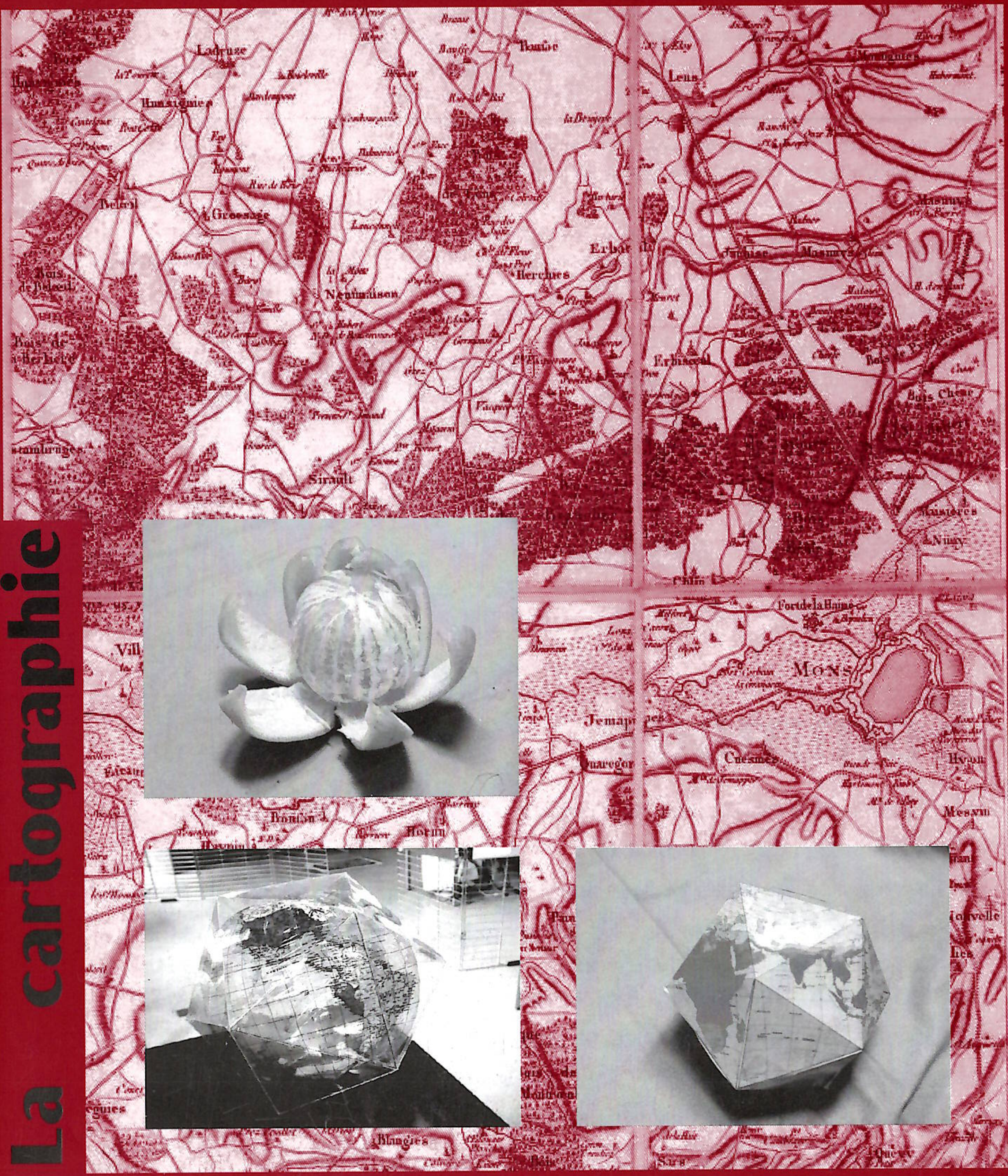
Math-Jeunes



La cartographie

Novembre 2006 – 28e année – N 115 S

Actualités

- **Pluton n'est plus une planète mais une planète naine !**

L'assemblée générale de l'Union astronomique internationale (UAI) a revu la définition d'une planète : il s'agit d'un corps céleste qui

1. est en orbite autour d'une étoile,
2. a une masse suffisante pour que sa gravité l'emporte sur les forces de cohésion du corps solide et le maintienne en équilibre hydrostatique, sous une forme presque sphérique,
3. a éliminé tout corps susceptible de se déplacer sur une orbite proche.

De plus, une planète naine est un corps céleste qui satisfait aux deux premières conditions mais non à la troisième. Ainsi Pluton et Xena (ou UB313) — découverte il y a trois ans — ne peuvent plus être considérées comme des planètes (mais bien comme des planètes naines), car elles font partie de la *ceinture de Kuiper*, une zone fort encombrée. Tous les autres objets du système solaire qui ne sont pas des satellites (par exemple les astéroïdes) sont désormais appelés des « petits corps célestes ».

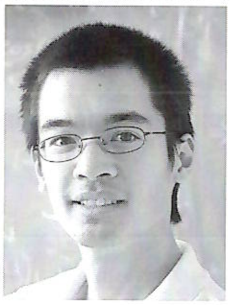
- Le congrès international des mathématiciens a décerné en août 2006 **quatre médailles Fields** (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques). Les lauréats sont

– Andrei Okounkov (Russie-USA), 37 ans, Théorie de la représentation.
– Grigori Perelman (Russie), 40 ans, Conjecture de Poincaré.
– Terence Tao (Australie), 31 ans, Analyse harmonique.
– Werner Wendelin (France), 29 ans, Géométrie du mouvement Brownien.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS MADRID 2006


A. Okounkov


G. Perelman


T.Tao


W. Wendelin

G. Perelman a refusé la médaille qui lui était décernée.

Sommaire

En couverture : Carte marchande de Ferraris dite de Chanlaire-Capitaine (1795), et projection par Buckminster Fuller de la sphère terrestre sur un icosaèdre.

N°115 Vingt-huitième année 2006

Math-Jeunes

La cartographie

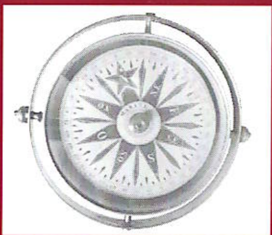
Vous avez sans doute reconnu le personnage placé en filigrane sur cette page : Gerard Kremer, mieux connu sous le nom de Mercator. Ce savant belge — encore qu'à son époque, la Belgique n'existait pas — mérite bien d'occuper la première place dans un numéro consacré à la cartographie. Sa célèbre carte fournit aux marins un moyen simple pour déterminer le cap à suivre en haute mer, contribuant ainsi de façon fondamentale à l'amélioration et à la sécurité des transports maritimes. Dans son article *Mercator, les marins et les mathématiciens*, H. Masy présente d'abord un historique rapide de l'élaboration des cartes avant Mercator. Il explique ensuite la construction de la carte de Mercator par Wright (un bel exemple de calcul approché qui ne nécessite que quelques éléments de trigonométrie), puis par Bond (un bel exemple de modélisation mathématique qui utilise des outils un peu plus élaborés : les logarithmes et intégrales). C'est aussi l'occasion d'introduire des courbes peu rencontrées dans l'enseignement : les *loxodromies*, c'est à dire les courbes que le marin doit s'efforcer de suivre, non pas qu'elles soient les plus courtes — ce sont les arcs de grand cercle qui réalisent la distance la plus courte entre deux points— mais parce que ce sont celles qui sur le globe terrestre coupent tous les méridiens suivant le même angle. P. van Praag développe ce sujet dans *La loxodromie*.

Réaliser une carte signifie toujours reporter une portion de la sphère terrestre sur une feuille de papier. Hélas, cela ne peut se faire sans déformations, qui de plus sont variables d'une zone du globe à une autre. Aussi ne peut-on utiliser le même type de carte partout. Par exemple la projection de Mercator ne convient certainement pas pour représenter le voisinage d'un des pôles. Différents systèmes de projections doivent donc être utilisés, en fonction de la zone à reproduire, de sa localisation, de son étendue et de l'usage qui va être fait de la carte. Deux articles sont consacrés à la description de plusieurs représentations cartographiques possibles. Dans *Canevas et projections cartographiques et géométriques*, R. Gossez décrit quatre représentations différentes et explique que certaines d'entre elles — en particulier la *projection de Mercator* — ne sont pas des projections au sens géométrique du terme, un fait qui met singulièrement en évidence le génie de Mercator. La question des déformations est traitée par G. Cuisinier, I. Dejaiffe et D. Legrand dans *Les déformations sur les cartes de Lambert et de Peters*.

Au fil des siècles, les techniques de réalisation des cartes ont considérablement évolué. Les cartes modernes sont réalisées à partir de photos aériennes, complétées par des relevés de détail sur le terrain. Nous ne pouvions passer sous silence cet aspect des choses. C'est l'objet du dernier article, *Aujourd'hui, le numérique*, dû à G. Noël et S. Trompler. C'est aussi l'occasion de rappeler que si les cartes ont été inventées pour faciliter le repérage et les déplacements à la surface, au-dessus de la surface et sous la surface du globe, elles ne sont plus les seules à remplir cette fonction. Le GPS en est devenu un complément, aujourd'hui utile, demain indispensable.

Par ailleurs, la cartographie ne sert pas qu'à faciliter les déplacements. La plupart des activités humaines sont tributaires de la cartographie, car elles permettent une présentation graphique visuelle attrayante d'une foule de données variées. De la densité de population des communes d'un pays aux zones d'influence des établissements scolaires, la plupart des données numériques relatives aux domaines économique, social, sanitaire... peuvent être reportées sur des cartes. La cartographie est donc devenue aussi un auxiliaire indispensable de la statistique descriptive.

Math-Jeunes n° 115 S, 2–8, 2007



En mer, se situer et se diriger est toujours une question vitale, et les instruments associés prennent une importance considérable. Lorsque les côtes ne sont plus visibles, il ne reste plus guère que la mer et le ciel à observer. L'amélioration des techniques de navigation a ainsi suscité de nombreux progrès de l'astronomie et des instruments permettant de « faire le point » (se situer) et de « prendre le cap » (se diriger). Donc, en particulier, de la cartographie. Comme toujours lorsqu'il est question d'imaginer et réaliser des instruments, les mathématiques ne sont pas loin... Pourquoi et comment ces progrès ont-ils été obtenus, et quel rôle y ont joué les cartographes et les mathématiciens ? Pour tenter de répondre à cette question, concentrons-nous sur le cas de la fameuse « carte de Mercator » et suivons quelques épisodes de l'Histoire.

Pour en savoir plus

GAMBIN, Marie-Thérèse, Des Cartes-Portulans à la formule d'Edward WRIGHT : l'histoire des cartes à « rumbs », *Mnemosyne* 11 (février 1996) 31-62, IREM Paris 7.

TUCHINSKY, Philip M., Mercator's World Map and the Calculus (Unit 206), *UMAP Modules 1977-1979 Tools for Teaching* 677-727, Birkhäuser, Boston, 1981.

FEEMAN, Timothy G., Conformality, the Exponential Function, and World Map Projections, *The College Mathematics Journal* 32(5), 334-342, MAA, Washington, 2001.

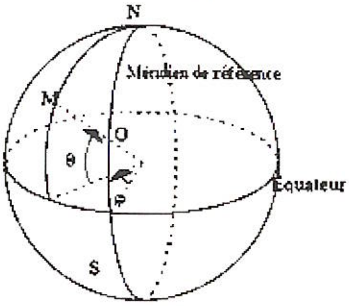
Mercator, les marins et les mathématiciens

Hugues Masy

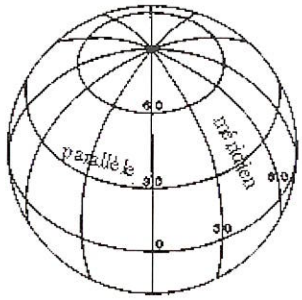
Les Grecs instaurent le repérage des lieux par la latitude et la longitude.

Au III^e siècle av. J.-C., ERATOSTHÈNE, reprenant une idée de DICÉARQUE (IV^e siècle av. J.-C.), réalise une carte organisée à partir d'un axe passant par les « Colonnes d'Hercule » (Gibraltar) et Rhodes. Il trace des parallèles à cet axe et constitue un quadrillage rectangulaire régulier. Son « méridien » de référence est celui qui passe par Rhodes.

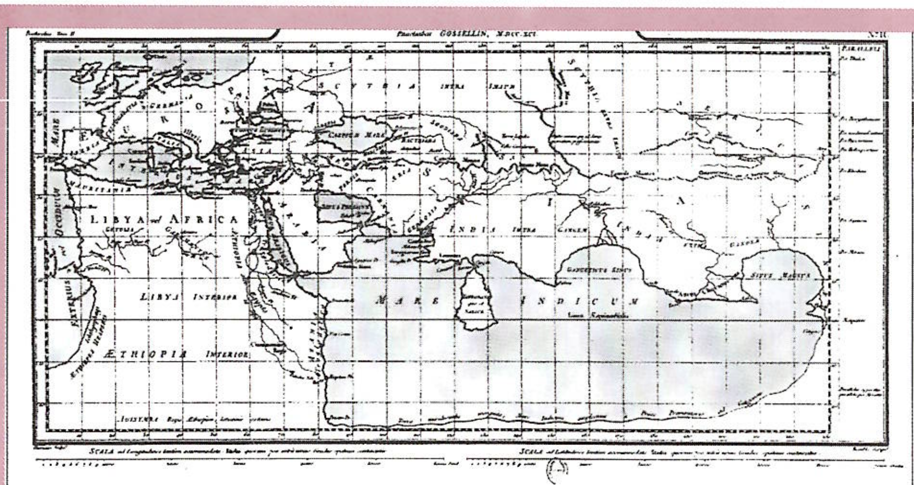
Au II^e siècle. av. J.-C., HIPPARQUE, grand astronome et fondateur de la trigonométrie, impose que le repérage des lieux terrestres se fasse en fonction d'éléments astronomiques : la latitude et la longitude. Les endroits où la durée du jour le plus long de l'année est la même auront la même latitude. Sur la sphère terrestre, ils se trouvent en général sur un petit cercle (un « parallèle »). Pour la longitude, les endroits qui ont leur midi au même instant sont sur un grand cercle, divisé en deux demi-cercles appelés « méridiens ».



Un point M à la surface de la terre (assimilée à une sphère) est repéré par ses coordonnées géographiques :
- φ : longitude (Est-Ouest, à partir du méridien de référence) ;
- θ : latitude (Nord-Sud, à partir de l'équateur).

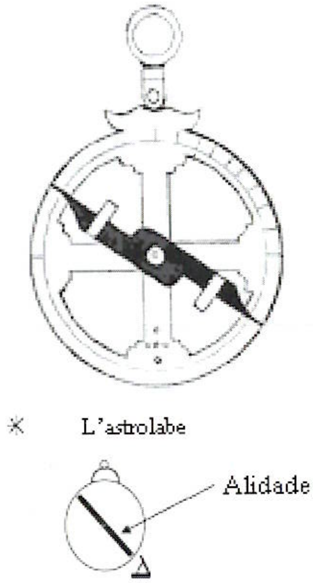


Au I^{er} siècle av. J.-C., MARIN DE TYR construit une carte basée sur un quadrillage rectangulaire régulier respectant les exigences d'Hipparque : le parallèle de référence est l'équateur, et le méridien de référence est celui des « Iles Fortunées » (les Canaries).

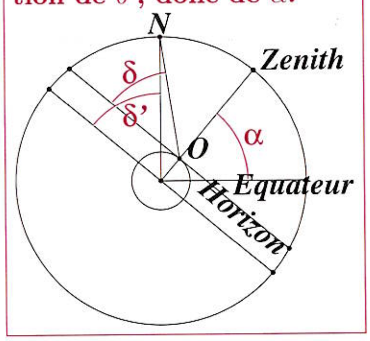


Carte reconstituée de MARIN DE TYR

Au Ier siècle ap. J.-C., Ptolémée réalise une synthèse des travaux de ses prédécesseurs. Critiquant la carte de Marin de Tyr, mais se conformant aux exigences d'Hipparque, il conçoit et réalise des représentations cartographiques nouvelles qui nous parviendront et qui feront autorité en éclipsant l'approche de Marin de Tyr.



$\delta' = \alpha$ est la latitude du lieu. En approximant le pôle par l'étoile polaire, l'astrolabe mesure l'angle δ, lui-même approximation de δ', donc de α.



Le Moyen Age

Dans nos régions, le savoir Grec disparaît à cette époque dominée par la religion et les guerres. Les croisades, dont le but est précisément de reconquérir Jérusalem, commencent en 1095 et se terminent en 1270 avec la mort de Louis IX (Saint-Louis). Au XVe siècle, l'Europe trouve en Orient (Inde, Chine, Japon, les Moluques) des produits de très grande valeur : la soie et les épices (essentielles pour le goût de la viande que l'on mangeait souvent avariée). Mais la route terrestre est contrôlée par les Ottomans et la route maritime (via la Mer Noire et la Méditerranée) par les Italiens (Gênes et Venise). Après la prise de Constantinople par les Ottomans en 1453, le commerce devient de plus en plus difficile.

Les grands voyages de découverte

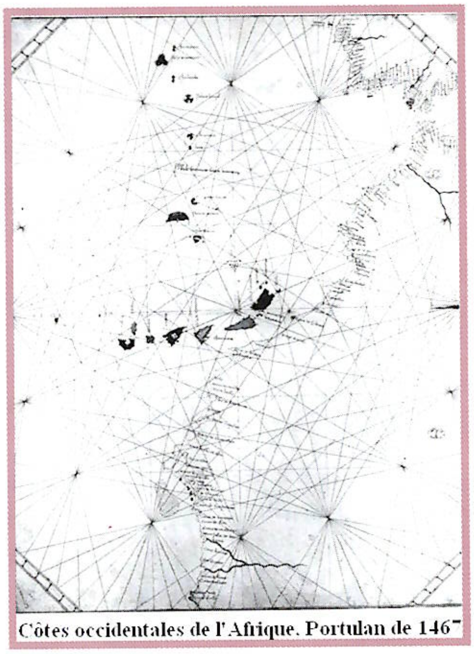
Contourner l'Afrique par l'Océan est-il une solution ? Au XVe siècle, les Portugais (monarchie, noblesse et bourgeoisie) vont concevoir une véritable politique nationale d'expansion outre-mer et mettre sur pied une entreprise de découverte systématique et de longue haleine. Pour la concrétiser, ils doivent faire face à d'immenses défis techniques et humains.

L'adaptation des techniques à la navigation sur l'Atlantique

Concrètement, ils vont mettre au point le navire approprié : la caravelle. Ce sont aussi les Portugais qui vont établir les rudiments du calcul de la latitude en mer à l'aide de l'astrolabe (1470-1480). Le problème de la longitude en mer reste, lui, catastrophiquement mal maîtrisé. Les Portugais vont aussi s'appuyer sur les progrès de la navigation méditerranéenne. L'introduction de la boussole (connue depuis longtemps des Chinois) dans nos contrées aux environs du XIIe siècle est évidemment une étape importante. Les cartes farfelues du Moyen Age ne leur apportant aucune aide, l'usage de la boussole va mener les marins de Gênes, Venise, Majorque et Catalogne à développer une représentation plus adaptée.

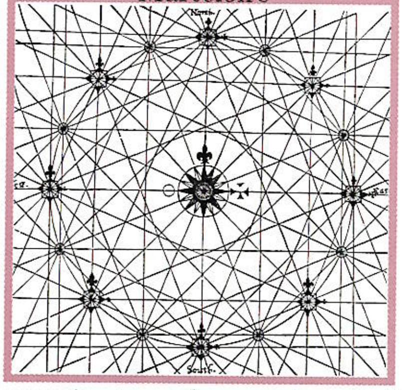
Les cartes-portulans

Tracées au début sur des peaux de moutons pour représenter le bassin méditerranéen, ces cartes seront donc naturellement orientées avec le Nord (magnétique) vers le haut. Et lorsque le cap est maintenu constant au départ de lieux bien déterminés, l'itinéraire était tracé par une droite. Les points bien déterminés sont répartis en réseau : la carte est recouverte de cercles tangents ; seize points sont marqués sur chacun, correspondant aux seize directions d'une rose des vents. Les points sont alors reliés entre eux par des droites.



Côtes occidentales de l'Afrique. Portulan de 146

Marteloire



Le réseau s'appelle un « marteloire ». Les éléments permettant de situer un lieu par rapport à un autre sont le cap et la durée de navigation.

L'extension des cartes-portulans hors de la Méditerranée.

Ainsi, les besoins des navigateurs ont suscité la conception de cartes précises. En 1443, les Portugais arrivent aux côtes du Sénégal, ils franchissent l'équateur en 1469, contournent l'extrémité de l'Afrique en 1488 (B. DIAZ). Les Espagnols atteignent les Caraïbes en 1492 (Christophe COLOMB). Les Portugais atteignent l'Inde en 1498 (VASCO DE GAMA) et découvrent le Brésil en 1500 (CABRAL). Et de 1519 à 1522, le premier tour du monde est effectué par les Espagnols (MAGELLAN). Au rythme de la progression des Grandes Découvertes, les cartes-portulans étaient complétées des renseignements rapportés par les voyageurs. D'où la nécessité d'étendre la zone couverte par les portulans. Et durant cette période, Portugais et Espagnols, via des bulles papales ou en signant des traités, se répartissent le monde, le divisant selon un méridien de l'Atlantique : l'Ouest à l'Espagne, l'Est au Portugal. La géo-politique a ainsi, à cette époque, également ressenti vivement le besoin d'une cartographie précise.

Au service du savoir : l'imprimerie et l'Université

À cette époque, l'essor de l'imprimerie permet la diffusion des œuvres d'Euclide et de Ptolémée. Ainsi que la diffusion des cartes en général.

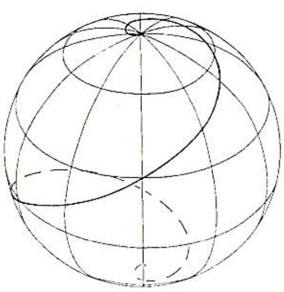
D'autre part, les Universités se détachent des idées pures coupées de la réalité (très critiquées par les « praticiens » parmi lesquels les marins) pour apporter leur contribution à ces grands projets concrets.

Du plan à la sphère pour revenir au plan

Du plan à la sphère

À l'Université de Coimbra (Portugal)

C'est ainsi que le roi Jean III du Portugal crée le poste de Cosmographe Royal à l'Université de Coimbra, avec la mission explicite d'améliorer les techniques de navigation, et y nomme le mathématicien Pedro NUNES. Comment celui-ci va-t-il s'y prendre ?



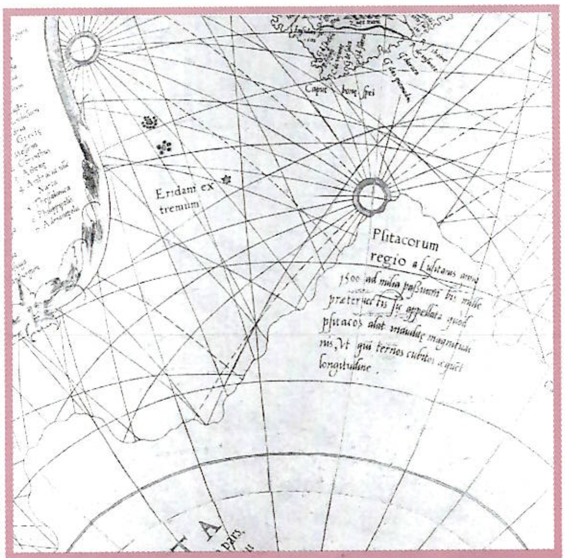
Une loxodromie

Les cartes-portulans, conçues au départ pour représenter localement le bassin méditerranéen, sont construites sur le modèle d'une Terre rendue plate. Lorsqu'on étend leur usage hors de ce bassin pour suivre les Grandes Découvertes, les difficultés s'accroissent donc. Que se passe-t-il si on essaye de transférer un portulan sur un globe ? Que devient le marteloire sur le globe ? Cela pose la question du transfert sur la sphère de la route à cap constant, représentée par une droite sur le portulan. En 1537, Pedro NUNES annonce la découverte : sur la sphère, une route à cap constant (qui ne suit pas un méridien ou un parallèle) est une courbe en forme de spirale, qui va s'enrouler autour des pôles ! Elle sera nommée plus tard « loxodromie ».

À l'Université de Louvain (Pays-Bas)

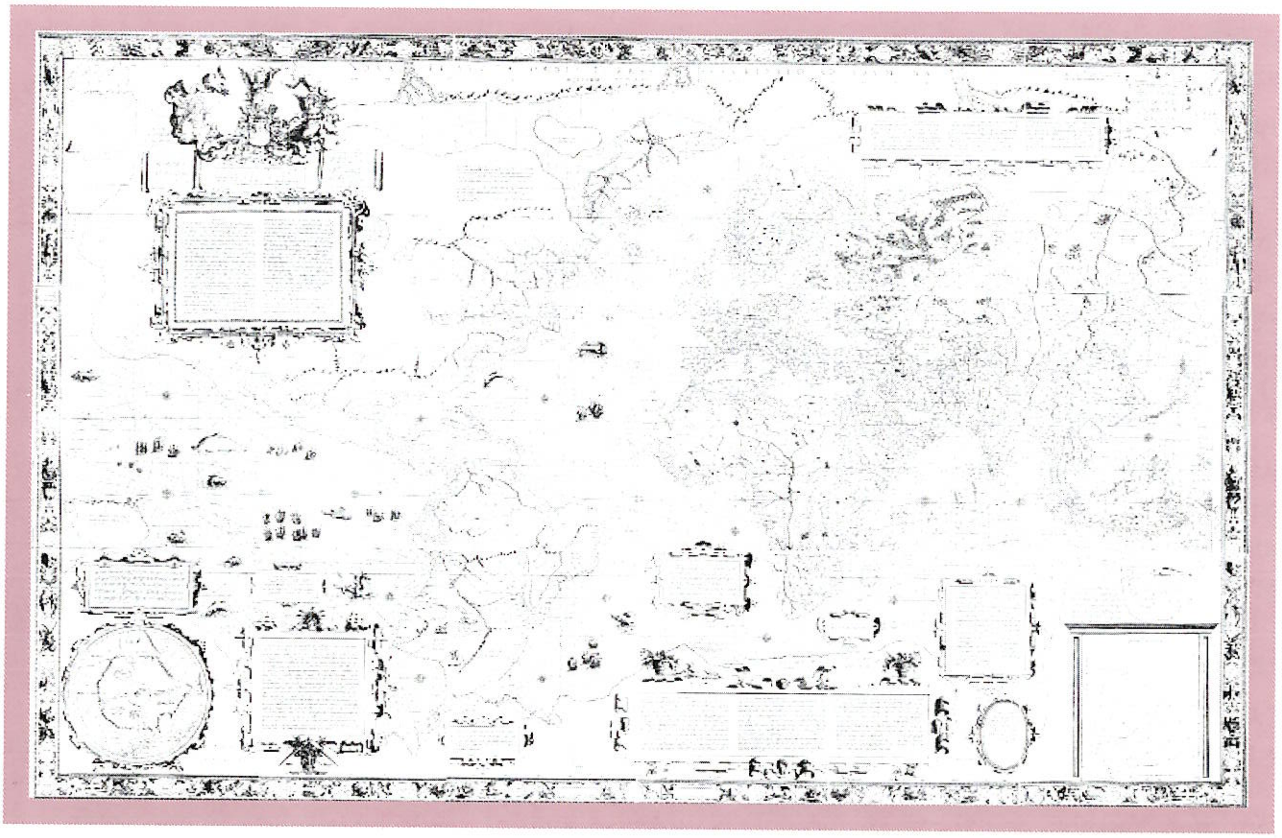
En 1530, Gérard MERCATOR (de son vrai nom KREMER) arrive à l'Université de Louvain, très active dans le développement des instruments. Il y est l'élève de GEMMA FRISIUS, conseiller de Charles Quint. MERCATOR, connaissant peut-être les travaux de NUNES, réalise en 1541 le premier globe terrestre représentant des loxodromies. Il effectue ainsi le transfert du marteloire à la sphère. Et il le réalise lui-même, brisant ainsi la division du travail qui régnait à l'Université entre les concepteurs et les réalisateurs.

Toujours sur la sphère, à l'Université de Coimbra.
NUNES poursuit ses recherches. La méthode de navigation de SAGRES, qui consiste à suivre un parallèle jusqu'à la latitude voulue, puis suivre le méridien du lieu, n'est évidemment pas efficace. Au lieu de parcourir deux côtés d'un « triangle » rectangle n'est-il pas bien plus indiqué de prendre la route directe en prenant dès le départ le cap de la destination et en le maintenant jusque là ?
Les travaux de NUNES montraient qu'en général, on suit ainsi une loxodromie. Et le même NUNES, en 1546, démontre que le chemin le plus court entre deux points de la sphère s'obtient en suivant un grand cercle passant par les deux points (un « grand cercle » est un cercle de la sphère dont le centre est le centre de la sphère).


Loxodromies du globe de Mercator

En général, ce n'est donc pas en maintenant le cap de la destination !
Les résultats des recherches de NUNES ne seront pas facilement acceptés ni par les marins ni par les savants. (Pourtant, MERCATOR, lui, les a compris et même concrétisés lui-même !) Une immense polémique s'ensuivit, au terme de laquelle NUNES, se sentant calomnié, déclara même vouloir abandonner les mathématiques.

De la sphère au plan, à Duisburg
MERCATOR, en réalisant son globe terrestre de 1541, était bien placé pour constater deux choses. D'une part, les globes ne sont pas une solution de remplacement des cartes : outre les difficultés de construction, un globe représentant 1852 m réels (1 minute d'arc) par 1 mm devrait avoir un diamètre de 6,88 m ! Encombrant dans la cabine du capitaine ! Mais d'autre part, les cartes-portulans n'indiquent pas vraiment, dans de nombreux cas, le cap à suivre pour naviguer « directement » d'un point à l'autre suivant la loxodromie ! De manière générale, la droite joignant deux points de la carte-portulan n'indique pas exactement ce cap. MERCATOR se pose alors le problème de modifier le procédé de construction des cartes-portulans afin que toute droite tracée sur la carte représente la loxodromie passant par deux quelconques de ses points, et que la rose des vents, placée en un point quelconque de la carte, indique les directions exactes. En repassant ainsi de son globe à une carte-portulan améliorée, MERCATOR va augmenter considérablement la précision des cartes marines, en supprimant des causes d'erreurs liées à leur procédé de construction lui-même. C'est en 1569, à Duisburg où il s'est établi, qu'il réalise ce chef d'œuvre.
En concevant cette carte, MERCATOR s'inspire de la carte plus ancienne de MARIN DE TYR, pourtant critiquée par PTOLÉMÉE, mais plus proche des cartes-portulans que celles de PTOLÉMÉE. Ainsi, MERCATOR combine de façon géniale les cartes-portulans, fondées sur le cap et la durée de navigation, et les cartes des Grecs, fondées sur la latitude et la longitude. MERCATOR n'a pas laissé de description précise de son procédé de construction.
Cette carte détermine ce qu'on appelle aujourd'hui la « projection de Mercator », qui est toujours d'usage intensif et important de nos jours ! Méridiens et parallèles se croisent perpendiculairement, et les méridiens sont des droites parallèles régulièrement réparties.
Et pourtant, l'accueil des marins sera très réservé, la méfiance (à l'égard d'un terrien prétendant réformer les outils élaborés par les marins eux-mêmes) étant augmentée par le mystère de son procédé précis de construction. MERCATOR meurt en 1594, cartographe déjà très célèbre de son temps ; mais pas pour cette carte-là !



De la représentation graphique au tableau numérique puis à la formule

Alors, comment la « projection de Mercator » a-t-elle été adoptée ? Si la carte de Mercator a été accueillie froidement par les marins auxquels elle était destinée, elle a au contraire été bien accueillie par les milieux académiques. Parmi les savants intéressés, on trouve Edward WRIGHT, ancien navigateur, mathématicien à l'Université de Cambridge et conseiller à la Compagnie des Indes Orientales anglaise (compagnie de navigation exploitant les richesses des Grandes Découvertes). Il établit un procédé de construction de la carte en 1592.

De la carte au tableau numérique

Edward WRIGHT établit une table fournissant, minute d'arc par minute d'arc, les distances à la droite-équateur des droites-parallèles, de la latitude 0° à la latitude 75°.

A ce moment, WRIGHT collabore avec un Hollandais nommé HONDIUS, qui se trouve en Angleterre. WRIGHT lui prête son manuscrit, que HONDIUS recopie... L'année suivante, HONDIUS retourne en Hollande pour aider aux premières explorations hollandaises, et il obtient un an plus tard le privilège d'être le seul à imprimer et vendre un nouveau type de cartes... qui seront donc disponibles au cours des explorations hollandaises.

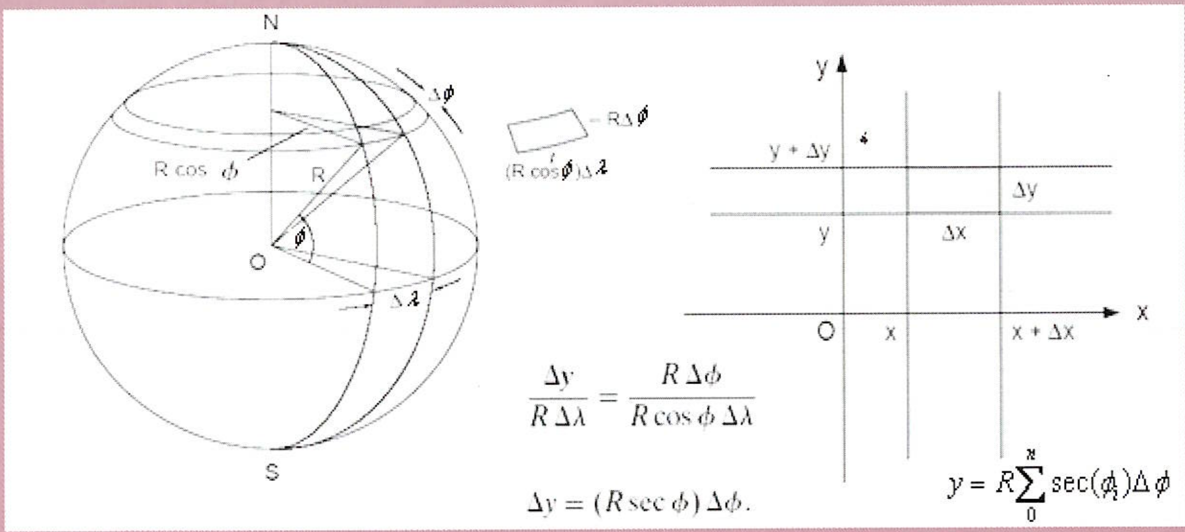
Quant aux Anglais, Edward WRIGHT publie en 1599 un livre qui décrit et explique la carte de Mercator. Il donne la table de construction des droites-parallèles.

Le livre de WRIGHT sera largement diffusé aux capitaines de navires anglais, que les explications claires d'un ancien navigateur mettent en confiance.

Intermède : la création des logarithmes

En 1614, John NAPIER présente les logarithmes dans un livre écrit en latin. Les logarithmes permettent de remplacer le calcul du produit de deux nombres par le calcul de la somme des deux nombres correspondants dans une table, puis une dernière lecture de table en sens inverse. Si le logarithme d'un nombre x est noté $\ell n(x)$, la propriété essentielle est que $\ell n(a \cdot b) = \ell n(a) + \ell n(b)$. C'est un progrès considérable pour les techniques de calculs, tels ceux des astronomes comme KEPLER. En 1616, Edward WRIGHT publie une traduction en anglais du livre de NAPIER et, en 1620, Edmund GUNTER, mathématicien anglais, publie une table des logarithmes de tangentes.

La construction de WRIGHT



Le point de longitude λ et de latitude ϕ étant représenté par (x, y) sur la carte, le « rectangle » grisé associé aux points repérés par (λ, ϕ) et $(\lambda + \Delta\lambda, \phi + \Delta\phi)$ doit devenir un rectangle associé à (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Les « rectangles » homologues sont semblables si leur rapport hauteur/longueur est le même. Partant de l'équateur, et prenant un « pas » $\Delta\phi$ correspondant à 1 minute d'arc, WRIGHT peut ainsi placer les droites-parallèles de proche en proche. Si on envisage le cas limite pour $\Delta\phi$, on obtient alors la formule $y = R\int_0^{\phi} \sec(\theta) d\theta$.

De la table numérique à la formule.

En 1640, l'anglais Henry BOND, mathématicien et conseiller en navigation, est frappé par la ressemblance entre les valeurs qu'il trouve dans la table de WRIGHT et la table de logarithmes de tangentes de GUNTER ! Il publie sa conjecture en 1645 : la droite-parallèle de latitude x doit être à distance $\ell n(\mathrm{tg}(x/2 + \pi/4))$ de la droite-équateur.

Cette formule présente l'avantage, par rapport aux tables, de ne plus dépendre du « pas » de construction de la table (le « pas » était de 1 minute d'arc chez WRIGHT). Avec les tables, réduire le « pas » à $\frac{1}{2}$ minute nécessitait la reconstruction complète de la table, et chaque tentative d'améliorer la précision provoquait le même problème. Avec la formule de BOND, le procédé de construction n'est plus un frein à la précision de la carte ! Il faut noter que la fonction logarithme, nécessaire pour décrire précisément la « projection de Mercator », n'existait pas du vivant de MERCATOR !

Un prix pour la formule !

La ressemblance détectée par BOND n'est-elle que pur hasard ? Les progrès de la cartographie sont importants pour les mathématiciens qui offrent un prix, en 1666, à celui qui démontrera la formule. C'est James GREGORY, en 1668, qui y réussit. BARROW, en 1670, en fournira une démonstration plus intelligible (première intégration par « décomposition des fractions rationnelles »). A l'aube de la création du calcul différentiel et intégral, cette question issue de la cartographie et de la navigation figure parmi les grands problèmes de l'époque et donne plus de poids encore à ces méthodes nouvelles ! James GREGORY et BARROW, qui figurent parmi les tout premiers mathématiciens qui ont découvert le lien entre intégrale et dérivation, ne se sont pourtant pas contentés de dériver $\ell n(\mathrm{tg}(x/2 + \pi/4))$ pour obtenir $\sec(x)$. C'aurait été un peu l'œuf de Colomb...

Les mathématiques inspirent les cartographes ; la cartographie inspire les mathématiciens.

Nous avons vu qu'en 1569, MERCATOR, cartographe génial, s'est inspiré des mathématiques de son temps pour concevoir sa carte. C'est aussi MERCATOR qui a institué l'usage du terme « Atlas » pour désigner un recueil de cartes. Et réciproquement ? Vers 1850, RIEMANN, mathématicien génial, prolongeant les travaux de GAUSS étudiant les surfaces, définit la notion mathématique de « variété ».

Pour la décrire, on s'appuie sur la notion de carte locale : elle consiste à représenter un voisinage d'un point sur le plan. Et un Atlas de la surface, c'est un ensemble de cartes locales compatibles deux à deux qui recouvrent la surface. C'est ainsi que se définissent, depuis les années 1930, les notions fondamentales de la géométrie différentielle qui étudie les surfaces, les courbes et leurs généralisations. Mais ceci est une autre (longue) histoire.

La démonstration de BARROW

Voici, en présentation actualisée, l'approche de BARROW pour intégrer sec sur un intervalle autour de 0. Pour établir la formule de répartition des parallèles sur la carte de Mercator, BARROW effectue ainsi la première intégration par « décomposition des fractions rationnelles »

$$\int \sec\theta \, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta$$
$$= \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta$$
$$= \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+sin\theta)} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+sin\theta}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(-\ell n\,|1-\sin\theta| + \ell n\,|1+sin\theta|) + c$$
$$= \frac{1}{2}\ell n \left|\frac{1+\sin\theta}{1-sin\theta}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ell n \left|\frac{1+\sin\theta}{1-sin\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+sin\theta}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ell n \left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-sin^2\theta}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ell n \left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\right| + c$$
$$= \ell n \left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + c$$

Utilisons les formules $\sin\theta = \frac{2\,\mathrm{tg}(\theta/2)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta/2)}$ et $\cos\theta = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\theta/2)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta/2)}$

$$\int \sec\theta \, d\theta$$
$$= \ell n \left|\frac{1+\mathrm{tg}(\theta/2)}{1-\mathrm{tg}(\theta/2)}\right| + c = \ell n \left|\frac{\mathrm{tg}(\pi/4)+\mathrm{tg}(\theta/2)}{1-\mathrm{tg}(\pi/4)\cdot\mathrm{tg}(\theta/2)}\right| + c$$
$$= \ell n \left|\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

Gerardus MERCATOR (1512-1594)

MERCATOR est né à Rupelmonde, dans une famille de peu de moyens. Son oncle Gisberg le prend en charge et lui fait faire des études. A sept ans, il parle et lit le latin couramment. Son vrai nom était Gerard Kremer, nom qui signifie marchand en allemand. Il le traduira en latin : mercator.

Il entre à l'Université de Louvain à 18 ans et y suit des cours presque entièrement basés sur la philosophie d'ARISTOTE. Cela lui pose des problèmes, notamment parce qu'il ne voit pas comment concilier les vues d'ARISTOTE sur l'origine du monde avec celles de la Bible. Il renonce à ses études au bout de deux ans et se met à voyager. Il prend alors goût à la géographie. Il retourne à Louvain et se consacre aux mathématiques, à la géographie et à l'astronomie. Il apprend aussi à graver et à fabriquer des instruments, il gagne sa vie en donnant des leçons de mathématiques.

En 1535, MERCATOR commence à construire un globe terrestre, commandé par Charles-Quint, avec le géographe GEMMA FRISIUS. La gravure du papier qui recouvre la sphère se faisait pour la première fois en cuivre et les informations reproduites dépassaient largement celles des globes terrestres précédents.

En 1537, il confectionne sa première carte, celle de la Palestine, ensuite vient en 1540 celle des Flandres. Il projette de produire de nombreuses cartes, mais les renseignements sur lesquels il se base sont parfois incorrects et contradictoires. Il se rend compte qu'une cause d'erreur est due aux marins qui pensent que le chemin suivi en gardant le cap est une géodésique. Il s'agit au contraire d'une loxodromie, découverte par Pedro NUNES.

Accusé d'hérésie, il est arrêté en 1544 et passe sept mois en prison ; il est ensuite relâché grâce au soutien de l'Université de Louvain. Il part à Duisburg en 1552 et y construit une très grande carte d'Europe. Il est désormais le plus célèbre cartographe de l'époque. De nombreuses cartes lui sont commandées par différents pays. La « projection de Mercator » est utilisée pour la première fois en 1569. C'est MERCATOR qui crée le mot « atlas », pour un ensemble de cartes. Il meurt en 1594.

S. Trompler

Math-Jeunes n°115 S, 9–10, 2007

La loxodromie

Paul van Praag

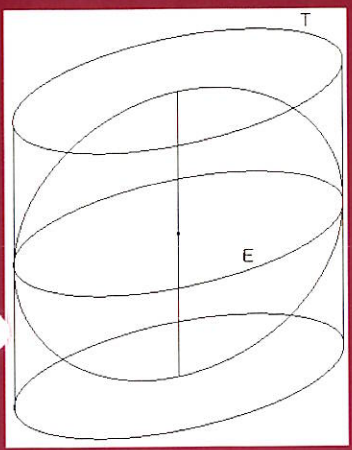


Fig. 1

1. Une loxodromie est un objet géométrique qui fut défini pour aider le navigateur sur mer à prévoir un trajet qui lui sera aisé.

Soient le globe terrestre, ses pôles nord et sud, ses méridiens et parallèles, son équateur. On suppose connus ce que sont la latitude et la longitude d'un point d'un tel globe, et on admet qu'il est possible de les calculer ([1], [2]).

On connaît les difficultés posées par la confection des cartes géographiques : il n'est pas possible sans tout chiffonner et déchirer d'appliquer une sphère sur un plan (alors que pour une surface cylindrique un découpage suffit). Suivant ce que l'on espère de la carte, certaines applications de la sphère sur le plan sont préférées à d'autres (voir [3], y compris sur l'aspect mathématique). Une des premières projections géographiques fut celle de Mercator (1512 – 1594).

Soit E l'équateur, et T le cylindre tangent au globe en E (fig. 1).

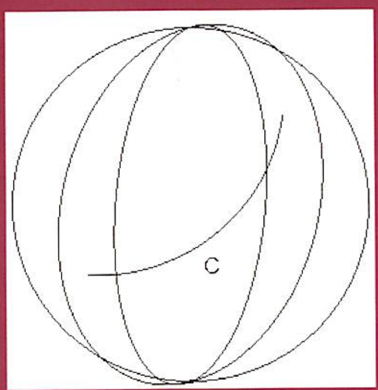


Fig. 2

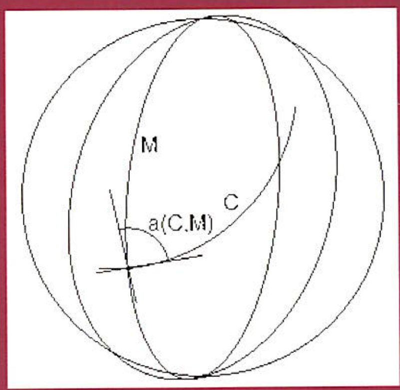


Fig. 3

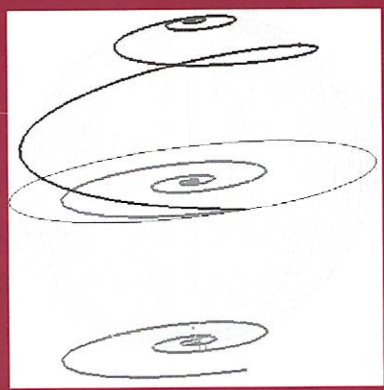


Fig. 4

La projection de Mercator est une certaine application du globe sur T, utilisée en général sur une région du globe assez éloignée des pôles ([3], pp. 28 et 29), et dont nous allons voir un intérêt.

2. Soient le globe, ses méridiens, et une courbe C (supposée ici ne pas être un méridien) (fig. 2). Et soit M un méridien coupé par C. Quatre angles apparaissent. On singularise l'angle noté ici $a(C, M)$ (fig. 3). Une loxodromie est une courbe C sur le globe telle que pour tout méridien M, l'angle $a(C, M)$ soit constant. Donc les parallèles et les méridiens sont des loxodromies. Mais en général une loxodromie ressemble à une hélice (fig. 4, [4]).
Il se fait que par la projection de Mercator, les loxodromies deviennent des droites.

3. Utilité pour le marin.

Le marin qui tient le gouvernail (l'homme de barre) a devant lui une grande boussole appelée compas. À tout moment le marin connaît donc l'angle (appelé « le cap ») que fait la trajectoire du bateau avec le méridien sur lequel il se trouve. Si grâce au gouvernail, le marin garde cet angle constant, alors le bateau décrit un arc de loxodromie(0).

(0) Tout ceci est bien sûr plus facile à écrire qu'à pratiquer. Comme me l'indique Monsieur Armand de Callataÿ [5], qui, lui, navigue, il faut tenir compte entre autres des effets du vent et des vagues qui peuvent faire dévier jusqu'à 5° le parcours réel du parcours lu. Une déviation même minime peut induire des erreurs considérables ([1], p.99).

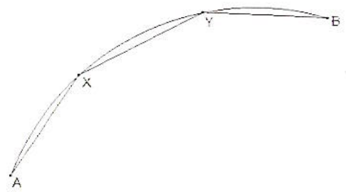


Fig. 5

Près du marin se trouve une carte de Mercator de la région où il se trouve, et dont l'officier s'est servi pour préparer le parcours. Il souhaitait aller du point A au point B. A priori il n'y avait aucune raison pour qu'il existe une loxodromie utile au marin passant par A et B. L'art consiste alors à trouver un (petit) nombre de points, disons ici les deux points X et Y, tels que des arcs de loxodromies joignent successivement A à X, X à Y, et Y à B. En général ([3], p.30), ces points sont choisis sur l'arc de grand cercle qui passe par A et B (ce grand cercle qui est une ligne de plus courte distance est appelé orthodromie par les marins (et géodésique par les mathématiciens)). Donc sur la carte, les points A, X, Y et B sont liés par des segments de droites (fig. 5).

4. C'est à l'algébriste et cartographe portugais Pedro Nunes (1502 – 1578), [6], que l'on attribue en général l'introduction de la loxodromie (dans un contexte où le calcul de la longitude était un important problème ouvert [7]). Le Portugal était alors une grande puissance maritime et la maîtrise des mers était un enjeu majeur. Le fait que par la projection de Mercator, les loxodromies deviennent des droites n'est certainement pas un hasard.

Bibliographie.

[1] Pierre Célérier, Technique de la navigation, PUF, 1951

[2] Cours de navigation astronomique, `navastro.free ;fr`.

[3] Institut National de Géographie, Les projections : systèmes de représentation plane de l'ellipsoïde ou de la sphère, présentation par Bernard Jouret, 1995

[4] Au temps de Vasco de Gama, travail réalisé par Hafsa Tabich, Imane Chellai et Nadia Mohammad, élèves de l'Athénée Gatti de Gamond et de Chantal Randour.(`ch.randour@brutele.be`)

[5] Armand de Callataÿ, communication personnelle.

[6] `scientia.artenumerica.org/noniana/biografia.html`

[7] Hossam Elkhadem et Patricia Radelet, Simon Stevin et la navigation, dans Simon Stevin 1545-1620 l'émergence de la nouvelle science, KBR-Brepols, 2004.

[8] Joao FilipeQueiro, Pedro Nunes e as linhas de rumo, Gazeta de Matematica, 143, p.42-47, Julio 2002. (Cet article est disponible sur internet. Il est en Portugais, mais contient des dessins originaux (de loxodromies) de Nunes.)

Pedro NUNES (1502–1578) fut cosmographe royal (du Roi Jean III du Portugal), médecin, et professeur de mathématiques à l'Université de Coimbra.
Outre son apport à la navigation, il fut aussi un algébriste original : dans son *Libro de Algebra* (en Portugais à Lisbonne en 1535 et en Espagnol à Anvers en 1564), il eut l'idée d'une méthode de résolution des équations algébriques qui conduisit à une découverte importante. Cette idée généralisait l'astuce suivante de CARDAN (1502–1576) : soit l'équation $x^3 = 7x + 6$ et ajoutons 1 aux deux membres, ceux-ci sont alors divisibles par le polynôme $x + 1$. En divisant les deux membres par $x + 1$, on trouve l'équation du second degré $x^2 - x + 1 = 7$ que l'on savait résoudre depuis longtemps.
L'idée de Nunes exigeait de posséder une méthode pour calculer les diviseurs communs à deux polynômes. En 1565, on ne connaissait pas une telle méthode et ce fut Simon STEVIN (1548–1620) qui, en réponse à l'interrogation explicite de NUNES publia en 1585 une méthode de calcul — celle enseignée encore aujourd'hui — du plus grand commun diviseur de deux polynômes. L'idée de NUNES n'eut pas de suite (pour la résolution des équations), mais il fallut attendre le XIXe siècle pour prouver qu'il était impossible qu'elle en ait. Pour une biographie et une bibliographie, voir la référence [6] ci-dessus.

Math-Jeunes n°115 S, 11–17, 2007

Canevas et projections cartographiques et géométriques

Renée Gossez

1. Généralités

La terre a approximativement la forme d'une sphère aplatie aux pôles et renflée à l'équateur. Une carte est une représentation plane d'une portion de sphère terrestre. La carte idéale serait celle de ces représentations qui respecterait à la fois les angles, les distances et les superficies pour satisfaire notamment les besoins respectifs des navigateurs, de chacun de ceux qui se déplacent à pied ou en voiture d'un point à l'autre de la terre et des personnes soucieuses de respecter l'importance relative des continents.

Mais une telle carte n'existe pas car on ne peut pas « mettre la surface de la terre à plat » : si l'on aplatit une portion de la surface d'une sphère, celle-ci subit des déformations ou altérations. Pour s'en convaincre, il suffit d'aplatir l'écorce d'une orange.

Il existe des surfaces dont on dit qu'elles sont *développables*, et que l'on peut mettre à plat sans les déformer. C'est le cas du cylindre, du cône et bien évidemment du plan.

Alors, pour fabriquer une carte, ne suffit-il pas de projeter géométriquement la sphère terrestre sur un cylindre ou un cône que l'on met ensuite à plat ou de la projeter directement sur un plan ? Eh bien non, car ces projections géométriques — qu'elles soient effectuées à partir d'un centre donné ou parallèlement, ou perpendiculairement à une direction donnée — entraînent aussi des déformations...

Finalement, comment procède-t-on pour construire une carte ?

2. Projections et canevas cartographiques

Pour fabriquer une carte, on établit une *correspondance algébrique* bi-univoque (représentée sur les figures 1 et 2 par la ligne courbe) entre la coordonnée terrestre (longitude, latitude) notée (φ, λ) d'un point de la terre idéalisée par une sphère et la coordonnée cartésienne (x, y) (figure 1) ou polaire (ρ, θ) (figure 2) du point correspondant de la carte.

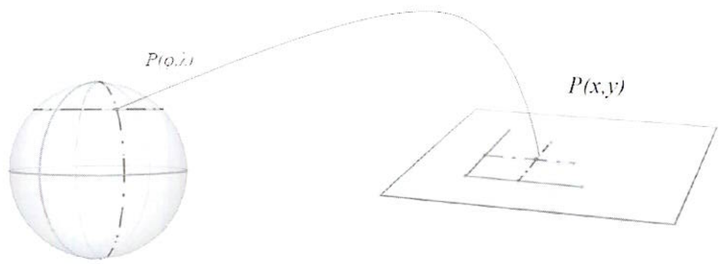


Fig. 1

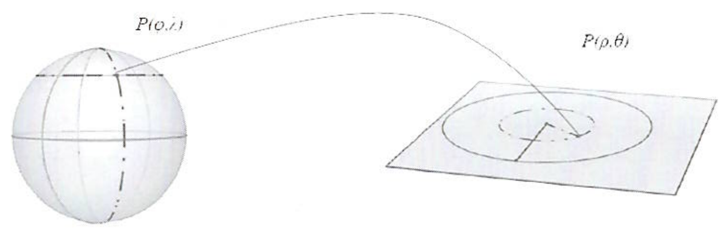


Fig. 2

Cette correspondance algébrique qui porte le nom de *projection cartographique* peut être choisie de telle manière que

- les angles soient conservés (on parle alors de *carte conforme*) OU
- les rapports de longueurs soient conservés (*carte équidistante*) OU
- les rapports de superficies soient conservés (*carte équivalente*).

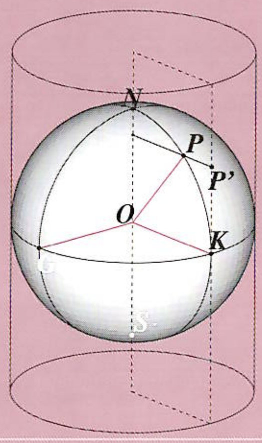
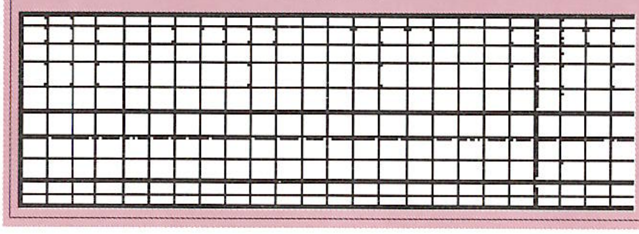
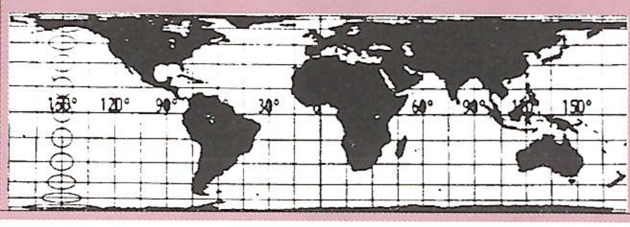
Définition : On appelle *canevas cartographique*, la représentation d'un réseau de méridiens et de parallèles obtenu par projection cartographique.

3. Projections cartographiques, projections géométriques.

Les projections cartographiques ne sont généralement pas des projections du globe terrestre sur un cylindre, un cône ou un plan au sens *géométrique* du terme, ainsi que nous l'avions imaginé au paragraphe 1. Mais nous verrons qu'il y a des exceptions.
Par contre, tous les canevas cartographiques courants peuvent être classifiés d'après leur ressemblance avec les canevas que l'on obtient par projection géométrique de la sphère sur un cylindre, un cône ou un plan que l'on met ensuite à plat.
Dans les tableaux suivants nous associons chacune des projections cartographiques citées, à la projection géométrique dont le canevas ressemble à celui de la projection cartographique. La lettre r désignera toujours le rayon du globe terrestre et les lettres φ et λ les longitude et latitude exprimées en radians.
Nous commençons par les exceptions annoncées : deux projections cartographiques qui non seulement ressemblent à des projections géométriques mais *sont* des projections géométriques.

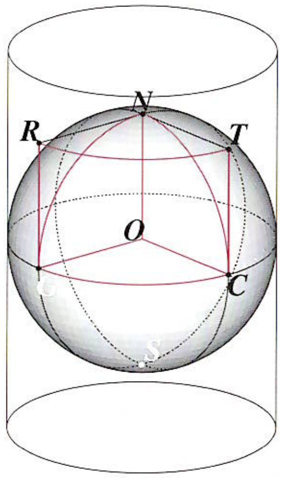
3.1 Projection cylindrique de Lambert, ou projection isocylindrique[1]

Cette projection à la fois cartographique et géométrique produit des cartes équivalentes (qui respectent les rapports d'aires).

Définition géométrique	**Correspondance algébrique**
Projection de la sphère sur un cylindre tangent le long de l'équateur, perpendiculairement à l'axe du cylindre. 	La formule $\begin{cases} x = r \cdot \varphi \\ y = r \cdot \sin \lambda \end{cases}$ se comprend aisément lorsqu'on regarde la figure ci-contre. r est le rayon de la sphère, $\overset{\frown}{NGS}$ est l'arc de grand cercle correspondant au méridien de Greenwich, φ est l'angle orienté $\widehat{GOK}$ et λ l'angle orienté $\widehat{KOP}$. La carte étant équivalente, les représentations des pays ont des aires proportionnelles à leurs superficies.
Le point P de la sphère est projeté sur le point P' du cylindre. Canevas 	Canevas 

([1]) Voir également l'article *Les déformations sur les cartes de Lambert et de Peters* dans le présent numéro.

Commentaires



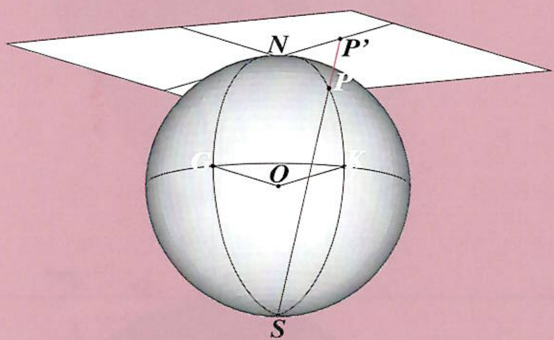
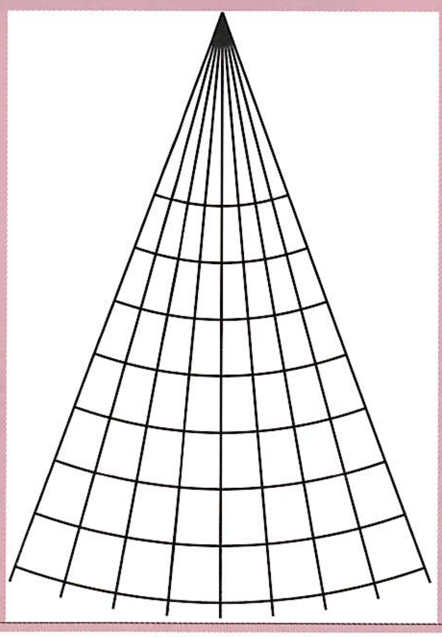
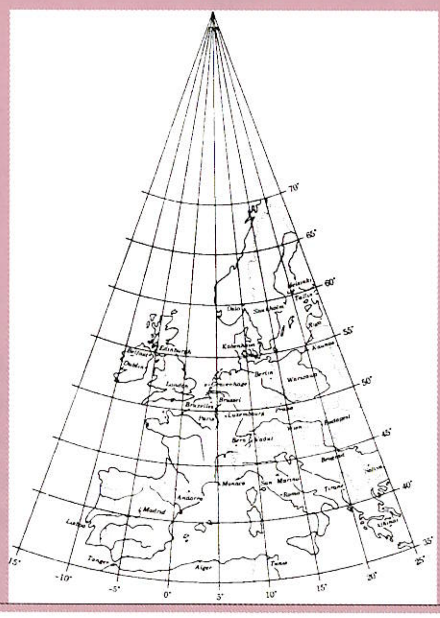
L'image par la projection du triangle sphérique de sommets N, G et C de la figure ci-dessous est le rectangle $RGCT$ lorsque le cylindre est déroulé. Vérifions que ce triangle sphérique et ce rectangle ont même aire.

Or ce triangle sphérique est un huitième de sphère de rayon r et son aire vaut $\frac{\pi r^2}{2}$.

La hauteur du rectangle $RGCT$ est r et sa base $[GC]$ mesure $r\frac{\pi}{2}$. L'aire du rectangle vaut donc aussi $\frac{\pi r^2}{2}$.

3.2 Projection stéréographique ou azimutale perspective

Cette projection à la fois cartographique et géométrique produit des cartes conformes (qui respectent les angles).

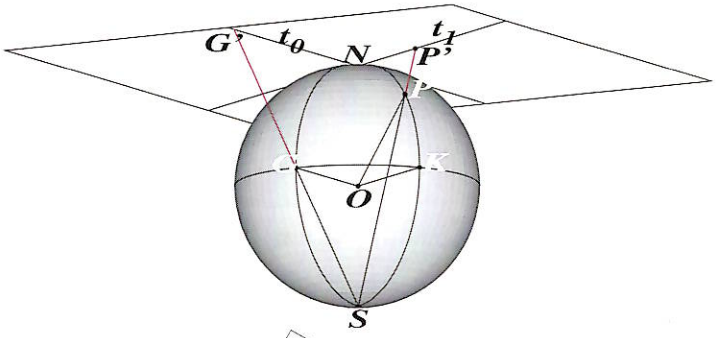
Définition géométrique	**Correspondance algébrique**
Projection centrale de la sphère depuis le pôle sud, sur le plan tangent au pôle nord.  Le point P de la sphère est projeté sur le point P' du plan. Canevas 	$\begin{cases} \theta = \varphi \\ \rho = 2r \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) \end{cases}$ Cette formule est sans doute moins aisée à comprendre que celle de la projection cylindrique de Lambert. Quelques explications en images sont données dans les commentaires ci-après. Canevas 

Commentaires

Les images suivantes aideront à comprendre la formule

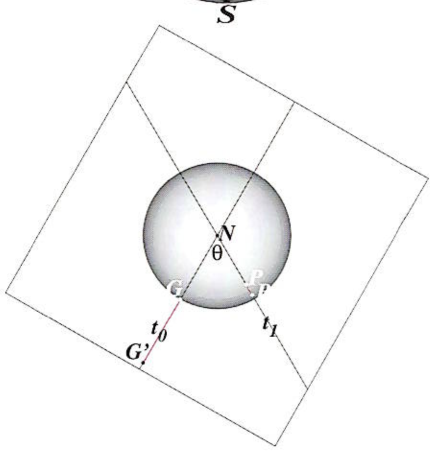
$$\begin{cases} \theta = \varphi \\ \rho = 2r.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) \end{cases}$$

Rappelons que $\theta = \widehat{G'NP'}$ et $\rho = |NP'|$ sont les coordonnées polaires du point P' dans le plan tangent à la sphère en N et que $\varphi = \widehat{GOK}$ et $\lambda = \widehat{KOP}$ sont respectivement la longitude et la latitude de P.



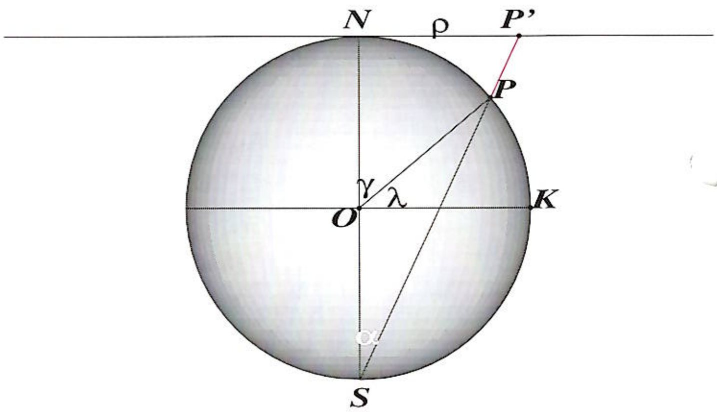
Plaçons le plan (t_0, t_1) de face. On voit aisément que

$$\theta = \widehat{t_0 t_1} = \widehat{G'NP'} = \widehat{GOK} = \varphi$$



Plaçons maintenant le plan NSP de face :

$$\begin{aligned}
\gamma + \lambda &= \frac{\pi}{2} \\
\alpha &= \frac{\gamma}{2} \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{|NP'|}{2r} \\
\rho &= |NP'| = 2r \cdot \operatorname{tg}\alpha \\
&= 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \\
&= 2r \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)
\end{aligned}$$



Les deux projections cartographiques suivantes sont définies uniquement algébriquement par des équations liant la longitude et la latitude d'un point de la terre à ses coordonnées cartésiennes ou polaires sur la carte. Ce ne sont pas des projections géométriques. À chacune d'entre elles, nous associons cependant une projection géométrique ayant un canevas semblable et nous donnons les équations de cette projection géométrique.

3.3 Projection cylindrique perspective centrale de Mercator

Cette projection cartographique produit des cartes conformes (qui respectent les angles)[2].

Correspondance algébrique

$$\begin{cases} x = r \cdot \varphi \\ y = r \cdot \ell n \left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)\right) \end{cases} \qquad (1)$$

Pour déterminer les équations paramétriques d'une loxodromie[3] joignant le point (φ_0, λ_0) au point (φ_1, λ_1), nous calculons à l'aide de (1) les coordonnées des points correspondants $P_0 = (x_0, y_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1)$ de la carte de Mercator.

Un point $P(t) = (x(t), y(t))$ qui parcourt le segment $[P_0, P_1]$ est donné par

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1 \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

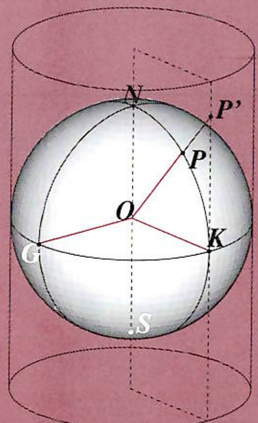
Les formules réciproques de (1) fournissent les équations paramétriques demandées :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{1}{r} \cdot x(t) \\ \lambda(t) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{y(t)/r} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Canevas

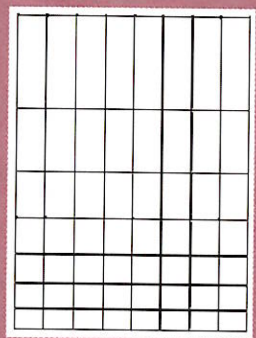
Projection géométrique associée

Projection centrale de la sphère depuis son centre, sur un cylindre tangent le long de l'équateur.



Le point P de la sphère est projeté sur le point P' du cylindre.

Canevas

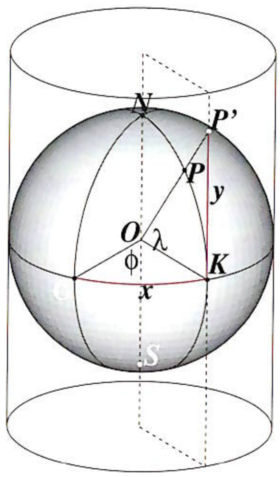


Commentaires

Les équations de la projection géométrique sont

$$\begin{cases} x = r \cdot \varphi \\ y = r \cdot \mathrm{tg}\,\lambda \end{cases}$$

Elles sont aisées à obtenir en utilisant la figure ci-contre et en sachant que r est le rayon de la sphère, $\overset{\frown}{NGS}$ l'arc de grand cercle correspondant au méridien de Greenwich, φ l'angle orienté $\widehat{GOK}$, λ l'angle orienté $\widehat{KOP}$ et que x est la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{GK}$ et y celle du segment $[KP']$.



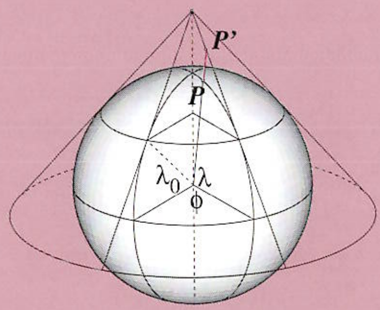
[2] Voir l'article *Mercator, les marins et les mathématiciens* de H. Masy

[3] Voir l'article *La loxodromie* de P. van Praag.

Nous passerons assez vite sur une dernière projection cartographique et son homologue géométrique (du point de vue des canevas) : il s'agit de la projection conique de Lambert.

3.4 Projection conique de Lambert

Cette projection cartographique produit des cartes conformes (qui respectent les angles).

Correspondance algébrique	**Projection géométrique associée**
$\begin{cases} \theta = k \cdot \varphi \\ \rho = f(\lambda) \end{cases}$ où k est une constante et $f(\lambda)$ une fonction telle que la projection soit conforme. Canevas 	Projection centrale de la sphère depuis son centre, sur un cône tangent le long d'un parallèle. Les cartes produites par cette projection *ne sont pas* conformes.  Le point P de la sphère est projeté sur le point P' du cône.

Commentaires

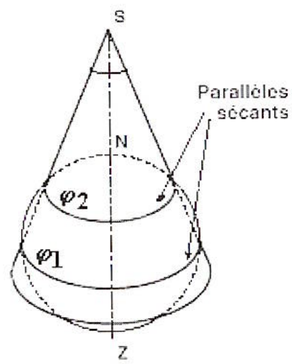
Les équations de cette projection géométrique sont

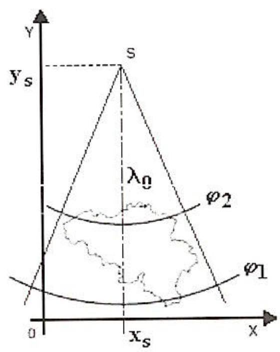
$$\begin{cases} \theta = \varphi \sin \lambda_0 \\ \rho = r \cdot \operatorname{cotg} \lambda_0 - r \cdot \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) \end{cases}$$

À établir à titre d'exercice !

Remarques :

1) La carte de Belgique la plus courante est obtenue par une *projection conique sécante suivant deux parallèles de contact* : la sphère terrestre est projetée sur le cône sécant déterminé par deux parallèles. Cette représentation cartographique est appelée le « Lambert belge ».

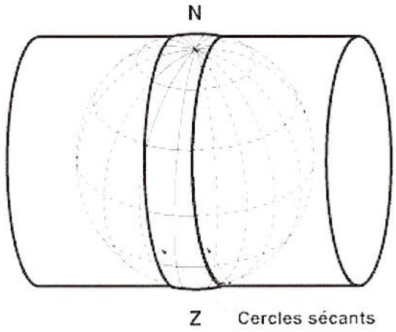




Les parallèles déterminant le cône ont pour latitudes (notées φ_1 et φ_2 sur les figures ci-dessus) :

$$\varphi_1 = 49°50'00" \qquad \varphi_2 = 51°10'00"$$

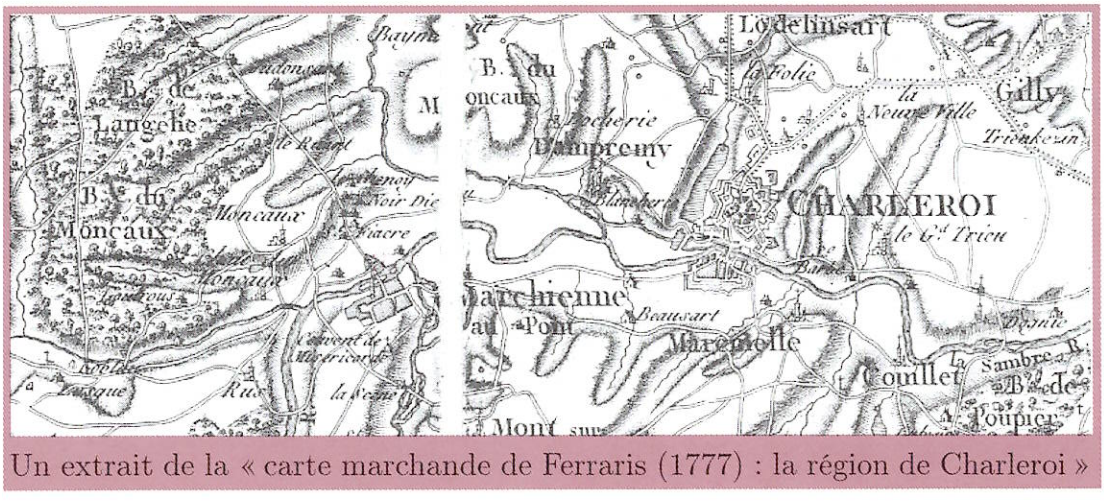
2) Une autre représentation cartographique utilisée également en Belgique est la représentation U T M (*Universal Transverse Mercator*).
La représentation cartographique U T M a comme plan de projection un cylindre sécant à la sphère terrestre. La direction de projection est transversale.(L'axe du cylindre est parallèle au plan de l'équateur au lieu d'être parallèle à l'axe de la Terre). Cette représentation est conforme.



La sphère terrestre a été partagée en 60 fuseaux de 6°. La projection est limitée à 3° de part et d'autre du méridien d'origine, pour minimiser les déformations en limite du fuseau.
La Belgique est presque entièrement située dans le 31e fuseau. Le méridien central est 3° Est. (Source : *Institut Géographique National*)

4. Bibliographie

- L'influence des cartographes flamands sur l'aspect géométrique de la confection des cartes à l'époque de la Renaissance, Bulletin trimestriel de la Société belge de Photogrammétrie et de télédétection n° 155-156 Septembre-décembre 1984.
- Space Connection n° 15, 400 ans après Mercator, Mars 1994.
- Marcel Berger, Géométrie, V.5, la sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères, Cedic/Fernand Nathan.
- T. K. Derry and Trevor Williams, A short history of technology from the earliest times to A. D. 1900, Dover 0-486-27472-1.
- Morris Kline, Mathematics in western culture, Penguin books.
- J. M. Sachs, A curious mixture of maps, dates and names, Mathematics Magazine, Vol. 60, n°3, June 1997.
- William Wallace,The navigator in the Classroom, The mathematics teacher, Vol. 91, n°5, May 1998.



Un extrait de la « carte marchande de Ferraris (1777) : la région de Charleroi »

Math-Jeunes n°115 S, 18–20, 2007

Les déformations sur les cartes de Lambert et de Peters

Ginette Cuisinier, Ingrid Dejaiffe, Dany Legrand

Une sphère n'est pas développable. Donc aucune carte ne conserve à la fois, les formes, les longueurs et les rapports d'aires. Nous allons nous intéresser aux déformations de surfaces lors du passage de la sphère terrestre à deux cartes rectangulaires, la carte de Lambert et la carte de Peters.

Description des cartes de Lambert et de Peters

Commençons par la carte de Lambert (Fig. 1). Le rapport de sa largeur et de sa hauteur est égal à π.

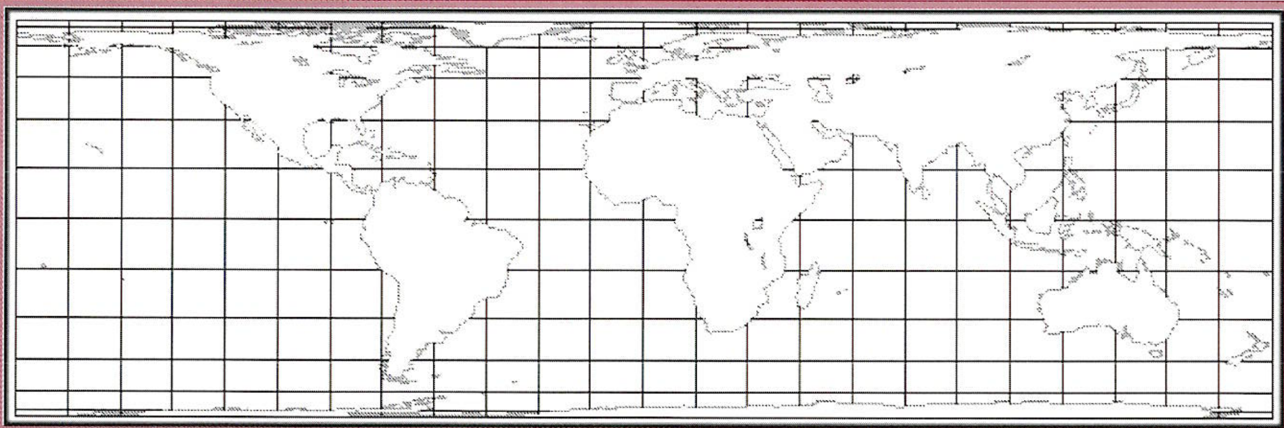


Fig. 1

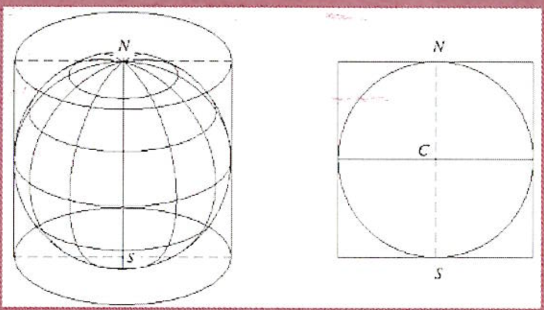


Fig. 2

Autrement dit, pour une hauteur $2R$, la largeur est $2\pi R$. Cette carte est obtenue par projection orthogonale à l'axe « nord-sud », NS, sur un cylindre de même axe, tangent à la sphère terrestre à l'équateur (Fig. 2) et développé ensuite.

La carte de Peters est obtenue par la même projection (Fig. 3) mais sur un autre cylindre.

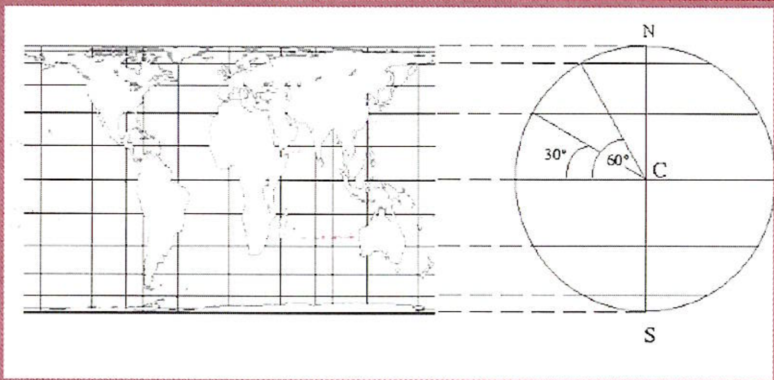


Fig. 3

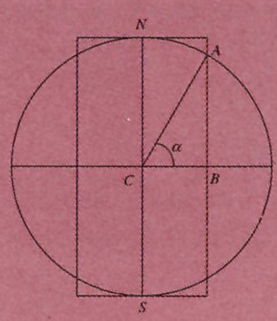


Fig. 4

Pour une même hauteur, la carte de Peters est deux fois plus étroite que celle de Lambert, le cylindre a donc un rayon $R/2$ (Fig. 4). Celui-ci coupe la sphère en un cercle de rayon $r = R/2$, à une latitude α telle que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ donc à la latitude 60°.

Pour en savoir plus : ***Une approche mathématique de la cartographie*****, proposition 19 du GEM, 2001.**

Déformation des surfaces lors du passage de la sphère à la carte de Lambert

Pour bien se rendre compte des déformations de surfaces sur la carte de Lambert, représentons, sur une balle de ping-pong (Fig. 5), l'équateur, les parallèles de 30° et 60°, le méridien de Greenwich et les méridiens de 30° en 30°. Repérons-y les morceaux de surface sphérique $ABCD$ et EFN et ensuite leur représentation sur la carte de Lambert (Fig. 6). On remarque facilement la déformation ; plus on s'écarte de l'équateur, plus elle est importante. Le triangle sphérique EFN sur le globe devient même un rectangle sur la carte. On remarquerait le même phénomène sur la carte de Peters.

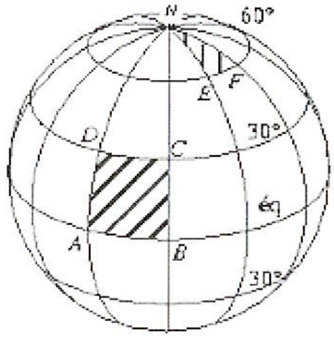


Fig. 5

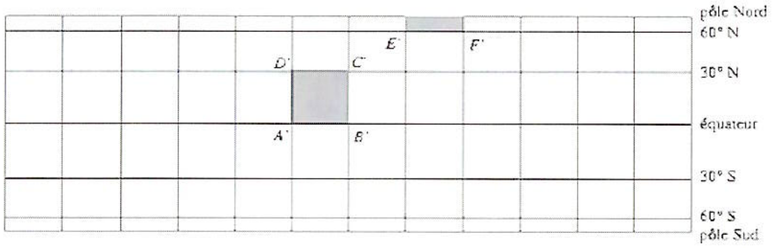


Fig. 6

Étudions ces déformations sur des figures suffisamment petites. Pour cela, identifions une surface sur le globe à une surface plane tangente à celui-ci et représentons, sur chacune des cartes, l'image de quelques disques de même rayon, tangents à la sphère et centrés au point de contact.

Appelons facteur de déformation le nombre par lequel il faut multiplier la longueur d'un rayon d'un disque pour obtenir la longueur de son image sur la carte. Pour représenter, sur la carte de Lambert, l'image de disques tangents à la sphère, nous allons analyser les facteurs de déformation des longueurs sur un parallèle et sur un méridien.

Sur un méridien plaçons les points A_0, A_1, A_2 et A_3 équidistants (Fig. 7). Sur un autre méridien, aux mêmes latitudes que A_0, A_1, A_2, plaçons les points B_0, B_1, B_2 (Fig. 8).

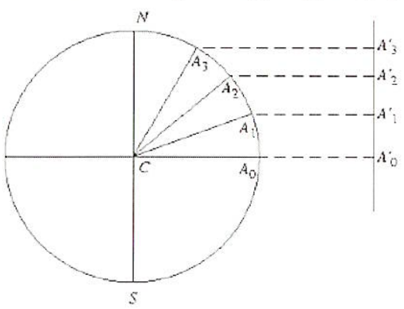


Fig. 7

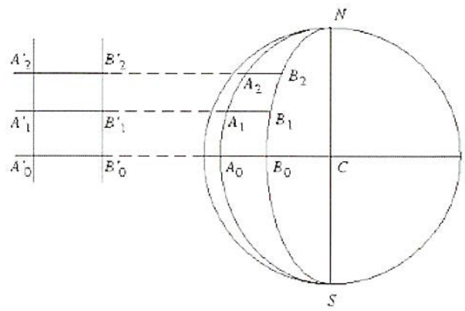


Fig. 8

Les arcs de méridien sur le globe sont de même longueur, alors que leurs images sur la carte sont de longueurs décroissantes. Donc le rapport $\left|\frac{A'_iA'_{i+1}}{A_iA_{i+1}}\right|$ diminue quand on s'éloigne de l'équateur.

Les arcs de parallèles sur le globe sont de longueurs décroissantes, alors que leurs images sur la carte sont de même longueur. Donc le rapport $\left|\frac{A'_iB'_i}{A_iB_i}\right|$ augmente quand on s'éloigne de l'équateur.

Par conséquent, quand, sur la carte, on s'éloigne de l'équateur, le rayon des disques parallèle au plan de l'équateur a une longueur croissante alors qu'elle est décroissante sur les méridiens. De ce fait, les formes représentant les disques sont presque conservées autour de l'équateur et elles s'aplatissent quand on s'écarte de celui-ci. Cela est visualisé à la figure 9.

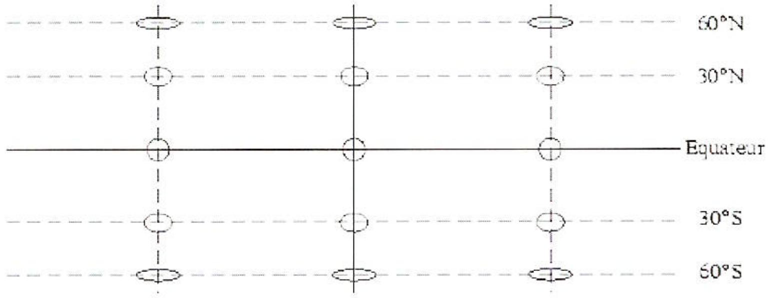


Fig. 9

Déformation des surfaces lors du passage de la sphère à la carte de Peters

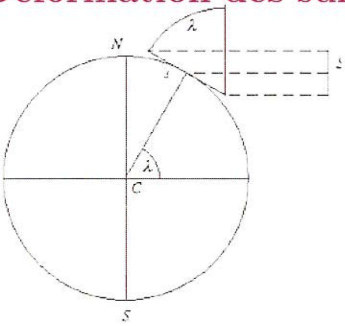


Fig. 10

Comme la carte de Peters est une compression de moitié de la carte de Lambert, ce n'est plus à l'équateur que les disques restent des disques. On peut penser que, comme sur la carte de Lambert, les formes sont conservées autour des points du globe où le cylindre de projection le rencontre c'est-à-dire aux latitudes 60°N et 60°S. Voyons ce qu'il en est. En un point à cette latitude, les longueurs sur le parallèle passant par ce point sont conservées. Dans la direction du méridien (Fig. 10), le rayon du disque de longueur s a pour image sur la carte un segment de longueur :

$$S = s\cos\lambda = s\cos 60^\circ$$

Par conséquent, l'image d'un disque centré en un point des parallèles 60°N et 60°S n'est pas un disque. Nous pouvons imaginer, sur la carte de Peters (Fig. 11), les images de petits disques tangents à la sphère.

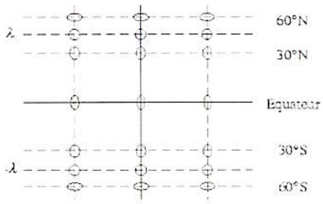


Fig. 11

Déterminons les points de la sphère où les formes sont conservées. Dans le plan du méridien d'un point de latitude λ, le facteur de déformation est :

$$d_m = \frac{S}{s} = \cos\lambda$$

Calculons le facteur de déformation dans le plan du parallèle de latitude λ. La longueur de ce parallèle est $2\pi R\cos\lambda$ et sa représentation sur la carte est nécessairement un segment de longueur $2\pi r = \pi R$.

Dès lors, ce facteur de déformation est :

$$d_p = \frac{1}{2\cos\lambda}$$

Pour que l'image d'un disque soit un disque sur la carte de Peters, il faut que ces deux facteurs de déformation soient égaux : $\cos\lambda = \frac{1}{2\cos\lambda}$ c'est-à-dire :

$$\cos^2\lambda = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \lambda = \pm 45^\circ$$

Par conséquent, un disque reste un disque sur la carte de Peters seulement si le disque est centré en un point de latitude 45°N ou 45°S.

Nous terminons en remarquant que, sur chacune des deux cartes, toutes les images des petits disques tangents ont même aire puisque le produit des facteurs de déformation est constant.

Math-Jeunes n°115 S, 21–24, 2007

Vue aérienne du centre de Bruxelles

Aujourd'hui, le numérique

Guy Noël et Simone Trompler

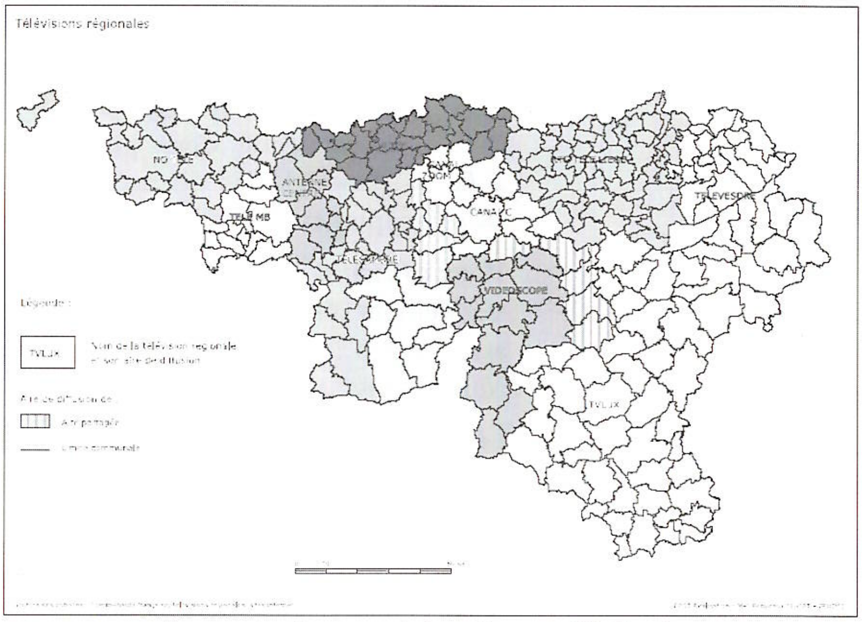
D'après les sites Web www.ngi.be, fr.wikipedia.org/wiki/GPS, cartographie.wallonie.be, www.geo.ulg.ac.be *et* ec.europa.eu/dgs/energy_transport/galileo

Des cartes à petite ou grande échelle

Les cartes géographiques ne se limitent pas à reproduire la configuration d'un territoire donné. Une carte est d'abord le support d'informations géographiques ; elle doit permettre de répondre à des questions comme : quelle langue parle-t-on dans telle commune du pays, quelle est la longueur et la pente de tel tronçon de route, la sorte de céréales cultivées sur tel champ, la position et l'adresse de telle école, etc. La quantité d'informations reportée sur la carte dépend de l'échelle de celle-ci.

Les cartes à petite échelle fournissent peu de détails concernant un grand territoire.

Exemple : la carte des zones couvertes par les télévisions régionales en Wallonie.

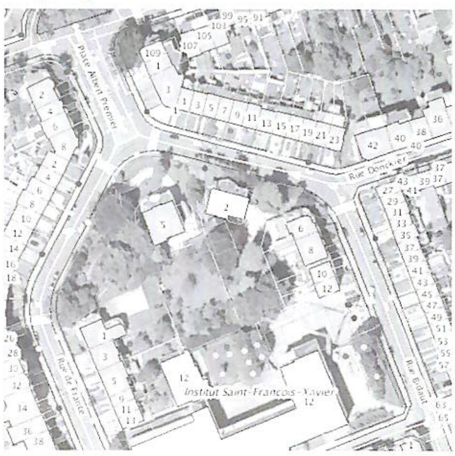


La carte des tv régionales en Wallonie.

La carte ci-dessus est une carte *thématique*, consacrée à un inventaire. D'autres cartes thématiques étudient les relations entre des phénomènes représentés sur la carte. Vous pouvez télécharger de nombreuses cartes de ce type, concernant la Wallonie, sur le site mrw.wallonie.be/dgatlp/dgatlp/Pages/DGATLP/PagesDG/DescrPublications/HorsCollec/CPDT_Atlas.asp

Les cartes à grande échelle fournissent beaucoup de détails concernant un petit territoire.

Il s'agit souvent de cartes *topographiques*, qui présentent des inventaires les plus exhaustifs possibles, en vue de servir de référence et de représenter les objets observés sur le terrain. Celui-ci peut être représenté sous forme de données « images » ou de données « vectorielles ». Les deux types de données peuvent être superposés.



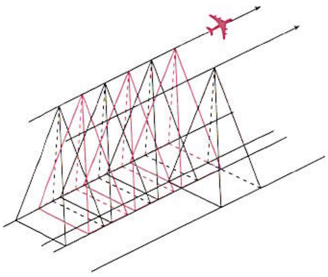
La carte de gauche présente des données images (une photo) dans la partie inférieure, des données vectorielles (des points, lignes, polygones) dans la partie supérieure. Sur la carte de droite les deux types de données sont superposés.

Pour réaliser une carte de ce type, la première chose à faire est de photographier le terrain.

Photogrammétrie : Application de la stéréophotographie aux levés topographiques, aux relevés des formes et des dimensions des objets, etc.
Le petit Larousse illustré, 2005.

La photogrammétrie permet de réaliser des cartes à partir de photos aériennes. L'avantage des levés photogrammétriques est qu'ils sont rapides, que l'enregistrement se fait directement et qu'ils permettent d'effectuer des mesures sans problèmes d'accessibilité au terrain.

La prise de vue



La première opération à réaliser est la prise de vue. Pour photographier une zone étendue, l'avion fait plusieurs passages, toujours dans le même sens, en se décalant latéralement à chaque passage. De plus, au cours d'un passage donné, deux photos consécutives se recouvrent toujours à 60 % dans le sens du vol. Grâce à ce recouvrement, des mesures stéréoscopiques peuvent être obtenues pour chaque endroit au sol.

Pour l'*Institut Géographique National* (IGN), les prises de vues sont généralement réalisées à une altitude d'environ 3200 m, mais elles peuvent aussi, selon l'application, être opérées à d'autres altitudes, de 600 m à plus de 8000 m.

Les photos de l'IGN sont en noir et blanc parce que les photos en couleurs ne sont pas plus précises mais sont plus sensibles à la brume.

L'aérotriangulation

Pour pouvoir exécuter des levés à partir d'un modèle stéréoscopique, il est indispensable de connaître la position et l'orientation exactes de la caméra au moment de la prise de vue. À partir de ces données, des mesures de points communs à plusieurs photos et des positions de balises placées au sol, une technique dite d'*aérotriangulation* permet de calculer les coordonnées spatiales de tous les points. Toutes les photos aériennes correspondant à un projet donné sont ainsi traitées en un seul bloc. De plus, des levés GPS sont intégrés au calcul.

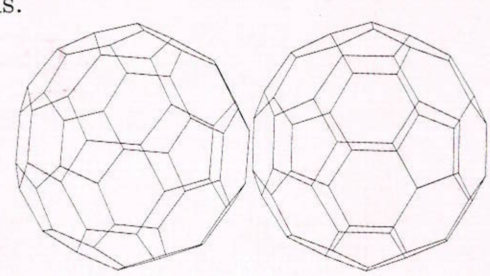
Le complètement

Certaines informations ne sont pas observables du ciel (bornes kilométriques...) ou nécessitent des compléments (fonction de certains bâtiments...). Ces informations sont recueillies directement sur le terrain et reportées sur les photos.

La restitution photogrammétrique

Pour obtenir une image « en relief » d'une zone de terrain donnée, deux images de cette zone, photographiées depuis deux points différents, sont combinées. À l'aide d'un appareillage adéquat, chaque œil observe une des deux images.

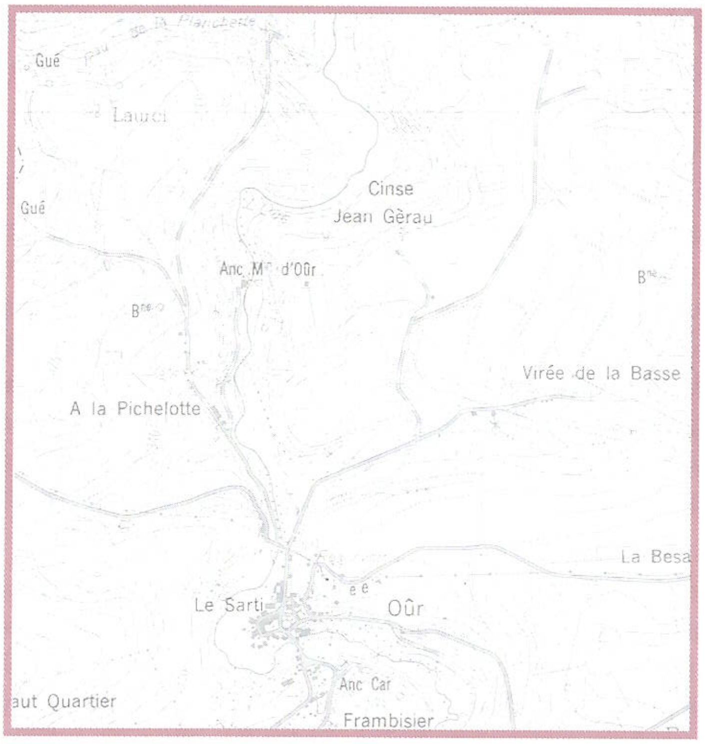
Entraînez-vous à voir en relief. En « louchant », superposez les deux images ci-dessous.



Des logiciels graphiques permettent aussi de calculer les coordonnées spatiales d'un point à partir des coordonnées planes du point apparaissant sur la photo de gauche et de celles du même point sur la photo de droite.

Les courbes de niveau

Les courbes de niveau sont des lignes qui joignent des successions de points de même altitude (analogues à des isothermes ou des isobares). Elles servent à représenter la topographie, ou le relief sur les cartes. L'altitude est calculée à partir du niveau moyen de la mer.



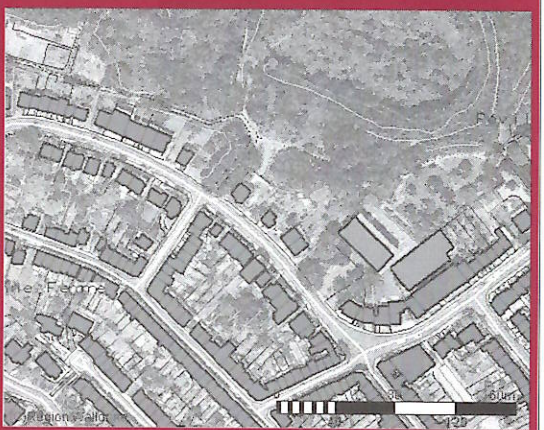
Sur la carte de Belgique à l'échelle $\frac{1}{25000}$ diffusée par l'IGN, la différence d'altitude entre deux courbes de niveau voisines est de 5 m. Plus les courbes de niveau sont rapprochées, plus la pente du terrain est forte.

Actuellement on calcule les courbes de niveau en utilisant un modèle numérique du terrain. Ce modèle est un fichier qui, utilisé dans un logiciel spécifique, fournit la description d'un relief. Il peut être établi à partir de mesures photogrammétriques, de levés sur le terrain ou encore à l'aide de mesures laser prises d'un avion ou par un radar.

Le Projet Informatique de Cartographie Continue (PICC)

Pour répondre aux besoins, la Région Wallonne gère depuis 1991 un *Projet Informatique de Cartographie Continue* chargé d'élaborer un inventaire cartographique complet, à l'échelle $\frac{1}{1000}$, de tout ce qui se trouve sur le sol wallon. Prenez connaissance de ce projet en consultant le site internet `www.cartographie.wallonie.be`. Ce site, fort bien fait, répondra à toutes vos questions concernant la cartographie d'aujourd'hui.

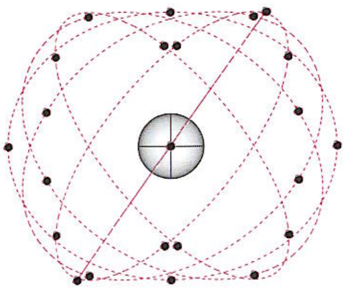
Mieux encore, en choisissant « `Espace Citoyens/Cartes dynamiques` », vous pourrez accéder gratuitement à des vues aériennes de l'intégralité du territoire wallon. Téléchargez la carte relative à votre rue et explorez vos environs immédiats comme si vous étiez en montgolfière ! De plus, la plupart de ces cartes sont interactives. Cliquez sur un bâtiment. Une fenêtre s'ouvre (sur votre écran) qui indique l'usage du bâtiment et son adresse. Un seul regret : l'interactivité disparaît à l'impression !



L'avenue de Péville à Grivegnée

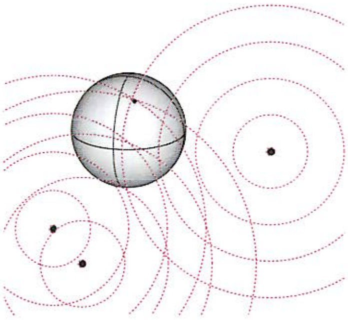
Quant au site `patrimoine.met.wallonie.be/cartotheque/`, il vous donne la possibilité de télécharger une foule de cartes anciennes dont la carte Marchande de Ferraris (environ 1777). En ce qui concerne la région bruxelloise, on consultera les sites `www.eurobru.com/irisin50.htm` et `www.bgi-sa.com/References_Carto.htm`

Global Positioning System (GPS ou système de positionnement par satellite)

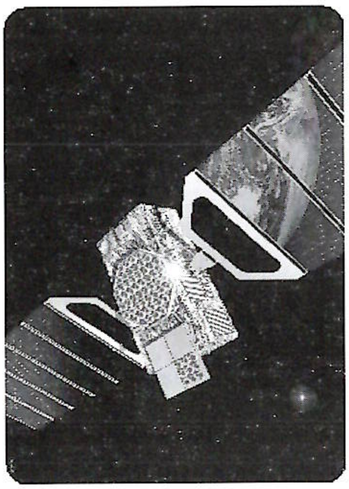


Le système GPS a été mis en place par le Département de la Défense des Etats-Unis. Il nous permet de connaître notre position n'importe où au voisinage de la surface de la Terre, en mer, dans l'air ou dans l'espace.

Le système GPS comprend au moins 24 satellites artificiels répartis sur six orbites inclinées à 55° sur le plan équatorial et situées à 20240 km d'altitude. Chacun de ces satellites émet en permanence un signal daté avec précision grâce à son horloge atomique, ainsi que des éphémérides qui permettent de calculer ses coordonnées précises.



Un récepteur GPS capte toujours les signaux d'au moins quatre satellites. Les ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, en comparant l'heure d'émission du signal d'un satellite donné — elle est incluse dans le signal — à l'heure de réception, le récepteur détermine le temps mis par cette onde pour lui parvenir et en déduit sa distance au satellite. Comme trois sphères n'ont généralement pas plus de deux points communs, à partir de trois distances, le récepteur calcule sa propre position (il élimine facilement le second point d'intersection). La précision est de 15 à 100 m pour le système standard. Une erreur d'un millionième de seconde provoque une erreur de 300 mètres !



Un satellite Galileo

En fait, comme le récepteur ne dispose pas d'une horloge atomique, le système d'équations à résoudre comporte quatre inconnues (trois coordonnées plus le décalage de l'horloge du récepteur avec celle du satellite) et le récepteur doit donc rechercher les signaux de quatre satellites. Mais lorsqu'on navigue ou qu'on roule sur une route, l'altitude n'est pas importante et on peut se contenter de la latitude et la longitude. Trois satellites suffisent alors.

Demain GALILEO

Entièrement sous contrôle civil, le projet Galileo est destiné à supprimer la dépendance de l'Europe vis-à-vis du système GPS, propriété unique des Etats-Unis. L'Union Européenne est responsable de ce projet, lancé en 2003. Il devrait être opérationnel en 2010 et fournir une précision de l'ordre de 1 m.

Pour les particuliers et le service public, les urgences, les secours, les transports de matières dangereuses, l'utilisation sera gratuite. L'usage commercial sera payant et servira à financer la recherche et les coûts du système.
La partie spatiale est constituée de trente satellites placés sur trois orbites circulaires à une altitude d'environ 24 000 km. Chaque satellite comprend plusieurs horloges atomiques, des panneaux solaires, un émetteur et un récepteur radio.
Au sol, des centres chargés de contrôler en permanence les satellites, de créer des messages diffusés par les satellites, de réceptionner les messages qu'ils émettent sont répartis sur toute la Terre.
Après des années pendant lesquelles ils ont essayé d'empêcher le projet d'aboutir, les Etats-Unis ont fini par l'accepter et vont même y participer. En juin 2004, un accord a été signé qui permet l'interopérabilité technique de Galileo avec le GPS. Beaucoup d'autres pays sont intéressés dont la Chine, l'Inde, Israël et l'Ukraine.

Augustin Louis Cauchy

Simone Trompler

Augustin Louis CAUCHY
1789–1857

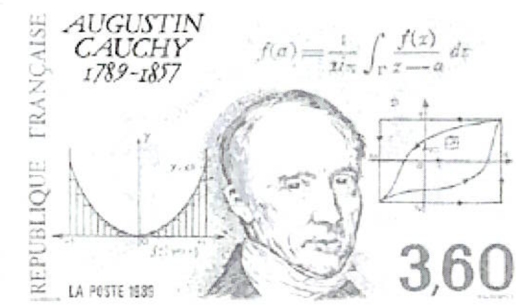
Il y a cent cinquante ans mourait Cauchy. Il fut un des plus importants mathématiciens français de son époque et l'impact de ses travaux a été considérable pendant tout le dix-neuvième siècle, et pas seulement en France.

Naître à Paris en 1789, en pleine révolution, suppose évidemment le déroulement de toute une vie dans la tourmente, l'insécurité, les changements de régime. Et lorsque, comme Cauchy, on est royaliste légitimiste (fidèle à la branche aînée des Bourbons), catholique fervent, et qu'on affiche ses opinions, qu'on s'y tient invariablement quel que soit le contexte politique, on va au devant de beaucoup d'ennuis. C'est ce qui lui est arrivé ! Augustin Cauchy commence par être éduqué par son père. Très jeune, il montre des capacités extraordinaires en mathématiques. Il devient ingénieur à 21 ans et participe à l'aménagement du port de Cherbourg. Il travaille intensément, tout en passant son temps libre à étudier les ouvrages des grands mathématiciens Laplace (mécanique céleste) et Lagrange (théorie des fonctions) et à faire des recherches personnelles.

Il présente un premier mémoire sur les polyèdres en 1811 et un deuxième en 1812. Il fait une forte impression dans le milieu scientifique et son avenir est prometteur. Mais l'excès de travail, les longues veilles, ruinent sa santé et il doit abandonner son poste. Il retourne chez ses parents à Paris et se consacre désormais aux mathématiques.

Malgré l'excellence de ses travaux, sa carrière connaîtra des hauts et des bas, En 1816 il devient professeur à l'école Polytechnique et est élu à l'Académie des Sciences de Paris : c'est exceptionnel à son âge. Mais, en 1830 le roi Charles X est remplacé par Louis-Philippe. Cauchy refuse de lui signer un acte d'allégeance et part en exil. Il visitera plusieurs pays et deviendra précepteur du petit-fils de Charles X. Il ne retrouvera sa situation qu'en 1848, après une nouvelle révolution.

Cauchy a contribué à de nombreuses branches des mathématiques : il est resté célèbre pour ses travaux sur les séries convergentes, les déterminants, les nombres complexes, le calcul différentiel et intégral. Très prolifique, il a laissé d'innombrables mémoires.



Math-Jeunes n°115, 26–28, 2007

Jeux

Nicole Lambelin et Yolande Noël-Roch

1. Qui sont-ils ?

A. Deux nombres ont même carré mais pas même cube. Le carré de leur produit est 100. Qui sont-ils ?

B. Je vaux cinq fois la somme de mes chiffres . . . et si on me retourne, je vaux six fois cette somme ! Qui suis-je ?

C. Je suis le plus petit naturel supérieur à 100 qui admet exactement cinq diviseurs. Qui suis-je ?

D. Ma moitié, mon tiers et mon quart sont tous multiples de 20. Bien que carré parfait, je me fais aussi petit que possible. Qui suis-je ?

2. Six nombres de la même famille.

Chaque grille 3×3 doit accueillir les chiffres de 1 à 9 de manière à ce que les six nombres formés (trois en lignes et trois en colonnes) soient — si possible ! —

tous impairs

tous pairs

tous carrés parfaits

tous premiers

3. Décoder des produits.

Les symboles ♥, ♦, ♣ et ♠ cachent quatre nombres différents, compris (non strictement) entre 1 et 10. Trouver ces valeurs dans chacun des taleaux suivants.

♠	♣	♥	♣	♦	*200*
♦	♥	♠	♥	♦	*2500*
♦	♦	♥	♥	♦	*12500*
♦	♠	♣	♠	♠	*10*
♣	♥	♦	♠	♥	*1000*
250	*1000*	*1000*	*200*	*1250*	

♣	♠	♦	♠	*768*
♠	♠	♥	♦	*1792*
♥	♣	♣	♦	*252*
♥	♥	♠	♣	*1176*
1176	*1344*	*672*	*384*	

4. Deux journalistes mal informés.

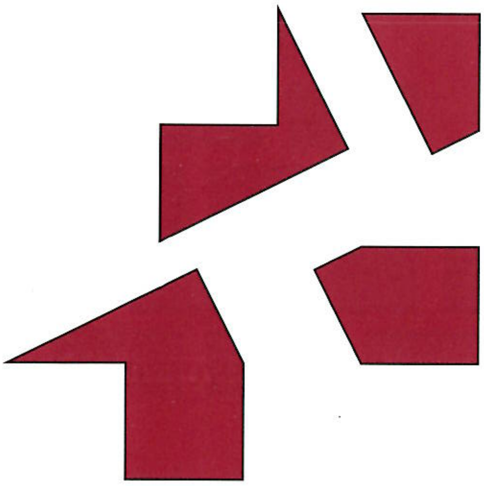
Le 30 février 2006, à l'arrivée de la course des superchampions à Knokke le Zoute, les coureurs Delroue, Duguidon et Dupneu ont remporté (dans le désordre !) le prix du sable, le prix du poisson et le prix du coquillage.

Le journaliste de NTV a déclaré « Delroue remporte le prix du sable et Duguidon celui du poisson. »

Un confrère est venu au micro pour rectifier l'information. Voici sa déclaration : « C'est Dupneu qui remporte le prix du sable et c'est Delroue qui remporte le prix du poisson. »

Sachant que chaque journaliste a donné une information correcte et une information fausse, vous pouvez répartir correctement les trois prix entre les trois coureurs.

5. Puzzle

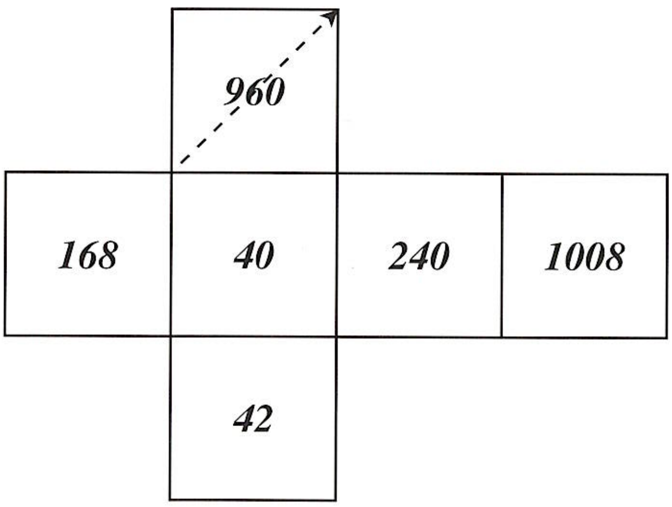


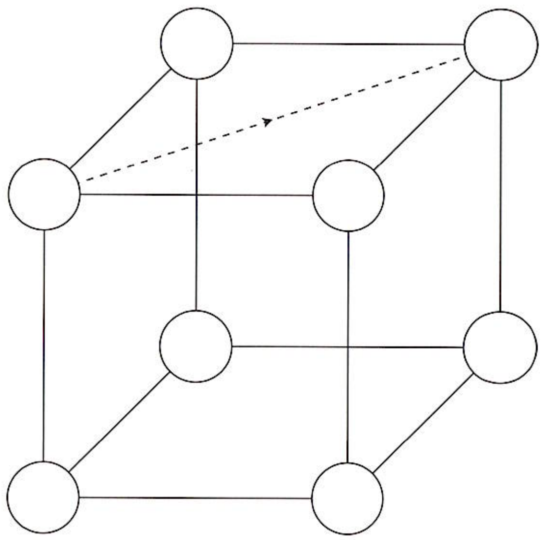
A. Assembler ces quatre pièces pour obtenir un carré.
B. Assembler les mêmes pièces pour obtenir une croix.

6. Cube numérisé

A. Les nombres de 1 à 8 doivent être placés aux sommets du cube (chacun une seule fois !) de façon à respecter les produits inscrits sur les faces du développement.

Deux flèches placées, l'une sur une face du cube, l'autre sur une face du développement, permettent d'associer par paires les faces de ces deux représentations du cube.





B. Les informations données sur le développement peuvent être réduites tout en restant suffisantes pour résoudre l'énigme. Quel est le minimun à fournir ?

7. Deux hélices

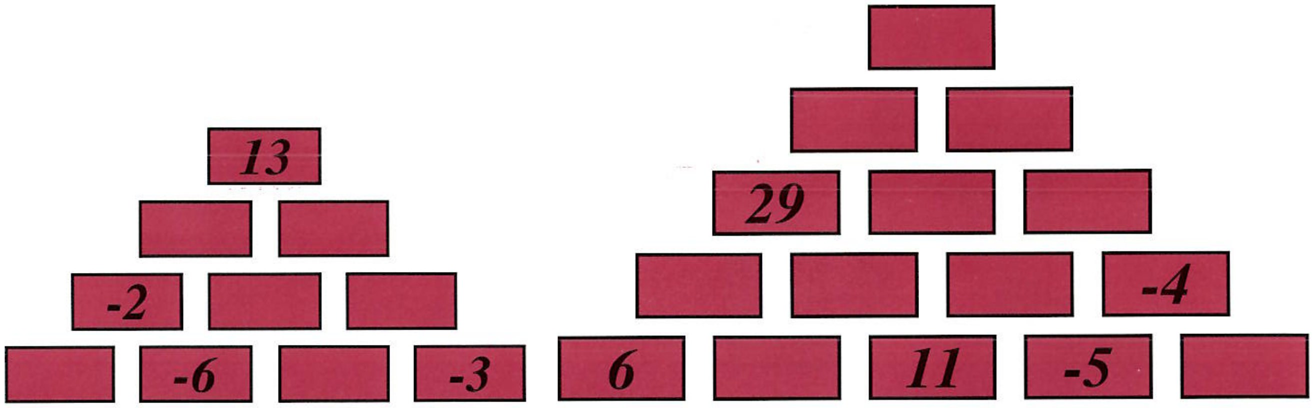
Sur un même cylindre, on dessine deux hélices partant du même point et arrivant au même point. La première fait deux tours dans un sens tandis que l'autre en fait trois dans l'autre sens.

En combien de régions la surface latérale du cylindre est-elle divisée ?

8. Murs additifs

Chaque brique d'un « Mur Additif » contient un nombre qui est la somme des contenus des deux briques qui la supportent.

Compléter les deux murs ci-dessous en respectant cette règle.



9. À propos de jeu

Voici un extrait d'un ouvrage [1] datant de 1820 :

Après une partie, trois joueurs comptent leur argent ; un seul ayant perdu, les deux autres ont gagné chacun une somme égale à celle qu'ils ont mise au jeu ; après une seconde partie, l'un des joueurs qui avait gagné dans la précédente perd, et les deux autres gagnent chacun une somme égale à celle qu'ils avaient en commençant la seconde partie ; à une troisième partie, le joueur qui jusque là avait gagné perd, chacun des deux autres gagnant une somme égale à celle qu'ils avaient en commençant cette dernière partie, et alors les trois joueurs sortent avec 120 francs chacun ; combien avaient-ils en entrant au jeu ?

10. Trois farceurs (d'après Adam Case, Who tells the Truth ?, éd. Tarquin, 1999)

Nos trois amis André, Bernard et Claude ont chacun décidé de dire la vérité ou de mentir au gré de leur fantaisie. Ils possèdent une bille blanche et une bille noire. L'un d'entre eux (nous ignorons qui) cache une des deux billes dans sa poche.

Pour nous aider, ils ont accepté une contrainte : celui qui a la bille en poche doit dire la vérité si la bille est blanche, il doit mentir si la bille est noire.

Voici leurs déclarations, une au moins est vraie et une au moins est fausse :

- André : Ce n'est pas Bernard qui a la bille.
- Bernard : Mes poches sont vides.
- Claude : La bille est cachée dans ma poche.

Qui a la bille en poche et quelle est sa couleur ?

Les solutions des jeux se trouvent à la page 32.

[1] Sylvestre François Lacroix, *Élémens d'Algèbre, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, treizième édition, Paris 1820

Olympiades mathématiques

Claudine Festraets

Participer à l'Olympiade !

Durant cette année scolaire, aura lieu la trente-deuxième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Voici le calendrier de cette OMB : éliminatoire : le 17 janvier 2007, demi-finale : le 7 mars 2007, finale : le 25 avril 2007, proclamation : le 12 mai 2007.

Se préparer !

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras ci-dessous quelques exercices posés dans le passé. Les solutions se trouvent à la page **??** Ne les regarde pas tout de suite. Si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir le tome 5 des OMB, il contient toutes les questions posées de 1999 à 2002, demande à ton professeur comment on peut se le procurer.

S'exercer ! *Les solutions se trouvent à la page 32.*

1. Chiffre impair (demi-finale - 1994)
Pour combien de valeurs de n dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, le chiffre des dizaines de n^2 est-il impair ?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

2. Calcul (demi-finale - 1994)
$4^4 \times 9^4 \times 4^9 \times 9^9 =$

(A) 13^{13} (B) 13^{36} (C) 36^{13} (D) 36^{36} (E) 1296^{26}

3. Losange (éliminatoire - 1995)
Un losange a une aire de 24 et un périmètre de 20. Quelle est la longueur de sa grande diagonale ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) $3\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{3}$

4. Repères (éliminatoire - 1994)
Dans combien de repères quelconques du plan deux points donnés ont-ils respectivement $(0, 2)$ et $(-2, 0)$ comme couples de coordonnées ?

(A) aucun (B) un et un seul (C) plusieurs, en nombre fini (D) une infinité (E) cela dépend des points choisis

5. Addition (demi-finale - 1995)
L'addition ci-dessous est incorrecte, mais on peut la corriger en remplaçant un chiffre c, à chacune de ses apparitions, par un autre chiffre d. Que vaut la somme de c et de d ?

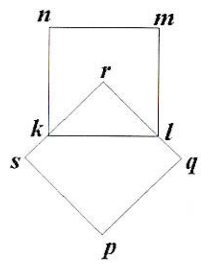
$$\begin{array}{r} 7\ 4\ 2\ 5\ 8\ 6 \\ +\ 8\ 2\ 9\ 4\ 3\ 0 \\ \hline 1\ 2\ 1\ 2\ 0\ 1\ 6 \end{array}$$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10
(E) Strictement plus que 10.

6. Quadrilatère (éliminatoire - 1994)
Soit c la longueur du plus petit côté d'un quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon 1. Alors la valeur maximale de c est

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}-1$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2

7. Polygone (demi-finale - 1994)
Sans réponse préformulée - Dans la figure, les carrés $klmn$ et $pqrs$ sont isométriques, $|kl| = 10$ et r est le centre du carré $klmn$. Que vaut l'aire du polygone $kspqlmn$?



8. Chiffres (demi-finale - 1997)
Pour écrire tous les naturels de 1 à 1997 inclus, combien de chiffres 1 sont nécessaires ?

(A) 400 (B) 1 208 (C) 1 298 (D) 1 997
(E) Une autre réponse.

9. Quatre chiffres (éliminatoire - 1996)
Sans réponse préformulée - Combien existe-t-il de nombres de 4 chiffres constitués de deux paires distinctes de chiffres identiques, comme par exemple 1 661, 1 122 ou 1 414 (mais non 3 333) ?

10. Equation (éliminatoire - 1997)
Sans réponse préformulée - Quel est le nombre de solutions de l'équation $\sin x = \frac{\cos x}{100}$, d'inconnue réelle x, qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;100]$?

 Math-Jeunes n°115, 30–31, 2007

Rallye problèmes

Nicole Miewis

La lauréate du rallye problèmes 2005-2006 est THI TUYÊT MINH NGUYEN de Liège. Nous la félicitons chaleureusement.

Le rallye problèmes senior 2006-2007 comportera deux étapes publiées dans les numéros 115 et 116 de votre revue. À chaque étape, cinq problèmes vous seront proposés. Tous les problèmes rapporteront le même nombre de points. Pour pouvoir faire partie du classement final, nous vous demandons d'en résoudre au moins quatre à chaque étape.

À vous de trouver le bon raisonnement et d'avoir l'esprit logique. Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. La réponse finale ne suffit pas ; expliquez et justifiez soigneusement vos solutions, même partielles.

Vos solutions à ces premiers problèmes doivent être envoyées à N. MIÉWIS, avenue de Péville, 150, 4030 - Grivegnée, muni de la mention « Concours Rallye Math-Jeunes Sénior » pour le 15 décembre 2006 . Les meilleures seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

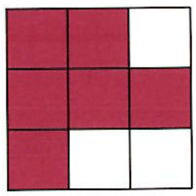
1. Les cases colorées.

Dans la grille représentée, après grattage, certaines cases seront blanches, d'autres seront colorées. Le nombre inscrit dans chaque case indique le nombre de cases colorées qui sont à son contact. Deux cases sont en contact si elles ont un côté commun ou un sommet commun. Une case est toujours en contact avec elle-même.

Par exemple, la grille

4	5	3
5	6	3
3	4	2

devient, après grattage,



Que devient, après grattage, la grille codée :

1	2	3	2
3	5	5	3
5	7	6	3
4	5	4	2

2. Les deux astres

Un astronome a observé le 1er janvier 2006 un corps céleste qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il observe un second astre dont la période d'apparition est de 81 jours. À quelle date observera-t-il simultanément les deux astres ?

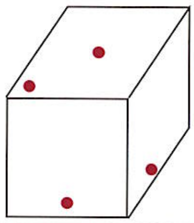
3. Rien compris

Thomas n'a jamais rien compris au calcul ! Au lieu de multiplier, il divise et au lieu de soustraire, il additionne. Son professeur lui a demandé de soustraire 60 du produit de deux nombres naturels. Par hasard, Thomas donne la bonne réponse. Quel est ce résultat ?

4. Les épées de Majix

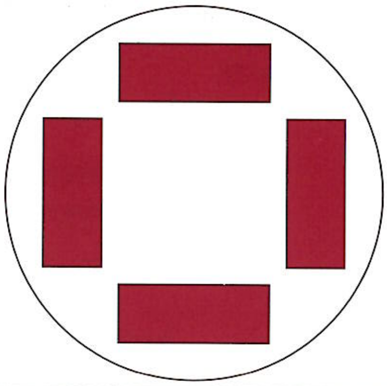
Annabelle, l'assistante du magicien Majix, est enfermée dans une malle cubique posée au sol et dont les arêtes mesurent 80 cm. Majix enfonce deux épées au travers de la malle par des trous prévus à cet effet.

Deux de ces trous sont visibles sur la face supérieure de la malle : l'un au centre de la face et l'autre près du coin avant gauche, à 10 cm de l'arête gauche et à 10 cm de l'arête avant. Un troisième trou est situé sur la médiane de la face avant, à 10 cm au dessus du sol. Quant au quatrième trou, il est situé sur la face de droite, également à 10 cm du sol et à 50 cm de l'arête arrière de cette face. Majix dispose de plus d'une manière pour placer ses épées. Quelle est la position où la distance entre les deux épées sera minimale ? Quelle est alors cette distance ?



5. Les sets de table

On désire placer quatre sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon r comme suggéré sur le dessin. Les sets ne peuvent ni se recouvrir, ni déborder de la table. Quelles sont les dimensions des plus grands sets possibles ?



Les deux problèmes suivants ne font pas partie du Rallye. Ils sont extraits d'un livre intitulé *Récréation mathématicque composée de plusieurs problèmes plaisants et facetieux* publié par Van Etten en 1626. Nous vous les livrons dans leur état d'origine :

Teſtament d'vn Pere mourant.

IE laiſſe mille eſcus à mes deux enfans ; vn legitime, l'autre baſtard. Mais i'entends que la cinquieſme partie de ce qu'aura mon legitime, ſurpaſſe de 10 la quatrieſme partie de ce qu'aura le baſtard. De combien heriterõt ils l'vn & l'autre? Le Baſtard aura 422 & 2 neufiémes, & le legitime 577. & 7. neufiémes. Car la cinquiéme partie de 577. & 7 neufiémes, qui eſt 115. & 5. neufiéme ſurpaſſe de 10 la quatriéme partie de 422. & 2 neufiémes qui eſt 105. & 5. neufiémes.

Des Couppes de Crœſus

CRœſus donna au temple de Di 6 couppes d'or, mines, c'eſt à dire qui peſoient toutes enſemble pe eſtoit plus peſante 600 drachmes : mais chaſque . Combien peſoient elles d'vne drachme. que la ſuyu premiere eſtoit de 102 & 1. donc chacune à part ? I quent les autres de 101 & 1 deuxdeuxieſme, & par cor xieſme, 99. & 1 deuxieſme, 98 & 1. ieſme 100. & 1. d 1 deuxieſme. deuxieſme, 97

Solutions des jeux

1. Qui sont-ils ?

1.A. $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$

1.B. $45 = 5 \times 9$ et $54 = 6 \times 9$.

1.C. 625.

1.D. 3600.

2. Six nombres de la même famille.

Il existe de nombreuses solutions pour obtenir six nombres impairs : il suffit de placer les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9 aux cinq places occupées par les derniers chiffres des six nombres.

Au contraire, les chiffres 2, 4, 6 et 8 ne suffisent pas pour créer une grille de six nombres pairs et les chiffres 1, 3, 7 et 9 ne suffisent pas pour créer une grille de nombres premiers.

Il faut tâtonner un peu plus, rechercher les carrés parfaits formés de trois chiffres différents … pour arriver finalement, dans ce cas aussi, à une impossibilité.

3. Décoder des produits.

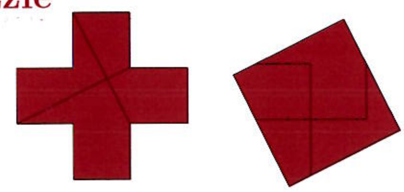
Grille 5×5 : ♥= 10, ♦= 5, ♣=2 et ♠=1.

Grille 4×4 : ♥= 7, ♦= 4, ♣=3 et ♠=8.

4. Deux journalistes mal informés.

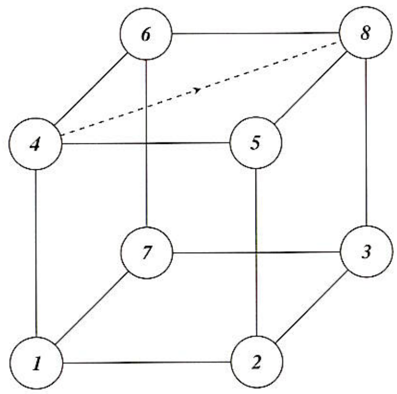
On déduit des informations que Delroue ne peut pas avoir remporté le prix du sable. Dès lors, Duguidon a remporté le poisson, Dupneu le sable et Delroue le coquillage.

5. Puzzle



6. Cube numérisé

6.A.

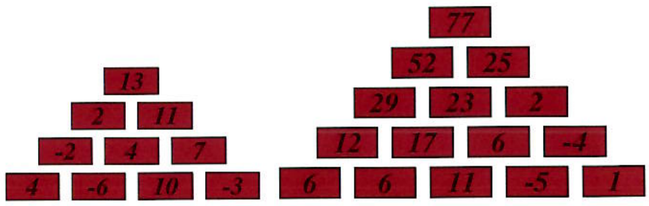


6.B. Il suffit par exemple de donner les produits dans trois faces opposées.

7. Deux hélices

Six régions.

8. Murs additifs



9. À propos de jeu

Le premier perdant avait 195 francs, le deuxième 105 francs et le troisième 60 francs.

10. Trois farceurs

André a la bille blanche en poche.

D'autres « Produits à décoder », « Cubes numérisés » et « Murs additifs » et aussi d'autres jeux disponibles sur le site `www.conifere.be` qui te propose un logiciel JEUX.

Solutions de la rubrique « Olympiades mathématiques »

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	D	C	B	175	E	243	32

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Math-Jeunes

Comité de Rédaction : *C. Festraets, N. Lambelin, J. Miewis, N. Miewis, G. Noël, Y. Noël-Roch, F. Pourbaix, C. Randour, P. Tilleuil, A. Tilleuil-Lepoutre, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.*

Math-Jeunes Junior

Comité de Rédaction : *F. Drouin, C. Festraets, B. Honclaire, G. Laloux, G. Noël, Y. Noël-Roch, A. Paternottre, F. Pourbaix, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.*

Mise en page et dactylographie : *M.-C. Carruana*

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- ☞ pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (par APMEP)	8 €		16 €	
	✉	✉ prior	✉	✉ prior
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Non prior : ✉, Prior : ✉ prior

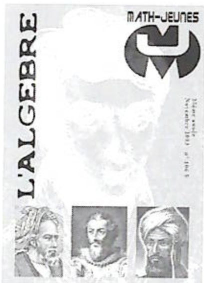
Anciens numéros :

Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition

Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition

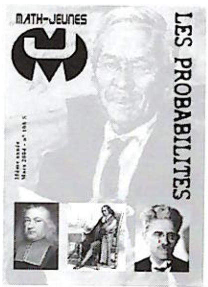
Frais d'expédition : consulter le secrétariat

Complétez votre collection de *Math-Jeunes.*

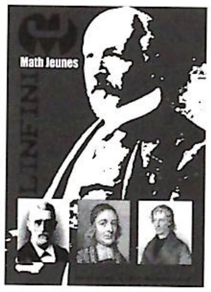


N°106
L'algèbre

N°107
Les courbes

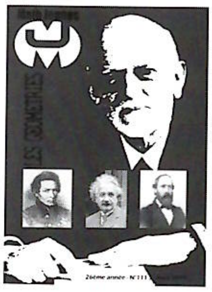


N°108
Les probabilités

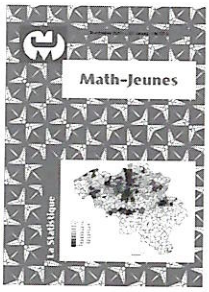


N°109
L'infini

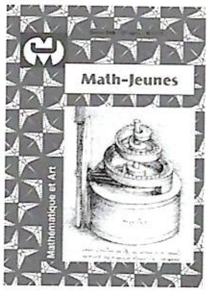
N°110
Le codage



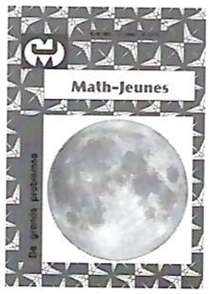
N°111
Les géométries



N°112
La statistique



N°113
Mathématique et art



N°114
De grands problèmes

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € pour les trois numéros 106 à 108 ; 1,5 € pour les trois numéros 109 à 111, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont accessibles à l'adresse `www.sbpm.be/mj2.htm`

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

© SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : G. NOËL
Rue de la Culée, 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée