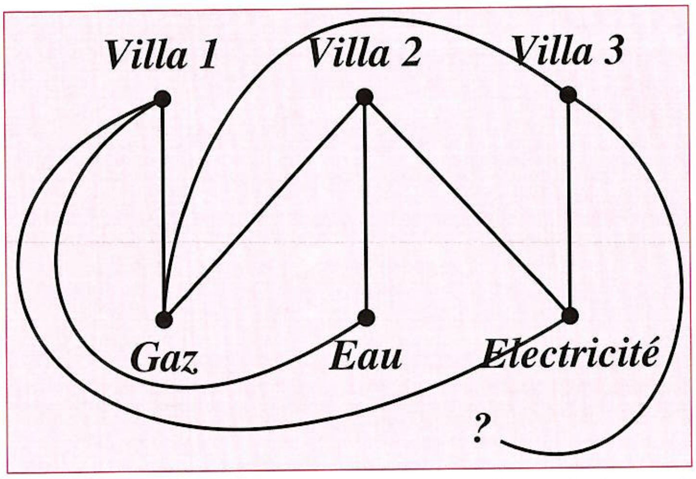
Nous avons justifié plus haut la condition nécessaire : si un chemin eulérien existe, alors le graphe existe et le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. La condition suivante se démontre par récurrence... nous ne le ferons pas dans le cadre de cet article.

Remarquons au passage qu'un graphe ne peut avoir un nombre impair de sommets de degré impair : chaque arête ayant deux extrémités, la somme des degrés de tous les sommets est paire.

Revenons à nos ponts de Königsberg : le degré de B est 5, celui des 3 autres sommets est 3. Il est donc impossible de trouver une promenade passant une et une seule fois par chaque pont.

# 2. Les graphes planaires

Essayons de relier trois villas au gaz, à l'électricité et à l'eau par des canalisations sans que celles-çi ne se coupent (en restant dans un même plan) :

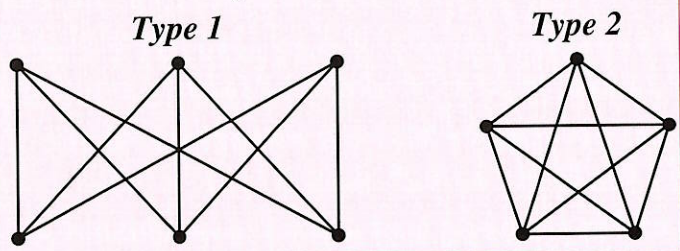



Lors de cet essai, nous n'arrivons pas à relier la troisième villa à l'eau !

Prends une feuille et essaie autrement.

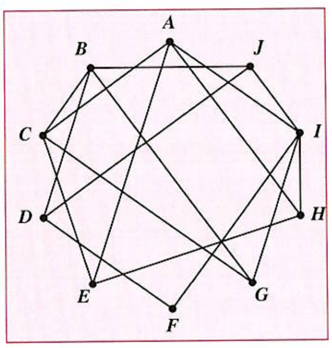
Tu n'as sans doute pas trouvé de solution, le problème est effectivement impossible. Ce graphe est un des deux graphes de Kuratowski.

Graphes de Kuratowski




Ces graphes ne sont pas planaires, c'est-à-dire qu'il est impossible de dessiner leurs arêtes dans le plan sans qu'elles ne se coupent (en dehors des extrémités). Le théorème de Kuratowski énonce que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit planaire est qu'il n'admette pas de sous-graphe partiel du type 1 ou du type 2.

Pratiquement, ce théorème est difficile à appliquer. Le graphe suivant est-il planaire ?




Il existe des techniques qui permettent de déterminer que ce graphe est planaire. Peux-tu le redessiner de telle sorte que hors leurs extrémités les arêtes ne se coupent pas ?

**Königsberg**

**Cette ville de Prusse orientale était membre de la ligue hanséatique (une association de villes allemandes qui contrôlait le commerce de la Baltique). Elle fut fondée en 1254 suite à la conquête de la côte baltique par les chevaliers Teutoniques (ordre religieux de chevalerie). Ceux-ci ont massacré une grande partie de la population indigène (les *Bruzi*, qui ont donné le nom « Prusse ») et les ont remplacés par des colons allemands et polonais.**

**Elle fut la capitale de la Prusse avant Berlin. Kant y enseigna à l'université.**

**En 1918, Königsberg fut séparée du reste de l'Allemagne par le corridor polonais de Dantzig.**

**En 1945, elle fut attribuée à l'URSS et pris le nom de Kaliningrad. Ses habitants furent tués ou déportés et remplacés par des Russes.**

**L'enclave de Kaliningrad compte aujourd'hui un peu moins d'un million d'habitants dont la moitié dans la ville de Kaliningrad. Elle possède la plus grande mine d'ambre au monde.**

**Kazimierz Kuratowski**

**Mathématicien polonais né en 1896 et mort en 1980 à Varsovie.**

**Quelques utilisations de la théorie des graphes**

**La théorie des graphes est appliquée dans de nombreuses disciplines.**

**Elle a été utilisée pour ordonnancer les tâches soumises à de nombreuses contraintes : des algorithmes ont été élaborés notamment pour la NASA, pour la construction du Paquebot France et des centrales EDF.**

**Elle sert aussi à optimiser la tournée des facteurs, le trafic des trains, des transports en général ou encore le passage de relais entre deux bornes de téléphonie mobile. Elle permet de minimiser la longueur des câbles téléphoniques, les coûts de déplacement d'un voyageur de commerce.**

**Elle est aussi employée par les moteurs de recherche sur le Web et lors de la conception d'ordinateurs.**

**Elle vient notamment de servir à ordonner les tâches de construction des nouveaux bâtiments des cours de justice à Mons**

## 3. Deux curiosités

• Choisis un nombre à 4 chiffres. Ordonne ses chiffres du plus grand au plus petit puis du plus petit au plus grand et fais la différence entre ces deux nombres. Puis recommence la même opération.

Choisissons, par exemple 6267.

$$\begin{aligned}
7662 - 2667 &= 4995\\
9954 - 4599 &= 5355\\
5553 - 3555 &= 1998\\
9981 - 1899 &= 8082\\
8820 - 0288 &= 8532\\
8532 - 2358 &= 6174\\
7641 - 1467 &= 6174
\end{aligned}$$

Nous pouvons continuer, le résultat ne changera plus : nous sommes tombés dans un puits.

On peut choisir n'importe quel nombre de 4 chiffres, à partir d'un certain moment, nous obtiendrons toujours 6174 ou 0000. C'est Kaprekar qui, en 1949, a proposé cette curiosité. Si le nombre est composé de 2 chiffres, le graphe montre qu'il y a un puits 00 et un cycle $27 - 45 - 09 - 81 - 63$, on tombe nécessairement sur l'un des deux.

• Choisis maintenant un naturel quelconque. S'il est pair, divise-le par 2. S'il est impair, triple-le et ajoute 1. Recommence l'opération.

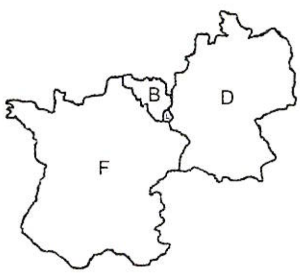
Choisissons, par exemple 29. Nous obtiendrons 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

On peut choisir n'importe quel naturel, nous terminerons toujours par le cycle 4, 2, 1. Ce problème porte le nom de problème de Collatz (le nom de son inventeur) ou de problème de Syracuse (le nom de l'université qui l'a fait connaître). Ce résultat n'a pas encore pu être démontré.

## 4. Le problème des quatre couleurs

Un dernier problème : combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

Deux peuvent suffire si les pays se disposent comme les carrés d'un damier. Si je prends la Belgique, le Luxembourg, la France et l'Allemagne, j'ai besoin de 4 couleurs. Est-ce que 4 couleurs suffisent quelle que soit la carte ?
Ajoutons d'autres pays et essayons en transformant la carte en graphe : chaque capitale est un sommet et une arête est tracée entre deux sommets si les pays correspondants ont une frontière commune.

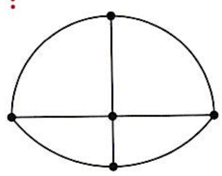


En 1976, Kenneth Appel et Wolfgang Haken ont prouvé (à l'aide notamment d'un ordinateur) qu'il est possible de colorier à l'aide de 4 couleurs différentes n'importe quelle carte plane de sorte que deux pays voisins (frontière commune et pas seulement un point) soient toujours de couleurs différentes (à condition que chaque pays ne soit pas composé de plusieurs territoires non adjacents). L'algorithme appliqué par Appel et Haken est fort complexe. Voici un algorithme de coloriage d'un graphe beaucoup plus simple, mais qui utilise un nombre de couleurs qui n'est pas toujours le plus petit possible.

1. Classer les sommets par ordre décroissant de degré.
2. Choisir une nouvelle couleur, sélectionner le premier sommet de la liste et le colorier avec celle-ci.
3. Considérer tous les sommets de la liste dans l'ordre et colorier dans la même couleur tous ceux qui ne sont pas adjacents à un sommet déjà colorié.
4. Supprimer de la liste tous les sommets coloriés. Tant que cette nouvelle liste n'est pas vide, retourner au point 2.

Applique cet algorithme à la carte d'Europe suivante, en ignorant l'enclave russe de Kaliningrad, entre la Lithuanie et la Pologne.


**Une énigme**
**Prends une bandelette de papier et fais le dessin suivant :**



**Comment tracer cette figure sans lever le crayon et en ne passant qu'une fois sur chaque trait ? (Indice : quatre sommets étant de degré impair, il est impossible de trouver une solution dans le plan, il faut donc sortir de ce cadre de référence).**

*Math-Jeunes n°114 S, 18–23, 2006*

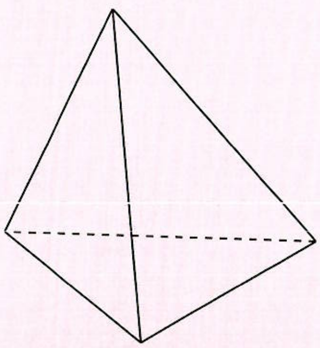
David Hilbert en 1886

# Le mystère des puzzles

**Philippe Tilleuil**

Au Deuxième Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900, le mathématicien allemand D. Hilbert (1862–1943) présenta vingt-trois problèmes qui lui semblaient les plus importants à résoudre pour le siècle à venir. Ces problèmes ont eu une influence déterminante sur le développement des mathématiques au vingtième siècle ; certains ne sont toujours pas résolus et continuent d'être l'objet de recherches intenses. Parmi ces vingt-trois problèmes, le troisième est surprenant par le caractère très élémentaire de son énoncé.

> « ***3. L'égalité du volume de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales.***
>
> *Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion*(1)*, [... ] Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (livre* XII*, prop. 5), selon lequel deux pyramides à base triangulaire de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases.*
> *Or, le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu ; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacements). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. Une telle démonstration serait obtenue si nous réussissions à trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible...* »
>
> *D. Hilbert (trad. de P. Cartier)*



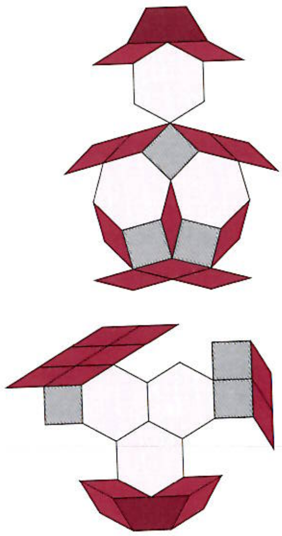
Nous allons tenter d'explorer un peu ce problème. Pour l'essentiel, il s'agira de comprendre pourquoi le volume d'un tétraèdre se calcule par « aire de la base × hauteur divisé par 3 » mais en faisant bien attention à une nuance (de taille) : le pourquoi doit s'obtenir *sans passage à la limite*, à partir d'un nombre *fini* d'opérations géométriques élémentaires, comme on sait par exemple le faire pour l'aire des triangles dans le plan. Essayons d'être un peu plus précis.

## Le modèle des puzzles plats

Commençons donc par analyser la solution du problème de l'*aire d'un triangle*, qui est plus simple que celui du volume du tétraèdre, et qui

(1) Cette méthode était utilisée par les Grecs pour effectuer des passages à la limite.

pourra servir de modèle pour la suite. Pour cela, il faut d'abord répondre à une question préalable : comment définir *a priori* la notion d'aire, c'est-à-dire *autrement* que par une formule ? Une idée pour répondre à cette question consiste à s'inspirer de ce qu'on fait lorsqu'on réalise un puzzle.



Limitons-nous aux figures polygonales. Par définition, on dira que deux figures $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont *équivalentes par puzzle* (en abrégé : $p-$équivalentes ou $\mathscr{F}_1 \sim_p \mathscr{F}_2$) si chacune peut être décomposée en un même nombre *fini* $n$ de triangles qui puissent être numérotés (de 1 à $n$) de telle sorte que chaque triangle d'une figure soit superposable par déplacement au triangle de même numéro de l'autre figure. Ceci précisé, on dira que deux figures ont même aire si elles sont $p-$équivalentes.

Dans cette définition de $p-$équivalence, la restriction aux seuls déplacements correspond bien à la traduction mathématique de ce qu'on appelle « faire un puzzle ». Néanmoins, il existe des isométries qui ne sont pas des déplacements, à savoir les symétries orthogonales. Par ailleurs, on a bien envie que deux figures symétriques aient même aire. Heureusement, cela ne pose pas de problème.

**Proposition 1.** *Tout triangle est $p-$équivalent à son image par une symétrie orthogonale.*

L'idée de la démonstration consiste à décomposer chaque triangle en triangles isocèles à partir d'une hauteur intérieure (cfr. fig. 1) : deux triangles isocèles symétriques ne diffèrent que d'un déplacement, et le tour est joué ! Grâce à cette proposition, dès qu'on veut démontrer la $p-$équivalence de deux figures, on peut assembler les pièces du puzzle à l'aide d'isométries du plan sans qu'on soit obligé de se restreindre toujours aux déplacements (mais un redécoupage des pièces peut devenir nécessaire).

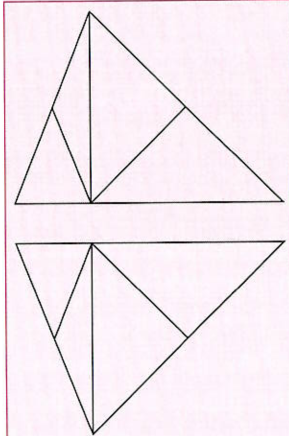


Fig. 1

Le résultat fondamental pour la $p-$équivalence des triangles s'énonce alors comme suit.

**Proposition 2.** *Tout triangle est $p-$équivalent à un rectangle de même base mais de hauteur égale à la moitié de celle du triangle.*

L'essentiel de la construction du puzzle est suggéré dans les deux cas représentés dans la figure 2.

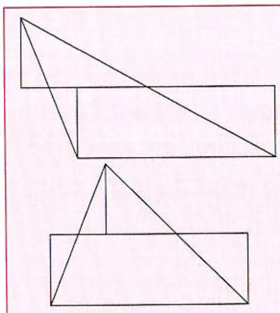


Fig. 2

Il reste maintenant à trouver un moyen de comparer entre elles les classes de $p-$équivalence de triangles ou de rectangles.

**Proposition 3.** *Tout rectangle de base $b$ et de hauteur $h$ est $p-$équivalent à un rectangle de base 1 et de hauteur égale au produit $b \cdot h$.*

Notons $a$ et $b$ les dimensions du rectangle. On commence par traiter le cas où $1 \leqslant a < 2$. La décomposition représentée dans la partie gauche de la figure 3 règle alors la question, en observant que, par similitude : $\frac{a-1}{h} = \frac{1}{b}$, donc $h = b(a-1)$.

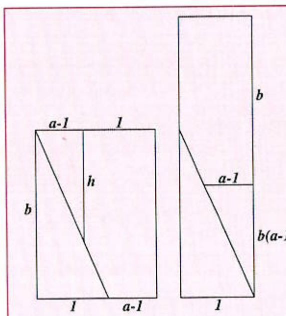



Fig. 3

Si la double inégalité $1 \leqslant a < 2$ est fausse, il se pourrait qu'on ait $1 \leqslant b < 2$. On se ramène alors au cas précédent en permutant le rôle de $a$ et $b$. Il reste à considérer les deux possibilités suivantes :

- Si $a > 2$ et $b > 2$, on choisit un naturel $n$ tel que $1 \leqslant \frac{a}{n} < 2$ et on découpe le rectangle en $n$ tranches de taille $\frac{a}{n} \times b$. Par la première partie, chaque tranche est $p$-équivalente à un rectangle de taille $1 \times b.\frac{a}{n}$. On obtient donc $n$ rectangles de taille $1 \times b.\frac{a}{n}$ que l'on empile les uns sur les autres pour construire un rectangle de taille $1 \times ba$ $p$-équivalent au rectangle initial.
- Si $a < 1$ et $b < 1$, on choisit un naturel $n$ tel que $1 \leqslant na < 2$ et on découpe le rectangle en $n$ de taille $a \times \frac{b}{n}$. On réassemble ces $n$ tranches en un rectangle de taille $na \times \frac{b}{n}$, lequel d'après la première partie est $p$-équivalent à un rectangle de taille $1 \times na.\frac{b}{n}$, soit $1 \times ab$.

On déduit immédiatement des propositions 2 et 3 que tout triangle de base $b$ et de hauteur $h$ est $p-$équivalent à un rectangle de base 1 et de hauteur égale au produit $b \times \frac{h}{2}$. Mais il reste encore à savoir si tout cela est bien indépendant du choix particulier d'*une* base et de *la* hauteur correspondante... Pas de problème !

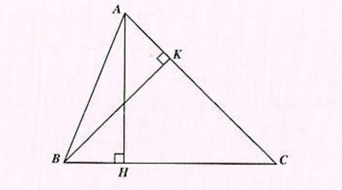


Fig. 4

**Proposition 4.** *Dans tout triangle, le produit « base × hauteur correspondante » ne dépend pas du choix de la base.*

Avec les notations de la figure 4, il suffit par exemple d'observer que si $AH$ et $BK$ sont des hauteurs, les triangles $AHC$ et $BKC$ sont semblables, d'où $\frac{|AC|}{|AH|} = \frac{|BC|}{|BK|}$, etc.

# Les puzzles à 3 dimensions

Attaquons le volume d'un tétraèdre, toujours à partir de l'idée de puzzle, et en nous limitant donc à des figures polyédriques. Par définition, on dira que deux figures $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont *équivalentes par puzzle* (en abrégé : $p-$équivalentes ou $\mathscr{F}_1 \sim_p \mathscr{F}_2$) si chacune peut être décomposée en un même nombre *fini* de tètraèdres qui puissent être numérotés (de 1 à $n$) de telle sorte que chaque tétraèdre d'une figure soit superposable par déplacement au tétraèdre de même numéro de l'autre figure.
Les réflexions, ou symétries orthogonales par rapport à un plan de l'espace, ne sont pas des déplacements. Mais un résultat analogue à celui déjà démontré pour les figures planes (cfr. la proposition 1) est encore valable. Il est dû au mathématicien allemand C. Gerling, et c'est le résultat dont parle D. Hilbert dans l'énoncé de son troisième problème.

**Théorème de Gerling.** *Tout tétraèdre est $p-$équivalent à son image par une réflexion dans un plan quelconque.*

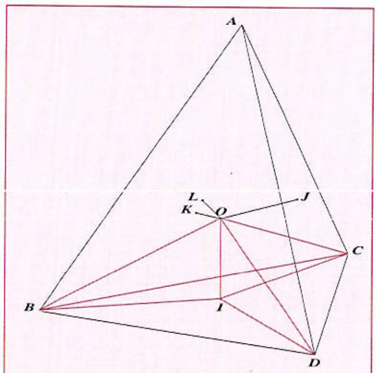


Fig. 5

Pour le voir, décomposons le tétraèdre donné en douze tétraèdres qu'on a envie d'appeler « isocèles », au sens où chacun de ces tétraèdres et son image par réflexion diffèreront en fait d'un déplacement. Dans ce but, on mène à partir du point $O$, centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, les perpendiculaires à ses faces. On détermine ainsi quatre points $I$, $J$, $K$, $L$. Chacun sert à découper la face à laquelle il appartient en trois triangles. Sur la figure 5, on a représenté les trois triangles $IBC$, $ICD$, $IDB$ et les trois tétraèdres $OIBC$, $OICD$ et $OIDB$. Ces derniers sont de ces tétraèdres qualifiés plus haut d'« isocèles » : la droite $OI$ étant l'intersection des plans médiateurs de côtés du triangle $BCD$, on a $|BO| = |OD|$, $|BI| = |ID|$ et les angles $\widehat{BIO}$, $\widehat{CIO}$ et $\widehat{DIO}$ sont droits. En leur adjoignant les tétraèdres construits de façon analogue à partir de $J$, $K$ et $L$, on obtient le découpage souhaité du tétraèdre initial. Il faudra donc 12 déplacements pour réaliser la $p-$équivalence attendue. Si le centre de la sphère circonscrite n'est pas situé à l'intérieur du tétraèdre, le raisonnement est beaucoup moins facile, mais le résultat reste vrai.

# Une famille qui se découpe bien

Venons-en à l'analogue de la proposition 2 : c'est ici que les difficultés commencent, parce qu'il y a beaucoup plus de contraintes dans un puzzle à 3 dimensions que dans un puzzle à 2 dimensions. Une famille d'exemples va permettre de s'en rendre (un peu) compte.

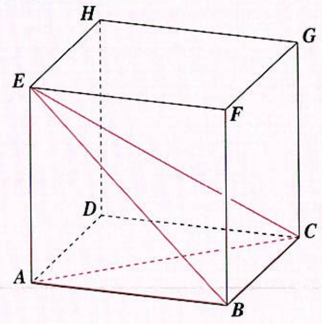


Fig. 6

On appelle *tétraèdre de Hill* (de première espèce) tout tétraèdre $ABCE$ dont les côtés $EA$, $AB$ et $BC$ sont de même longueur et tels que toutes les faces du rhomboèdre associé $ABCDEFGH$ soient *isométriques*. (Un rhomboèdre est un prisme dont toutes les faces sont des losanges). L'exemple le plus commun de tétraèdre de Hill est issu du cube : tout cube peut être décomposé en 6 tétraèdres de Hill isométriques. La figure 7 montre comment trois tétraèdres de Hill sont $p-$équivalents à un demi-rhomboèdre, moyennant le théorème de Gerling.

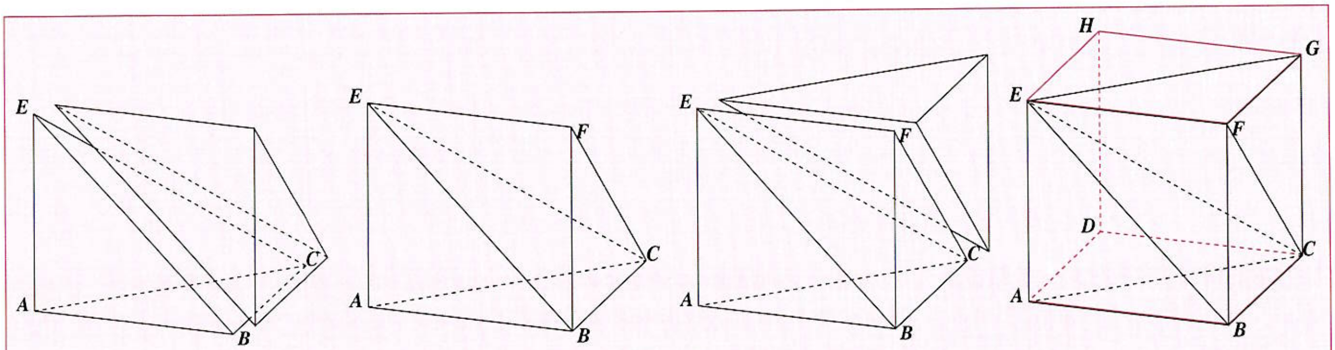


Fig. 7

**Théorème de Hill.** *Tout tétraèdre de Hill est $p-$équivalent à un prisme de même base mais dont la hauteur est le tiers de la hauteur du tétraèdre.*

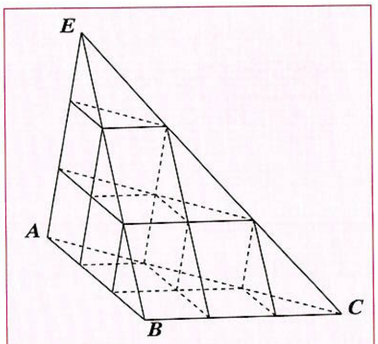


Fig. 8

L'essentiel de la démonstration est résumé dans les figures 8 et 9 : en partageant chaque arête en 3 parties égales, on détermine différentes figures (prismes, tétraèdres) qui, par isométries peuvent être amenées dans le tiers inférieur pour construire le prisme souhaité. Les trois tétraèdres qui subsistent sur la droite de la figure 9 s'assemblent en un demi-rhomboèdre conformément à la figure 7, et ce demi-rhomboèdre complètera la partie avant-droite de la figure, constituant ainsi un prisme de même base que le tétraèdre initial.

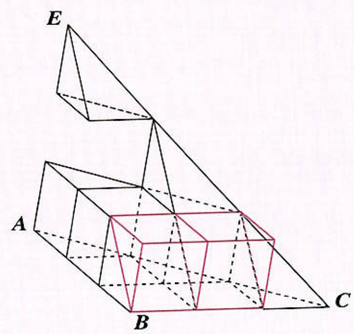


Fig. 9

En vérifiant les détails de cette construction, on commence à comprendre que les angles dièdres des faces et les longueurs des arêtes doivent être en étroite relation pour que le puzzle se referme bien comme voulu. Comme on le signalera plus loin, cette intuition a été cruciale dans la solution du troisième problème de Hilbert.

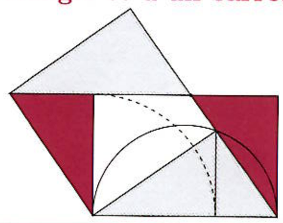
Pour la petite histoire, l'article où M. J. M. Hill expose sa construction date de 1895. Observons aussi en passant qu'un tétraèdre régulier n'est pas un tétraèdre de Hill, et que les décompositions du genre de celles utilisées par Hill ne semblent pas pouvoir s'y appliquer.

# Redressons ce qui est penché

Il résulte du théorème de Hill qu'il existe une *infinité* de tétraèdres 2 à 2 non isométriques, qui sont $p-$équivalents à un prisme de même base. Attaquons-nous à l'analogue de la proposition 3.

**Proposition 5.** *Tout prisme (oblique) à base triangulaire est $p-$équivalent à un prisme droit dont la base est un carré d'aire égale à 1.*

**La $p-$équivalence d'un rectangle et d'un carré.**



La vérification de ce résultat est tout à fait élémentaire. Une section par un plan orthogonal aux arêtes du prisme (ces arêtes sont parallèles entre elles) livre d'abord la $p-$équivalence avec un prisme droit à base triangulaire. Ensuite, la proposition 2 fournit la $p-$équivalence avec un prisme droit à base rectangulaire. Le puzzle ci-contre permet alors de rendre ce rectangle $p-$équivalent à un carré. On applique enfin la proposition 3 successivement dans 2 faces perpendiculaires à la base choisie pour former le carré d'aire égale à 1.

# Que faire de cet invariant ?

A ce stade de la réflexion, on n'a pas la preuve de la $p-$équivalence d'un tétraèdre (quelconque) avec un prisme de même base mais de hauteur trois fois moindre.
Néanmoins, on dispose encore d'un résultat analogue à la proposition 4. Mais il n'a – comme la proposition 4, d'ailleurs ! – rien à voir avec la notion de $p-$équivalence.

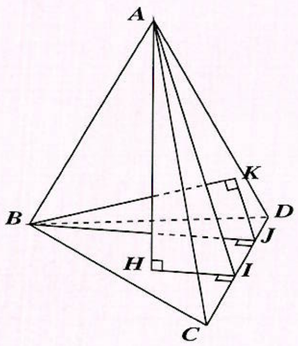


Fig. 10

**Proposition 6.** *Dans tout tétraèdre, le produit « aire de la base × hauteur correspondante » est invariant, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de la base.*

La démonstration est encore une affaire de similitude de triangles rectangles. Si par exemple on tire de $A$ et $B$ les perpendiculaires aux faces $BCD$ et $ACD$ qui tombent respectivement en $K$ et $H$, ainsi que les perpendiculaires à l'arête commune $CD$ (cfr. fig. 9), on forme ainsi deux triangles $AHI$ et $BKJ$ rectangles en $H$ et $K$, et dont les angles $AIH$ et $BJK$ sont isométriques (car on montre que $HI$, comme $KJ$, est perpendiculaire à $CD$). On en déduit $\frac{|AI|}{|AH|} = \frac{|BJ|}{|BK|}$, d'où $\frac{|AI|\cdot|CD|}{|AH|} = \frac{|BJ|\cdot|CD|}{|BK|}$ comme annoncé.

Pour énoncer le théorème d'Eudoxe ci-dessous, adaptons un peu les notations.

- Lorsque $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont deux figures dont l'intersection est vide ou plane, on note $\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2$ l'union de $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$.
- Le double d'une figure $\mathscr{F}$, noté $2\mathscr{F}$, est donc défini par $2\mathscr{F} = \mathscr{F} + \mathscr{F}'$ où $\mathscr{F}'$ est n'importe quelle figure $p-$équivalente à $\mathscr{F}$ dont l'intersection avec $\mathscr{F}$ est vide ou plane ; on définit de la même manière n'importe quel multiple entier de $\mathscr{F}$.
- Si deux figures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ vérifient la condition $n\mathscr{F} \sim_p \mathscr{F}'$, où $n$ est un naturel, alors $\mathscr{F}$ est notée $\frac{1}{n}\mathscr{F}'$.
- La définition de l'équivalence par puzzle infini de deux figures $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ ($\mathscr{F}_1 \sim_p^\infty \mathscr{F}_2$) ne diffère de l'équivalence par puzzle que par le fait que l'on considère des découpages en une infinité de pièces.

# Un puzzle à l'infini

Mais finalement, d'où vient la formule du volume d'un tétraèdre ? Elle semble remonter à Démocrite (460-370 av. J.-C.) et la première preuve, due à Eudoxe (406-355 av. J.-C.), est celle que reproduit Euclide dans ses Eléments de Géométrie, et à laquelle Hilbert fait référence dans l'énoncé de son troisième problème. Le *hic*, c'est que cette démonstration ne procède pas par $p-$équivalence *finie*, contrairement à ce qui se passe dans le plan (cfr. la proposition 2) et pour les tétraèdres de Hill.

**Théorème d'Eudoxe.** *Si $\mathscr{T}$ est un tétraèdre quelconque et $\mathscr{P}$ le prisme de même base et de même hauteur, alors*

$$\mathscr{T} \sim_p^\infty \frac{1}{4}\mathscr{P} + \frac{1}{4^2}\mathscr{P} + \frac{1}{4^3}\mathscr{P} + \cdots$$

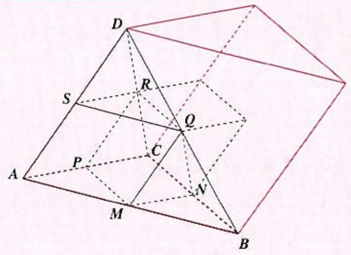



Fig. 11

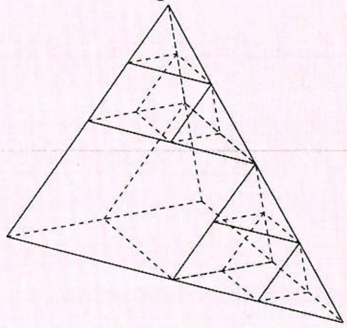


Fig. 12

La preuve s'obtient par récurrence à partir d'une construction finie.

Si $\mathscr{T}$ est le tétraèdre $ABCD$, on a en partageant chaque arête en deux parties égales (cfr. fig. 11) :

$$\mathscr{T} \sim_p AMPQRS + CPRNMQ + SQRD + BMNQ$$

Or, on montre que :

$$AMPQRS \sim_p CPRNMQ \sim_p \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\mathscr{P}$$

Si on note alors $\mathscr{T}'$ le tétraèdre $SQRD$, isométrique au tétraèdre $BMNQ$, on a établi la formule :

$$\mathscr{T} \sim_p \frac{1}{4}\mathscr{P} + 2\mathscr{T}'.$$

Il reste à itérer le procédé, comme suggéré dans la figure 12.

La démonstration du théorème d'Eudoxe montre que le « $\frac{1}{3}$ » dans la formule de volume provient de la sommation des termes d'une suite géométrique : $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$

Cela n'est peut-être pas aussi visuel que le puzzle des tétraèdres de Hill...

## Le troisième problème de Hilbert

Max Dehn
1878–1952

Le troisième problème de Hilbert a été résolu *très vite*, par un de ses jeunes collègues M. DEHN : la communication de Dehn date du 27 octobre 1900 alors qu'Hilbert a prononcé sa conférence le 8 août de la même année. Et la solution est négative : Dehn démontre qu'il est *impossible* de rendre un tétraèdre régulier $p-$équivalent à un cube de même volume. Il est donc impossible de se passer du procédé d'Eudoxe.

L'idée originale de Dehn est d'associer à tout polyèdre un (nouvel) invariant – appelé depuis *invariant de Dehn* – qui prend toujours la même valeur pour deux polyèdres $p-$équivalents. Et d'autre part, Dehn calcule facilement les invariants du cube et du tétraèdre régulier de même volume : ils sont différents, et la $p-$équivalence est donc impossible ! Il est intéressant de noter que l'invariant de Dehn est défini à partir des longueurs des arêtes et des mesures des angles dièdres des faces du polyèdre en question, comme on pouvait le suspecter ( ?) après l'étude des tétraèdres de Hill.

Mais l'histoire n'est pas finie. Après le contre-exemple de Dehn, le troisième problème de Hilbert a été reformulé de la manière suivante : deux tétraèdres de même volume qui ont aussi le même invariant de Dehn, sont-ils obligatoirement $p-$équivalents ? Ce problème-là a dormi tranquillement dans un petit coin de la vie (trépidante) des mathématiques, peut-être parce qu'il semblait un peu désuet et sans relation avec les grandes théories qui se développaient un peu partout.

Il fut résolu (affirmativement) par un mathématicien suisse, J.-P. Sydler, en 1965 et après vingt années d'efforts, dans un travail qui est un véritable tour de force de géométrie classique dans l'espace. Et le succès de Sydler a relancé les mathématiciens sur les analogues du troisième problème de Hilbert dans des espaces à plus de 3 dimensions ou non-euclidiens, le tout en relation avec une bonne part de la géométrie et de l'arithmétique moderne. Le mystère de ces (grands) puzzles est donc encore d'une brûlante actualité...

 Math-Jeunes n°114, 24–26, 2006

# Jeux

Yolande Noël-Roch

## 1. Lettres et chiffres

Ecrivons avec une faute d'orthographe !

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & P & T \\ + & & & S & I & X \\ \hline & T & R & E & Z & E \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & H & U & I & T \\ + & & H & U & I & T \\ \hline & S & E & I & Z & E \end{array}$$

Dans chacun des deux cas (indépendants l'un de l'autre) une même lettre doit être remplacée par un même chiffre, deux lettres différentes par deux chiffres différents

## 2. Des produits à décrypter

Chacun des symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représente un entier compris entre 1 et 10. À droite et sous la grille sont indiquées les produits par ligne et par colonne. Retrouvez la valeur des symboles.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♣ | ♦ | ♦ | ♥ | ♥ | 96 |
| ♥ | ♣ | ♣ | ♣ | ♦ | 864 |
| ♠ | ♦ | ♠ | ♦ | ♥ | 1296 |
| ♣ | ♥ | ♦ | ♦ | ♥ | 96 |
| ♣ | ♣ | ♠ | ♦ | ♦ | 5184 |
| 1944 | 576 | 7776 | 384 | 16 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♠ | ♠ | ♠ | ♦ | ♠ | 26244 |
| ♥ | ♥ | ♣ | ♥ | ♦ | 192 |
| ♥ | ♦ | ♠ | ♦ | ♣ | 1728 |
| ♠ | ♥ | ♥ | ♥ | ♠ | 648 |
| ♣ | ♥ | ♦ | ♠ | ♦ | 1728 |
| 1944 | 288 | 3888 | 576 | 7776 | |

## 3. Des « carrés moyens »

Voici deux carrés, nous dirons que le premier est « arithmo-moyen et que le second est « géométro-moyen ». Avant de lire la suite, observez-les pour essayer de deviner l'explication de leurs noms de baptême. Ils présentent une propriété semblable ... tout en étant différente !

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 5 | 7 | 9 |
| 9 | 11 | 13 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 9 |
| $\frac{4}{3}$ | 2 | 3 |
| $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |

Ces deux carrés ont une propriété commune : dans les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales, le nombre qui occupe la case centrale est une moyenne des deux nombres qui occupent les cases extérieures. Mais il ne s'agit pas de la même moyenne !

- Dans le premier carré, chaque nombre central est la **moyenne arithmétique des deux nombres qui l'encadrent.**
- Dans le second carré, chaque nombre central est la **moyenne géométrique des deux nombres qui l'encadrent.**

Rappelons que

- la moyenne arithmétique de $a$ et $b$ est $\frac{a+b}{2}$
- la moyenne géométrique de $a$ et $b$ est $\sqrt{ab}$

Compléter ce carré $C_1$ pour obtenir un carré arithmo-moyen, puis pour obtenir un carré géométro-moyen.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | | 2 |
| | | |
| | | 25 |

Compléter ce carré $C_2$ en un carré arithmo-moyen.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $a+x$ | |
| $a+y$ | | |
| | | |

$a$, $b$ et $c$ sont des nombres positifs. Que doit valoir $x$ pour que le carré $C_3$ puisse être complété en
– un carré arithmo-moyen ?
– un carré géométro-moyen ?

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | | $b$ |
| | | |
| $x$ | | $c$ |

## 4. Tous les chiffres sont dominants !

A. Le chiffre 3 est dominant. Pour vous en assurer, complétez les égalités suivantes :

$$11 \times 3 =$$
$$37 \times 9 =$$
$$15\,873 \times 21 =$$
$$12\,345\,679 \times 27 =$$

B. Remplaçons 3 par un chiffre $c$. Complétez les égalités suivantes :

$$11 \times c =$$
$$37 \times c \times 3 =$$
$$15\,873 \times c \times 7 =$$
$$12\,345\,679 \times c \times 9 =$$

C. Prolongez ces séries d'égalités !

## 5. Un mourant facétieux

Un mourant convoque un notaire pour lui dicter ses dernières volontés. Voici comment il répartit sa fortune entre ses enfants :

- l'aîné recevra 1 000 € plus un septième de ce qui restera alors de ma fortune.
- le suivant recevra 2 000 € plus un septième de ce qui restera alors.
- le troisième recevra 3 000 € plus un septième de ce qui reste...

Épuisé, notre testateur meurt sans pouvoir en dire plus.

Sachant que chaque enfant recevra le même héritage, vous pouvez déterminer le nombre d'enfants et le montant global à distribuer.

## 6. Nombres croisés.

Rechercher les nombres $x$, $y$, $z$ et $t$ qui ont permis de construire cette grille. Ils sont tous composés de deux chiffres et les quatre nombres sont différents.

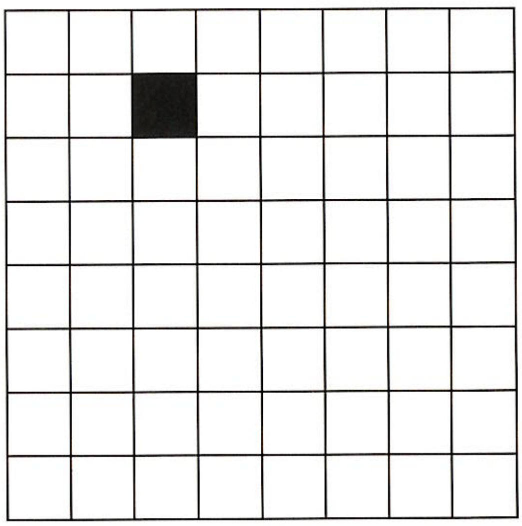
| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | ■ | | 7 | | |
| B | | | ■ | | 8 |
| C | | | ■ | | ■ |
| D | ■ | | | | 6 |
| E | | | 2 | | |

**Horizontalement**
- A. $8(x+y)(z+t)$
- B. $x+y$ ; $3x$
- C. $x+y+z+t$
- D. $(x+t)(y+z)+1111$
- E. $1000(x+z)+xz$.

**Verticalement**
- A. $z+t$
- B. $xyzt$
- C. $2x$
- D. $4000x+14y$
- E. $3y+z+t$ ; $4y$

## 7. Carrés et puzzle

Voici un carré formé de 64 petits carrés dont un est noir. Désignons sa position par le couple $(3,7)$. Découper ce carré $8 \times 8$ en trois parties de manière à pouvoir recomposer avec ces trois parties un carré $8 \times 8$ où le petit carré noir occupe n'importe laquelle des positions $(i,j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 8$ et $1 \leqslant j \leqslant 8$. (Extrait de *Pythagoras*, sept. 2004).



# Olympiades

Claudine Festraets

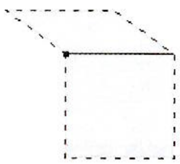
La demi-finale de l'Olympiade est à présent terminée. Voici les solutions de quelque uns des exercices qui t'ont été proposés. Si tu es parmi les finalistes, je te félicite, sinon exerce-toi pour l'an prochain.

## Maxi 2 - Midi 6

*Sans rèponse préformulée* - Dans un cube, un sommet, une arête contenant ce sommet et une face contenant cette arête. forment un drapeau. Combien un cube comporte-t-il de drapeaux ?

### Solution

Considérons un sommet et une des arêtes comprenant ce sommet ; à cette arête correspondent deux faces (voir figure). En chaque sommet, il y a trois arêtes, ce qui donne $3 \times 2 = 6$ drapeaux.



Et comme le cube comporte huit sommets, le nombre total de drapeaux vaut $8 \times 6 = 48$.

## Maxi 4

*Sans réponse préformulée* - Quelle est la plus grande valeur de l'entier positif $n$ tel que 25 est un diviseur de $n! + 1$ (rappelons que, pour $n \neq 0$, $n!$ est le produit de tous les entiers consécutifs de 1 jusque $n$) ?

### Solution

Pour tout $n \geqslant 5$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n$ est divisible par 5, donc, dans ce cas, $n! + 1$ n'est pas multiple de 25.

Pour $n = 4$, $n!+1 = 4!+1 = 24+1 = 25$ ; la réponse est donc 4.

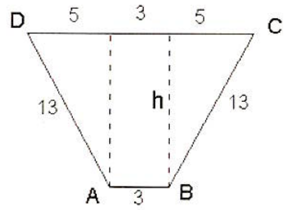
## Maxi 5 - Midi 7

Que vaut l'aire du trapèze dont les côtés mesurent 13, 13, 13 et 3 ?

(A) 58,5 (B) 68 (C) 96 (D) 104 (E) 169

### Solution

Abaissons de $A$ et $B$ les perpendiculaires sur $CD$. Comme le trapèze est isocèle, ces perpendiculaires déterminent sur $CD$ trois segments de longueurs 5, 3, 5.




La hauteur $h$ du trapèze est donnée par
$$h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2,$$
d'où $h = 12$. L'aire du trapèze vaut $\frac{13+3}{2} \cdot 12 = 96$.

## Maxi 7

Pour tout $n$, l'une des fonctions suivantes applique $4^n$ sur $8^n$. Laquelle ?

(A) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (B) $x \mapsto 2^x$ (C) $x \mapsto x^2$

(D) $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ (E) $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$

### Solution

$8^n = (2^3)^n = 2^{3n} = (4^{\frac{1}{2}})^{3n} = (4^n)^{\frac{3}{2}}$

Donc la réponse est (D).

## Maxi 8 - Midi 8

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{5}{5} + \cdots + \frac{97}{5} + \frac{99}{5} =$$

(A) 499 (B) $\frac{999}{2}$ (C) $\frac{2499}{5}$ (D) 500 (E) 990

### Solution

Le nombre de termes de cette somme est 50.

$\frac{1}{5}(1 + 3 + 5 + \cdots + 99) = \frac{1}{5}\frac{(1+99)\cdot 50}{2} = 500$

## Maxi 10 - Midi 9

Parmi les encadrements suivants du nombre $p = 49\,000 \times 21\,000$, un seul est correct. Lequel ?

(A) $10^8 < p < 10^9$ (B) $10^9 < p < 10^{10}$

(C) $10^8 < p < 8 \cdot 10^8$

(D) $8 \cdot 10^8 < p < 9 \cdot 10^8$ (E) $10^{10} < p < 10^{11}$

### Solution

$$\begin{aligned} p &= (50\,000 - 1\,000)(20\,000 + 1\,000) \\ &= 10^9 + 5 \times 10^7 - 2 \times 10^7 - 10^6 \\ &= 10^9 + 3 \times 10^7 - 10^6 \\ &= 10^9 + 29 \times 10^6 \end{aligned}$$

D'où $10^9 < p < 10^{10}$.

## Maxi 15

*Sans réponse préformulée* - Quel est le chiffre des unités du nombre $3^{2006} - 2^{2006}$ ?

### Solution

Le chiffre des unités de $3^{2006} = (3^4)^{501} \cdot 3^2 = 81^{501} \cdot 9$ est 9.

Le chiffre de unités des puissances successives de 2 est périodique, de période 4 :

| Puissances de 2 | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre des unités | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | ... |

$2\,006 = 4 \cdot 501 + 2$, donc $2^{2006}$ a le même chiffre des unités que $2^2$, c'est-à-dire 4.
Le chiffre des unités de $3^{2006} - 2^{2006}$ est $9 - 4 = 5$.

## Maxi 17 - Midi 18

L'opération $*$ est définie dans l'ensemble des nombres réels par $a * b = (-a)^{-b}$.
Que vaut $(-9) * (1 * 2)$ ?

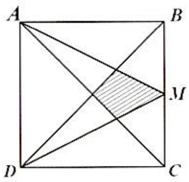
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 3 (D) 9 (E) $-9$

### Solution

$1 * 2 = (-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$
$-9 * (1 * 2) = -9 * 1 = 9^{-1} = \frac{1}{9}$.

## Maxi 21 - Midi 28

Le côté du carré $ABCD$ vaut 1 et $M$ est le milieu de $[BC]$. Que vaut l'aire de la zone hachurée limitée par les droites $AM$, $AC$, $DM$ et $DB$ ?

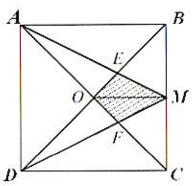



(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{6}$

### Solution

Les triangles $AEB$ et $MOE$ sont semblables :

$$\frac{|OE|}{|BE|} = \frac{|OM|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$




De là, $|OE| = \frac{1}{3}|OB|$ et l'aire du triangle $OEM$ vaut le tiers de l'aire du triangle $OBM$, soit

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

L'aire du quadrilatère $OEMF$ est égale à $\frac{1}{12}$.

## Maxi 24 - Midi 29

Pour combien de nombres naturels $n$ la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ se simplifie-t-elle ?

(A) Aucun (B) 1 (C) 2 (D) 7 (E) Une infinité.

### Solution

$$\begin{aligned}\frac{21n+4}{14n+3} &= \frac{14n+3+7n+1}{14n+3}\\ &= 1 + \frac{7n+1}{14n+3}\\ &= 1 + \frac{1}{\frac{14n+2+1}{7n+1}}\\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7n+1}}\end{aligned}$$

ce qui ne se simplifie pour aucune valeur du nombre naturel $n$.

## Maxi 25

*Sans réponse préformulée* - La suite géométrique $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$ satisfait aux deux conditions :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 31$$
$$s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 62$$

Que vaut le dixième terme de cette suite ?

### Solution

Soit $q$ la raison de la suite géométrique.

$$\begin{aligned}&s_1 + s_1q + s_1q^2 + s_1q^3 + s_1q^4\\ &\quad = s_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 31\\ &s_1q + s_1q^2 + s_1q^3 + s_1q^4 + s_1q^5\\ &\quad = s_1q(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 62\end{aligned}$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, on obtient $q = 2$.
D'où $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ et $s_1 = 1$.
Le 10^e^ terme de la suite vaut $s_1q^9 = 2^9 = 512$.

## Maxi 28

Les nombres réels $a$, $b$, $c$ vérifient les trois relations $a^3 + b^3 + c^3 = 25$, $a + b + c = 2$, $ab + bc + ca = -3$.
Que vaut le produit $abc$ ?

(A) $-30$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{6}{5}$ (D) $\frac{15}{8}$ (E) $\frac{40}{3}$

### Solution

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a\\ &\qquad + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc\\ &2^3 = 25 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc\\ &8 = 25 + 3ab(2-c) + 3ac(2-b) + 3bc(2-a) + 6abc\\ &8 = 25 + 6(ab+ac+bc) - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc\\ &8 = 25 - 18 - 3abc\end{aligned}$$

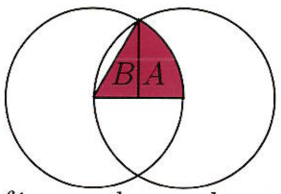
d'où $abc = -\frac{1}{3}$.

# Rallye problèmes

Nicole Miewis

## Solutions des problèmes proposés dans les numéros 112 et 113.

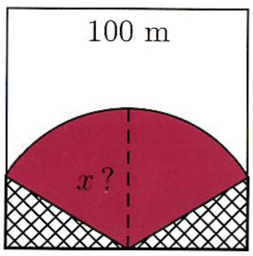
### 1. La chèvre.




L'aire $A + B$ est le sixième de l'aire du disque de rayon 5 ; soit $\frac{25\pi}{6}$. L'aire $B$ vaut $\frac{25}{2}\cos 60^\circ \sin 60^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{8}$. L'aire $A$ vaut la différence de ces deux aires et l'aire que la chèvre peut brouter vaut quatre fois cette différence. En arrondissant au m$^2$, on trouve 30,71 m$^2$.

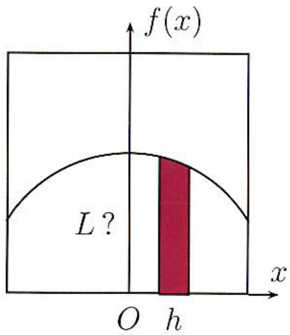
### 2. La chèvre (acte 2).

*Solution de* FABIAN PIJCKE *(5*[e] *au Collège Ste-Marie de Mouscron)*




L'aire de chacun des deux triangles hachurés est $\frac{1}{2}50\sqrt{x^2 - 50^2}$. L'angle au centre $\alpha$ du secteur circulaire vaut $\pi - 2 \cdot \arccos\frac{50}{x}$ et son aire est $\frac{\alpha x^2}{2}$. Comme il lui est impossible d'isoler $x$, il utilise le « solveur » de sa calculatrice et trouve 58m.

*Solution de* ALEXANDRE DAUPHIN *(6*[e] *au Lycée Dachsbeeck de Bruxelles)*

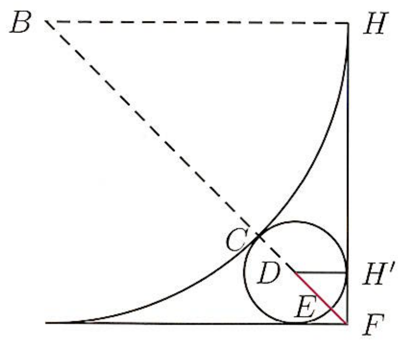



Dans le système d'axes choisi, l'équation de l'arc de cercle de rayon $L$ est $f(x) = \sqrt{L^2 - x^2}$

On peut approximer la moitié de l'aire cherchée par de petits trapèzes de largeur $h$ avec $h$ très petits. On trouve ainsi qu'un rayon de 58,282 m correspond à une aire de 2499,98 m$^2$.

### 3. Le cauchemar.

*Solution de* LIONEL PATERNOSTER *(6*[e] *au Collège St-Stanislas à Mons.)*




Le triangle $BHF$ est rectangle en $H$ et $|BH| = |HF| = 15$. On a donc $450 = (15 + |CE| + |EF|)^2$. Notons $x = |CE| + |EF|$ ; nous obtenons $x^2 + 30x - 225 = 0$ d'où l'on tire la seule valeur acceptable pour $x$ : $15\sqrt{2} - 15$.

Le triangle $DH'F$ est rectangle et isocèle : les deux côtés de l'angle droit valent $r$, la moitié de $|CE|$. On a $\cos\widehat{H'DF} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{r+|EF|}$ d'où l'on tire $|EF| = r\sqrt{2} - r = \frac{\sqrt{2}}{2}|CE| - \frac{1}{2}|CE|$.

En reportant cette valeur dans l'expression de $x$, on obtient $|CE| + \frac{\sqrt{2}}{2}|CE| - \frac{1}{2}|CE| = 15\sqrt{2} - 15$ et finalement $|CE| = 30(3 - 2\sqrt{2}) \approx 5,147$.

4. Le portefeuille.

Nous savons que chaque suspect fournit deux renseignements exacts et un renseignement faux. Passons-les en revue :

Si Louise est coupable, elle ment lorsqu'elle affirme ne pas avoir pris le portefeuille ; de même elle ment en accusant Albert. Louise n'a pas dit la vérité deux fois : elle est innocente.

Si Pierre est coupable, il ment deux fois en s'innocentant et en accusant Albert ! Donc Pierre n'est pas coupable.

Si Albert est coupable, il ment quand il déclare ne pas l'être ; ses deux autres affirmations sont justes, et Marie est coupable, ce qui est impossible puisqu'il n'y a qu'un seul coupable. Albert est donc innocent.

Si Marie est coupable, elle ment en s'innocentant et elle ne peut accuser Jean : elle aussi ne peut être coupable.

Si Jean est coupable, il ment lorsqu'il affirme ne pas avoir pris le portefeuille ; il dit vrai à propos de son père et vrai à propos de Marie. Cette dernière confirme d'ailleurs ! Jean est donc le coupable.

5. Histoire de fractions.

Si $\frac{x}{y}$ est la fraction à découvrir, on peut écrire $\frac{x+1}{y+1} = \frac{222}{333} = \frac{2}{3}$ et $\frac{x-1}{y-1} = \frac{333}{666} = \frac{1}{2}$. De ces deux égalités, on tire le système $\begin{cases} 3x+3 = 2y+2 \\ 2x-2 = y-1 \end{cases}$ dont la solution est $x = 3$ et $y = 5$. La fraction est $\frac{3}{5}$.

6. Les dominos

Examinons comment le nombre 28 est lié au choix parmi les 7 premiers naturels.

Il y a 7 dominos comprenant au moins un numéro 0 : 0–0, 0–1, 0–2, 0–3, 0–4, 0–5 et 0–6.

Il y a 6 autres dominos comprenant au moins un numéro 1 : 1–1, 1–2, 1–3, 1–4, 1–5 et 1–6.

Il y a 5 autres dominos comprenant au moins un numéro 2, puis 4 autres dominos avec au moins un numéro 3, 3 autres dominos avec au moins un numéro 4, 2 autres dominos avec au moins un numéro 5 et finalement le domino 6–6.

Ainsi, le nombre de dominos fabriqués avec les 7 premiers naturels est

$$7+6+5+4+3+2+1 = \frac{(7+1)\cdot 7}{2} = 28.$$

Le nombre de dominos fabriqués avec les 2006 premiers naturels est

$$\frac{(2006+1)\cdot 2006}{2} = 2\,013\,021.$$

Le volume d'un domino est de $8 \times 24 \times 48 = 9216$ mm$^3$. L'ensemble des 2 013 021 pièces du nouveau jeu représentera un volume d'approximativement $18,552$ m$^3$ et la camionnette possède un volume utile de $2 \times 2,5 \times 3,75 = 18,75$ m$^3$. Aucun problème pour ce qui concerne le volume. Par contre, le poids des 2 013 021 pièces sera de près de 6,49 tonnes $(18,55 \times 0,35)$, ce qui dépasse les capacités de la camionnette.

7. 2005

Puisque $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $x$, on a $[\sqrt{n}] = \sqrt{n}$ lorsque $n$ est un carré parfait. Puisque $\sqrt{2005} = 44{,}77$, le plus grand carré intervenant dans la somme est $44^2 = 1936$. De 1936 à 2005, on trouve $69 + 1$ termes.

Entre deux carrés consécutifs $k^2$ et $(k+1)^2$, il y a $2k+1$ termes $n$ pour lesquels $[\sqrt{n}] = k$.

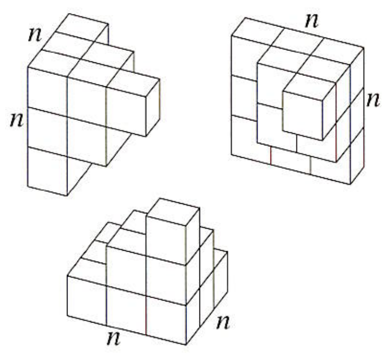
$S = (2\cdot 1+1)1 + (2\cdot 2+1)2 + (2\cdot 3+1)3 + \cdots + (2\cdot 43+1)43 + 70\cdot 44$

$S = 2(1^2+2^2+3^2+\cdots+43^2) + (1+2+3+\cdots+43) + 70\cdot 44$

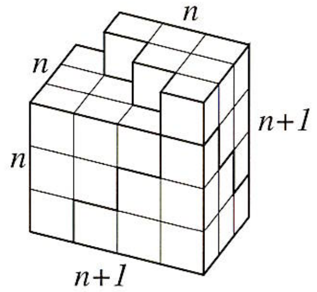
$S = 2\frac{1}{6}(2\cdot 43^3 + 3\cdot 43^2 + 43) + \frac{1}{2}\cdot 43(43+1) + 70\cdot 44$

$S = 58\,014$

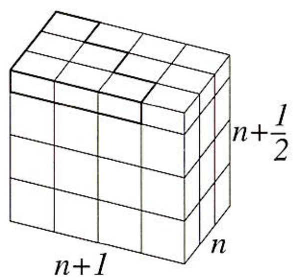
On a utilisé la formule $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. On peut suggérer ce résultat en observant les figures suivantes. On dispose trois empilements de $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ blocs



puis on les fait se rapprocher




Les blocs constituant le dernier étage sont découpés suivant un plan horizontal qui passe par leur centre pour donner deux volumes égaux. Le volume du dessous reste en place tandis que le volume du dessus est tourné de 180° et replacé à côté du volume du dessous pour reconstituer un dernier étage rectangulaire de hauteur $\frac{1}{2}$.




En utilisant les 3 empilements, on a obtenu un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont respectivement $n$, $n+1$ et $n+\frac{1}{2}$. Son volume est $n(n+1)(n+\frac{1}{2})$.

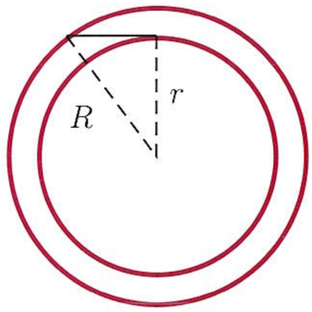
En distribuant ce produit qui représente 3 fois la somme cherchée, on trouve

$$\begin{aligned}
3(1^2+2^2+\cdots+n^2) &= n(n+1)(n+\frac{1}{2})\\
3(1^2+2^2+\cdots+n^2) &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\\
3(1^2+2^2+\cdots+n^2) &= \frac{1}{2}(2n^3+3n^2+1)\\
1^2+2^2+\cdots+n^2 &= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+1)
\end{aligned}$$

## 8. Les bougies

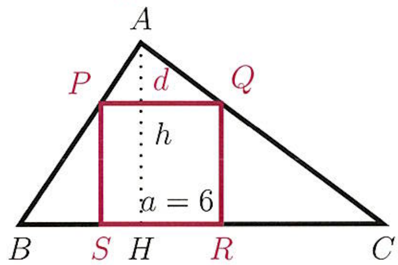
Soit $x$ le nombre d'heures de combustion. Chaque heure, la grosse bougie consomme le cinquième de sa longueur : il en reste $1-\frac{x}{5}$ ; la petite bougie consomme le quart de sa longueur : il en reste $1-\frac{x}{4}$. Les bougies avaient les mêmes longueurs au début de la panne et lorsque le réseau fut rétabli, on constatait que $4\left(1-\frac{x}{4}\right)=1-\frac{x}{5}$ d'où on tire $x=3+\frac{3}{4}$. la panne a duré 3 heures et quarante-cinq minutes.

## 9. La moquette.




Soit $R$ le rayon extérieur du couloir et $r$ le rayon intérieur. On a $R^2-r^2=12^2$. Or l'aire d'un anneau circulaire est $\pi(R^2-r^2)$ : en arrondissant à deux décimales, l'aire du tapis est $452,39\ \mathrm{m}^2$.

## 10. Carré et triangle.




Notons $d$ la longueur du côté du carré, $a=|BC|=6$ et $h=|AH|$ la hauteur du triangle.

Notons $r$ le rapport de la similitude $\frac{APQ}{ABC}$ : $r=\frac{d}{a}=\frac{|AP|}{|BA|}$.

Le rapport de la similitude $\frac{BPS}{BAH}$ vaut $\frac{d}{h}=\frac{|BP|}{|BA|}=\frac{|BA|-|AP|}{|BA|}=1-r$. On en déduit que $h=\frac{d}{1-r}=\frac{ar}{1-r}$.

De même, le rapport de similitude des triangles $CQR$ et $CAH$ est aussi $1-r$.

Posons $S$ l'aire du triangle $ABC$, $S_1$ celle du triangle $ABH$ et $S_2$ celle du triangle $CAH$. On a $S=S_1+S_2$.

Le rapport des aires de deux figures semblables étant le carré de leur rapport de similitude, on a Aire$(APQ)=r^2\cdot S$, Aire$(BPS)=(1-r)^2\cdot S_1$

et Aire$(CQR) = (1-r)^2 \cdot S_2$. L'aire du carré $PQRS$ valant $\frac{4}{9} \cdot S$, on obtient :

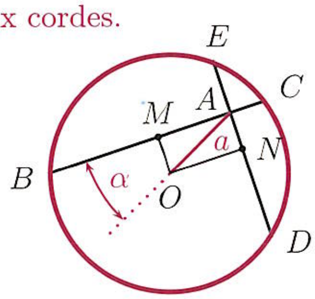
$$\frac{4}{9}S = S - r^2 \cdot S - (1-r)^2 \cdot [S_1 + S_2]$$
$$\frac{4}{9}S = S - r^2 \cdot S - (1-r)^2 \cdot S$$
$$\frac{4}{9} = 1 - r^2 - (1-r)^2$$

C'est-à-dire

$$2r^2 - 2r + \frac{4}{9} = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de sorte que $\frac{r}{1-r}$ vaut $\frac{1}{2}$ ou 2. Pour $a = 6$, on obtient deux solutions : $h = 3$ et $h = 12$. La figure correspond à la première situation.

## 11. Les deux cordes.




Soient $M$ le milieu de $BC$ et $N$ le milieu de $DE$. On a $|BC| = 2\sqrt{r^2 - |OM|^2}$ et $|DE| = 2\sqrt{r^2 - |ON|^2}$.

D'autre part, on peut écrire

$(|BC| + |ED|)^2 = |BC|^2 + 2|BC| \cdot |ED| + |ED|^2$ et

$(|BC| - |ED|)^2 = |BC|^2 - 2|BC| \cdot |ED| + |ED|^2$.

Par addition, il vient

$(|BC| + |ED|)^2 + (|BC| - |ED|)^2 = 2(|BC|^2 + |ED|^2)$

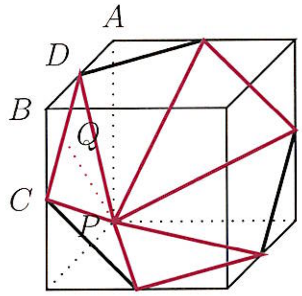
$$\begin{aligned}
&(|BC| + |ED|)^2 \\
&= 2(|BC|^2 + |ED|^2) - (|BC| - |ED|)^2 \\
&= 2\left(4(r^2 - |OM|^2) + 4(r^2 - |ON|^2)\right) - (|BC| - |ED|)^2 \\
&= 16r^2 - 8\left(|OM|^2 + |ON|^2\right) - (|BC| - |ED|)^2 \\
&= 16r^2 - 8a^2 - (|BC| - |ED|)^2
\end{aligned}$$

$r$ et $a$ étant des constantes, le maximum est atteint lorsque $|BC| = |ED|$. D'où $|BC| + |ED| = 2\sqrt{4r^2 - 2a^2}$. De plus, si les cordes ont même longueur, alors $|OM| = |ON|$ et les cordes sont inclinées par rapport à $OA$ d'un angle $\alpha = 45^\circ$.

## 12. Les bicyclettes

Chaque famille qui possède trois vélos va en donner un à une famille qui n'en a qu'un. Chacune des 3 333 familles se retrouve alors propriétaire de deux vélos exactement. Il y a donc 6 666 bicyclettes.

## 13. L'angle dièdre.




Un hexagone régulier peut être la section des faces d'un cube par un plan passant par des milieux d'arêtes. Nous allons montrer que la hauteur $PQ$ du triangle $PCD$ (voir figure) vaut une fois et demie la longueur du côté de l'hexagone. Ainsi, quand on fait pivoter les trois triangles autour des côtés de l'hexagone, c'est en $P$ que les trois sommets libres se rejoignent, de sorte que les plans des trois triangles sont les plans de trois faces du cube ayant le sommet $P$ en commun. Ils sont donc deux à deux orthogonaux.

Posons $4a$ la longueur de l'arête $AB$. On a $BC = 2a$. Le triangle $BCD$ est rectangle en $B$, d'où $|CD| = 2a\sqrt{2}$ et $|CQ| = a\sqrt{2}$. Le triangle $ADP$ est rectangle en $A$, d'où $|DP| = 2a\sqrt{5}$. Le triangle $CPQ$ est rectangle en $Q$, d'où $|PQ| = 3a\sqrt{2}$. On a :

$$\frac{|PQ|}{|CD|} = \frac{3a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

## 14. Question d'âges.

Les équations de base sont :

$$A = B + \sqrt[3]{C} \quad (1)$$
$$B = C + \sqrt[3]{A} + 14 \quad (2)$$
$$C = \sqrt[3]{A} + \sqrt{B}$$

$A$ est un cube et ne peut raisonnablement prendre que 4 valeurs : 1, 8, 27 ou 64. Sa racine cubique est 1, 2, 3 ou 4. Il en va de même pour $C$. En additionnant les équations (1) et (2), on obtient

$$A + B = B + \sqrt[3]{C} + C + \sqrt[3]{A} + 14$$
$$A - \sqrt[3]{A} = C + \sqrt[3]{C} + 14$$

$A - \sqrt[3]{A}$ ne peut valoir que 0, 6, 24 ou 60 ; $C + \sqrt[3]{C}$ ne peut valoir que 2, 10, 30 ou 68. Une seule solution est possible : $24 = 10 + 14$. Aude a 27 ans, Béatrice a 25 ans et Coralie a 8 ans.

# Solutions des jeux

## 1. Lettres et chiffres

Le premier cas admet plusieurs solutions, parmi lesquelles $9471 + 983 = 10\,454$

Le deuxième cas admet exactement deux solutions : $8253 + 8253 = 16506$ et $9254 + 9254 = 18508$.

## 2. Grilles à décrypter

1.) ♥=1, ♦=4, ♣=6 et ♠=9.

2.) ♥=2, ♦=4, ♣=6 et ♠=9.

## 3. Des carrés moyens

$$C_{1a} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 10 & 6 & 2 \\ \hline 21{,}5 & 17{,}5 & 13{,}5 \\ \hline 33 & 29 & 25 \\ \hline \end{array} \qquad C_{1g} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 10 & 2\sqrt{5} & 2 \\ \hline 25\sqrt{2} & 5\sqrt{10} & 5\sqrt{2} \\ \hline 125 & 25\sqrt{5} & 25 \\ \hline \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a+x & a+2x \\ \hline a+y & a+x+y & a+2x+y \\ \hline a+2y & a+x+2y & a+2x+2y \\ \hline \end{array}$$

$C_{3a} : x = a - b + c.$ $\qquad C_{3g} : x = \frac{ac}{b}$

## 4. Tous les chiffres sont dominants

Une infinité d'égalités peuvent être construites sur le même modèle. Toutes découlent du fait que **tout nombre qui n'est ni pair ni multiple de 5 possède un multiple qui s'écrit avec uniquement le chiffre 1.**

Voici un début de prolongement :

$$\begin{aligned} 13 \times 8\,547 &= 111\,111 \\ 17 \times 65\,359\,477\,124\,183 &= 1\,111\,111\,111\,111\,111 \\ 19 \times 58\,417\,953\,216\,374\,269 &= 1\,111\,111\,111\,111\,111\,111 \end{aligned}$$

## 5. Un mourant facétieux

La part des deux premiers enfants étant égales, on a, en désignant par $h$ la somme à distribuer $1000 + \frac{h-1000}{7} = 2000 + \frac{1}{7}(h - (\frac{h}{7} + \frac{6000}{7}) - 2000)$.

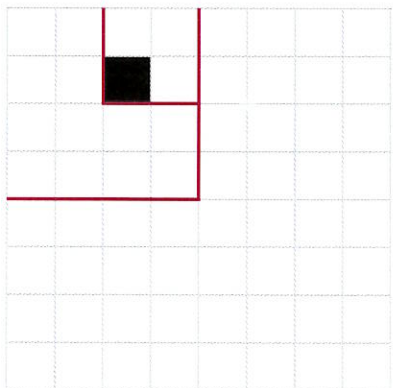
D'où on déduit $h = 36\,000$ : la somme totale à distribuer s'élève à $36\,000$ €. Ainsi, l'aîné reçoit $6\,000$ € et la famille compte 6 enfants.

## 6. Nombres croisés

$x = 16$, $y = 17$, $z = 18$ et $t = 19$

## 7. Carrés et puzzle

Découpez le carré selon les traits de couleur :



Votre abonnement s'achève avec ce numéro. Vous pouvez dès à présent le renouveler pour l'année 2006–2007. Consultez la page suivante.

*Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :*
– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne
– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

# Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française



Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.




Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- ☞ pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

## Tarifs

| Abonnements groupés (5 exemplaires au moins) | | |
|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | Les **deux** revues |
| Belgique | 4 € | 8 € |

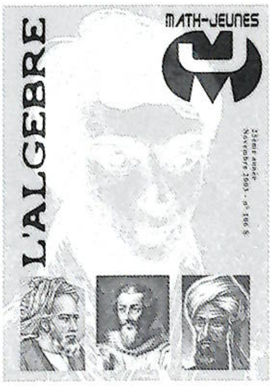
| Abonnements individuels | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | | Les **deux** revues | |
| Belgique | 6 € | | 12 € | |
| France (par APMEP) | 8 € | | 16 € | |
| | ✉ | ✉̸ | ✉ | ✉̸ |
| Europe | 18 € | 20 € | 24 € | 26 € |
| Autres pays | 19 € | 22 € | 25 € | 28 € |

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

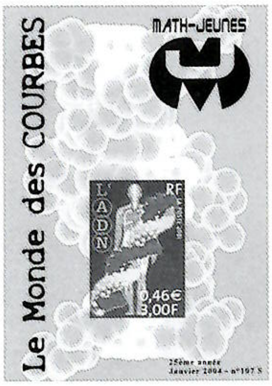
Anciens numéros :

Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition
Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition
Frais d'expédition : consulter le secrétariat

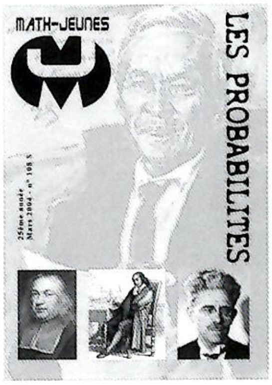
## Complétez votre collection de *Math-Jeunes*.



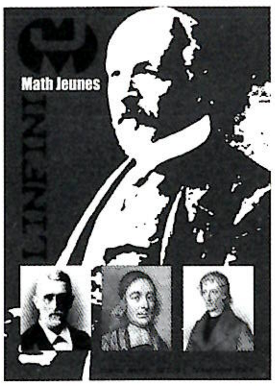

N°106
L'algèbre




N°107
Les courbes

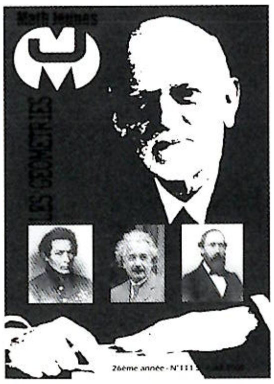



N°108
Les probabilités




N°109
L'infini


N°110
Le codage




N°111
Les géométries

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € pour les trois numéros 106 à 108 ; 1,5 € pour les trois numéros 109 à 111, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont accessibles à l'adresse `www.sbpm.be/mj2.htm`

**Math-Jeunes**
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: G. NOËL
Rue de la Culée, 86 – 6927 Resteigne
Bureau de dépôt: Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée