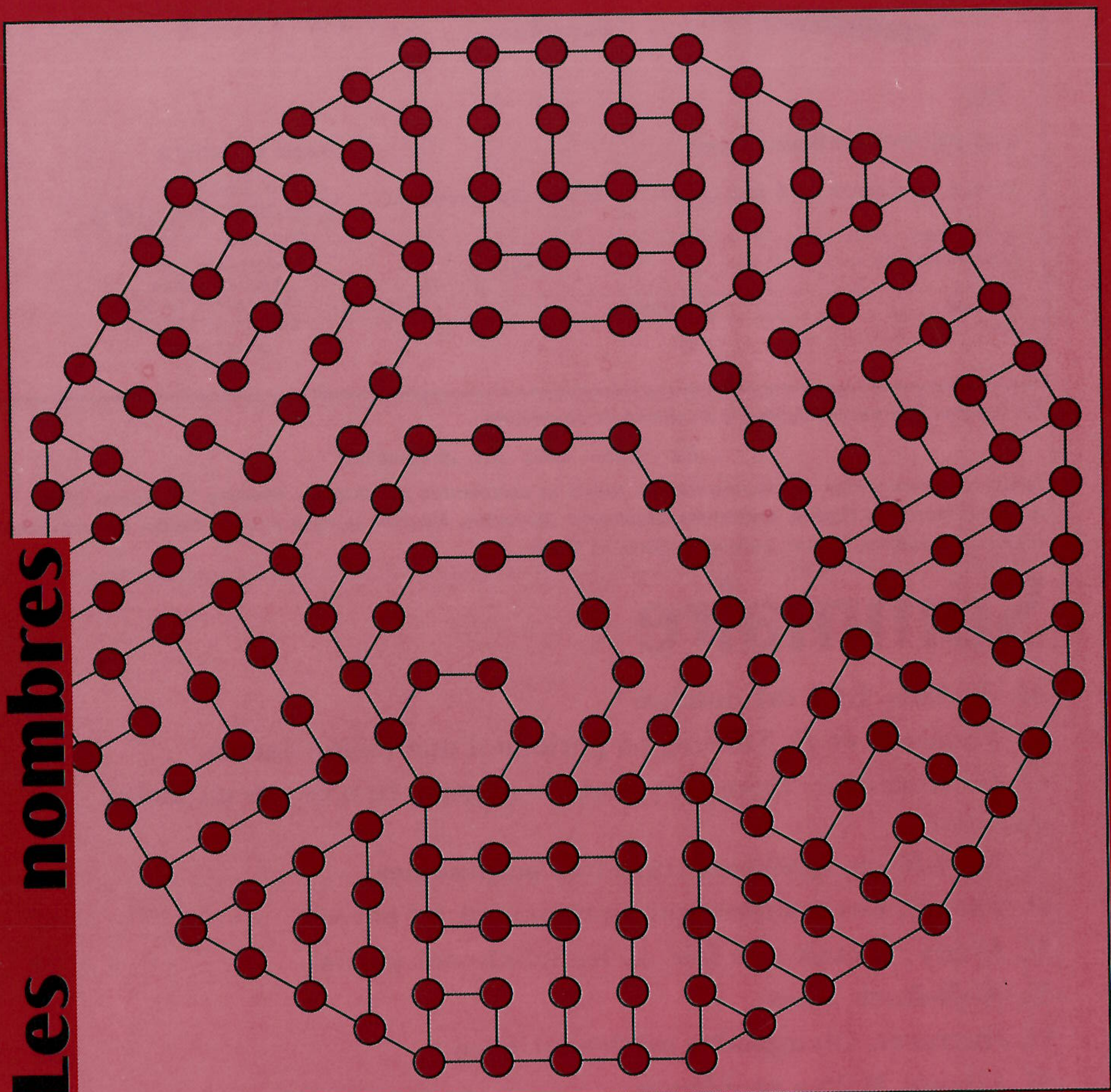
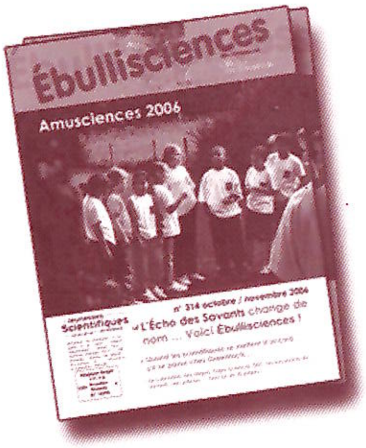
# Math-Jeunes



Les nombres

Février 2007 – 28e année – N 116 S




# Ébullisciences

**Le bon réflexe pour comprendre le monde !**

**Tous les deux mois, des articles sur un thème de société, des expériences à réaliser à la maison, l'agenda des activités des Jeunesses Scientifiques, des jeux, des infos...**

JE DÉSIRE RECEVOIR **Ébullisciences**

Pendant 1 an et je verse 7,50 € sur le compte n° 001-0015784-49 de l'association.

Nom, prénom ____________________

Date de naissance ___ / ___ / ______ Sexe F / M

Rue : ____________________ n° __ bte___

N° Postal : __________ Localité : __________

Tél : __________

Bulletin à renvoyer à

Jeunesses Scientifiques de Belgique

Avenue Latérale, 17

1180 Bruxelles

Tél. : 02 537 03 25

Fax : 02 537 08 02

www.jsb.be


*Un ouvrage intéressant consacré au thème de ce numéro :*

***Et Dieu créa les Nombres***

*Les plus grands textes de mathématiques, réunis et commentés par Stephen Hawking. Ed. Dunod, 2006. Avec des textes de Euclide, Archimède, Diophante, Descartes, Newton, Laplace, Fourier, Gauss, Cauchy, Boole, Riemann, Dedekind, Cantor, Lebesgue, Gödel et Turing.*

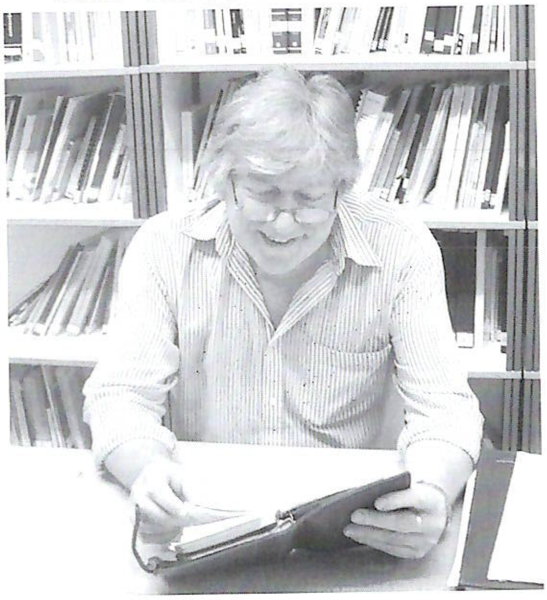
# Sommaire



En couverture : Représentation géométrique des nombres triangulaires, carrés et hexagonaux (voir *Tout est nombre*)

# Math-Jeunes

## In Memoriam



*Math-Jeunes* est en deuil. Nous déplorons en effet le décès de Michel Ballieu qui assuma la direction de notre revue durant 10 ans. Licencié en sciences mathématiques (ULB), professeur à l'Athénée Royal de Binche, chargé d'exercices à l'ULB, directeur de recherche au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques... Les titres et fonctions de Michel montrent à suffisance sa grande culture mathématique et ses capacités de travail et d'organisation. Ajoutons que Michel s'intéressait particulièrement aux questions d'histoire des mathématiques. Il était apte à lire dans le texte original les auteurs grecs, latins... ce qui lui a permis de rédiger pour *Math-Jeunes* de nombreux articles bien documentés et précis, tant sur le fond que sur les aspects historiques.

## Les nombres

En hommage à Michel Ballieu, vous trouverez en tête de ce numéro un article intitulé *Tout est nombre*, qu'il avait publié (en trois parties) dans les numéros 62 à 64 de notre revue. Ce texte s'inscrit parfaitement dans le thème de ce numéro et a conservé tout son intérêt. En rassemblant les trois parties, nous avons été amenés à y apporter quelques adaptations mineures.

Mais qu'est-ce qu'un nombre ? Question bizarre, direz-vous ! Chacun sait ce qu'est un nombre ! Pourtant... Savez-vous que bien des controverses ont divisé les mathématiciens à ce sujet ? On en trouve des traces dans le vocabulaire. Par exemple, on parle de nombres *rationnels* et de nombres *irrationnels.* Et le mot *rationnel* a un double sens : il désigne un rapport, mais aussi *ce qui est accessible à la raison.* Les nombres irrationnels seraient-ils inaccessibles à la raison ? Et les nombres *imaginaires* qui sont apparus plus tard ?

On pourrait aussi rappeler que l'ensemble des entiers, positifs et négatifs est encore parfois appelé l'ensemble des nombres *relatifs,* ce qui nous laisse supposer que les seuls vrais nombres sont les positifs. Dans *Nombre négatif, tu n'es pas un moins que rien,* S. Trompler et G. Delcroix nous expliquent qu'il a fallu attendre le XIX<sup>e</sup> siècle pour que les négatifs acquièrent définitivement le statut de nombres.

Autres *nombres* qui déclenchent des polémiques : les infiniment petits. Leibnitz (1646–1716) et Newton (1642–1727) les utilisent, sous l'une ou l'autre forme, sans vergogne... et sans définition... Au XIX<sup>e</sup> siècle, Cauchy les élimine de façon que l'on croit définitive. Ils réapparaissent au XX<sup>e</sup> siècle sous la plume d'un logicien, Abraham Robinson. Valérie Henry aborde ce sujet dans *Il était une fois... les infiniment petits.*

Les nombres ont aussi beaucoup de propriétés, certaines plus importantes que d'autres, mais toutes intéressantes et parfois amusantes. C. Vanaerde et P. Tilleuil nous proposent dans *La période d'une racine carrée* un développement périodique pour $\sqrt{2}$, cependant que P. Tilleuil parle des *Nombres qui fonctionnent à l'envers.* On vous laisse le plaisir de les découvrir, sans devoir retourner votre *Math-Jeunes.* Enfin, Y. Noël-Roch complète sa rubrique *Jeux* par un inventaire de *Quelques curiosités numériques.* Bien entendu, vous trouvez aussi les rubriques habituelles, *Olympiades mathématiques* par C. Festraets, et *Rallye problèmes* par N. Miewis. N'oubliez pas d'envoyer à temps vos solutions aux problèmes proposés.

Math-Jeunes n°116 S, 2–4, 2007

# Tout est nombre

Michel Ballieu

**La couverture de ce *Math-Jeunes* présente un « compromis » entre arithmétique et géométrie : les nombres figurés, une idée qui semble remonter aux Pythagoriciens dont une des affirmations maîtresses était : « Tout est nombre... »**

**C'est là un beau sujet de dissertation mais, pas si simple... Parles-en à ton professeur de « philosophie » (religion ou morale).**

**Les Pythagoriciens faisaient une première distinction entre nombres impairs et nombres pairs ; sans doute cela leur venait-il déjà des Égyptiens ou des Babyloniens...**

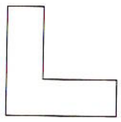
**L'une des plus anciennes superstitions voulait que les nombres impairs portent chance, tandis que les nombres pairs... Cette tradition se perpétue : on trouve chez SHAKESPEARE (The Merry Wives of Windsor, Acte 5, Se. I) :**

***... I hope good luck lies in odd numbers.***

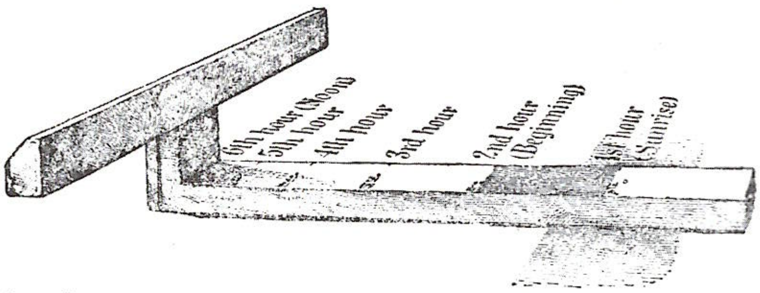
***... They say there is divinity in odd numbers,...***

**Cela, tout simplement parce que les nombres impairs étaient considérés comme « masculins » alors que les pairs étaient dits « féminins »... Je ne voudrais surtout pas commettre d'« impair » en m'engageant plus avant dans cette voie...**

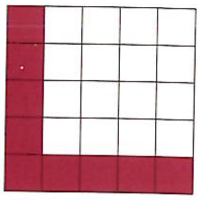
Un nombre impair était aussi appelé *gnomon* (terme emprunté à la géométrie).



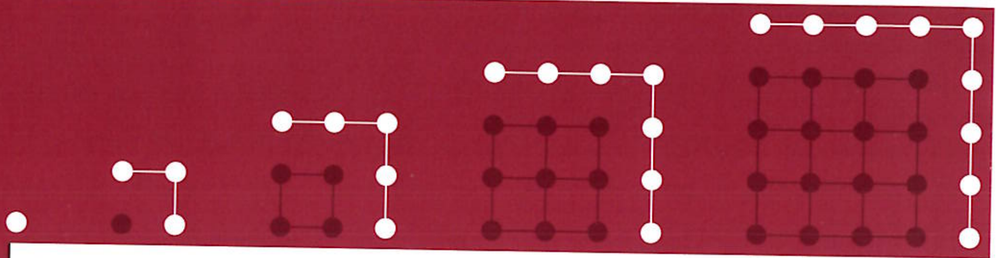
En fait, un *gnomon* est un cadran solaire primitif. Si on oriente cette « forme » vers l'est, le matin et vers l'ouest, l'après-midi, on peut lire les heures sur le bras horizontal ; le principe est le même que celui de l'horloge égyptienne représentée ci-dessous (vue de profil).




La partie colorée de la figure ci-contre est un *gnomon*. Si $n^2$ désigne le nombre de «carrés blancs», alors la mesure du gnomon est $2n+1$ qui est effectivement un nombre impair.



On voit facilement (cf. figure ci-dessous) que la somme des *gnomons* (nombres impairs) consécutifs, à partir de l'unité, est un carré.



Ceci peut encore s'énoncer :

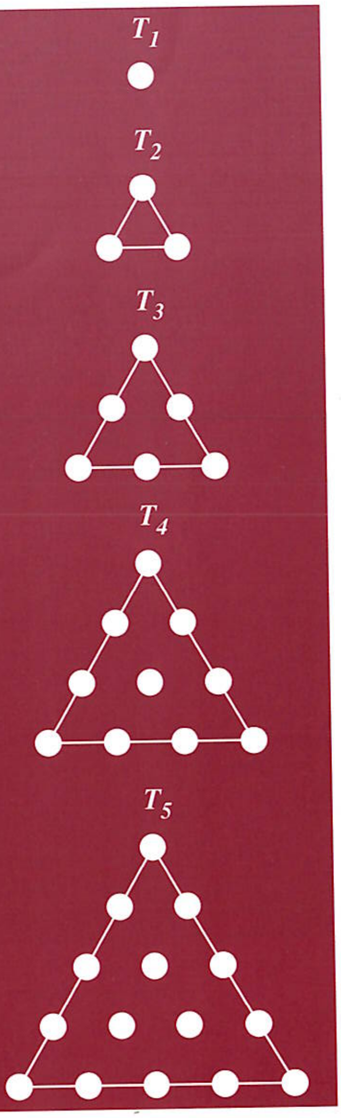
**Tout nombre carré est la somme des nombres impairs consécutifs à partir de l'unité.**

$$(n+1)^2 = 1 + 3 + .. + (2n+1)$$

Il y a encore pas mal de « jolies choses » à découvrir concernant les nombres. Revenons-en donc à la couverture de *Math-Jeunes*.

Tu t'attends, cher ami lecteur, à ce que je te parle de **nombres triangulaires**. Eh bien ! Tu as entièrement raison. PYTHAGORE aurait (?) remarqué des propriétés de cette « classe » de nombres...

**On appelle nombre triangulaire tout nombre qui est somme d'une certaine quantité de jetons disposés en rangées sur un plan ; la rangée du bas en contient $n$ et chaque rangée en contient un de moins que la rangée située juste en dessous jusqu'à la rangée qui contient exactement un jeton.**




Ainsi, le $n^e$ *nombre triangulaire* $T_n$ vaut

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

Offrons-nous une petite démonstration :

$$\begin{aligned} T_n &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\ T_n &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$2T_n = \underbrace{(n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n}$$

$$2T_n = n(n+1)$$

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Le quatrième nombre triangulaire vaut donc

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

Ce qui explique le passage suivant que l'on rencontre chez l'auteur grec LUCIEN (2e siècle apr. J.-C.), dans son oeuvre *Βίων πρᾶσις*, littéralement, *La Vente des Vies* autrement traduit par *La Vie aux Enchères* :

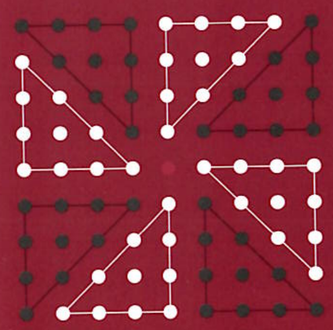
> PYTHAGORE. *Je vais t'enseigner comment compter.*
> AGORASTES *(le marchand). Je sais compter.*
> PYTHAGORE. *Et comment comptes-tu ?*
> AGORASTES. *Un, deux, trois, quatre...*
> PYTHAGORE. *Vois-tu ! Ce que tu crois être quatre vaut dix, un triangle parfait, ce qui constitue le lien entre nous.*

Pour bien saisir le sens de cette dernière réplique, il faut savoir que les PYTHAGORICIENS constituaient un cercle relativement fermé. A l'époque, on ne communiquait pas les connaissances à n'importe qui. Les membres de cette espèce de « secte » devaient garder secrètes leurs découvertes ; ils ne pouvaient les dévoiler qu'aux autres membres de l'« École ». Pour se reconnaître entre eux, ils utilisaient des « symboles », des « signes » et notamment le triangle équilatéral et le pentagramme.

Je t'ai annoncé, qu'il y a pas mal de « jolies choses » à découvrir concernant les nombres. En voici quelques-unes que tu apprécieras — du moins, je l'espère.

Dans le *περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν* ou *Traité des nombres polygones* de DIOPHANTE D'ALEXANDRIE (mathématicien qui vécut au troisième siècle de notre ère), on trouve, comme cas particulier d'une proposition, le résultat ci-contre.

***L'octuple de tout nombre triangulaire augmenté de 1 est un carré***



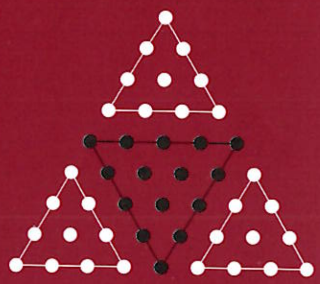
**Ce qu'on peut encore écrire :**

$$8 \times T_n + 1 = (2n+1)^2 \text{ ou}$$

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$$

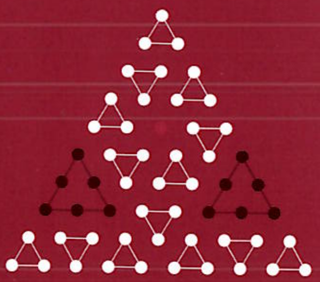
**On a aussi**

$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$



**ou encore**

$$14T_2 + 2T_3 + 1 = T_{10}$$



**Démontre ces deux résultats formellement !!**

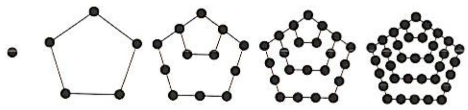
Et puis... Continuons !

Nous en arrivons à un très beau résultat qui n'est malheureusement pas simple à démontrer. Il utilise le concept de *fraction continue*[1].

> *Les seuls nombres qui sont à la fois* ***triangulaires*** *et* ***carrés*** *sont du type*
>
> $$b^2 \cdot c^2$$
>
> *où $\frac{b}{c}$ est une quelconque réduite de la fraction continue qui représente $\sqrt{2}$.*

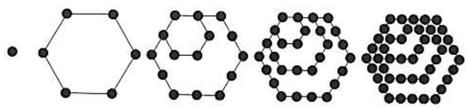
Ces nombres sont $1$, $36 = 3^2 \cdot 2^2$, $1225 = 7^2 \cdot 5^2$, $41616 = 17^2 \cdot 12^2 \ldots$

Après les nombres carrés et les nombres triangulaires, voici les **nombres pentagonaux**.



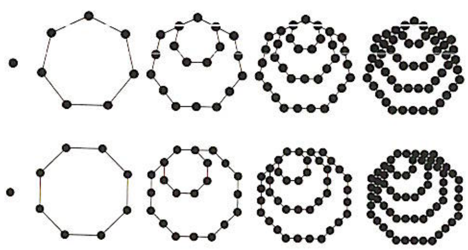
Essaie de prouver que le nombre pentagonal de rang $r$ vaut $\frac{r\cdot(3r-1)}{2}$, ce qui donne 1, 5, 12...

La couverture de ce numéro te propose aussi les nombres hexagonaux.



Tout nombre hexagonal de rang $r$ égale $r \cdot (2r-1)$ et on obtient ainsi 1, 6, 15...

Trouve une formule (rang $r$) pour les heptagonaux et les octogonaux ci-dessous.

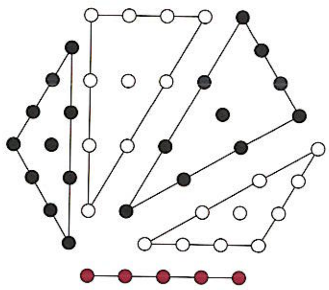


Il est évidemment possible d'obtenir une formule générale pour un nombre $n$-gonal. Au boulot...

Voici, pour terminer, une propriété des nombres hexagonaux :

*Quatre fois le triangulaire de rang $r$ augmenté de $r+1$, donne l'hexagonal de rang $(r+1)$.*

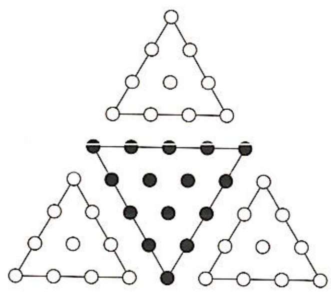
$$4T_r + (r+1) = H_{r+1}$$



En unissant $r+1$ à un des quatre triangulaires de rang $r$, on a encore

$$3T_r + T_{r+1} = H_{r+1}$$

Mais alors



ce qui s'énonce

*Tout hexagonal est un triangulaire de côté impair et réciproquement.*

Discutes-en avec ton prof. de math. !

Bibliographie


[1] W.W. Rouse Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publ. Inc., New York, 1987.

[2] Albert H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers, (the Queen of Mathema- tics entertains)*, Dover Publ. Inc. New York, 1966.

[3] Diophante d'Alexandrie, *Les six Livres arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*, trad. Paul Ver Eecke, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1959.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[5] Edouard Lucas, *Récréations mathématiques* (4 vol.), Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1979.

[6] Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works* (2 vol.), Loeb Classical Library, Great Britain, 1991.


[1] Voir dans ce numéro l'article *La période d'une racine carrée*, N.D.L.R.

Math-Jeunes n°116 S, 5–9, 2007

# La période d'une racine carrée

Christian Vanaerde et Philippe Tilleuil

Il est bien connu que l'écriture décimale d'un nombre est périodique (éventuellement après un nombre fini de décimales) si et seulement si ce nombre est rationnel.

Par exemple : la période de $\frac{1}{3}$ est de longueur 1 et égale à 3, puisque $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, de même la période de $\frac{5}{12}$ est de longueur 1 et égale à 6 puisque $\frac{5}{12} = 0,41666\ldots$, et pareillement la période de $\frac{4}{7}$ est de longueur 6 et égale à 571428 puisque $\frac{4}{7} = 0,571428571428571428\ldots$.

Dès lors, l'écriture décimale d'un nombre irrationnel tel que $\sqrt{2}$ ne peut présenter aucune périodicité. Mais pour un tel nombre, n'y a-t-il aucune manière de contrôler néanmoins son écriture décimale, et de trouver une représentation « agréable à regarder » ?

## Le défilé des décimales

Partant de la valeur $\sqrt{2} = 1,4142135624\ldots$, nous allons « coder » la succession de ces décimales à partir de l'algorithme suivant.

- Commençons par retenir la partie entière de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire 1,
- inversons ensuite sa partie décimale (la partie décimale de $\sqrt{2}$ est la valeur de $\sqrt{2}$ moins sa partie entière), on évalue donc

$$\frac{1}{0,4142135624\ldots} = 2,4142135624\ldots$$

- notons la partie entière du résultat obtenu, c'est-à-dire 2,
- recommençons en inversant la partie décimale du dernier résultat obtenu, ce qui donne

$$\frac{1}{0,4142135624\ldots} = 2,4142135624\ldots$$

- notons encore la partie entière du résultat obtenu, c'est-à-dire 2, et ainsi de suite ...

La succession des parties entières obtenues par cet algorithme est remarquable puisqu'elle semble constante. On résume les résultats de l'algorithme précédent en notant :

$$\sqrt{2} \mapsto [1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$$

De plus, on peut appliquer le même algorithme à d'autres nombres. Par exemple, pour $\sqrt{3} = 1,7320508076\ldots$ et $\sqrt{5} = 2.2360679775\ldots$, on trouve :

| *valeur de* $\sqrt{3}$ | *partie entière* |
|---|---|
| $\sqrt{3} = 1,7320508076\ldots$ | 1 |
| *inversion de la partie décimale* | *partie entière corresp.* |
| $\frac{1}{0,7320508076\ldots} = 1,3660254038\ldots$ | 1 |
| $\frac{1}{0,3660254038\ldots} = 2,7320508076\ldots$ | 2 |
| $\frac{1}{0,7320508076\ldots} = 1,3660254038\ldots$ | 1 |
| $\frac{1}{0,3660254038\ldots} = 2,7320508076\ldots$ | 2 |
| etc. | etc. |

| *valeur de* $\sqrt{5}$ | *partie entière* |
|---|---|
| $\sqrt{5} = 2.2360679775\ldots$ | 2 |
| *inversion de la partie décimale* | *partie entière corresp.* |
| $\frac{1}{0,2360679775\ldots} = 4,2360679775\ldots$ | 4 |
| $\frac{1}{0,2360679775\ldots} = 4,2360679775\ldots$ | 4 |
| $\frac{1}{0,2360679775\ldots} = 4,2360679775\ldots$ | 4 |
| $\frac{1}{0,2360679775\ldots} = 4,2360679776\ldots$ | 4 |
| etc. | etc. |

On résume ces résultats par $\sqrt{3} \mapsto [1; 1, 2, 1, 2, \ldots]$, et $\sqrt{5} \mapsto [2; 4, 4, 4, 4, \ldots]$. Mais est-on bien certain de la *périodicité* qu'on observe dans les parties entières ainsi calculées ?

## Au cœur de la machine

En fait, la périodicité observée n'a rien de certain. Dès que les calculs sont effectués à la machine, on observe des différences dans l'écriture décimale des nombres qui apparaissent à chaque étape de l'algorithme. Et au fur et à mesure de la progression de l'algorithme, ces différences se propagent vers la gauche, jusqu'à détruire la belle régularité dans l'invariance des parties entières.

Les résultats sont détaillés dans le tableau ci-dessous.

Un petit programme, détaillé ci-dessous (il est écrit pour une CASIO GR35+, mais se transpose facilement sur n'importe quelle machine), permet de poursuivre l'algorithme suffisamment loin pour voir ce qui se passe.

```
Seq(0, X, 1, 255, 1) →List1 ↩
Seq(0, X, 1, 255, 1) →List2 ↩
"NOMBRE=" ?→X ↩
For 1 →I To 30 Step 1 ↩
X-Int (X)→ List 1[I] ↩
Int (X)→List 2[I] ↩
(X-Int(X))∧(-1)→X ↩
Next ↩
List 1 ◢
List 2 ◢
```

| | $\sqrt{2} = 1,4142135624\ldots$ | 1 |
|---|---|---|
| *rang* | *inversion de la partie décimale* | *partie entière* |
| 1 | $\frac{1}{0,4142135624...} = 2,4142135624\ldots$ | 2 |
| 2 | $\frac{1}{0,4142135624...} = 2,4142135624\ldots$ | 2 |
| 3 | $\frac{1}{0,4142135624...} = 2,4142135624\ldots$ | 2 |
| ... | ... | ... |
| 16 | $\frac{1}{0,4155127465...} = 2,4066650384\ldots$ | 2 |
| 17 | $\frac{1}{0,4066650384...} = 2,4590262392\ldots$ | 2 |
| 18 | $\frac{1}{0,4590262392...} = 2,1785247\ldots$ | 2 |
| 19 | $\frac{1}{0,1785247...} = 5,6014657921\ldots$ | 5 |
| 20 | $\frac{1}{0,6014657921...} = 1,6626049446\ldots$ | 1 |
| 21 | $\frac{1}{0,6626049446...} = 1,5091948954\ldots$ | 1 |
| 22 | $\frac{1}{0,5091948954...} = 1,9638845735\ldots$ | 1 |
| 23 | $\frac{1}{0,9638845735...} = 1,03746862178\ldots$ | 1 |
| 24 | $\frac{1}{0,03746862178...} = 26,6889987523\ldots$ | 26 |
| 25 | $\frac{1}{0,6889987523...} = 1,4513814381\ldots$ | 1 |
| ... | ... | ... |

Ainsi, on devrait écrire :

$$\sqrt{2} \mapsto [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 26, 1, \ldots]$$

## Corrigeons les erreurs !

Ce qui est à la source du problème du calcul à partir de l'écriture décimale, c'est la réserve de chiffres disponibles dans la mémoire de la calculatrice : les *erreurs d'arrondi* s'accumulant, les résultats finissent par ne plus avoir de signification. Ce problème est aussi présent dans les adaptations informatiques de l'algorithme.

En réalité, la machine à calculer se trompe ! Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre l'algorithme, non plus à partir de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$, mais bien de sa définition algébrique. Inverser la partie décimale de $\sqrt{2}$, c'est inverser $\sqrt{2}-1$, or on a immédiatement :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

La partie entière de $\sqrt{2}+1$ est manifestement égale à 2, de telle sorte que la partie décimale correspondante égale $\left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = \sqrt{2}-1$. En inversant à nouveau cette partie décimale, on ne peut que retrouver le résultat précédent, et ainsi de suite, indéfiniment. L'algorithme est donc *effectivement* périodique :

$$\sqrt{2} \mapsto [1; 2, 2, 2, \ldots 2, 2, 2, \ldots]$$

On procède pareillement pour $\sqrt{3}$. On calcule d'abord l'inverse de la partie décimale de $\sqrt{3}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

dont la partie entière égale 1 et la partie décimale vaut $\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, or

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \sqrt{3}+1$$

dont la partie entière égale 2 ; comme la partie décimale correspondante vaut alors $\left(\sqrt{3}+1\right) - 2 = \sqrt{3}-1$, la périodicité des parties entières est établie, et on peut écrire :

$$\sqrt{3} \mapsto [1; 1, 2, 1, 2, \ldots 1, 2, 1, 2, \ldots]$$

On procède pareillement pour $\sqrt{5}$, et on trouve :

$$\sqrt{5} \mapsto [2; 4, 4, 4, \ldots 4, 4, 4, \ldots]$$

## Un empilement de fractions

Il y a moyen de comprendre la signification de l'algorithme précédent en termes de succession de fractions :

$$\sqrt{2} \mapsto 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

et le membre de droite doit être compris comme une limite (le nombre de dénominateurs tend vers l'infini). C'est ce qu'on appelle la *fraction continuée* associée à $\sqrt{2}$, et les « 2 » qui y apparaissent sont les *quotients partiels* de cette fraction continuée.

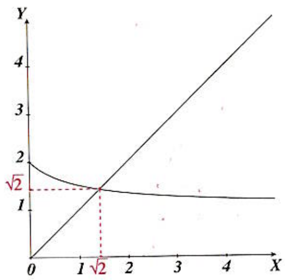
Si on arrête le développement de la succession de fractions à un rang donné, la fraction obtenue s'appelle la *réduite* correspondante. Ainsi, les premières réduites de la fraction continuée associée à $\sqrt{2}$ sont :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} = 1,5 \\
1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} &= \frac{7}{5} = 1,4 \\
1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} &= \frac{17}{12} = 1,416666\ldots \\
1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} &= \frac{41}{29} = 1,413793103\ldots \\
1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} &= \frac{99}{70} = 1,414285714\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2}-1) \\
&= 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

**Cette formule signifie que $\sqrt{2}$ est un *point fixe* de la fonction $f_1(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ : $f_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.**

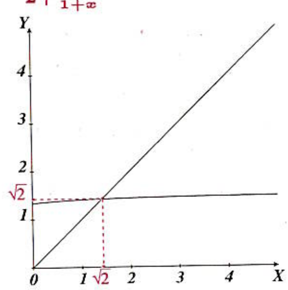
**Il en résulte que le point de coordonnée $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est à l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe d'équation $y = 1 + \frac{1}{1+x}$**




**En remplaçant $\sqrt{2}$ au second membre de la dernière équation par sa valeur (fournie par le premier membre), on obtient**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

**et $\sqrt{2}$ est aussi un point fixe de la fonction $f_2(x) = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}$**




**Pouvez-vous poursuivre dans cette direction ? Qu'observez-vous ? Cherchez un lien entre les valeurs des réduites successives et les fonctions $f_1$, $f_2$...**

**Appliquons l'algorithme de développement en fraction continuée à un nombre *rationnel*.**

**Essayons avec $\frac{5}{3}$ :**
**1^re^ étape : Décomposer en partie entière et partie « décimale » (c'est-à-dire inférieure à 1)**

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

**2^e^ étape : Inverser la partie décimale**

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

**3^e^ étape : Retour à la première étape, appliquée au dénominateur $\frac{3}{2}$**

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

**L'application de l'algorithme s'arrête ici : appliquer la deuxième étape à la partie décimale $\frac{1}{2}$ signifierait remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2/1}$, ce qui amènerait $\frac{1}{2+0}$ à l'étape suivante et on serait obligé d'en rester là !**

**Analysons un peu plus cet algorithme.**

**À la première étape, décomposer $\frac{5}{3}$ en la somme de sa partie entière, et de sa partie décimale revient à diviser 5 par 3 :**

$$5 = 3 \times 1 + 2$$

**Et à la troisième étape, on divise 3 par 2 !**
**Pour un rationnel quelconque, $\frac{a}{b}$, on effectuerait de même une suite de divisions**

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

**On reconnait l'algorithme d'Euclide qui sert à calculer le pgcd de deux nombres naturels ! Si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, le pgcd vaut 1 et l'algorithme s'arrête lorsqu'on trouve le reste 1.**

Tout cela vaut pareillement pour $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, pour les racines carrées des autres nombres entiers (non carrés parfaits, évidemment), et même pour tous les nombres irrationnels. De plus, il y a toute une série de règles de calcul qui permettent de calculer rapidement les réduites des fractions continuées. On en déduit par exemple que les réduites fournissent les meilleures approximations rationnelles des nombres irrationnels, lorsqu'on mesure la qualité de l'approximation à la taille des dénominateurs. Il s'ensuit qu'il y a bien égalité entre $\sqrt{2}$ et $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}$ !

## Si c'est périodique, c'est quadratique ...

Mais revenons-en à la périodicité. Une fraction continuée est qualifiée de *périodique* si, à partir d'un certain rang, les mêmes quotients partiels se reproduisent, toujours dans le même ordre. Il n'est pas difficile de démontrer qu'une fraction continuée périodique résulte toujours du développement d'un nombre irrationnel *quadratique* (c'est-à-dire du type $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ avec $a$ et $c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$ et $b \in \mathbb{N}$ non carré parfait). Un exemple mettra en évidence l'idée de la preuve. Supposons qu'on demande de déterminer le nombre (irrationnel) $x$ associé à la fraction continuée $[1; 3, 3, 3, \dots]$. L'équation

$$x = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\dots}}} = [1; 3, 3, 3, \dots]$$

implique évidemment

$$x - 1 = \frac{1}{3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\dots}}}$$

Mais au vu de la périodicité dans l'expression de $x - 1$, l'égalité peut s'écrire plus brièvement sous la forme :

$$x - 1 = \frac{1}{3 + (x - 1)}$$

On en déduit immédiatement la relation $3\,(x-1) + (x-1)^2 = 1$, c'est-à-dire $x^2 + x - 3 = 0$, et il suffit de résoudre cette équation du second degré pour obtenir $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, l'autre racine de cette équation, qui est négative, ne convenant manifestement pas. En raisonnant tout à fait pareillement, on détermine le nombre irrationnel dont le développement en fraction continuée est le plus simple et le plus régulier du monde, à savoir $[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ ; on trouve ... le célèbre nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## ... Et si c'est quadratique, c'est périodique !

Il est plus difficile de démontrer la *réciproque* de l'énoncé précédent, à savoir : le développement en fraction continuée d'un nombre irrationel quadratique est toujours périodique. Pour un nombre quadratique donné, ça n'est pas difficile à vérifier comme l'ont montré les exemples de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, mais ça peut vite devenir long, par exemple pour $\sqrt{199}$, dont la période est de longueur ... 20. D'autre part, il n'est pas très difficile d'établir la périodicité d'une *infinité* de nombres irrationnels quadratiques, pourvu qu'ils aient certaines propriétés particulières. Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} &= [n; 2n, 2n, 2n, \ldots] \\
\sqrt{n^2+2} &= [n; n, 2n, n, 2n, n, 2n, \ldots] \\
\sqrt{n^2-1} &= [n-1; 1, 2n-2, 1, 2n-2, 1, 2n-2, \ldots] \\
\sqrt{9n^2-2n} &= [3n-1; 1, 1, 1, 6n-2, 1, 1, 1, 6n-2, 1, 1, 1, 6n-2, \ldots]
\end{aligned}$$

Ces formules couvrent déjà les développements de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, etc. Malheureusement, elles ne fournissent pas une démonstration *générale*, qui puisse s'appliquer à n'importe quel nombre quadratique de type $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$. La première démonstration de ce genre a été publiée par Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) en 1770.

## Il n'y a pas que les racines carrées ...

Pour ce qui concerne le codage des décimales d'un nombre irrationnel, les fractions continuées ne semblent donc intéressantes qu'en cas de périodicité, c'est-à-dire uniquement pour les nombres irrationels quadratiques. Néanmoins, les fractions continuées sont utiles dans bien d'autres domaines des mathématiques : en arithmétique bien sûr, mais aussi en analyse, en géométrie, en astronomie, etc. Et les problèmes non résolus ne manquent pas. En voici deux, bien simples à énoncer, mais dont la solution n'est toujours pas connue à ce jour.

- La fraction continuée associée à $\sqrt[3]{2}$ n'est certainement pas périodique, mais ses quotients partiels sont-ils au moins bornés ? A titre documentaire, le quotient partiel de rang 620 de ce développement égale ... 7451.
- Le nombre $e$, base des logarithmes népériens (cfr. par exemple *Math-Jeunes* n° 112, novembre 2005), est un nombre transcendant qui possède un développement en fraction continuée dont les quotients partiels ne sont pas bornés, mais néanmoins parfaitement prévisibles :

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \ldots]$$

Existe-t-il une « loi » qui permette de décrire les quotients partiels de $\pi$ ? A titre documentaire (encore !), voici le début du développement en fraction continuée de $\pi$ :

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

Mais attention si vous vous attaquez à ces problèmes : les développements en question s'obtiennent par des méthodes beaucoup moins élémentaires que celles décrites dans cet article. Bon courage !

**Des fractions continuées généralisées**

**Les fractions continuées considérées jusqu'ici ont ceci de particulier que les numérateurs successifs valent toujours 1. Si cette contrainte est abandonnée, on parle de « fraction continuée généralisée ».**

**Pour des nombres rationnels, cette généralisation n'est guère utile. Pour certains irrationnels. elle permet d'obtenir des représentations simples Ainsi, William Brouncker (1620–1684) établit la formule suivante :**

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}}$$

**Un nombre quadratique $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ est racine d'une équation du second degré que nous noterons**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

**ou**

$$x(\alpha x + \beta) = -\gamma$$

**À condition de n'effectuer aucune division par 0, l'équation est équivalente à**

$$x = \frac{-\gamma}{\beta + \alpha x}$$

**et à**

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma/\alpha}{x}$$

**Ces formules peuvent servir de base au calcul de deux fractions continuées généralisées et périodiques, associées aux deux racines de l'équation du second degré.**

**Mais ceci pose des problèmes de convergence et ne prouve pas que tout nombre quadratique possède une développement en fraction continuée (non généralisée) qui soit périodique.**

# Nombre négatif, tu n'es pas un moins que rien !

Geoffrey Delcroix et Simone Trompler

Serions-nous moins intelligents que nos ancêtres ? Les nombres négatifs sont-ils une évidence pour les mathématiciens ? À travers cet article, nous tentons de mettre en évidence les difficultés rencontrées par plusieurs des plus grands mathématiciens de tous les temps à maîtriser le sens profond du nombre négatif.

## Introduction

**Dès le premier cycle de l'enseignement primaire, chacun d'entre vous a rencontré les nombres négatifs. En effet, souvenez-vous de votre instituteur présentant l'activité de découverte des mesures de températures en saison hivernale ! ! ! Bien qu'envisagée assez tôt, l'étude des nombres négatifs est loin d'être facile à assimiler.**

**Le nombre négatif n'existe pas dans la nature. Il est donc impossible de le manipuler, de le voir, de le sentir, etc. Pourtant, on voudrait qu'à l'âge de 7 ans, un enfant soit capable de comprendre concrètement ce nombre dans des situations signifiantes.**

**Au delà de la référence concrète, le calcul sur les nombre négatifs est également un problème pour de nombreux élèves. En particulier, mettons en évidence l'usage du même symbole − pour désigner l'opposé et l'opérateur de la soustraction, la justification de la règle des signes pour la multiplication, le fait que la lettre $x$ par exemple puisse désigner un négatif, bien qu'il n'y ait pas de signe −, le fait que −3 soit inférieur à 1, (une dette de 3 € serait plus petite qu'un gain d'1 € ?)...**

## 1. Origine

Avant de comprendre la notion de nombre négatif, il faut avoir accepté au préalable l'idée du zéro. Celui-ci était déjà utilisé par les Babyloniens, au IIIe siècle avant Jésus-Christ, mais seulement comme signe de séparation dans l'écriture des nombres (indispensable dans une numération de position, ici de base 60).

Au premier millénaire avant notre ère, les Mayas faisaient de même, dans leur numération de position de base 20. A partir du Ve siècle de notre ère, la numération indienne de base 10, emploie le mot sanscrit « shûnia » (vide) pour désigner la place où nous mettrions 0.

Mais il n'est pas encore question de considérer zéro comme un nombre. C'est ainsi que la réforme du calendrier, au VIe siècle, commence à l'année 1. (Remarquons que bien des gens, ignorant cette particularité de notre calendrier, ont fêté le troisième millénaire en 2000 au lieu de 2001).

En 628, l'Indien BRAHMAGUPTA (598 – env. 665) définit le zéro comme le résultat de la soustraction d'un nombre de lui-même. Il écrit aussi : « lorsque le zéro est ajouté à un nombre ou soustrait d'un nombre, celui-ci reste inchangé, et un nombre multiplié par zéro devient zéro ». Cette fois, il s'agit bien du nombre zéro, mais il ne sera introduit en Europe qu'au XIVe siècle.


Vers le Ier siècle de notre ère, la civilisation chinoise semble avoir été l'une des premières à utiliser les quantités négatives. Les Chinois calculent avec des baguettes : les nombres positifs sont représentés par des baguettes rouges et les nombres négatifs sont représentés par des baguettes noires. LIU HUI (220 – 280) fait partie des premiers à enseigner l'arithmétique à l'aide de ces baguettes.

C'est néanmoins à BRAHMAGUPTA que l'on attribue la découverte des « nombres » négatifs. Sans justification, il donne des règles de calcul permettant d'expliciter des débits dans les comptes.

> *Une dette retranchée du néant devient un bien. Un bien retranché du néant devient une dette. Le produit ou le quotient de deux biens est un bien. Le produit ou le quotient de deux dettes est un bien. Le produit ou le quotient d'un bien et d'une dette est une dette.*

Les quantités négatives font leur entrée au IX^e siècle en Perse dans la résolution d'équations par le mathématicien Abu Ja'far Muhammad ibn Musa AL-KHWARIZMI (env. 790–840).

## 2. Les quantités négatives en Occident

Un obstacle à l'introduction des quantités négatives en Occident est le zéro. De nombreux mathématiciens de l'époque distinguent difficilement le zéro relatif du zéro absolu en dessous duquel rien n'existe. En Europe, les mathématiciens disposent du zéro au XIV^e siècle, et il faudra attendre la fin du XV^e siècle pour voir apparaître des êtres numériques non positifs, qui ne sont pas pour autant acceptés comme nombres à part entière.

Le français Nicolas CHUQUET (1445 – 1500) isole une quantité négative dans un membre d'une équation. On retrouve également ces quantités dans plusieurs travaux de Jérôme CARDAN (1501 – 1576). Il les accepte mais les nomme « feintes ». Très vite, les règles d'utilisation sont établies, et les mathématiciens manipulent les nombres relatifs, mais ils en ont une compréhension très partielle, avec d'étonnantes lacunes. Ils sont longtemps un outil de calcul, facilitant la résolution des équations, pour lesquelles, par ailleurs, on ne retient que les solutions positives.

En 1591, François VIÈTE (1540 – 1603) publie *In artem analyticam isagoge* dans lequel il pose les bases du calcul littéral. A cette époque, les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations sont écartées. En 1637, dans La géométrie, René DESCARTES (1596 – 1650) qualifie de « moindres que rien » de telles solutions. En géométrie analytique, Descartes place ses axes de façon qu'il n'ait pas à faire intervenir de coordonnées négatives. Il faut attendre l'écossais Colin MACLAURIN (1698 – 1746), puis le Suisse Leonhard EULER (1707 – 1783) pour voir apparaître des axes aux coordonnées positives et négatives. Mais MACLAURIN écrit tout de même : « l'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et qui ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel ». Il faut dire qu'à cette époque les besoins pour les sciences des quantités négatives sont plutôt rares.

Daniel Gabriel FAHRENHEIT (1686 – 1736) conçoit en 1715 un thermomètre pourvu d'une graduation évitant les températures négatives. En 1741, le physicien suédois Anders Celsius (1701 – 1744) fait construire un thermomètre à mercure dont le 0 est défini par le point de congélation de l'eau et le 100 son point d'ébullition. Il faut pourtant attendre le début du XIX^e siècle pour que les températures négatives rentrent dans les mœurs. En 1746, dans *Eléments d'algèbre*, le mathématicien et astronome français Alexis CLAIRAUT (1713 – 1765) donne quelques-unes de ces règles et exprime la nuance entre le signe d'un nombre et celui de l'opération :

> *On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes par exemple joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes et des effets réels, si les dettes surpassent les effets, il ne possédera que du négatif,*

*et la jonction de la fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédait le premier, ou même entièrement négative.*

Le mathématicien et ingénieur Lazare CARNOT (1753 – 1823) précise d'ailleurs :

> *Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?*

## 3. Le négatif se bat pour son statut

Au début du XIX$^{e}$ siècle, les négatifs n'ont pas encore acquis le statut de « nombre ». Un nombre est nécessairement positif. Une quantité, telle une dette, peut prendre une valeur négative en la définissant par opposition à une quantité positive. Mais cette quantité n'est pas considérée comme un nombre en tant que tel.

En 1821, Augustin Louis CAUCHY (1789 – 1857) définit les nombres relatifs comme une partie numérique précédée d'un signe + ou − :

> *Le signe + ou − placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif.*

En fin du XIX$^{e}$ siècle, la pensée mathématique réussit à bien se détacher de la réalité physique. En même temps que les nombres complexes, les nombres négatifs sont acceptés comme nombres à part entière.

L'Allemand Hermann HANKEL (1839 – 1873) exprime clairement la situation :

> *Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique une contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'ils sont donc libres de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ces nombres, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type ».*

## 4. Conclusion

A travers cet article, nous mettons en avant la question du statut et de la représentation mentale du nombre négatif. Plusieurs siècles ont été nécessaires pour découvrir son opposition à celui de nombre positif tout en réfléchissant à l'identité du zéro. Tout comme les jeunes enfants, les mathématiciens de l'époque ont essayé de voir l'aspect cardinal (quantitatif) du nombre négatif, alors que sa compréhension dépasse de loin cette étape.

Pour en savoir plus

C. BOYER, *A History of mathematics*, 1991.
G. IFRAH, *L'histoire universelle des chiffres*, Ed. Robert Laffont, 1994.
C. MELJAC, *Qui donc a inventé les mathématiques ?*, Ed. Louis Audibert, 2003.
Sites Internet :
`Encyclopédie Wikipedia`
`www.educa.rcanaria.es/penelope/fr_confboye.htm` (30 septembre 2006)
`villemin.gerard.free.fr/Biblio/Internet.htm` (30 septembre 2006)

L'internet est une merveilleuse source d'informations, mais... il convient de les recouper : certains sites sont fiables, d'autres non ! De plus, le contenu est très volatile ; c'est pourquoi il est bon d'indiquer la date de consultation. (N.D.L.R.)

Math-Jeunes n°116 S, 13–16, 2007

# Quelques curiosités numériques

Yolande Noël-Roch

## 1. Des Fractions Égyptiennes aux Nombres Strictement Égyptiens

Les problèmes de partage ont de tout temps préoccupé les hommes. Ils ont été résolus très tôt de manière astucieuse, notamment par des méthodes de fausse position (voir par exemple les 87 problèmes du Papyrus de Rhind, 1650 av. J.-C.). Confrontés à une fraction de numérateur différent de 1, les Égyptiens la décomposaient en une somme de fractions de numérateurs 1 (que nous appellerons « fractions unitaires » dans la suite). Par exemple

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Bien que l'on exige que tous les dénominateurs soient différents, une telle décomposition n'est pas unique. On a aussi

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60}$$

D'une façon plus générale, l'égalité

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

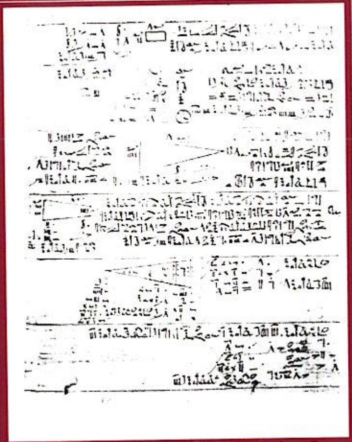
permet d'augmenter autant qu'on le veut le nombre de termes d'une somme de fractions unitaires déjà calculée.

L'*algorithme glouton* permet de décomposer en une somme de fractions unitaires tout rationnel $\frac{a}{b}$ compris entre 0 et 1. Trouvé mais non démontré par Léonard de Pise (plus connu sous le nom de Fibonacci) en 1202, cet algorithme a été démontré par James Joseph Sylvester en 1880. (Voir l'énoncé ci-contre.)

Appliqué à $\frac{7}{15}$, l'algorithme glouton produit la première somme donnée ci-dessus.

Deux remarques s'imposent :

- L'algorithme s'arrête parce que les fractions successives $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... ont des numérateurs naturels de plus en plus petits . En effet, on calcule $\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{an-b}{bn}$. Sachant que $\frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$, on déduit $an - a < b$ donc $an - b < a$. On finit nécessairement par obtenir 0 comme numérateur.
- Cet algorithme ne donne pas nécessairement la somme faisant intervenir un nombre minimum de termes. L'application de l'algorithme donne $\frac{9}{20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}$ alors que $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.



Le papyrus de Rhind

### L'Algorithme Glouton

- Soient $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $b$ par $a$. On peut aussi dire que $q$ et $r$ sont les naturels pour lesquels $b = aq + r$ avec $0 \leqslant r < a$.
  - si $r = 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{1}{q}$.
  - si $r \neq 0$, alors soit $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} - \frac{1}{q+1}$. On a $\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a'}{b'}$
- on repart de l'item initial en remplaçant $a$ par $a'$ et $b$ par $b'$

En 1963, R. L. Graham a publié des résultats relatifs aux *Nombres Strictement Égyptiens.*
4 est un nombre Égyptien parce que $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ mais il n'est pas Strictement Égyptien.
Sont appelés Strictement Égyptiens les naturels qui peuvent s'écrire comme somme de naturels tous différents dont la somme des inverses vaut 1.
Par exemple 11 et 78 sont Strictement Égyptiens puisque

$$11 = 2 + 3 + 6 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$78 = 2 + 6 + 8 + 10 + 12 + 40 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{40} = 1.$$

Voici un théorème démontré par R. L. Graham :
*Tout nombre naturel strictement supérieur à 77 est strictement égyptien.*
Vous pouvez trouver la liste exhaustive de nombres Strictement Égyptiens sur le site `http//perso.orange.fr/jean.paul davalan/arit/egy/index.html`

## 2. Nombres et magie

Un peu de mathématique et beaucoup de comédie permettent de faire croire que l'on est un calculateur prodigieux, que l'on perçoit ce qui se passe dans la tête des autres, dans la calculatrice sans voir ce qu'elle affiche. La plupart du temps, la magie ne peut opérer qu'une seule fois.

Voici quelques exemples. Nous vous laissons le plaisir d'élucider les « tours de magie » suivants.

Le Calculateur Prodige (CP) s'adresse à un cobaye (C) muni d'une calculatrice. Il lui demande d'introduire dans sa calculatrice un nombre de quatre chiffres qu'il communique, de le multiplier par 137 et de multiplier le résultat par 73. Muni uniquement d'un papier et d'un crayon, CP a noté le résultat sur papier avant que C ne l'obtienne sur sa calculatrice !

- CP dicte le nombre « douze millions trois cent quarante cinq mille six cent septante neuf » à C qui l'entre sur sa calculatrice.
- CP demande à C de choisir en le communiquant un nombre de 1 à 8, soit $a$. C doit multiplier le nombre déjà entré par $a$ et ensuite multiplier le résultat par 9. Avant que C ne l'ait obtenu sur sa calculatrice, CP a noté sur papier le produit final.

CP demande à C de choisir un nombre de trois chiffres (soit $a$), de permuter les deux chiffres extrêmes pour obtenir un nouveau nombre de trois chiffres (soit $b$), de calculer le nombre le nombre de trois chiffres égal à $|a - b|$ (soit $c$), de permuter les deux chiffres extrêmes de $c$ pour obtenir le nombre $d$ et enfin de calculer $c + d$. Depuis longtemps, CP a deviné le résultat final !

| Lu | Ma | Me | Je | Ve | Sa | Di |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |

Le magicien exploite une page de calendrier, par exemple celle de mars 2007 ! Il donne un marqueur et demande à un cobaye d'entourer un tableau carré de 16 nombres. Cela étant fait, il tourne le dos au calendrier et donne les consignes suivantes :
- Choisis un nombre parmi les 16, entoure-le et barre tous les autres nombres de la même ligne et de la même colonne.
- Choisis un nombre non barré et recommence la même opération.
- Recommence une dernière fois
- Sans annoncer le résultat, additionne les trois nombres entourés au seul nombre non barré qui reste.

Le magicien, tournant toujours le dos au calendrier, donne la somme obtenue.

# 3. Des nombres très particuliers

A. Nous avons déjà rencontré le nombre 1089 dans la section « Nombres et magie ».
*Calculez et comparez les nombres $k \times 1089$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant 9$ : les multiples apparaissent deux par deux comme « nombres renversés ».*

> *Si $k \times 1089 =$ "abcd",*
> *alors $(10-k) \times 1089 =$ "dcba".*

*Pouvez-vous trouver d'autres nombres qui possèdent la même propriété ?*

B. *Si $9 \times a$ est le « renversé » de $a$, les nombres $k \times a$ et $(10-k) \times a$ sont-ils nécessairement renversés l'un de l'autre pour toutes les valeurs de $k$ comprises entre 1 et 9 ?*

C. *Calculez le double, le triple, le quadruple, le quintuple, le sextuple du nombre $a = 157\,894\,736\,842\,105\,263$.*
*Les cinq produits s'écrivent en coupant en deux blocs la suite des chiffres qui permettent d'écrire $a$ et en permutant ces deux blocs ! Pouvez-vous trouver un autre nombre $b$ dont quelques multiples s'écrivent en permutant deux blocs de chiffres de $b$ ?*

Les questions ci-dessus peuvent être abordées de beaucoup de manières différentes. Ne lisez pas la suite avant d'avoir vous-même cherché à y répondre. Pour y répondre, nous n'utiliserons que des connaissances disponibles en fin du premier degré de l'enseignement secondaire.

Dans ce qui suit, "$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n$" est l'écriture d'un nombre de $n$ chiffres et $a_1 \neq 0$.

A. Si $9\times$"$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n$" $=$ "$a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1$", alors $a_1 = 1$ et $a_n = 9$.

$\boxed{1}$ Cette première remarque permet de démontrer qu'il n'existe aucun nombre de deux chiffres ni de trois chiffres qui est renversé par multiplication par 9. En effet, 19 ne l'est pas. Quant à la candidature de "$1c9$", le chiffre $c$ serait solution de l'équation

$$(109 + 10c) \times 9 = 901 + 10c$$

dont la solution $c = -1$ n'est pas un chiffre !

$\boxed{2}$ Pour les nombres de quatre chiffres, la condition "$1rs9$" $\times 9 =$ "$9sr1$" produit l'équation

$$(1009 + 100r + 10s) \times 9 = 9001 + 100s + 10r$$

ou encore, après réduction et simplification

$$8 + 89r = s.$$

$r$ et $s$ étant des naturels compris entre 0 et 9, la seule solution est $r = 0$ et $s = 8$. **Parmi les nombres de quatre chiffres,** 1089 **est donc le seul qui possède la propriété A.**

$\boxed{3}$ Continuons la recherche pour les nombres de cinq chiffres, en utilisant le support de la multiplication écrite : nous recherchons les chiffres cachés sous $r_1$, $r_2$ et $r_3$ dans

| reports | 0 | | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | 9 |
| | | | | $\times$ | 9 |
| $9a$ | 9 | $r_3$ | $r_2$ | $r_1$ | 1 |

Le chiffre $r_1$ ne peut être que 0 ou 1.

- Si $r_1 = 1$, tenant compte du report, $9 \times r_3$ doit avoir 3 comme chiffre des unités, donc $r_3 = 7$ et on a

| reports | 0 | | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | $r_2$ | 7 | 9 |
| | | | | $\times$ | 9 |
| $9a$ | 9 | 7 | $r_2$ | 1 | 1 |

  Aucune solution n'est manifestement possible !

- Si $r_1 = 0$, nous devons avoir $r_3 = 8$, comme le montre le tableau suivant

| reports | 0 | 8 | 8 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | $r_2$ | 8 | 9 |
| | | | | $\times$ | 9 |
| $9a$ | 9 | 8 | $r_2$ | 0 | 1 |

  Toujours en tenant compte des reports nécessaires, $r_2$ doit être solution de

$$8 + 9 \times r_2 = 80 + r_2$$

  Donc $r_2 = 9$ et 10 989 **est le seul nombre $a$ de cinq chiffres tel que $a$ et $9a$ sont renversés l'un de l'autre**. Une calculatrice permet de vérifier rapidement qu'il en est de même pour $2a$ et $8a$, $3a$ et $7a$, $4a$ et $6a$.

La recherche ci-dessus dépasse le cadre des nombres de cinq chiffres : nous avons prouvé que

> si "$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$" $\times 9 =$ "$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$", alors $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_{n-1} = 8$ et $a_n = 9$.

$\boxed{4}$ Nous vous laissons le soin de vérifier que

> L'ensemble des nombres $109 \cdots 989$ dans lesquels la partie centrale ne contient que des chiffres 9 ont les propriétés citées en A, quel que soit le nombre de chiffres 9.

Nous connaissons donc une infinité de nombres solutions du problème posé en A. *Mais les nombres cités dans l'encadré ci-dessus sont-ils les seules solutions du problème ? Et qu'en est-il de la question B ?*

B. Schématisons la recherche d'un nombre de huit chiffres. Nous recherchons des valeurs possibles pour $r_1$, $r_2$, $r_3$ et $r_4$ dans la multiplication écrite suivante

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| reports | 0 | 8 | | | | 8 | 8 | |
| $a$ | 1 | 0 | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | 8 | 9 |
| | | | | | | | $\times$ | 9 |
| $9a$ | 9 | 8 | $r_4$ | $r_3$ | $r_2$ | $r_1$ | 0 | 1 |

Pour obtenir le report 8 nécessaire en deuxième colonne à partir de la gauche, $r_1$ doit valoir 8 ou 9. Avec $r_1 = 8$, il est possible de continuer le processus pour déboucher sur le nombre 10 819 089 dont le produit par 9 est 98 091 801.
Par contre, si nous le multiplions par 2 et par 8, les deux produits obtenus ne sont pas renversés l'un de l'autre.

**Conclusion :**

> Les nombres de l'encadré précédent ne sont pas les seules solutions au problème A.
> Si un nombre $a$ est tel que $9a$ est le renversé de $a$, il n'en est pas nécessairement de même pour $ka$ et $(10-k)a$ pour tout $k$ compris entre 1 et 9.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **reports** | | | | | | |
| | **1** | | | | | |
| | | | | | **×** | **3** |
| | | | | | | **1** |
| **reports** | | | | | **2** | |
| | **1** | | | | | **7** |
| | | | | | **×** | **3** |
| | | | | | **7** | **1** |
| **reports** | | | | **1** | **2** | |
| | **1** | | | | **5** | **7** |
| | | | | | **×** | **3** |
| | | | | **5** | **7** | **1** |
| **reports** | | | **2** | **1** | **2** | |
| | **1** | | | **8** | **5** | **7** |
| | | | | | **×** | **3** |
| | | | **8** | **5** | **7** | **1** |
| **reports** | | **0** | **2** | **1** | **2** | |
| | **1** | | **2** | **8** | **5** | **7** |
| | | | | | **×** | **3** |
| | | **2** | **8** | **5** | **7** | **1** |
| **reports** | **1** | **0** | **2** | **1** | **2** | |
| | **1** | **4** | **2** | **8** | **5** | **7** |
| | | | | | **×** | **3** |
| | **4** | **2** | **8** | **5** | **7** | **1** |

C. Toujours avec les mêmes moyens rudimentaires, il est facile de construire chiffre après chiffre un nombre "$a_1 a_2 \cdots a_n$" dont le produit par un nombre $k$ est "$a_2 a_3 \cdots a_n a_1$"

Choisissons par exemple $a_1 = 1$ et $k = 3$. On obtient successivement un chiffre après l'autre en appliquant l'algorithme de la multiplication écrite (voir ci-contre).

Mais peut-être le nombre 142 857 vous met-il sur une autre piste ? Lorsqu'on divise 1 par 7, il apparaît comme la période de l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$.
Et si on veut obtenir les écritures décimales des nombres $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, il est inutile de recommencer une division écrite : la division de 3 par 7 se lit à partir du reste 3 à la deuxième étape, et la période 428571 de $\frac{3}{7}$ se lit à partir du deuxième chiffre de la période de $\frac{1}{7}$.

| | |
|---|---|
| 1 0 | 7 |
| 7 | 0, 1 4 2 8 5 7 |
| 3 0 | |
| 2 8 | |
| 2 0 | |
| 1 4 | |
| 6 0 | |
| 5 6 | |
| 4 0 | |
| 3 5 | |
| 5 0 | |
| 4 9 | |
| 1 | |

De même, la période 857142 de $\frac{6}{7}$ se lit à partir du reste 6 à la quatrième étape, etc. Sans nouveau calcul, cette lecture de la division écrite donne

$$6 \times \frac{1}{7} = 6 \times 0,\underline{142\,857} = \frac{6}{7} = 0,\underline{857\,142}, \text{ d'où } 142\,857 \times 6 = 857\,142$$

De manière analogue, divisez 3 par 19 pour découvrir le nombre $a = 157\,894\,736\,842\,105\,263$ exploité dans la question C. Parmi les restes successifs, les restes 15, 18, 9, 12 et 6 donnent les propriétés de $5a$, $6a$, $3a$, $4a$ et $2a$.
La méthode permet de découvrir de nouveaux exemples à volonté. Il faut remarquer que la multiplication ne peut pas modifier le nombre de chiffres de la période !

*Math-Jeunes n°116 S, 17–21, 2007*

# Les nombres qui fonctionnent à l'envers

**Philippe Tilleuil**

**Un problème anodin admet parfois des solutions inattendues qui, de plus, peuvent donner naissance à des théories ... indispensables.**

**Voici un exemple de ce genre de problème : existe-t-il un nombre entier qui soit égal à son carré ? Si on se limite à des essais numériques, un peu au hasard, on ne trouve que 0 et 1.**

**Mais en algébrisant la question, on voit bien vite qu'il s'agit de résoudre (en nombres entiers) l'équation $x^2 = x$, c'est-à-dire**

$$x^2 - x = 0$$

**dont les *seules* solutions sont $x = 0$ et $x = 1$. Le problème est mort et enterré ! Et pourtant... voyez ci-contre !**

**Cet article a été inspiré par la rubrique « Jeux mathématiques » parue dans le n° 104 (juin 1986) de la revue *Pour La Science*.**

**Un nombre $x$ est automorphe au rang $n$ si et seulement si**

$$\partial_i\left(x^2\right) = \partial_i\left(x\right)$$

**quel que soit l'entier $i$, compris entre 1 et $n$.**

## Les nombres automorphes

Quand on n'essaie pas de résoudre une équation, mais qu'on s'amuse plutôt à chercher autre chose que les solutions évidentes, on observe qu'il y a des nombres qui se reproduisent *partiellement* par élévation au carré. Par exemple,

$$90625^2 = 82128\underbrace{90625} \text{ ou } 109376^2 = 11963\underbrace{109376}$$

Et ces exemples suggèrent un nouveau problème :

> Pour quelle valeur du nombre entier $n$ existerait-il des nombres entiers naturels dont les $n$ premiers chiffres de l'écriture décimale se reproduisent par élévation au carré ?
> On les appelle des nombres *automorphes au rang $n$*.

A nouveau, des essais numériques peuvent donner quelques idées, entre autres celle de raisonner par récurrence sur la valeur de $n$. Ou encore, on peut remarquer que d'après la définition, un nombre $x$ est automorphe au rang $n$ si $x^2 - x$ est un multiple de $10^n$.

## La chasse aux nombres automorphes : le cas court

Quel est le chiffre des unités d'un nombre automorphe au rang 1 ? Pour le savoir, il suffit de faire la liste des carrés des 10 premiers nombres entiers :

| | |
|---|---|
| $x$ est automorphe au rang 1 $\Leftrightarrow$ | le chiffre des unités de $x$ vaut 0, 1, 5 ou 6 |

Pour simplifier le discours, nous noterons $\partial_1(x)$ le chiffre des unités de $x$, $\partial_2(x)$ le chiffre des dizaines, etc. Par exemple :

$$\partial_1(524) = 4,\ \partial_2(524) = 2 \text{ et } \partial_3(524) = 5$$

en convenant que, dès que $i \geqslant 4$ : $\partial_i(524) = 0$.
Les opérateurs $\partial_n$ jouissent de toute une série de propriétés vis-à-vis de l'écriture décimale des nombres. Par exemple, $\partial_3(52400) = \partial_3(524 \cdot 10^2) = \partial_1(524)$. Plus généralement si $M$ est un entier naturel et si $i \geqslant j$ :

$$\partial_i(M \cdot 10^j) = \partial_{i-j}(M)$$

En fait, comme on le montre dans l'encadré ci-contre, les cas $\partial_1(x) = 0$ ou 1 sont triviaux, et cela indépendamment du rang :

> Si $x$ est automorphe au rang $n$ et $\partial_1(x) = 0$ alors $x = 000\dots0$ (avec $n$ zéros). Nous pouvons traduire cela par la formule
> $$\partial_i(x) = 0$$
> valable pour tout entier $i$, compris entre 1 et $n$.
>
> Si $x$ est automorphe au rang $n$ et $\partial_1(x) = 1$ alors $x = 000\dots001$ (avec $n-1$ zéros), ce qui se traduit par la formule
> $$\partial_i(x) = 0$$
> pour tout entier $i$ compris entre 2 et $n$.

Ainsi, les seuls nombres entiers qui pourraient être automorphes de manière non évidente se terminent par 5 ou 6.

### Les cas 0 et 1

**Si $\partial_1(x) = 0$, alors $x$ est un multiple de 10. Donc $x^2$ est un multiple de 100 et $\partial_2(x^2) = 0$. Dès lors, si $x$ est automorphe à un rang au moins 2 :**

$$0 = \partial_2(x^2) = \partial_2(x)$$

**Pareillement, si $\partial_1(x) = \partial_2(x) = 0$, alors $x$ est multiple de 100, d'où $x^2$ est multiple de 10 000 et $\partial_3(x^2) = 0$. Donc, si $x$ est automorphe à un rang au moins 3 :**

$$0 = \partial_3(x^2) = \partial_3(x)$$

**Etc.**

**De même, si $\partial_1(x) = 1$, alors il existe un nombre entier $M$ tel que**

$$x = M \cdot 10 + 1$$

**d'où $\partial_2(x) = \partial_1(M)$ et**

$$x^2 = M^2 \cdot 10^2 + 2M \cdot 10 + 1$$

**Alors**

$$\partial_2(x^2) = \partial_1(2 \cdot M)$$

**et si $x$ est automorphe à un rang au moins 2, $\partial_2(x^2) = \partial_2(x)$. Donc**

$$\partial_1(2M) = \partial_1(M)$$

**ce qui n'est possible que si $\partial_2(x) = \partial_1(M) = 0$. Mais alors, il existe un nombre entier $M'$ tel que $x = M' \cdot 10^2 + 1$, d'où**

$$x^2 = M'^2 \cdot 10^4 + 2M' \cdot 10^2 + 1$$

**et**

$$\partial_3(x^2) = \partial_1(2 \cdot M')$$

**Et si $x$ est automorphe à un rang au moins 3, $\partial_3(x^2) = \partial_3(x)$, de sorte que**

$$\partial_1(2M') = \partial_1(M')$$

**ce qui n'est possible que si $\partial_3(x) = \partial_1(M') = 0$. Etc.**

## La chasse aux nombres automorphes : le cas long

Notons $x$ : un nombre entier naturel,

$x_n$ : le nombre formé des $n$ derniers chiffres à droite de $x$

et remarquons que

> **Proposition 1.** Quel que soit l'entier naturel $x$, les $n$ derniers chiffres à droite de $x^2$ coïncident avec les $n$ derniers chiffres à droite de $x_n^2$

En effet, il existe un entier $M$ tel que

$$x = M \cdot 10^n + x_n$$

et par conséquent

$$x^2 = (M^2 \cdot 10^n + 2M \cdot x_n) \cdot 10^n + x_n^2$$

Cela étant, recherchons les nombres automorphes se terminant par 5. Par exemple :

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 625, \dots$$

> **Proposition 2.** Si $x$ est un nombre automorphe au rang $n+1$ se terminant par 5, le $(n+1)^e$ chiffre de $x$ égale le $(n+1)^e$ chiffre de $x_n^2$ : $\partial_{n+1}(x) = \partial_{n+1}(x_n^2)$.

La démonstration s'établit comme suit. Notons $c = \partial_{n+1}(x)$.

Puisque $x$ est automorphe au rang $n+1$, on a aussi $c = \partial_{n+1}(x^2)$. Donc, d'après la proposition 1,

$$c = \partial_{n+1}(x_{n+1}^2)$$

Mais $x_{n+1} = c \cdot 10^n + x_n$, donc

$$x_{n+1}^2 = c^2 \cdot 10^{2n} + 2c \cdot x_n \cdot 10^n + x_n^2$$

Puisque $x$ se termine par 5, $2c \cdot x_n$ est multiple de 10 de sorte que $c^2 \cdot 10^{2n} + 2c \cdot x_n \cdot 10^n$ est multiple de $10^{n+1}$. Par conséquent

$$c = \partial_{n+1}(c^2 \cdot 10^{2n} + 2c \cdot x_n \cdot 10^n + x_n^2) = \partial_{n+1}(x_n^2)$$

On constate alors que, quel que soit le naturel $k$, il n'existe qu'un seul nombre automorphe de $k$ chiffres se terminant par 5. (Encadré ci-contre)

**Les nombres automorphes se terminant par 5**

**Puisque $x_1 = 5$, on a $\partial_2(x) = \partial_2(25) = 2$, d'où $x_2 = 25$.**
**Ensuite**
**$\partial_3(x) = \partial_3(625) = 6$ et $x_3 = 625$, etc.**

| $n$ | $x_n$ | $x_n^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 25 |
| 2 | 25 | 625 |
| 3 | 625 | 390625 |
| 4 | 0625 | 390625 |
| 5 | 90625 | 8212890625 |
| 6 | 890625 | 793212890625 |
| 7 | 2890625 | 8355712890625 |
| ... | ... | ... |

Recherchons à présent les nombres automorphes se terminant par 6. Nous noterons cette fois $y$ un de ces nombres et $y_n$ le nombre formé des $n$ chiffres de droite de $y$. Par exemple :

$$y_1 = 6, \quad y_2 = 76, \quad y_3 = 376, \ldots$$

**Proposition 3.** Si $y$ est un nombre automorphe au rang $n+1$ se terminant par 6, le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre de $y$ égale le complémentaire à 10 du $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre de ${y_n}^2$ :

$$\partial_{n+1}(y) = 10 - \partial_{n+1}(y_n^2)$$

La démonstration suit le même déroulement que celle de la proposition 2. Notons $d = \partial_{n+1}(y)$.

Puisque $y$ est automorphe au rang $n+1$, on a aussi $d = \partial_{n+1}(y^2)$. Donc, d'après la proposition 1,

$$d = \partial_{n+1}(y_{n+1}^2)$$

Mais $y_{n+1} = d \cdot 10^n + y_n$, donc

$$y_{n+1}^2 = d^2 \cdot 10^{2n} + 2d \cdot y_n \cdot 10^n + y_n^2$$

Puisque $y$ se termine par 6, $2y_n$ se termine par 2 et le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre de $2d \cdot y_n \cdot 10^n$ est le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre de $2d \cdot 10^n$. Notons $b = \partial_{n+1}(y_n^2)$. On a alors

$$d = \partial_{n+1}((2d+b) \cdot 10^n) = \partial_1(2d+b)$$

ce qui signifie que $2d + b = d$ à des multiples de 10 près, ou encore que $d + b$ est un multiple de 10. La cause est entendue !

**Les nombres automorphes se terminant par 6**

**Puisque $y_1 = 6$, on a $\partial_2(y_2) = 10 - \partial_2(36) = 7$, d'où $y_2 = 76$.**
**Ensuite**
**$\partial_3(y_3) = 10 - \partial_3(5776) = 3$ et $y_3 = 376$, etc.**

| $n$ | $y_n$ | $y_n^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 36 |
| 2 | 76 | 5776 |
| 3 | 376 | 141376 |
| 4 | 9376 | 87909376 |
| 5 | 09376 | 87909376 |
| 6 | 109376 | 11963109376 |
| ... | ... | ... |

À nouveau, le résultat obtenu nous permet de déterminer univoquement autant de chiffres du nombre automorphe que nous le voulons (encadré du bas de la page précédente). Nous pouvons aussi résumer les deux tableaux obtenus à l'aide de deux expressions décimales *illimitées* *à gauche*, que nous appellerons les deux (seuls) nombres automorphes non triviaux :

$$x = \ldots 106619977392256259918212890625$$

$$y = \ldots 893380022607743740081787109376$$

Remarquons au passage que, quel que soit $n \geqslant 2$, $\partial_n(x) + \partial_n(y) = 9$.

## Les nombres 10-adiques, et la manière de s'en servir

Admettons qu'il y ait un sens à écrire des nombres entiers dont l'écriture décimale ne s'arrête pas vers la gauche ! On note $\mathbb{Z}_{10}$ l'ensemble des nombres entiers, éventuellement illimités à gauche, écrits en base 10, et on appelle de tels nombres des *nombres entiers 10-adiques*. Mais pour mériter cette appellation de *nombres*, ces nouveaux venus doivent pouvoir être les objets d'opérations, analogues à celles définies sur les entiers. Pour ce qui concerne l'addition, on peut écrire par exemple :

$$\begin{array}{rcccccccc} & \ldots & 7 & 4 & 9 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ + & \ldots & 8 & 5 & 2 & 6 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ \hline & \ldots & 6 & 0 & 1 & 9 & 7 & 9 & 1 & 8 \end{array}$$

$$\ldots 74936521 + \ldots 85261397 = \ldots 60197918,$$

résultat que l'algorithme de l'« addition écrite » rend transparent.

Seule nouveauté dans ce calcul : les retenues qui se reportent *indéfiniment* vers la gauche. Mais aussi naturel que ce prolongement de l'addition puisse paraître à première vue, il implique déjà une petite surprise. Par exemple : $22 + \ldots 999999999999978 = \ldots 0$.

$$\begin{array}{rcccccccc} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ + & \ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ \hline & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

En d'autres termes, si on donne vie au nombre $\ldots 999 \ldots 9978$, alors notre prolongement de l'addition en fait l'opposé de 22. Les nombres négatifs ont-ils donc disparu ? Effectivement dans notre ensemble de nombres 10-adiques, tout élément admet un opposé. Mais attention : l'opposé d'un naturel n'est quand même pas un naturel !

Nous avons remarqué que nos deux nombres automorphes non triviaux $x$ et $y$ étaient liés par la formule $\partial_n(x) + \partial_n(y) = 9$ pour $n \geqslant 2$. Additionnons-les : En additionnant les chiffres des unités, on obtient 11 ; on marque 1 et on reporte 1. Dans la colonne des dizaines, on obtient 10 : on marque 0 et on reporte 1, puis...

$$x + y = \ldots\ 00000001 = 1$$

Pour la multiplication, l'algorithme de la « multiplication écrite » montre que, là aussi, l'opération usuelle sur les nombres entiers peut être prolongée : les chiffres du résultat sont obtenus à partir de la droite, à chaque fois en un nombre *fini* d'opérations.

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & & \ldots & \ldots & 9 & 2 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ \times & & & & \ldots & \ldots & \ldots & 4 & 2 & 5 & 7 \\ \hline & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 4 & 9 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & 6 & 3 & 8 & 2 & 1 & 5 & \\ & \ldots & \ldots & 8 & 5 & 5 & 2 & 8 & 6 & & \\ & \ldots & 7 & 1 & 0 & 5 & 7 & 2 & & & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ \hline & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 6 & 2 & 5 & 1 \end{array}$$

On peut pareillement prolonger la division euclidienne : il suffit de l'organiser à l'envers, afin d'épuiser la succession des chiffres à gauche d'un nombre 10-adique.

Par exemple, le calcul de la division de 1 par 3 s'organise de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| $\ldots\, 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 1$ | $\ldots\, 0\ 0 \ \ldots\ 0\ 0\ 0\ 3$ |
| $\ldots\, 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0\ 2\ 1$ | $\ldots \ldots\ 6\ 6\ 7$ |
| $\ldots\, 9\ 9\ 9 \ldots 9\ 9\ 9\ 8\ 0$ | |
| $\ldots\, 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 1\ 8$ | |
| $\ldots\, 9\ 9\ 9 \ldots 9\ 9\ 8\ 0$ | |
| $\ldots\, 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1\ 8$ | |
| $\ldots\, 9\ 9\ 9 \ldots 9\ 8\ 0$ | |

Il apparaît donc que le résultat est un nombre *entier* 10-adique qui est périodique « à l'envers » :

$$\frac{1}{3} = \ldots 666 \ldots 6667$$

$$\begin{array}{r}
\ldots\ldots\ 9\ \ 9\ \ 9\,9\,9\,9 \\
\times \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 9\,9\,9\,9 \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 9\ \ 9\ \ 9\,9\,9\,1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ 9\ \ 9\ \ 9\,9\,9\,1\phantom{0} \\
\ldots\ldots\ldots\ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\,1\phantom{00} \\
\ldots\ldots\ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\,1\phantom{000} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\phantom{0000} \\
\hline\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0\,0\,0\,1
\end{array}$$

Le plus étonnant, c'est peut-être que l'ensemble des nombres entiers 10-adiques contient les inverses de certains de ses éléments (en dehors de $\pm 1$, en notant que « $-1$ » s'écrit $\ldots 999 \ldots 999$ en langage 10-adique, et qu'effectivement $\frac{1}{\ldots 999 \ldots 999} = \ldots 999 \ldots 999$, ou encore $\ldots 999 \ldots 999^2 = 1$).

En fait, *tous* les nombres entiers 10-adiques terminés (à droite) par 1, 3, 7 ou 9 admettent un inverse qui est encore un nombre *entier* 10-adique.
Par contre, les nombres entiers 10-adiques terminés par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8 ne jouissent pas de cette propriété. Considérons par exemple les deux nombres automorphes non triviaux $x$ et $y$ construits précédemment. Pouvez-vous calculer $x^2$ ? Inutile de vous lancer dans une multiplication ! Nous avons en mains tout ce qu'il nous faut, puisque, $x_n$ étant automorphe, quel que soit $n$, les $n$ chiffres de droite de $x_n^2$ coïncident avec ceux de $x_n$. Donc $x^2 = x$. De même $y^2 = y$. Ne cherchions-nous pas dès le départ des « solutions » de l'équation $x^2 = x$ ?
Calculons aussi $x \cdot y$ :

$$x \cdot y = x \cdot (1 - x) = x - x^2 = 0$$

Dans notre curieux ensemble de nombres, un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs le soit !
La propriété $x \cdot y = 0$ entraîne que, ni $x$ ni $y$ ne peuvent admettre d'inverse. Par exemple, si $y$ avait un inverse $y^{-1}$, on aurait $x = x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = 0$ et de la même façon, $y = 0$, ce qui est incompatible avec $x + y = 1$.
Ce défaut d'inversibilité disparait dès qu'on décide de ne plus travailler en base 10, mais bien en base $p$, où $p$ désigne un nombre *premier* quelconque.
L'ensemble correspondant des entiers p-adiques ne comporte alors aucun « diviseur de zéro », et il est possible de définir des « fractions p-adiques ». On obtient ainsi un ensemble de nombres, appelés les *nombres rationnels p-adiques*, qui ont été définis et étudiés systématiquement par le mathématicien allemand Kurt Hensel.
Ces nombres un peu bizarres ont leur pendant ... en théorie des fonctions : il s'agit de ce qu'on appelle le *développement de Taylor-Mac Laurin* d'une fonction en un point de son domaine. C'est à cause de cette analogie très profonde que les nombres p-adiques permettent de transposer en arithmétique beaucoup de résultats et de méthodes de la théorie des fonctions, et qu'ils sont, à ce titre, essentiels par exemple dans la démonstration du célèbre théorème de Fermat-Wiles (« il est impossible de résoudre en nombres entiers l'équation $x^n + y^n = z^n$ dès que $n \geqslant 3$ »).

K. Hensel
(1861–1941)

Et tout ça parce qu'on a été voir si l'équation $x^2 - x = 0$ admettait plus de 2 solutions. . . !

*Math-Jeunes n°116 S, 22–24, 2007*


**G.W. Leibniz, 1646–1716**

# *Il était une fois . . . les infiniment petits*

**Valérie Henry**

Voulez-vous connaître l'histoire([1]) d'$\varepsilon$ et de ses semblables, les infiniment petits ? Si oui, suivez-moi, grimpons dans la machine à remonter le temps et laissons-nous porter jusqu'au XVII$^{e}$ siècle. Nous débarquons, témoins invisibles, dans le bureau de Gottfried Wilhelm Leibniz.

Il fait déjà presque nuit et ce penseur génial s'interroge sur la vitesse et sur la succession des temps :

> *Le tic-tac rythmique et régulier de l'horloge incite Leibniz à imaginer les sons suspendus dans l'espace : il lui semble voir ce qu'il entend, chaque tic-tac léger éclatant devant ses yeux comme une petite explosion multicolore. Il se concentre sur l'une d'elles dont le son (ou la vision) marque l'instant où elle apparaît puis disparaît, et avec le pouce et l'index de sa main gauche il mesure la distance entre le son déjà disparu et celui qui va venir. (...) Mais si la distance entre les temps devenait plus petite ? (...) Avec une grande délicatesse, il fait s'approcher son index de son pouce. Très petite. (...) Infiniment petite. Ce qui veut dire ? La distance entre les temps est infiniment petite, mais pourtant elle n'est pas rien cette distance. Et si elle n'est pas rien, elle doit être représentée par un nombre. Pas un vrai nombre, (...) mais une fiction utile, un objet imaginaire. Et qui doit être plus petit que tout autre nombre (...) mais plus grand que 0.([1], pp. 141-142)*

Quelques temps plus tard, l'idée de nombres *infiniment petits* ou *infinitésimaux* a fait son chemin dans la communauté des mathématiciens avec plus ou moins de succès :

> *Vous devez les imaginer, debout ensemble sur la scène de l'histoire, les mains jointes derrière le dos, les yeux perdus au loin, ces mathématiciens du XVII$^{e}$ et du XVIII$^{e}$ siècles, Leibniz et Newton, bien sûr, mais aussi les autres, d'Alembert, L'Hospital et Lagrange, portant dentelles et jabots, parfumés, emperruqués et poudrés. Ils ont construit le Calcul et ce qu'ils ont construit fonctionne brillamment. Seulement voilà : ils sont incapables d'expliquer ce qu'ils ont fait.*
> *Une voix s'élève dans le public :*
> – *Que sont précisément des quantités telles qu'une distance infinitésimale, un temps infinitésimal ?*
> – *Ce sont des nombres, c'est certain.*
> – *En êtes-vous sûr ?*
> – *Tout à fait comme des nombres.*
> – *Des éléments idéaux, en fait.*
> – *Ou plutôt comme des nombres mais peut-être pas exactement comme n'importe quel autre nombre. Des fictions. (...)*
> – *Pouvez-vous décrire ces infinitésimaux, nous en dire un peu plus sur eux ?*
> – *Ils se comportent comme des nombres mais naturellement, ils sont plus petits que tout autre nombre. Sinon ils ne seraient pas infinitésimaux.*
> – *Absolument. Petits, très petits.*
> – *Zéro, alors ?*

([1]) Entendez par là un récit imagé qui n'implique que son narrateur. Pour une approche historique plus rigoureuse, le lecteur curieux pourra consulter [7].

– *Non, pas tout à fait zéro, plus grands que ça.*
– *Mais pas tellement plus grands.*
– *Pourriez-vous être plus précis ?*
*Et la chose remarquable, c'est qu'en réponse à cette dernière question, ces hommes brillants ne peuvent que fourrer leurs mains dans leurs poches, laisser le rouge leur monter aux joues et contempler le plafond d'un air sombre. ([1], pp. 144-145)*

Incapables de prouver l'existence de leurs « fictions utiles », les mathématiciens de l'époque n'en restaient pas moins séduits par l'efficacité de ces nombres. Sur base de raisonnements infinitésimaux, ils firent émerger de nombreux résultats que l'on connaît actuellement sous les noms célèbres de lemme de Rolle, règle de L'Hospital, formules de Taylor et Mac Laurin, théorème de Lagrange,...
Malgré tout, il s'avéra impossible de contredire les nombreuses objections que soulevait la supposition de l'existence d'infiniment petits. L'évêque Berkeley, en particulier, s'insurgeait contre cette hypothèse qui violait notamment le principe archimédien([2]).
Peu à peu, les mathématiciens entreprirent alors d'exclure les infinitésimaux de leurs raisonnements et l'analyse se développa progressivement telle qu'elle est enseignée actuellement. Le concept de *limite*, défini formellement pas Weierstrass, fit son apparition et remplaça définitivement, ou presque, celui d'*infinitésimal*. Le titre d'un des ouvrages de Lagrange est d'ailleurs révélateur puisqu'il s'intitule : « Théorie analytique des fonctions - contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants » [Lagrange (1797), [3], p. 77]. Il n'en reste pas moins que c'est l'introduction des nombres infiniment petits qui rendit possible la **découverte** des grands résultats du calcul différentiel.
Remontons maintenant dans notre machine à nous promener dans le temps et survolons les XVIII$^{\text{e}}$ et XIX$^{\text{e}}$ siècles pour atterrir au siècle passé, dans les années 60. Profitant des progrès considérables de la logique mathématique, Abraham Robinson publia en 1961 un ouvrage dans lequel il construisit une extension de l'ensemble des réels contenant notamment un nombre infiniment petit : plus petit que tout réel positif mais plus grand que 0. Cette construction est complexe et fait appel à des outils très sophistiqués de la logique mathématique; mon histoire ne vous intéresserait plus si je vous expliquais son raisonnement. Nous retiendrons donc simplement que les éléments de ce nouvel ensemble sont appelés *hyperréels* et, comme dans les histoires de géants où on suppose que les géants existent, nous allons supposer que les infiniments petits existent. Alors, me direz-vous, que peut-on faire avec des infiniment petits ? Tout ce que les mathématiciens aiment faire, vous répondrais-je. Mais encore ? Je vais vous montrer.
Commençons par définir plus précisément ce que nous entendons pas « infiniment petit ».

**Définitions :** Un nombre $\varepsilon$ sera dit infiniment petit positif (en abrégé, ipp) si

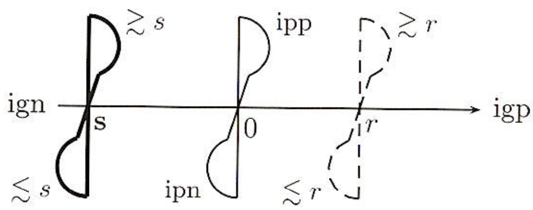
$$\forall r \in \mathbb{R}^+, 0 < \varepsilon < r$$

Un nombre $\varepsilon$ sera dit infiniment petit négatif (en abrégé, ipn) si

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, -r < \varepsilon < 0$$

Une fois les infiniment petits définis, on peut s'amuser un peu. Par exemple, si $\varepsilon$ est ipp, alors on montre facilement que son inverse $\frac{1}{\varepsilon}$ est plus grand que tout réel positif, on dit alors qu'il est infiniment grand positif (ou igp) et on définit de même les infiniment grands négatifs.
On continue ? Considérons maintenant un réel $r$ non nul, on les connaît bien les réels (enfin, on croit), et un infiniment petit $\varepsilon$. Leur somme $r + \varepsilon$ est un nombre qui est plus proche de $r$ que tout nombre réel, on dit qu'il est infiniment proche de $r$ et on note $r + \varepsilon \approx r$. Ces nombres sont qualifiés d'appréciables. Autour de $r$, il y a donc autant d'appréciables qu'il existe d'infiniment petits. Tous ces nombres forment le halo de $r$ et $r$ est leur partie standard, ce que l'on note $r = \mathrm{st}(\alpha)$, $\forall \alpha \approx r$.
Prenons $\alpha \approx r$, $\alpha$ peut être plus grand ou plus petit que $r$, on notera $\alpha \gtrsim r$ dans le premier cas et $\alpha \lesssim r$ dans le second. Un petit dessin pour éclaircir les choses ? Je vous présente la droite hyperréelle :

([2]) La somme de deux infiniment petits étant infiniment petite, pour un élément $\varepsilon$ infiniment petit et pour tout entier $n$, le produit $n\varepsilon$ reste infiniment petit et ne peut donc être rendu plus grand qu'un entier arbitraire, ce qui viole le principe archimédien selon lequel, pour deux nombres positifs $a$ et $b$, on peut toujours trouver un entier $n$ tel que $na > b$.




Sur cette « droite », chaque point de l'axe réel est représentatif d'un réel $r$ et peut être complété par deux demi-bulles constituant le halo de $r$. La demi-bulle située sous $r$ contient les nombres infiniment proches et plus petits que $r$, la demi-bulle située au-dessus de $r$ les nombres infiniment proches et plus grands que $r$.

L'ensemble des hyperréels est donc composé :

- *des réels,*
- *des appréciables autres que les réels,*
- *des infiniment petits,*
- *des infiniment grands.*

Les trois premières catégories forment l'ensemble des *limités.*

Alors si vous avez bien compris ce que je viens de raconter, les propriétés suivantes ne devraient pas vous étonner :

- *la partie standard de tout infiniment petit est 0,*
- *tout réel est sa propre partie standard,*
- *la partie standard de tout hyperréel est unique,*
- *les infiniment grands n'ont pas de partie standard.*

Bon, allons un peu plus loin et définissons, par exemple, ce qu'est une fonction continue[3] avec ces nouveaux nombres. Intuitivement, une fonction est continue si lorsqu'on s'approche très près d'un réel $a$, les valeurs de la fonction s'approchent très près de $f(a)$. Avec les notions que nous venons de voir, cela se traduit presque littéralement :

**Définition**[4] : Une fonction $f$ est continue en $a \in \operatorname{dom} f$ si $\forall\alpha \approx a, f(\alpha) \approxeq f(a)$.

Simple non ? On continue ? Vous vous rappelez la définition de la limite des valeurs d'une fonction ? Je parie que non. Voyons ce que ça donne ici. Décidons que $a$ est un réel adhérent au domaine de $f$ et que $b$ est un réel.

**Définition :** La limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ vaut $b$ si $\forall\alpha \approx a, f(\alpha) \approx b$.

Autrement dit la limite cherchée est la partie standard de $f(\alpha)$ lorsque $\alpha \approx a$. Vous me direz : « Et les limites en l'infini ? et les limites infinies ? » eh bien, c'est pareil, il suffit de considérer $\alpha$ et/ou $b$ infiniment grands selon les cas.

Vous souvenez-vous des fameuses « formes indéterminées » ? Ca ressemblait à « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Avec les hyperréels, on peut exprimer ça facilement : prenons $\varepsilon$ infiniment petit et considérons quelques quotients tels que

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon^3}.$$

Ces trois expressions sont des quotients de deux infiniment petits. Or, le premier vaut visiblement 1, le second est égal à $\varepsilon$ qui est infiniment petit, quant au dernier il se simplifie en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ qui est l'inverse d'un infiniment petit et donc un infiniment grand. Ainsi, selon les cas, le quotient de deux infiniment petits est appréciable, infiniment petit ou infiniment grand, voilà pourquoi on qualifie ce type d'expression d'*indéterminée.*

Prenons un exemple et cherchons la partie standard de $\frac{\alpha-3}{\alpha^2+\alpha-12}$, lorsque $\alpha \approx 3$, ce qui revient à dire que nous cherchons $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2+x-12}$. Lorsque $\alpha \approx 3$, les numérateur et dénominateur sont infiniment petits, on est donc face à une indétermination qu'il faut lever. On a :

$$\frac{\alpha-3}{\alpha^2+\alpha-12} = \frac{\alpha-3}{(\alpha-3)(\alpha+4)} = \frac{1}{\alpha+4}$$

Après ces manipulations, l'expression se révèle infiniment proche de $\frac{1}{7}$ qui est la limite cherchée.

Cela va peut-être un peu vite mais je n'ai pas beaucoup de pages pour vous raconter tout ce que j'ai envie de vous dire... Il faut quand même que je vous parle de dérivées. Quand dira-t-on qu'une fonction $f$ est dérivable en un réel $a$ appartenant au domaine de $f$ ? Si vous avez suivi ce que je viens d'écrire et que vous avez compris ce qu'est une dérivée, vous devriez pouvoir le trouver tout seuls ! . . . Alors, vous avez trouvé ? Bon, pour ceux qui ont un peu de mal, voici une aide :

$f$ est dérivable en $a$ si

$$\forall\alpha \approx a, \frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} \text{est limité.}$$

Et, si c'est le cas, le nombre dérivé vaut

$$f'(a) = \operatorname{st}\left(\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\right).$$

Un dernier exemple et je termine mon histoire : essayons de déterminer le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2$ en $a$. Soit $\alpha \approx a$, il existe $\varepsilon$ ip tel que $\alpha = a+\varepsilon$ et il vient

$$\frac{\alpha^2-a^2}{\alpha-a} = \frac{(a^2+2a\varepsilon+\varepsilon^2)-a^2}{a+\varepsilon-a} = \frac{2a\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2a+\varepsilon$$

dont la partie standard vaut $2a$ qui est le nombre dérivé de $f$ en $a$.

Il me faut malheureusement terminer mon récit ici mais l'histoire des infiniment petits en analyse se prolonge bien au-delà de ces quelques pages au cours desquelles je n'ai pu vous donner qu'un aperçu très restreint des possibilités d'exploitation de ces notions. Si vous en voulez plus, n'hésitez pas à consulter les ouvrages repris dans la bibliographie[5] qui vous offriront un éventail bien plus complet des possibilités qu'offrent les hyperréels en analyse.

(3) La suite du texte suppose une certaine familiarité avec les concepts de fonction continue et de limite. (NDLR)

(4) Le symbole $\approxeq$ signifie *infiniment proche ou égal.*

(5) Pour des raisons de place, nous avons dû insérer la bibliographie de cet article à la page 31. Nous nous excusons de cet inconvénient auprès de l'auteur et de nos lecteurs. (NDLR)

# Jeux

**Yolande Noël-Roch**

## 1. Porter le chapeau

Cinq plaisantins Albert, Bob, Caïm, Damien et Edgard sont réunis autour d'une table ronde et chacun porte un chapeau, soit rouge, soit vert. Chacun voit le chapeau **des autres**, mais pas le sien.

Toute personne qui porte un chapeau rouge dit la vérité.

Toute personne qui porte un chapeau vert ment.

En exploitant leurs déclarations, colorie le chapeau de chacun.

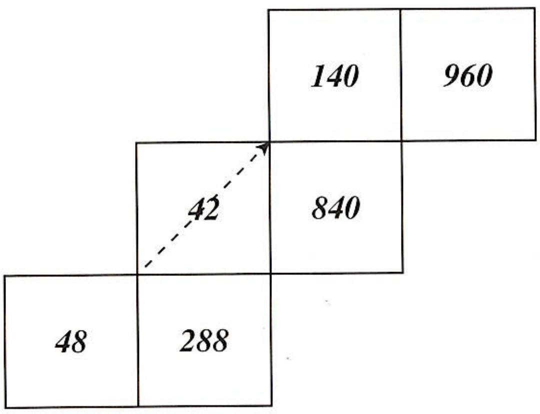
Voici leurs déclarations :

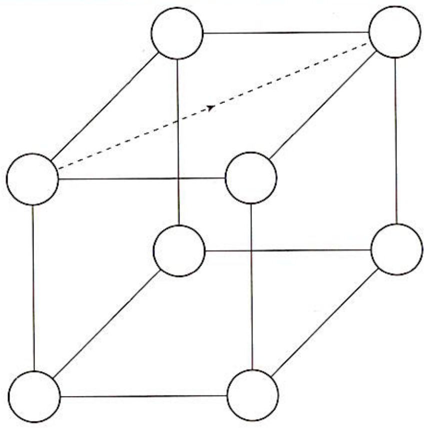
A. Je vois trois chapeaux rouges et un vert.
B. Je vois quatre chapeaux verts.
C. Je vois un chapeau rouge et trois chapeaux verts.
D. Je vois quatre chapeaux rouges.
E. Je suis d'accord avec un de mes amis.


## 2. Cube numérisé

Les nombres de 1 à 8 sont cachés aux sommets d'un cube. Sur un développement du cub est indiqué, pour chacune des faces, le produit des nombres situés en ses quatre sommets.

Localise les nombres aux sommets du cube.



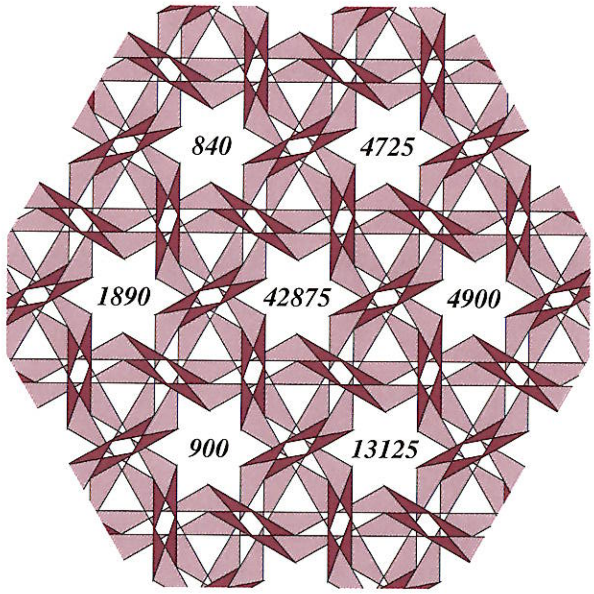



Vous pouvez trouver d'autres « Produits en cubes » et aussi d'autres jeux sur le site `www.conifere.be` qui vous propose un logiciel `JEUX`.

## 3. Un problème de Tartaglia

Niccolo FONTANA, (surnommé Tartaglia) est né à Briescia en 1499 et mort à Venise en 1557.

*Un homme possède trois faisans qu'il souhaite offrir vivants à deux pères et deux fils. Comment peut-il réaliser un partage équitable ?*



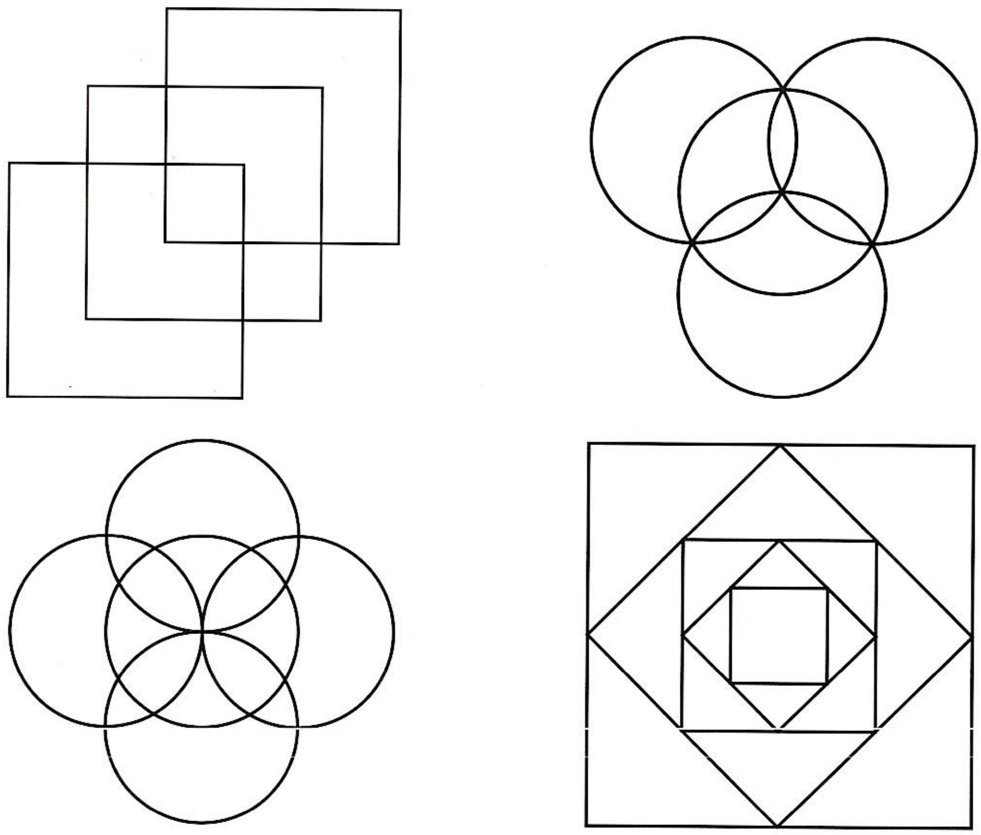

## 4. Hexagones étoilés

Les nombres 2, 3, 5 et 7 sont cachés dans les triangles. Chaque hexagone étoilé contient un nombre qui est le produit des six nombres cachés dans les six triangles qui entourent l'hexagone.

Calcule les contenus des triangles.

## 5. Tracé continu sans recouvrement

Reproduire chacun des quatre tracés sans lever le crayon et sans repasser sur un trait déjà dessiné. Le tracé doit avoir même point de départ et d'arrivée.



## 6. Des nombres particuliers

Certains nombres dont l'écriture nécessite un nombre pair de chiffres présentent une particularité. Voici trois exemples :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 81 | $\longrightarrow$ | $8+1=9$ | $9^2=81$ |
| 3025 | $\longrightarrow$ | $30+25=55$ | $55^2=3025$ |
| 998 001 | $\longrightarrow$ | $998+1=999$ | $999^2=998001$ |

Trouver d'autres nombres de $2n$ chiffres dont la coupure en deux blocs de $n$ chiffres produit le même phénomène.

## 7. Le jeu de Juniper Green

Ce jeu, inventé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, a été signalé dans *Pour la Science*, n° 237, juillet 1997.

$n$ cartes portant les nombres de 1 à $n$ sont rangées sur la table. Deux joueurs s'affrontent. Les règles du jeu sont les suivantes :

- À son tour, chaque joueur prend une carte. Toute carte enlevée n'est plus remise en jeu.
- À son tour, tout joueur doit prendre une carte portant un nombre qui est un diviseur ou un multiple du nombre choisi par l'adversaire au coup précédent.
- Le premier joueur qui ne peut plus prendre aucune carte perd la partie.

Après avoir expérimenté le jeu, vous comprendrez sans doute pourquoi une contrainte supplémentaire est imposée au premier joueur : choisir une carte portant un nombre **pair**.

À la page des solutions, vous trouverez quelques pistes qui n'épuisent pas la recherche d'une stratégie gagnante.

## 8. Menteurs, Nonmenteurs et Imprévisibles

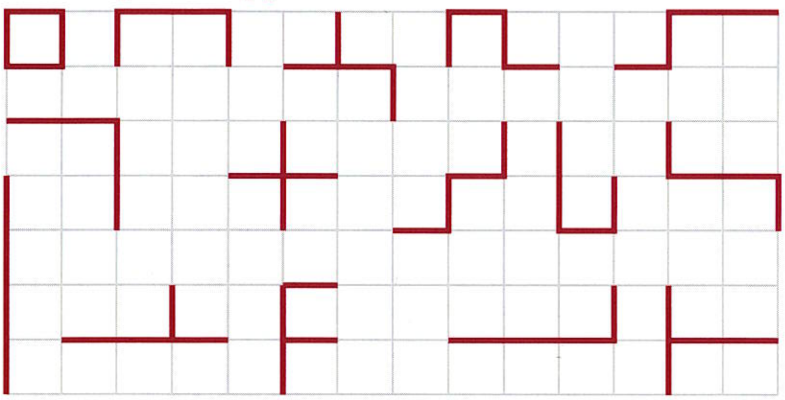
Plongeons-nous dans un monde simplifié partagé en trois familles :

– les Menteurs (qui ne disent **jamais** la vérité)
– les Nonmenteurs (qui disent **toujours** la vérité)
– les Imprévisibles (qui peuvent aussi bien mentir que dire le vérité)

Vous rencontrez Xavier, Yves et Zénobe et vous savez qu'ils représentent les trois familles.


**Bien qu'ils essaient de vous tromper, vous pouvez découvrir la famille de chacun des trois personnages.**

## 9. Qui manque à l'appel ?



Une figure manque à l'appel. Laquelle ?

*Solutions page 32*

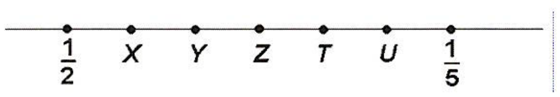
# Olympiades mathématiques

Claudine Festraets

L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 17 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques-uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

## Midi 5

Entre les graduations $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$, quel est le point de graduation $\frac{1}{4}$




(A) $X$ (B) $Y$ (C) $Z$ (D) $T$ (E) $U$

### Solution

Le segment compris entre les graduations $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ mesure $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$ ; il est divisé en 6, donc chaque petit segment mesure $\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{20}$. Or $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-5\times\frac{1}{20}$, donc le point de graduation $\frac{1}{4}$ se trouve 5 graduations après $\frac{1}{2}$ et c'est le point $U$.

## Maxi 4 - Midi 11

Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Le plus petit des trois nombres est

(A) 13 (B) 15 (C) 21 (D) 23 (E) 29

### Solution

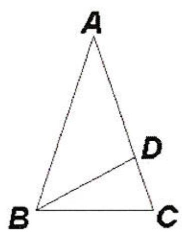
Désignons les trois nombres par $a$, $b$, $c$ et supposons que $a \leqslant b \leqslant c$. On a $a+b \leqslant a+c \leqslant b+c$, d'où

$$\begin{cases} a+b=38 \\ b+c=52 \\ c+a=44 \end{cases}$$

De là, $2a+2b+2c=134$, $a+b+c=67$ et $a=(a+b+c)-(b+c)=67-52=15$.

## Midi 14

Les triangles $BAC$ et $CBD$ sont isocèles et tels que $|AB|=|AC|$, $|BC|=|BD|$ et $|AB|=2|BC|$. Quel est le rapport des aires des triangles $ABC$ et $BCD$ ?




(A) 2 (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $3\sqrt{2}$

### Solution

Les triangles $ABC$ et $CBD$ sont isocèles, donc $\widehat{ABC}=\widehat{BCA}=\widehat{BCD}=\widehat{BDC}$. Les deux triangles sont semblables puisqu'ils ont les mêmes angles. On sait que les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés proportionnels, or $\frac{|AB|}{|BC|}=2$, le rapport demandé est donc 4.

## Midi 20

Une suite de 15 nombres est telle que la somme de trois nombres consécutifs de cette suite vaut toujours 2007. Le quatrième nombre de la suite est 500 et le quinzième est 200. Que vaut le septième nombre ?

(A) 200 (B) 427 (C) 500 (D) 837 (E) 1 307

### Solution

Soit $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,p)$ la suite des 15 nombres, avec $d=500$ et $p=200$. Par hypothèse, $m+n+p=2007$ et $l+m+n=2007$, donc $l=p=200$ et par le même procédé, de proche en proche, on obtient $i=f=c=200$. De là, $d+e+f=500+e+200=2007$, d'où $e=1307$. Et enfin, $e+f+g=1307+200+g=2007$, d'où $g=500$.

## Maxi 5

Le nombre naturel $n$ tel que

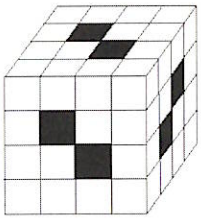
$$2\,007=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

(A) vaut 1 004 (B) vaut 87 (C) vaut 63 (D) vaut 64 (E) n'existe pas

### Solution

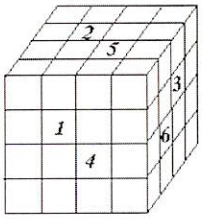
$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}=2\,007$, d'où $n(n+1)=n^2+n=4\,014$. Or 4 014 est compris entre $63^2=3\,969$ et $64^2=4\,096$. Mais $63^2+63=3\,969+63=4\,032>4\,014$ et $62^2+62=3\,906<4\,014$. A fortiori, aucun nombre inférieur à 62 ne peut satisfaire l'égalité $n^2+n=4\,014$, donc $n$ n'existe pas.

## Maxi 10 - Midi 23



Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par six tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?

### Solution




Le cube complet comporte $4^3 = 64$ petits cubes. Un tunnel allant d'une face à la face opposée enlève 4 petits cubes. Mais certains tunnels se croisent.

Ainsi le tunnel 1 enlève 4 petits cubes, mais les tunnels 2 et 3 le croisent et n'enlèvent chacun que trois petits cubes supplémentaires. De même pour les tunnels 4, 5 et 6. Au total, 20 petits cubes sont enlevés, il en reste donc 44.

## Maxi 12

Le nombre de couples d'entiers strictement positifs $(x, y)$ solutions de l'équation $3x + 5y = 501$ est

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

### Solution

$$\begin{aligned} 3x + 5y = 501 &\Leftrightarrow 3x = 501 - y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{501 - y}{3} \\ &\Leftrightarrow x = 167 - \frac{5y}{3} \end{aligned}$$

$x$ étant un entier strictement positif, il faut que $y$ soit divisible par 3 et que $501 - 5y$ soit positif, donc que $y < 100$. Les valeurs de $y$ sont alors les multiples de 3 compris entre 3 et 99 inclus, il y en a 33.

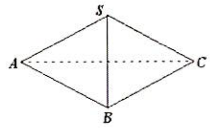
## Maxi 20 - Midi 29

La pyramide de Bhlops repose sur une base carrée. Toutes ses arêtes mesurent 20 m. Pour se rendre d'un sommet de la base au sommet opposé, un scarabée se déplace sur les faces triangulaires et parcourt le chemin le plus court. Quelle est, en mètres, la longueur de ce chemin ?

(A) $10\sqrt{2}$ (B) $20\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$ (E) 40

### Solution

Soit $S$ le sommet et $ABCD$ la base de la pyramide. Supposons que le scarabée se déplace de $A$ vers le sommet opposé $C$.




Les faces sont des triangles équilatéraux. Sur la figure ci-dessus, les faces $SAB$ et $SBC$ ont été aplaties et le chemin le plus court pour aller de $A$ vers $C$ est indiqué en pointillé. La longueur de ce chemin est le double de la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 20, donc $2 \times \frac{20\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

## Maxi 24

Pour $x \neq 1$, la fonction $f$ est définie par $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Dans ce cas, $x =$

(A) $f(y)$ (B) $-f(y)$ (C) $f\left(\frac{1}{y}\right)$

(D) $f(-y)$ (E) $-f(-y)$

### Solution

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x-1} &\Leftrightarrow y(x-1) = x \\ &\Leftrightarrow xy - y = x \\ &\Leftrightarrow xy - x = y \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1} = f(y) \end{aligned}$$

## Maxi 30

Les trois solutions de l'équation $64x^3 - 144x^2 + 92x - 15 = 0$ forment une progression arithmétique. Que vaut la différence entre la plus grande et la plus petite des trois solutions ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{5}{4}$

### Solution

Posons $a - r$, $a$ et $a + r$ les trois solutions de l'équation. Elles forment bien une progression arithmétique de raison $r$.

L'équation s'écrit alors $64(x - (a - r))(x - a)(x - (a + r)) = 0$.

Le coefficient du terme en $x^2$ vaut $-64((a - r) + a + (a + r)) = -64 \times 3a = -192a$, ce qui dans l'énoncé correspond à $-144$, d'où $a = \frac{144}{192} = \frac{3}{4}$.

Le terme indépendant vaut $-64(a - r)a(a + r) = -64a(a^2 - r^2) = -64 \times \frac{3}{4}\left(\frac{9}{16} - r^2\right) = -27 + 48r^2$, ce qui dans l'énoncé correspond à -15, d'où $48r^2 = 27 - 15$, $r^2 = \frac{1}{4}$ et $r = \pm\frac{1}{2}$.

Si $r$ est positif, la différence entre la plus grande et la plus petite solution vaut $a + r - (a - r) = 2r$, si $r$ est négatif, cette différence vaut $a - r - (a + r) = -2r$ et dans les deux cas, la différence vaut 1.

*Math-Jeunes n°116, 30–31, 2007*

# Rallye problèmes

**Nicole Miewis**

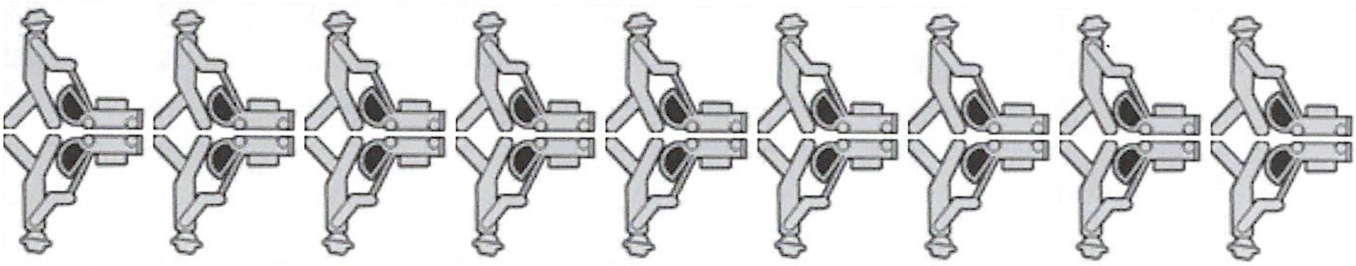
La deuxième étape du rallye problèmes 2006-2007 comporte cinq problèmes comme la première. Tous les problèmes rapporteront le même nombre de points. Pour pouvoir faire partie du classement final, nous vous demandons d'en résoudre au moins quatre à chaque étape.

À vous de trouver le bon raisonnement et d'avoir l'esprit logique. Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. La réponse finale ne suffit pas ; expliquez et justifiez soigneusement vos solutions, même partielles.

Vos solutions aux problèmes de la deuxième étape doivent être envoyées à N. Miéwis, avenue de Péville, 150, 4030 - Grivegnée, muni de la mention « Concours Rallye Math-Jeunes » pour le 1er avril 2007. Les meilleures seront publiées dans votre *Math-Jeunes*.

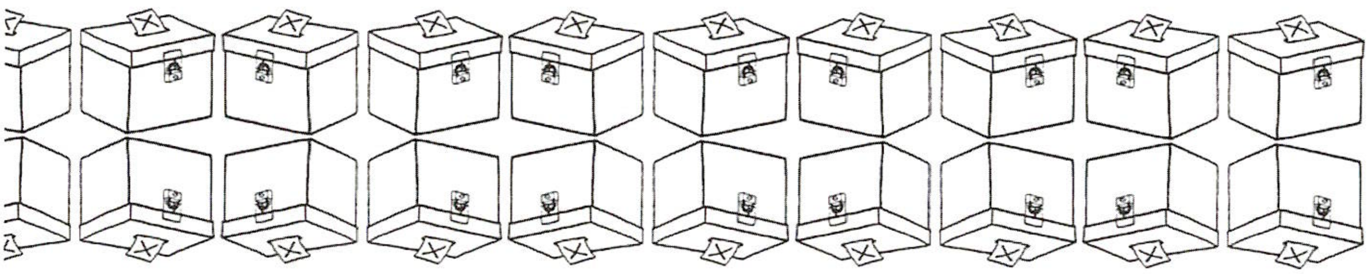
## 6. La pelouse

Depuis qu'il est à la retraite, Jean tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un composteur d'une capacité de 300 litres.
Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume. Jean pourra-t-il faire tenir la tonte d'une saison, du début avril à la fin octobre, soit 24 semaines ?



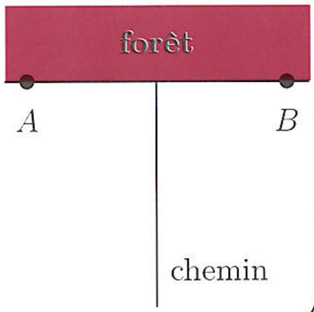
## 7. L'élection.

Aux élections des délégués de classe, Antoine a été élu avec 1254 voix, soit 55 % des suffrages exprimés. 80 % des élèves sont venus voter. Lors du dépouillement, on a trouvé 5 % de bulletins nuls ou blancs, qui n'ont pas été comptabilisés dans les suffrages exprimés. Combien d'élèves n'ont pas voté pour Antoine ?



## 8. Course d'orientation

Le règlement de la course d'orientation prévoit que les concurrents doivent relier le départ ($D$) à un point d'arrivée de leur choix ($A$ ou $B$). Le parcours se déroule sur tout le terrain, mais chaque concurrent doit parcourir exactement 500 m sur le chemin. Ce chemin est parfaitement rectiligne et perpendiculaire à l'orée de la forêt, elle aussi parfaitement rectiligne.
On sait que le départ ($D$) est à 2 000 m du chemin et à 5 400 m de la forêt. Les deux arrivées ($A$ et $B$) sont en bordure de forêt, à 5 000 m du chemin. Quel est le trajet le plus court et quelle arrivée choisir ?

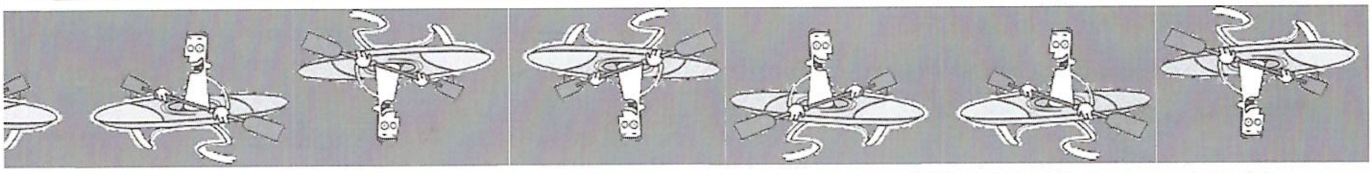



## 9. Les cartes.

Pour mélanger un jeu de 32 cartes, Bertrand a une technique très personnelle. Il prend la carte du dessus du tas et la pose à sa gauche, puis il pose la suivante à sa droite, puis la troisième à nouveau à gauche au-dessus de la première et ainsi de suite en alternant gauche et droite jusqu'à la fin du paquet.
Il place ensuite le paquet de gauche sur le paquet de droite. Si Bertrand avait le temps de mélanger ainsi 2007 fois, pourrait-il retrouver la carte qui au départ était au-dessus du paquet ?

## 10. Oh Lac. . .

Ariane, Barbara et Carmen passent leurs vacances au bord d'un lac parfaitement circulaire. Martin habite au bord du lac. Lorsqu'il fait le tour du lac à pied, il rencontre tout d'abord Ariane, puis Barbara et enfin Carmen.
Par contre, s'il part de chez lui en kayak, il lui faut une minute pour rejoindre Carmen, sept pour rejoindre Barbara et cinq pour retrouver Ariane. Carmen et Barbara sont toutes les deux à 500 m d'Ariane. Quelle est la vitesse du kayak et quel est le rayon du lac ?



## Il était une fois . . . les infiniment petits

### Pour en savoir plus

[1] BERLINSKI D., *La vie rêvée des maths*, Editions Saint-Simon, 2001.

[2] DELEDICQ A. - DIENER M., *Leçons de calcul infinitésimal*, Editions Armand Colin, Paris, 1989.

[3] GAUD D. - GUICHARD J. - SICRE J.-P. - CHRETIEN C., *Des tangentes aux infiniment petits : réflexions et travaux pour la classe*, IREM de Poitiers, 1998.

[4] HENLE J.-M. - KLEINBERG E.M., *Infinitesimal Calculus*, MIT Press, Cambridge, 1979.

[5] HENRY V., Les hyperréels en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, n° 141, 2003, pp. 47-58.

[6] KEISLER H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt Inc., Boston, 1976.

[7] TROMPLER S. - NOËL G., *Vers les infiniment petits*, Commission pédagogique de la SBPMef, 2003.

# Solutions des jeux

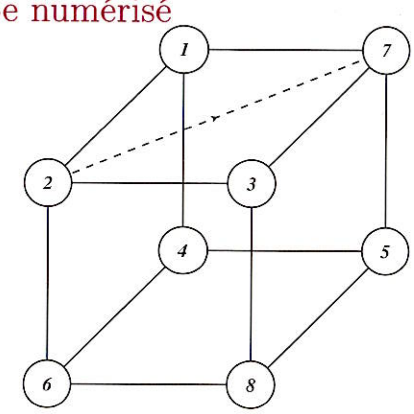
## 1. Porter le chapeau

- (Le chapeau de) D n'est pas rouge parce qu'ils devraient alors l'être tous et A par exemple ne pourrait pas déclarer voir un chapeau vert. Donc **D est vert**.
- Si A est rouge, B, C et E le sont aussi. Alors B ne peut pas déclarer voir 4 chapeaux verts. Donc **A est vert**.
- Si B est rouge, A, C, D et E sont verts. Mais alors la déclaration de C est vraie, et il devrait porter un chapeau rouge ! Donc **B est vert**.
- Si C est rouge, alors E est rouge et cela n'amène aucune contradiction. Nous avons donc trouvé une solution :

A vert, B vert, C rouge, D vert, et E rouge

- Tu peux vérifier qu'elle est la seule solution possible.

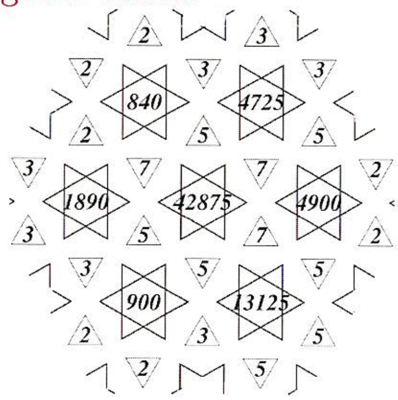
## 2. Cube numérisé




## 3. Un problème de Tartaglia

Trois personnes reçoivent un faisan bien vivant : un grand-père, son fils et son petit fils.

## 4. Hexagones étoilés




## 6. Des nombres particuliers

Quel que soit le naturel $n > 0$, $10^n - 1$ est une solution.

Ensemble des solutions de 4 chiffres : { 2025 ; 3025 ; 9801 }

Quelques autres exemples : 24 502 500 ; 25 502 500 ; 52 881 984

## 7. Le jeu de Juniper Green

- L'obligation de choisir une carte portant un nombre pair en début de jeu est nécessaire pour éviter que le premier joueur gagne toujours ... et en trois coups.

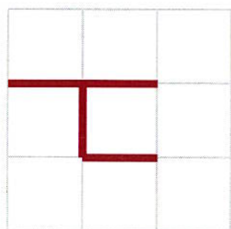
  En effet, prenons par exemple le cas où $n = 100$, si le premier joueur (A) peut retirer 67 du jeu, il oblige le deuxième joueur (B) à retirer 1 ; A prend alors 83 et B a perdu. Le jeu serait rapidement épuisé.
- Plus généralement, à un moment quelconque de la partie, le joueur qui oblige son adversaire à retirer le nombre 1 est gagnant puisqu'il peut ensuite retirer un nombre premier suffisamment grand pour bloquer l'autre joueur (vous pouvez justifier qu'un tel nombre **reste nécessairement en jeu**).
- Une entrée de jeu catastrophique pour A serait de retirer 94. En effet, B entame alors une stratégie gagnante en retirant 47.
- Est gagnant le joueur qui retire un nombre premier dont aucun multiple n'est disponible.

## 8. Menteurs, Nonmenteurs et Imprévisibles

Xavier est un Nonmenteur, Yves est un Imprévisible et Zénobe est un Menteur.

## 9. Qui manque à l'appel ?

Le « seizième » assemblage de quatre allumettes :



# Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française



Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.



***Math-Jeunes***

**Comité de Rédaction :** *C. Festraets, N. Lambelin, J. Miewis, N. Miewis, G. Noël, Y. Noël-Roch, F. Pourbaix, C. Randour, P. Tilleuil, A. Tilleuil-Lepoutre, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.*

***Math-Jeunes Junior***

**Comité de Rédaction :** *F. Drouin, C. Festraets, B. Honclaire, G. Laloux, G. Noël, Y. Noël-Roch, A. Paternottre, F. Pourbaix, S. Trompler, N. Vandenabeele, C. Villers.*

**Mise en page et dactylographie :** *M.-C. Carruana*


Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- ☞ pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

## Tarifs

| Abonnements groupés (5 exemplaires au moins) | | |
|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | Les **deux** revues |
| Belgique | 4 € | 8 € |

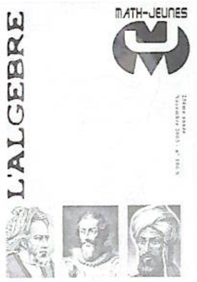
| Abonnements individuels | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Une** des deux revues | | Les **deux** revues | |
| Belgique | 6 € | | 12 € | |
| France (par APMEP) | 8 € | | 16 € | |
| | ✉ | ✉̸ | ✉ | ✉̸ |
| Europe | 18 € | 20 € | 24 € | 26 € |
| Autres pays | 19 € | 22 € | 25 € | 28 € |

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

Anciens numéros :

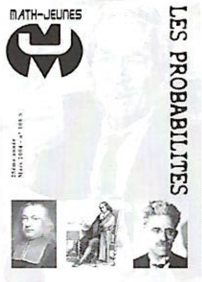
Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition
Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition
Frais d'expédition : consulter le secrétariat

## Complétez votre collection de *Math-Jeunes*.

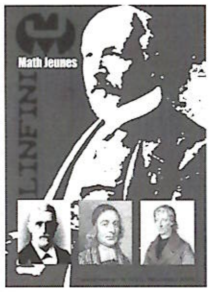



N°106
L'algèbre

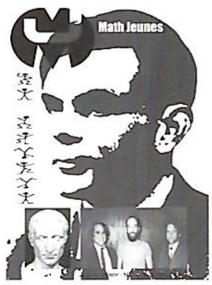

N°107
Les courbes



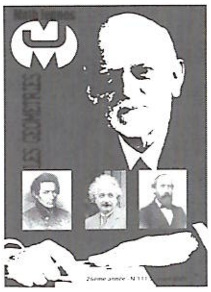

N°108
Les probabilités



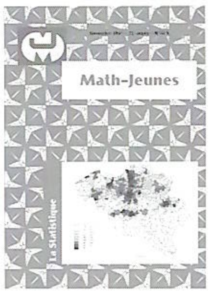

N°109
L'infini



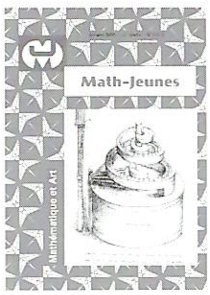

N°110
Le codage



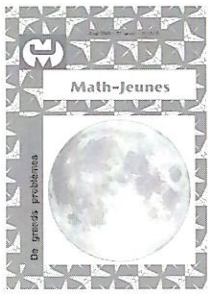

N°111
Les géométries



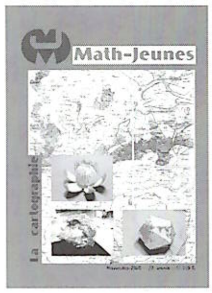

N°112
La statistique




N°113
Mathématique et art




N°114
De grands problèmes




N°115
La cartographie

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € pour les trois numéros 106 à 108 ; 1,5 € pour les trois numéros 109 à 111, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont accessibles à l'adresse `www.sbpm.be/mj2.htm`


*Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :*
– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne
– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu



**© SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.**

**Math-Jeunes**
Périodique trimestriel
24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : G. NOËL
Rue de la Culée, 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée