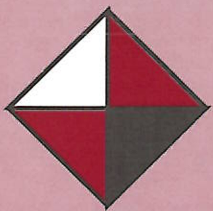
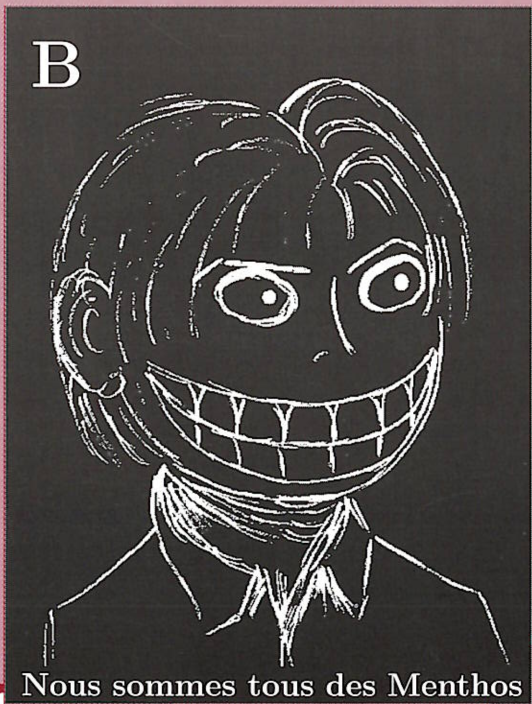
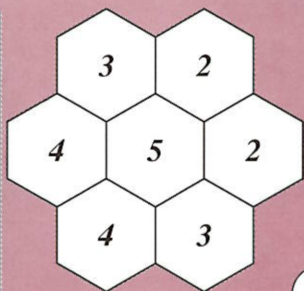
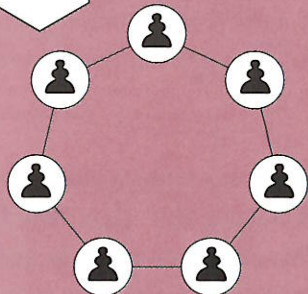
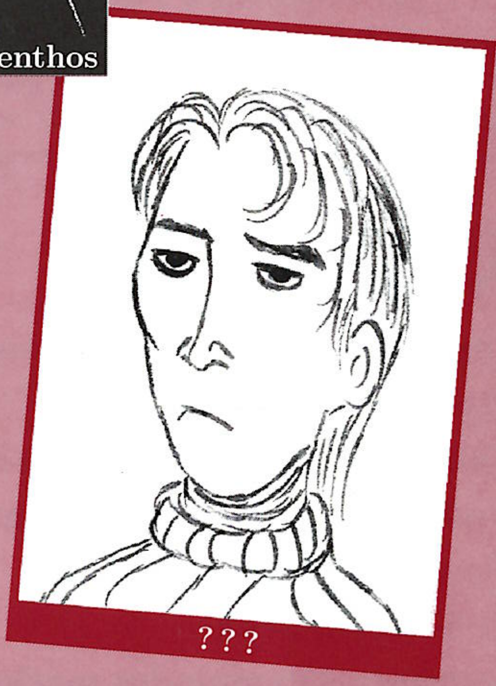
Math-Jeunes











Jeux

Avril 2007 – 28e année – N 117 S

Courrier des lecteurs

Marie-France Guissard nous adresse la note suivante concernant l'article « Nombre négatif, tu n'es pas un moins que rien », publié dans le numéro 116 de *Math-Jeunes* :
On ne peut pas réellement parler de quantités négatives dans le traité d'Al-Khwarizmi car le procédé d'« al jabr » consistait à « restaurer », c'est-à-dire à ajouter aux deux membres les quantités soustraites de façon à n'avoir plus que des quantités positives dans les deux membres des équations. Le lecteur qui souhaite en savoir plus peut se reporter à l'article de Michel Ballieu sur l'art de l'algèbre dans Math-Jeunes 106 S de novembre 2003 et consulter la bibliographie.
S. Trompler tient à remercier notre correspondante pour ces précisions.

Sommaire

Math-Jeunes

Les jeux

S'il est une activité courante, c'est bien le jeu. Courante et même indispensable : beaucoup de vos connaissances ont été acquises par cette voie. Pas étonnant, dans ces conditions, que des jeux apparaissent dans la presse « grand public », que de nombreuses publications leur soient entièrement consacrées, que les sites internet foisonnent et que des jeux, électroniques ou autres, soient présents dans vos armoires ou sur vos tables de travail.

En fait, il est difficile de définir ce qu'est un jeu. Dans un sens très large, on pourrait qualifier de jeu toute activité qui nous procure du plaisir. Le côté inhabituel d'une activité, l'élégance d'un raisonnement, la surprise devant un résultat inattendu peuvent augmenter ce plaisir. C'est bien dans ce sens que nous nous efforçons d'orienter les « jeux » de *Math-Jeunes*.

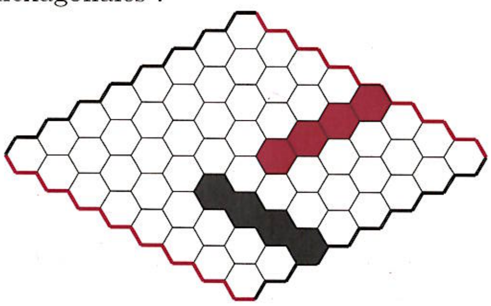
Dans ce numéro, la rubrique « Jeux » est un peu plus importante qu'à l'habitude, c'était bien normal. À côté de jeux algébriques, arithmétiques et géométriques, vous y trouverez aussi des jeux que l'on peut qualifier de « logiques » en ce sens qu'ils nécessitent des raisonnements plutôt que des connaissances ou des calculs. Mais ne nous trompons pas : la logique est une discipline constitutive des mathématiques et peut aussi faire l'objet de calculs ! Si les jeux de ce type vous intéressent particulièrement, vous pouvez en retrouver certains sur un logiciel intitulé « Jeux » téléchargeable sur le site internet `www.conifere.be`.

Attirons aussi l'attention sur le jeu dit des « carrés de Mac Mahon » que nous avons découvert grâce à A. Gazagnes, professeur de mathématiques à Nancy. Dans notre présentation, vous devez assembler les carrés en question sur un développement de cube, mais beaucoup d'autres formes pourraient être envisagées.

Les quatre articles de ce numéro, tous consacrés à des jeux, relèvent de domaines très différents. Les jeux de cartes constituent une des plus anciennes formes de jeux. Dans *Bridge et mathématique*, N. Lambelin ne vous apprendra pas à jouer au Bridge, mais montrera comment des calculs de probabilité permettent de mieux jouer à ce jeu. Ce petit aperçu vous donnera peut-être envie d'en savoir plus. Le domaine géométrique est abordé par F. Drouin (également professeur de mathématiques à Nancy). Avec les sept pièces du *cube soma*, il vous invite à relever plusieurs défis : non seulement reconstituer un cube, mais aussi divers assemblages de parallélipipèdes rectangles. Si vous en trouvez de nouveaux, n'hésitez pas à nous en faire part.

Ce sont également des défis que vous propose N. Vandenabeele dans *Du carré latin au sudoku*. Son texte raccroche les sudokus à des activités mathématiques anciennes puisque remontant à Euler. Enfin, G. Noël s'intéresse aux jeux de stratégie opposant deux joueurs. Il explique ce qu'il faut entendre par *stratégie gagnante* et comment — parfois — en déterminer une... de quoi tuer le plaisir du jeu, mais aussi comprendre ses ressorts internes !

Plusieurs numéros de *Math-Jeunes* auraient pu être consacrés aux jeux sans risque de lassitude. Nous devons bien nous limiter. Nous ne résistons cependant pas à vous présenter aussi un très intéressant jeu de stratégie : le jeu de *Hex*. Il se joue sur une grille ayant la forme générale d'un losange divisé en cases hexagonales :



Chaque joueur, à son tour, dépose un pion dans une case de son choix. Le joueur qui dépose des pions rouges doit relier les deux bords rouges du losange. Celui qui dépose des pions noirs doit relier les bords noirs. Vous pouvez télécharger un jeu de Hex sur `home.earthlink.net/~vanshel/`.

Bon amusement !

Nicolas Klein, de l'Athénée Royal Marguerite Bervoets à Mons, a dessiné les personnages figurant sur la couverture et sur les pages de la rubrique *Jeux*. Merci Nicolas !

Math-Jeunes n°117 S, 2–5, 2007

Bridge et mathématique

Nicole Lambelin

1. Les origines du bridge

Le bridge est un jeu de cartes dont les règles tirent leurs origines de jeux pratiqués dans différents pays :

- le Quadrille, jeu pratiqué en France avec un jeu de 40 cartes (jeu sans 8, 9 et 10) dès le début du 18e siècle.
- le Whist, jeu pratiqué en Grande-Bretagne, à la même époque, avec un jeu de 52 cartes.
- le Boston, jeu inventé par des officiers britanniques au cours du blocus de Boston en 1775 et pratiqué aux Etats-Unis.
- le Dummy (ou Dumby), inventé au début du 19e siècle et qui permettait de jouer lorsque le quatrième joueur manquait en introduisant un « mort ».
- le Vint, joué à la même époque en Russie et qui introduit une hiérarchie dans les couleurs.
- et enfin, le Biritch, jeu russe très proche du bridge.

Le bridge, choisissant les règles les plus intéressantes de ces différents jeux, naît en Europe orientale dans les années 1880 ; il gagne rapidement le reste de l'Europe et les Etats-Unis. Il évolue pour atteindre sa forme quasi définitive en 1925 sous l'impulsion d'Harold Stirling Vanderbilt.

Origine du mot « bridge »

L'hypothèse la plus plausible est la signification de « bridge » qui, en anglais, signifie pont, évoquant ainsi le pont jeté entre les deux partenaires.

Une autre explication fait appel au lieu de « naissance » du bridge qui serait Constantinople qui se situait dans l'ancienne province du Pont.

Cela pourrait aussi être une déformation du mot russe « Biritch », un ancêtre du bridge.

Une autre hypothèse fait référence à la ville de Bridgetown, le premier endroit où le bridge-whist était pratiqué.

2. Les principes du jeu

Le jeu se déroule deux contre deux (Nord–Sud contre Est–Ouest) avec un jeu de 52 cartes de 4 couleurs : les majeures, Pique et Cœur, et les mineures, Carreau et Trèfle. Le donneur distribue toutes les cartes une à une dans le sens des aiguilles d'une montre. Chaque donne se déroule en deux phases : les *enchères* et le *jeu de la carte*. Il est impossible dans un article de décrire les différents systèmes d'enchères et d'expliquer complètement le jeu de la carte. Il faut environ deux ans d'apprentissage pour acquérir une technique de base. Nous allons nous borner à expliquer sommairement son fonctionnement et à montrer quelques règles particulières utilisant des probabilités.

Noms des images

Sur les cartes françaises, les figures représentent des personnages célèbres au Moyen-Âge (époque de création de ces cartes).

	Roi	Dame	Valet
♠	David	Pallas	Ogier
♥	Charles	Judith	Lahire
♦	César	Rachel	Hector
♣	Alexandre	Argine	Lancelot

Avez-vous envie d'apprendre à jouer au bridge ? De nombreux clubs organisent des cours. Consultez les sites de la ligue francophone (`lbf.imingo.net/v2/central.php`) et de la fédération française (`www.ffbridge.asso.fr`) ou jouez sur internet, par exemple sur BBO (`www.bridgebase.com`).

3. Les enchères

Il s'agit, par un dialogue entre les partenaires, d'annoncer le contrat que l'on s'engage à remplir. Le premier à parler est le donneur puis, dans le sens des aiguilles d'une montre, chacun à son tour fait une annonce. Les enchères sont terminées lorsque trois joueurs ont passé consécutivement. Une technique simple pour évaluer sa main est de compter ses *points d'honneur* : on attribue à l'as (A) quatre points, au roi (R) trois points, à la dame (D) deux points et au valet (V) un point. Il y a donc $(4+3+2+1)\times 4 = 40$ points dans un jeu.

Pour commencer les enchères, il faut un peu plus que la moyenne des points par joueur, on ouvrira au niveau de 1 (c'est-à-dire que l'on s'engage à faire $(6+1)$ levées sur les treize en jeu) à partir de 12 points.

Exemple 1		**Exemple 2**	
♠	A D 9 3 2	♠	A D 9 3 2
♥	A 7 2	♥	9 7 2
♦	R 3	♦	R 3
♣	7 6 4	♣	7 6 4
On ouvrira d'*un Pique.*		On passera.	

Le partenaire continuera ou non le dialogue selon son jeu et les déclarations des adversaires. De nombreux livres décrivent la suite des enchères, nous laissons au lecteur intéressé le soin de les consulter. Lorsque trois joueurs ont passé consécutivement, le contrat est fixé.

Le premier joueur à avoir annoncé la couleur de l'atout (ou avoir choisi « sans-atout ») est le *déclarant* ; son partenaire devient le *mort* et étale son jeu sur la table dès que son adversaire de droite a *entamé* (c'est-à-dire a joué sa première carte).

Le bridge à cinq couleurs

C'est en 1937 que ce jeu fut inventé par le psychologue et mathématicien viennois Walter Marsalle. Il ajouta une cinquième couleur (verte sauf en Grande-Bretagne où elle est bleue) de 13 cartes appelée « Feuille » en Autriche, « Couronne » ou « Royale » en Grande-Bretagne et « Aigle » aux Etats-Unis. Les 65 (5×13) cartes sont distribuées aux quatre joueurs qui en recoivent chacun 16, la soixante-cinquième carte, appelée la veuve, est posée sur la table face visible. Le déclarant, une fois le mort étalé, peut échanger n'importe quelle carte de son jeu avec la veuve.

4. Le jeu de la carte

Problème N°1

Combien y-a-t-il de donnes différentes ?

Considérons le premier joueur. Il y a 52 possibilités de lui donner une première carte, 51 possibilités de lui donner une deuxième carte, 50 possibilités de lui donner une troisième carte, ... 40 possiblités de lui donner une treizième carte. Qu'il prenne d'abord l'as de ♠ puis le roi de ♥ ou le roi de ♥ suivi de l'as de ♠ revient au même, il faut donc diviser $52\cdot 51\cdot 50\cdots 41\cdot 40$ par le nombre de permutations des 13 cartes. Que vaut ce nombre de permutations ? Parmi les treize cartes, il y a 13 possibilités de choisir la première, 12 possibilités de choisir la deuxième... et 1 possibilité de choisir la dernière. Il y a donc :
$13\cdot 12\cdot 11\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = 13! = 6\ 227\ 020\ 800$ permutations des 13 cartes.

Le nombre de répartitions des 13 cartes du premier joueur vaut :

$$\frac{52\cdot 51\cdots 41\cdot 40}{13\cdot 12\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = C_{52}^{13} = 635\ 013\ 559\ 600$$

Nombre de possibilités de donner 13 cartes		
Au 2e joueur	Au 3e joueur	Au 4e joueur
$C_{39}^{13} = 8\ 122\ 425\ 444$	$C_{26}^{13} = 10\ 400\ 600$	$C_{13}^{13} = 1$

Généralisation

Pour faciliter l'écriture, on écrira :

$$p! = p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$p!$ (factorielle de p) est le nombre de permutations de p éléments.

Et :

$$C_m^p = \frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-p+1)}{p\cdot(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

C_m^p est le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi m, c'est-à-dire le nombre de choix sans ordre et sans répétition de p éléments pris parmi m éléments.

Comment lire un tel nombre ?

53 644 737 765 488 792 839 237 440 000 se lit cinquante-trois mille six cent quarante-quatre quatrillons sept cent trente-sept mille sept cent soixante-cinq trillions quatre cent quatre-vingt-huit mille sept cent nonante-deux billions huit cent trente-neuf mille deux cent trente-sept millions quatre cent quarante mille.

Il y a donc $C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} \cdot C_{13}^{13} = 53\ 644\ 737\ 765\ 488\ 792\ 839\ 237\ 440\ 000$ donnes possibles.

Problème N°2

Supposons que l'on possède 9 cartes à ♠ en additionnant le nombre de cartes à ♠ du déclarant (supposé au Sud) et du mort (au Nord), les adversaires possèdent donc un résidu de 4 Piques. Quelle est la répartition, a priori la plus fréquente, entre les deux adversaires : 0–4, 1–3 ou 2–2 ?

Les deux adversaires possèdent 26 cartes qui peuvent se répartir de $C_{26}^{13} = 10\ 400\ 600$ façons possibles entre eux.

- Parmi ces 10 400 600 possibilités, il y en a $C_{22}^{13} = 497\ 420$ qui ne possèdent aucun ♠. La probabilité que Ouest ait quatre ♠ vaut donc $\frac{497420}{10400600}$. Et la probabilité que Est ait ces quatre ♠ est la même.

  La probabilité de la répartition 0–4 est donc égale à :
  $$\frac{497420}{10400600} \times 2 \approx 0{,}09565$$
- $C_4^1 . C_{22}^{12} = 2\ 586\ 584$ mains possèdent exactement un Pique, lequel peut être soit à l'Est, soit à l'Ouest.

  La probabilité de la répartition 1–3 est donc égale à :
  $$\frac{2586584}{10400600} \times 2 \approx 0{,}49739$$
- $C_4^2 \cdot C_{22}^{11} = 4\ 232\ 592$ mains possèdent exactement deux Piques. De façon analogue, la probabilité de la répartition 2–2 est égale à : $\frac{4232592}{10400600} \times 2 \approx 0{,}40696$

Probabilités de répartition des résidus

Soient α le nombre de cartes résiduelles, β la répartition de celles-ci, γ la probabilité de la répartition, et δ le nombre de combinaisons de chaque répartition.

α	β	γ	δ
1	0-1	1	2
2	0-2	0,48	2
	1-1	0,52	2
3	0-3	0,22	2
	1-2	0,78	6
4	0-4	0,09565	2
	1-3	0,49739	8
	2-2	0,40696	6
5	0-5	0,03913	2
	1-4	0,28261	10
	2-3	0,67826	20
6	0-6	0,01491	2
	1-5	0,14534	12
	2-4	0,48447	30
	3-3	0,35528	20
7	0-7	0,00522	2
	1-6	0,06783	14
	2-5	0,30522	42
	3-4	0,62174	70
8	0-8	0,00165	2
	1-7	0,02856	16
	2-6	0,17135	56
	3-5	0,47121	112
	4-4	0,32725	70
9	0-9	0,00046	2
	1-8	0,01071	18
	2-7	0,08568	721
	3-6	0,31414	168
	4-5	0,58902	252

Tableau 1

Les probabilités des autres répartitions importantes sont données par le tableau ci-contre. Voyons maintenant à quoi elles peuvent servir.

Supposons, par exemple, que les cartes à ♠ soient les suivantes :

A R V 8 7

N

O E

S

10 9 6 5

Comment jouer pour avoir le maximum de chances de ne pas perdre de levée ?

Deux tactiques sont possibles pour Sud :

La première consiste à jouer l'As en espérant que la dame tombe puis à revenir en Sud par une autre couleur pour jouer le 10 et mettre une petite carte du mort si la dame n'apparaît pas. Au bridge, on appelle cela « faire une impasse ».

Sud ne connaît pas la répartition des quatre ♠ entre Est et Ouest. Les répartitions 0–4, 1–3 et 2–2 correspondent à 2, 8 et 6 combinaisons possibles (colonne δ du tableau 1) détaillées au tableau 2. Cette tactique sera gagnante si la dame est en Ouest (une chance sur deux) ou sèche en Est (un huitième de la répartition 3-1).

Donc

La probabilité *a priori* de gagner est $0{,}5 + 0{,}49739 \cdot \frac{1}{8} \approx 0{,}56217$

La seconde tactique consiste à tirer A et R et espérer que la dame soit sèche ou seconde.

La probabilité *a priori* de gagner est $0{,}49739 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}40696 \approx 0{,}53130$

Il semblerait donc que la première tactique est meilleure mais le raisonnement qui vient d'être fait n'est pas le bon. Le problème de savoir s'il faut ou non faire l'impasse apparaît à la deuxième levée, après que le 10 ait été joué. " Il n'y a de choix entre les deux tactiques que si deux petites cartes sont apparues sur l'As et si une petite carte est apparue en Ouest sur le 10. Les mains possibles restantes sont alors :

Ouest	Est
D x x	x

qui a une probabilité de $\frac{3}{8} \times 0{,}49739 \approx 0{,}18652$

Ouest	Est
x x	D x

qui a une probabilité de $\frac{3}{6} \times 0{,}40696 \approx 0{,}20348$

La probabilité de gagner en faisant l'impasse vaut dès lors :

$$\frac{0{,}18652}{0{,}18652 + 0{,}20348} \approx 0{,}47826$$

et celle de gagner en tirant en tête :

$$\frac{0{,}20348}{0{,}18652 + 0{,}20348} \approx 0{,}52174$$

Il est donc préférable d'utiliser cette deuxième tactique.

Les bridgeurs savent qu'il faut tirer en tête (c'est-à-dire jouer successivement toutes les cartes maîtresses) à partir de 11 cartes lorsqu'il manque le Roi, à partir de 9 cartes lorsqu'il manque la Dame, à partir de 7 cartes lorqu'il manque le Valet. Des calculs similaires à celui que nous venons de faire peuvent le prouver.

5. Conclusion

Nous venons de voir quelques applications de l'analyse combinatoire et des probabilités au bridge. Il n'est cependant pas nécessaire d'être mathématicien pour y jouer, les champions se contentent de connaître par cœur les résultats ! Des mathématiques sont aussi utilisées dans l'organisation des tournois et dans le calcul du classement des joueurs français (où des logarithmes interviennent !).

Signalons aussi que dans la plupart des compétitions officielles, on compare le résultat d'une paire avec ceux des paires ayant le même jeu pour réduire le facteur « chance ».

Ce jeu, difficile mais passionnant, qui fait à la fois appel à la mémoire, au raisonnement, à la concentration, à la persévérance, à l'imagination et à la psychologie, est inclus dans certains cursus scolaires aux Pays-Bas. Il établit des liens entre des joueurs d'horizons et d'âges très divers et il renforce les liens sociaux.

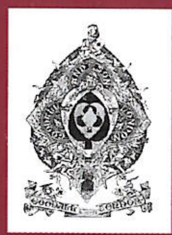
	Ouest	Est
0 – 4	—	D 4 3 2
	D 4 3 2	—
1 – 3	D	4 3 2
	4	D 3 2
	3	D 4 2
	2	D 4 3
	D 4 3	2
	D 4 2	3
	D 3 2	4
	4 3 2	D
2 – 2	D 4	3 2
	D 3	4 2
	D 2	4 3
	4 3	D 2
	4 2	D 3
	3 2	D 4

Tableau 2

Cartes venues d'ailleurs

Carte française datant de la révolution

Carte anglaise de la fin du XIX^e^



Carte viennoise de la période Art Déco

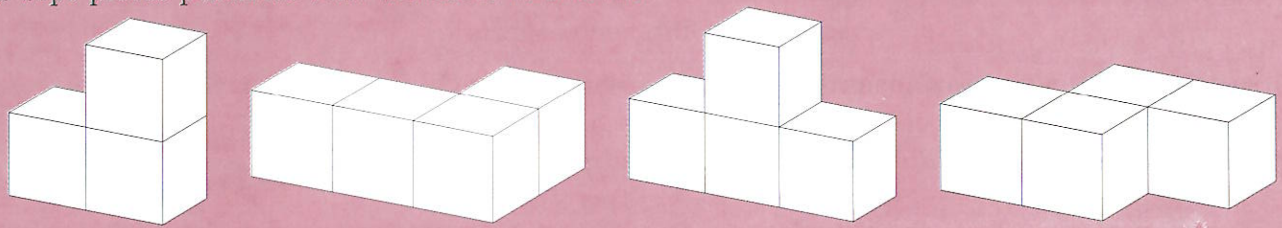
Carte slovaque actuelle

Math-Jeunes n°117 S, 6–9, 2007

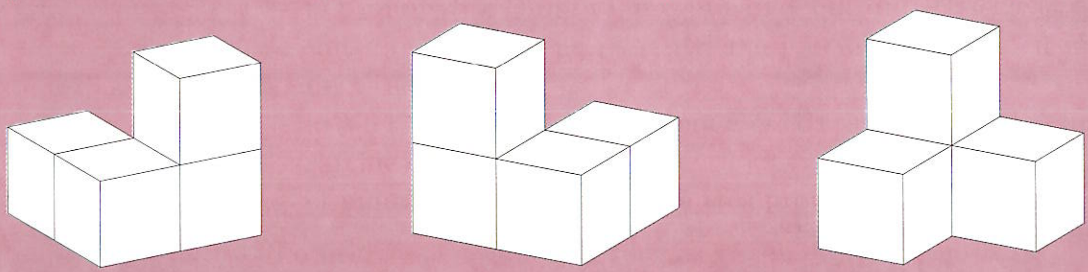
Le cube SOMA

François Drouin

Piet HEIN (1905-1996), poète et scientifique danois, assistait à une conférence faite par Werner HEISENBERG à propos de mécanique quantique. Une bien curieuse idée lui serait venue à l'esprit : quels sont les assemblages de trois ou quatre cubes qui ne sont pas des parallélépipèdes ?
Les sept pièces possibles sont dessinées ci-dessous



1 2 3 4



5 6 7

27 cubes forment ces sept pièces, de quoi avoir envie de réaliser un cube $3 \times 3 \times 3$.
Piet HEIN donna à ce jeu le nom de **« cube SOMA »**.

Ce nom bien curieux semble être une référence au *Meilleur des mondes* (Aldous HUXLEY 1932). On y évoque une substance dont il paraît bien difficile de se passer, comme dans les phrases ci-dessous :
Oh si j'avais mon soma ! Mais dites donc, continua-t-il, comme vous avez l'air morose ! Ce qu'il vous faut, c'est un gramme de soma.
Et ce que je comprends encore moins que tout, [...], c'est pourquoi vous ne prenez pas de soma quand il vous vient vos idées épouvantables.
On disait de lui qu'il aurait pu passer à travers la vie sans jamais prendre un gramme de soma.

Piet HEIN est le créateur d'autres jeux comme le jeu de Hex, mais il est surtout connu au Danemark pour ses milliers de petits poèmes (les « gruks ») écrits dès 1940 suite à l'invasion de son pays par les nazis. Président de l'union anti nazie, il écrivait sous le pseudonyme de Kumbel.

En 1964, il utilisa les « super-ellipses », ou courbes de LAMÉ, entre le rectangle et l'ellipse et dont les équations sont de la forme

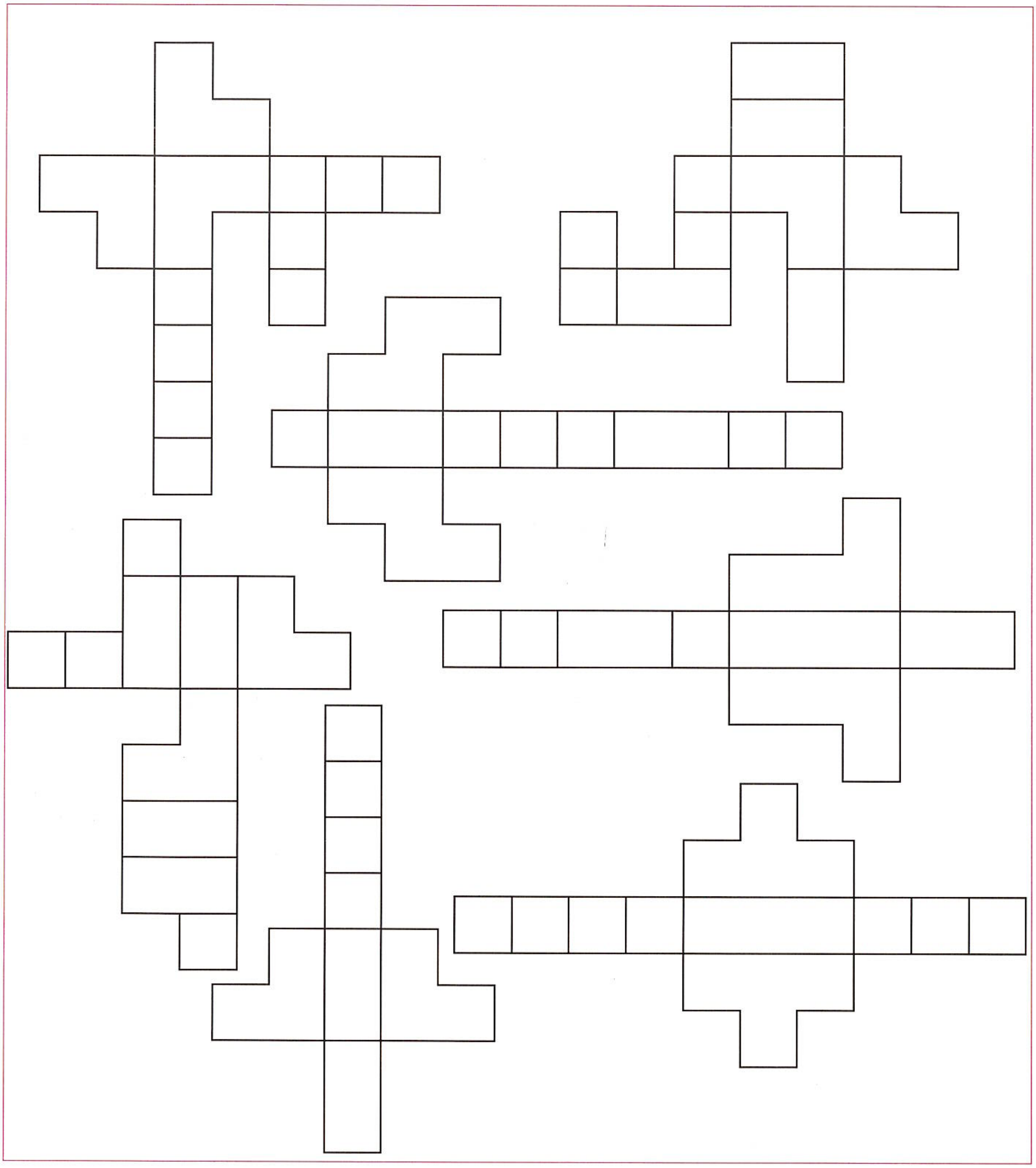
$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

et en particulier leurs versions en trois dimensions dans des travaux de design et d'architecture.

Piet Hein est mort en 1996, le cube SOMA lui survit dans les mains des amateurs de casse-tête. La construction des sept pièces est aisée en utilisant vingt-sept cubes en bois. Il est possible d'en trouver commercialisés, mais sans le nom « cube SOMA », celui-ci étant protégé par un copyright par la société danoise « Piet Hein A/S »...

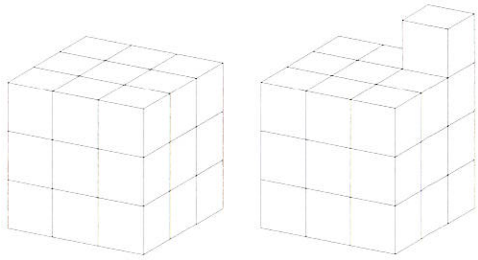
Sur la toile, de nombreux sites sont consacrés au cube SOMA. Je ne peux que conseiller la consultation de celui fait par un passionné danois : `http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM`. Ce site en anglais est très complet, mais je vais tout de même évoquer quelques petites choses qui n'y sont pas.

Pour construire les sept pièces du jeu, découper puis coller des cubes pris dans une collection de vingt-sept est sans doute la façon la plus aisée.
Pour ceux qui n'auraient pas de bricoleurs dans leur entourage, je vous propose ci-dessous des développements des sept pièces. Elles peuvent être réalisées en papier rigide ou en carton. À vous de retrouver les correspondances « développements - pièces » : les pièces « 1 », « 2 », « 3 », « 4 » sont des prismes, cela ne devrait pas poser de problèmes. Pour les trois autres, je vous laisse un peu chercher. De plus, je ne vous indique pas où sont les « languettes de collage ». Leur recherche vous confirmera que le passage de la dimension 2 à la dimension 3 ne se fait pas toujours tout seul...

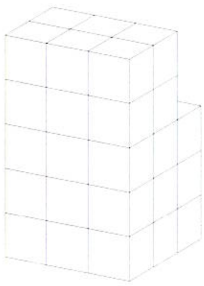


Je suppose maintenant que vous êtes en possession des pièces (en bois ou en carton...).

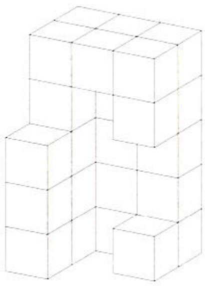
Voici deux solides réalisables avec les sept pièces du jeu. Le premier était attendu, le second fait un petit peu réfléchir. Même pris dans la main, il semble être formé de 28 cubes... Je suis certain que vous avez deviné l'existence d'un « trou » au centre de la pièce...



Que pensez vous de ce dessin de solide réalisé avec les 7 pièces du cube SOMA ?



Cette fois-ci, je ne vous ferai pas prendre le solide dans la main car vous découvririez bien vite la supercherie :

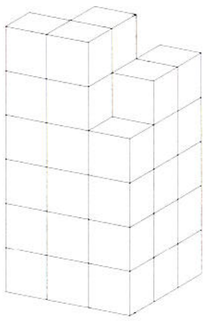


Vous saviez que le solide proposé était formé des sept pièces du cube SOMA, vous pouviez donc vous douter de quelque chose. Mais si je ne vous avais proposé que le premier dessin, en dehors du contexte de l'utilisation du jeu, ne m'auriez-vous pas dit qu'il était formé de 39 cubes ?

Pour vous rassurer, en cours de mathématiques nous utilisons quelques règles concernant les empilements de cubes formant des parallélépipèdes : il n'y a pas d'irrégularités cachées (ni trous, ni cubes en excroissance). Cela nous vient en aide pour visualiser la formule permettant de calculer le volume d'un cube ou d'un parallélépipède : la couche supérieure est formée de cubes visibles ($L \times \ell$) et le solide est formé de couches identiques ($L \times \ell \times h$).

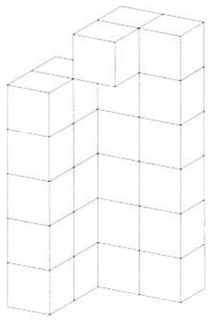
Nous avons continué notre recherche :

Voici un assemblage (dessin 1) pouvant être formé de 45 cubes (27 seulement sont visibles). En réalité des cubes « en excroissance » dans la partie arrière pourraient faire encore augmenter ce total de 45...



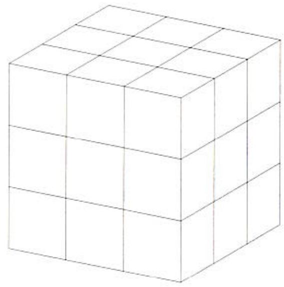
Dessin 1

Le dessin 2 nous montre le même assemblage vu de derrière. Ici, la seule certitude est qu'il y a 24 cubes visibles... Nous n'avons aucune certitude concernant le dénombrement des cubes cachés (leur nombre maximum possible pour chaque dessin de ce type est un bon exercice de recherche, je vous le laisse...). Nous n'avons aucune certitude concernant le dénombrement total des cubes formant le solide... Étonnant, n'est-ce pas ?



Dessin 2

Heureusement, nous savons ces empilements formés par les sept pièces formant le cube SOMA...
Revenons à nos habitudes vécues en cours de mathématiques concernant la vision dans l'espace pour nos empilement de cubes. De nombreuses brochures et sites Internet présentent diverses configurations le plus souvent dotées d'un nom : la tour, le porte-avions... Cherchez ces configurations sur Internet...

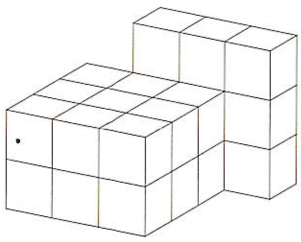


Pour rester dans notre domaine mathématique, je vous propose la recherche de solides *formés de deux parallélépipèdes accolés.* Nous aussi allons leur donner un nom : nous allons utiliser les représentations figurées des nombres chères aux mathématiciens grecs de l'antiquité :

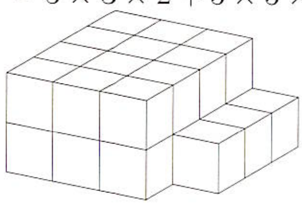
Voici une représentation du nombre $3 \times 3 \times 3$. Elle nous permet de comprendre la lecture de 3^3 : « 3 au cube ».

Cette habitude de nommer un parallélépipède par le produit de ses trois dimensions se retrouve dans des catalogues lorsque nous voulons acheter une valise ou des briques... Si vous avez un doute, les publicités glissées dans nos boîtes aux lettres vous le confirmeront.

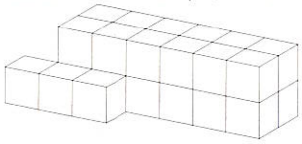
Pour ne rien vous cacher, notre recherche reste ouverte : voici quelques exemplaires à chercher.
Je ne peux que souhaiter qu'ils vous donnent envie d'en découvrir d'autres (le pourtant complet site danois cité dans cet article n'explore pas cette piste de recherche...).



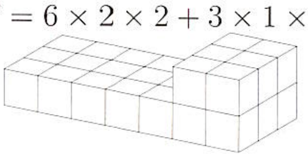
$27 = 3 \times 3 \times 2 + 3 \times 3 \times 1$



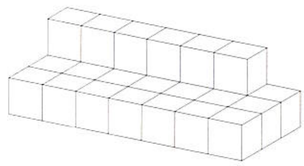
$27 = 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 1 \times 1$



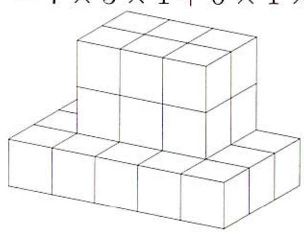
$27 = 6 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1$



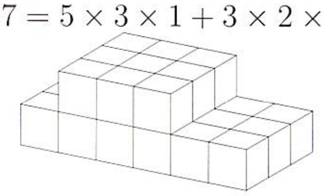
$27 = 7 \times 3 \times 1 + 3 \times 2 \times 1$



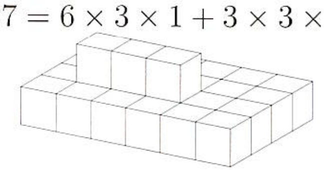
$27 = 7 \times 3 \times 1 + 6 \times 1 \times 1$



$27 = 5 \times 3 \times 1 + 3 \times 2 \times 2$



$27 = 6 \times 3 \times 1 + 3 \times 3 \times 1$



$27 = 6 \times 4 \times 1 + 3 \times 1 \times 1$

La recherche des solutions pour ces configurations n'est pas toujours aisée, mais chercher et parfois trouver fait partie de la richesse de l'activité mathématique.
Cependant, je ne doute pas que lors des manipulations, d'autres assemblages de deux parallélépipèdes apparaîtront.
Avec les élèves de mon club « mathématiques », nous avions trouvé encore d'autres solutions ; la collection va grandir...
Bonne recherche, mais restez tout de même prudents lors de la vision d'empilements de cubes...

Math-Jeunes n°117 S, 10–15, 2007

Du carré latin au sudoku

Nadège Vandenabeele

Introduction

Les « sudokus » sont ces grilles de chiffres regroupant neuf régions carrées 3×3 pour former un carré de 81 cases.

SUDOKU est une abréviation japonnaise de *SUjiwa DOKUshin ni kagirua* qui signifierait « les chiffres n'apparaissent qu'une seule fois ».

En voici un exemple :

7								
				5	9	8		
3		8		4		1		
				3	5			4
	9	1				3	7	
4			6	7				
		7		9		4		1
		2	4	8				
								2

L'article est truffé de défis à relever... Bon amusement !

Leonhard EULER est né en 1707 en Suisse et plus précisément à Bâle. Nous fêtons donc les 300 ans de sa naissance cette année. EULER est considéré comme l'un des précurseurs du sudoku grâce à ses avancées en combinatoire : science du dénombrement et de la classification des configurations. Il posa notamment le « problème des 36 officiers » expliqué plus loin.

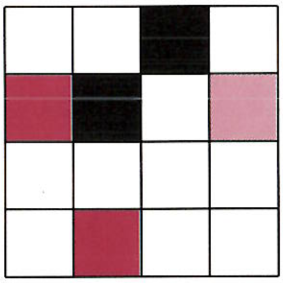
Le carré latin : un cousin du sudoku

On rencontre parfois des grilles 4×4 où les enfants doivent colorier les cases avec quatre couleurs différentes en respectant la règle suivante :

Chaque couleur doit apparaître une et une seule fois par ligne et par colonne.

Défi n° 1 :

Voici une grille 4×4 à colorier selon la règle ci-dessus. Les quatre couleurs sont noir, gris, rouge foncé et rouge clair.



Qu'il s'agisse de couleurs, de chiffres ou même encore de personnages de dessins animés... en fait, peu importe du moment que les symboles utilisés soient distincts.

On voit donc ici que ces jeux ont un caractère logique plutôt que mathématique dans le sens où aucune opération, aucun calcul ne doit être effectué.

EULER s'intéressait à ce genre de divertissement logique qu'il appelait « *carré latin* ».

Défi n° 2 :

Complète ce carré latin avec les lettres A, B, C, D

	B		
A			C
		D	
	A		

Ce défi t'a semblé assez facile ! Euler complique un peu l'exercice...

Le carré gréco-latin

Défi n° 3 :

D'un jeu de cartes, prends tous les as, tous les deux, trois et quatre. Essaie de disposer ces 16 cartes en un « carré 4×4 *» de manière à respecter les conditions suivantes :*

1. *Chaque ligne et chaque colonne doivent comporter une et une seule carte de chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique).*
2. *Chaque ligne et chaque colonne doivent comporter une et une seule carte de chaque valeur.*

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Souviens-toi... dans les carrés latins, une case contient une et une seule information (soit une couleur, soit une lettre, une valeur ou autre symbole). Dans le défi n° 3, nous avons deux informations par case du carré : la couleur de la carte et sa valeur. Il s'agit d'un « double » carré latin. En effet, de la solution du défi n° 3, on peut extraire deux carrés latins. Le premier s'obtient en tenant compte uniquement des valeurs (1 représente l'as) et le second en tenant compte uniquement des couleurs.

♠	♥	♣	♦
♦	♣	♥	♠
♥	♠	♦	♣
♣	♦	♠	♥

Un carré dont chaque case contient deux informations qui respectent séparément la règle des carrés latins est dit *gréco-latin.*
Pour comprendre ce nom, nous devons retourner aux origines de ce jeu. Initialement, chaque case du carré doit contenir un couple de lettres (l'une latine et l'autre grecque) tout en respectant séparément la règle du carré latin et en imposant que toutes les paires de lettres soient présentes.

A α	C β	B γ
C γ	B α	A β
B β	A γ	C α

A	C	B
C	B	A
B	A	C

α	β	γ
γ	α	β
β	γ	α

Deux carrés latins

Le carré ci-dessus est gréco-latin puisqu'en ne considérant que les lettres latines et ensuite uniquement les lettres grecques, on obtient deux carrés latins et que la condition supplémentaire est vérifiée (chaque couple de lettres n'apparaît qu'une seule fois).
Par analogie au défi précédent (défi 3), les valeurs et les couleurs sont ici remplacées par les lettres latines et les lettres grecques.

Euler et les 36 officiers (1782)

Les armées d'antan étaient composées de 3, 4 puis 5 grades différents avec respectivement 3, 4 puis 5 régiments différents.
Pour les défilés, il est de tradition de former un carré tel que les officiers de chaque ligne et de chaque colonne soient de grade et de régiment différents.

Défi n° 4 :

Comment placer les vingt-cinq officiers de cinq grades différents (1er, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e} et 5^{e} grade) et de cinq régiments différents (infanterie, artillerie, génie, forteresses, cavalerie) ?

Il s'agit en fait de constituer un carré gréco-latin d'ordre 5.

Le problème se corse lorsqu'on agrémente l'armée d'un nouveau grade et d'un nouveau régiment. L'armée comporte alors $6 \times 6 = 36$ types d'officiers.

Défi n° 5 :

Comment perpétuer la tradition des défilés de l'armée avec les 36 officiers ?

Tu as trouvé ? Non ? Rassure-toi... les carrés gréco-latins d'ordre 6 sont impossibles. Par contre, le fait de créer un 7^{e} grade et un 7^{e} régiment permet à nouveau de retrouver la tradition des défilés de l'armée.
En d'autres mots, les carrés gréco-latins d'ordre 2, 3, 4, 5 puis 7, 8, 9 sont réalisables mais celui d'ordre 6 est impossible.
Euler l'avait conjecturé mais n'avait pu le prouver. Ce n'est qu'au début du 20^{e} siècle (1901) que Gaston Tarry (mathématicien français, 1843 – 1913) l'a démontré.

Et les sudokus ?

Le sudoku est une variante du carré latin. La condition que chaque ligne et chaque colonne soit une permutation des éléments considérés au départ reste d'application. A cette règle s'ajoute une contrainte : chaque région carrée doit contenir une et une seule fois chaque élément.

Défi n° 6 :

Voici deux petits sudokus d'ordre 4 à compléter

3			2
		3	
	1		
4			1

	4	2	
2			
			3
		1	

Ce défi est un petit échauffement logique. Pour t'aider, je peux te conseiller de passer en revue un nombre à la fois et d'essayer de les placer correctement dans chaque colonne, ligne et région (Par exemple, le 3 de la région carrée en bas à gauche doit se trouver sous le 1 et à droite du 4. En effet, il ne peut se trouver au-dessus du 4 puisqu'il y a déjà un 3 dans la première colonne.)
Nous allons maintenant commencer à résoudre le sudoku proposé dans l'introduction en décrivant quelques stratégies.

Défi n° 7 :

Un sudoku d'ordre 9 contient neuf régions numérotées de 1 à 9 de gauche à droite et de haut en bas.

Première stratégie

On vérifie dans chaque compartiment de trois régions horizontalement (trois lignes) ou verticalement (trois colonnes) si un ou des chiffres peuvent être inscrits.

Par exemple, dans la quatrième région, on peut écrire un 7 dans la case B4. En effet, comme le montre la figure ci-contre, le 7 doit obligatoirement se trouver dans la colonne B, car le 7 se trouve déjà dans les colonnes A et C et en ligne 4 car il y en a déjà sur les lignes 5 et 6.

En procédant de la même manière on peut écrire le 4 dans la région centrale. En effet, le 4 doit se trouver dans la colonne F (puisqu'il est déjà inscrit dans les colonnes D et E). Nous avons deux possibilités mais une peut être rejetée puisqu'il y a déjà un 4 dans la ligne 6. En conclusion, le 4 doit se trouver dans la case F5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	7								
2					5	9	8		
3	3		8		4		1		
4		7			3	5			4
5		9	1				3	7	
6	4			6	7				
7			7		9		4		1
8			2	4	8				
9									2

Une « variante » de cette stratégie est de passer en revue un chiffre à la fois et de regarder dans les différents compartiments et régions s'il est possible de l'écrire sans équivoque dans une case.

Deuxième stratégie

On choisit une case et on teste chaque chiffre en vérifiant s'il est candidat. Lorsqu'il est unique, ce dernier peut être inscrit sans équivoque. Par exemple, on pointe la case E5. Cette case ne peut contenir que 2. En effet, les chiffres 9, 1, 3, 7 sont sur la ligne 5 ; les chiffres 5, 4, 3, 7, 9, 8 sur la colonne E et dans la région considérée, il y a déjà le 3, 5, 6, 7. En résumé, la seule possibilité est le 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	7								
2					5	9	8		
3	3		8		4		1		
4					3	5			4
5		9	1		2		3	7	
6	4			6	7				
7			7		9		4		1
8			2	4	8				
9									2

Troisième stratégie

Pour une ligne, une colonne ou une région, on examine chacun des chiffres à tour de rôle et on en déduit l'éventuelle possibilité du placement de ces chiffres. Lorsqu'un chiffre n'a qu'une seule place possible, on peut l'inscrire. Cependant, il arrive souvent qu'un chiffre puisse prétendre à plusieurs places dans une même ligne, colonne ou région ; dans ce cas, le noter au crayon dans toutes les cases où le chiffre est candidat peut parfois aider mais cela peut aussi encombrer le tableau. Par exemple, il y a une seule case dans la région n° 5 dans laquelle on puisse inscrire le 9.

Pour terminer ce sudoku, il faut répéter ces trois procédés les uns après les autres (l'ordre dans lequel on les utilise importe peu). Un dernier coup de pouce : dans la première région, une seule case peut accueillir le 9. Bon amusement !

Les sudokus se rencontrent souvent à trois niveaux de difficulté : facile, moyen et difficile. Comme vous l'avez vu plus haut, il existe aussi des sudokus pour « novices », utilisant quatre chiffres.

Défi n° 8 :

Terminer le défi 7 et résoudre les deux sudokus ci-après.

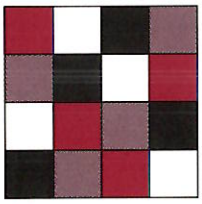
	9	2			4	7		
1		4		6		2		8
				1			4	9
				5	8	6		
8	4			3			5	2
		3	2	9				
6	1		8	4				
2		5		7			6	1
		7	6			8	9	

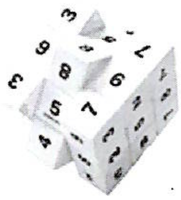
1	3				9		4	
4	2	5		7			3	
	9		4		3	7	2	5
3					4		5	8
		9			2		7	
2		8			1	3	9	
		4			6	5	8	
		3		9		4	6	2
			8		7		1	

Voici les solutions des différents défis

Défi n° 1 :

Ce jeu fait un peu penser au Rubik's cube... eh oui, il existe un sudokube représenté ci-dessous.

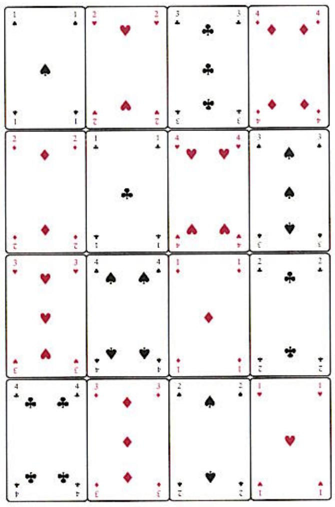




Défi n°2 :

C	B	A	D
A	D	B	C
B	C	D	A
D	A	C	B

Défi n° 3 :



Défi n°4 :

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

Défi n° 5 :

Comme dit dans le texte, ce défi est impossible.

Défi n° 6 :

3	4	1	2
1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1

3	4	2	1
2	1	3	4
1	2	4	3
4	3	2	1

Défi n° 7 :

7	6	9	2	1	8	5	4	3
2	1	4	3	5	9	8	6	7
3	5	8	7	4	6	1	2	9
8	7	6	9	3	5	2	1	4
5	9	1	8	2	4	3	7	6
4	2	3	6	7	1	9	5	8
6	8	7	5	9	2	4	3	1
1	3	2	4	8	7	6	9	5
9	4	5	1	6	3	7	8	2

Pour en apprendre davantage sur les sudokus, leurs variantes et les méthodes de résolution :
- `fr.wikipedia.org/wiki/Sudoku`
- `villemin.gerard.free.fr/aJeux/Sudoku.htm`
- `www.sudoku.com` (en anglais)

Nombreux sont les sites Internet proposant des grilles de sudokus gratuitement.

Défi n° 8 :

3	9	2	5	8	4	7	1	6
1	5	4	7	6	9	2	3	8
7	6	8	3	1	2	5	4	9
9	2	1	4	5	8	6	7	3
8	4	6	1	3	7	9	5	2
5	7	3	2	9	6	1	8	4
6	1	9	8	4	5	3	2	7
2	8	5	9	7	3	4	6	1
4	3	7	6	2	1	8	9	5

1	3	7	5	2	9	8	4	6
4	2	5	6	7	8	1	3	9
8	9	6	4	1	3	7	2	5
3	7	1	9	6	4	2	5	8
5	4	9	3	8	2	6	7	1
2	6	8	7	5	1	3	9	4
9	1	4	2	3	6	5	8	7
7	8	3	1	9	5	4	6	2
6	5	2	8	4	7	9	1	3

La chasse à l'escargot ?

Connaissez-vous **AI Escargot** ? C'est paraît-il le sudoku « le plus infernal au monde ». En tout cas ce l'était au début novembre 2006. Lisez-donc ce qui suit, publié par le magazine *7sur7* dans son édition du 6 novembre 2006 :

Un mathématicien finlandais, Arto Inkala, a présenté ce lundi ce qui serait le sudoku connu le plus difficile à résoudre, un véritable casse-tête ayant requis trois mois de travail et l'examen d'un milliard de combinaisons. [...] Le sudoku des sudokus (appelé AI Escargot) requiert en effet de prendre en compte huit causes et effets alors que les sudokus grand public les plus compliqués n'exigent de considérer qu'une ou deux combinaisons à la fois, La grille infernale a déjà été résolue par des amateurs autres que son concepteur, [...]

Et le magazine publie la grille diabolique (grille de gauche ci-dessous). Le 10 novembre 2006, le quotidien *La Dernière Heure* prend le relais, publie un texte analogue en ajoutant *Personne n'a encore trouvé la solution !* et, bien sûr, publie aussi la fameuse grille... mais celle-ci est différente ! (grille de droite ci-dessous).

		5			1		4	
				6			2	
2			3			1		
7					6		5	2
			8		7			
3	1		5					9
		6			3			1
	9			5				
	7		6			5		

Où se cache le véritable escargot ?

1					7		9	
	3			2				8
		9	6			5		
		5	3			9		
	1			8				2
6					4			
3							1	
	4							7
		7				3		

Math-Jeunes n°117 S, 16–20, 2007

Des jeux à stratégie gagnante

Guy Noël

Le jeu de Nim

Vous avez probablement entendu parler du *jeu de Nim*. Il en existe plusieurs variantes dont une porte le nom de *Jeu de Marienbad*, d'après un film d'Alain Resnais, *L'année dernière à Marienbad*. Voici une variante très simple :

Des allumettes sont alignées devant deux joueurs. Le nombre d'allumettes, n, est quelconque. Chacun des joueurs doit à son tour prélever de 1 à 3 allumettes. Celui qui prélève la dernière allumette a gagné. Voulez-vous essayer ?

Essayons de trouver une stratégie gagnante pour ce jeu.

> Une stratégie gagnante est une façon de jouer qui assure la victoire.

Commençons par une banalité : le nombre d'allumettes à prélever sur la table dépend du nombre d'allumettes qui s'y trouvent. Il y a des cas faciles. Par exemple, s'il y a moins de 4 allumettes sur la table, le joueur dont c'est le tour les prend toutes et il a gagné.

Et s'il y a exactement 4 allumettes sur la table ? Alors, le joueur dont c'est le tour ne peut les prendre toutes mais il doit en prendre au moins une et son adversaire pourra prendre toutes celles qui resteront.

Cela entraîne que pour gagner, j'ai intérêt à ne laisser sur la table que quatre allumettes !

Nous dirons que le nombre d'allumettes sur la table est *l'état du jeu*. Je suis sûr de gagner si je laisse le jeu en l'état 4. On dira que « 4 est un état gagnant ».

Y a-t-il d'autres états gagnants ? Les états 5, 6 et 7 ne le sont certainement pas, car si je laisse le jeu dans l'un de ces états, mon adversaire, lui, pourra le laisser en l'état 4 et c'est lui qui gagnera.

Et l'état 8 ? Si je laisse le jeu en cet état, mon adversaire ne pourra atteindre que l'un des états 5, 6 ou 7, et ensuite, j'atteindrai l'état 4 ! 8 est un état gagnant. Vous voyez facilement que 12, 16... tous les multiples de 4 sont des états gagnants.

Nous voyons apparaître le principe de la statégie gagnante : ramener le jeu en un état gagnant. Pour ce jeu-ci, cela signifie ramener le nombre d'allumettes sur la table à 0, ou 4, ou 8, ou 12...

Des variantes du jeu de Nim

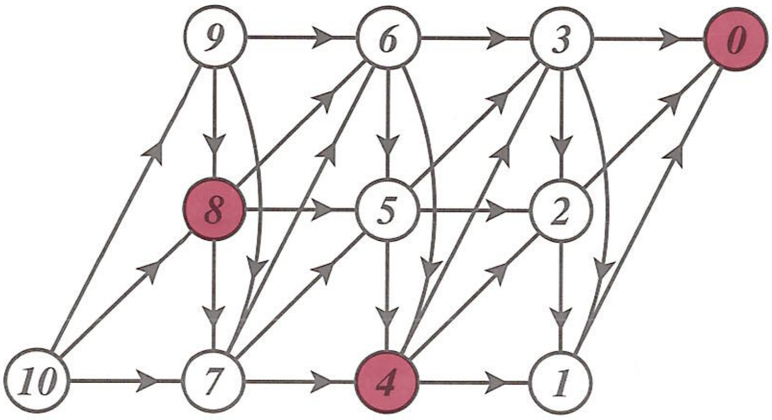
1. **La première variante que nous vous proposons est clairement équivalente au jeu de Nim « simple » présenté ci-contre :**
Deux nombres naturels a et b étant donnés avec $a < b$, le jeu consiste à augmenter le nombre a de 1, 2 ou 3. Le joueur qui atteint exactement b a gagné.

2. **Les jeux de Nim à tas.**

Dans cette variante, les allumettes sont réparties en plusieurs tas. La règle de prélèvement des allumettes peut également être modifiée. Par exemple, adoptons la règle suivante.
Chaque joueur, à son tour, peut prélever un nombre quelconque d'allumettes dans un et un seul tas de son choix. Le gagnant continue d'être celui qui prélève la dernière allumette.
Ce jeu est évidemment sans intérêt s'il n'y a qu'un seul tas. S'il y en a deux, il n'est pas très compliqué de montrer que le deuxième joueur possède une stratégie gagnante : faire en sorte que les deux tas comportent toujours le même nombre d'allumettes.
S'il y a plus de deux tas... **voyez page 19.**

Un graphe

Le graphe suivant résume la situation dans le cas où l'état initial est constitué de 10 allumettes :



Les flèches indiquent les transitions possibles entre les différents états du jeu. Les états 0, 4 et 8 ont été coloriés vu leur rôle : ce sont des états *gagnants*. Les autres états sont bien entendu appelés *perdants*.

La constatation importante est que

- d'un état gagnant, on ne peut accéder qu'à des états perdants,
- d'un état perdant, il est toujours possible d'accéder à un état gagnant.

De cette façon, dès qu'un joueur, à un quelconque moment de la partie, a amené le jeu dans un état perdant, son adversaire gagne en ramenant systématiquement le jeu dans un état gagnant.

De plus, si les deux joueurs connaissent la stratégie gagnante et l'appliquent correctement, il n'est plus besoin de jouer : si l'état initial est perdant, c'est celui qui joue en premier lieu qui gagnera, sinon c'est l'autre.

Une situation générale

Le jeu de Nim fait partie de la catégorie des jeux *à information parfaite* : à tout moment, chacun des joueurs dispose de toutes les informations concernant l'évolution du jeu.

De plus, le jeu ne peut se trouver deux fois dans le même état : on ne peut revenir en arrière et replacer des allumettes qui ont été enlevées. Cela se traduit par l'absence de circuit sur le graphe. Dans ces conditions, si le nombre d'états est fini, le jeu ne peut que s'arrêter après un certain nombre de coups. Il y a donc toujours un gagnant !

En 1939, P. M. Grundy a étudié le jeu de Nim à plusieurs tas (voir encadré page 16). Ce que Grundy montre, c'est que quel que soit le nombre de tas d'allumettes, il est possible de constituer deux ensembles complémentaires d'états G et P ayant les propriétés mentionnées plus haut.

Cette situation est très générale : dès qu'un jeu comporte un nombre fini d'états et si son graphe ne comporte aucun circuit (le jeu ne revient jamais dans un état antérieur), on peut répartir les états du jeu en deux ensembles G et P ayant ces propriétés :

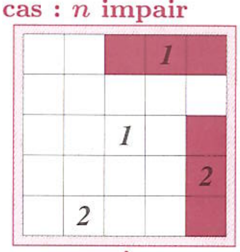
Le quadrillage

Sur un carré quadrillé $n \times n$, chaque joueur doit, à son tour, déposer une pièce rectangulaire de taille 3×1, de façon à recouvrir exactement trois carrés du quadrillage. Deux pièces ne peuvent jamais se chevaucher. Le premier joueur qui ne peut plus déposer de pièce a perdu.

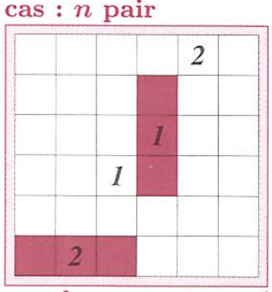
Essayez de déterminer une stratégie gagnante pour ce jeu, avant d'examiner les figures suivantes...

Les pièces grises sont celles qui sont déposées par le 1^er^ joueur, les pièces rouges sont déposées par le second. Les numéros indiquent l'ordre de dépot.

1er cas : n impair



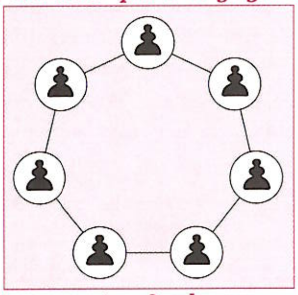
2e cas : n pair



Dans le cas « n impair », quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ? et dans le cas « n pair » ?

Le jeu du collier

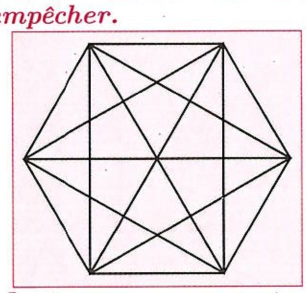
***n* pions sont placés aux sommets d'un *n*-gone régulier. Chaque joueur doit à son tour retirer un pion ou deux pions occupant des sommets contigus. Celui qui enlève le dernier pion a gagné.**



Pour $n \geqslant 3$, le second joueur possède une stratégie gagnante. Cherchez-la en distinguant les cas n pair et n impair, et essayez de symétriser les états atteints par le second joueur.

Le jeu de Ramsey

Un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 6$) est dessiné, ainsi que toutes ses grandes et petites diagonales. Chaque joueur, à son tour, colorie un côté ou une diagonale, le premier joueur en rouge, le second en bleu. Le premier joueur gagne s'il parvient à colorier complètement un triangle dont les trois sommets sont des sommets du polygone donné. Le second joueur essaie de l'en empêcher.



Montrez que pour tout $n \geqslant 6$, le premier joueur dispose d'une stratégie qui lui permet de gagner en au plus quatre coups.

- D'un état appartenant à G, on ne peut accéder qu'à des états appartenant à P.
- D'un état appartenant à P, il est toujours possible d'accéder à un état appartenant à G.

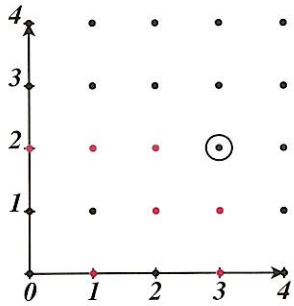
Si les états terminaux (il peut y en avoir plusieurs) appartiennent à G, le joueur qui connaît la stratégie gagnante et parvient à amener une première fois le jeu en un état appartenant à G pourra à chaque coup le ramener en un des ces états. Il gagnera donc.

Parfois l'état initial appartient à P. C'est alors le joueur qui joue en premier lieu qui dispose d'une stratégie gagnante. Mais si l'état initial appartient à G, c'est le second joueur qui pourra appliquer cette stratégie.

Pour chaque jeu particulier, il convient donc de déterminer d'abord ce qu'on appellera un *état du jeu.* (Par exemple dans le jeu de Nim à quatre tas, un état du jeu est un quadruple (n_1, n_2, n_3, n_4) de nombres naturels indiquant le nombre d'allumettes restant dans chaque tas.) Tout le problème est ensuite de trouver la stratégie gagnante !

Le jeu de Rufus Isaacs

Ce jeu, (mentionné par C. Berge dans *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970), utilise un réseau carré de points de taille arbitraire, par exemple le réseau que voici :



Au premier coup, le joueur A entoure un point de son choix, mais autre que $(0, 0)$. Ensuite, après qu'un joueur ait entouré un point P, son adversaire doit entourer un point situé

- soit sur le bord supérieur du rectangle de diagonale $[OP]$,
- soit sur le bord droit de ce rectangle,
- soit encore sur la parallèle à la première bissectrice passant par P, mais à l'intérieur ou au bord du rectangle.

Par exemple, après le choix du point $(3, 2)$, le coup suivant peut être joué en $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ ou $(1, 0)$.

Puisque le dernier coup joué détermine les possibilités pour le coup suivant, les différents états du jeu sont simplement réduits au dernier coup joué. Par exemple l'état terminal est le point $(0, 0)$. Le joueur qui amène le jeu dans cet état a gagné.

Utilisons le jeu de Rufus Isaacs représenté ci-dessus pour montrer comment déterminer deux ensembles G et P d'états gagnants et d'états perdants qui vont fixer une stratégie gagnante.

La technique consiste à attribuer à chaque état un nombre, appelé *nombre de Grundy* de façon que le nombre de GRUNDY des états gagnants soit 0, alors que celui des états perdants est différent de 0.

- L'état terminal est un état gagnant. On lui attribue donc le nombre de GRUNDY 0.
- Considérons ensuite les états $(1,0)$ et $(0,1)$ qui ne donnent accès qu'à l'état terminal. Ce sont des états perdants puisque si un joueur amène le jeu en un de ces états, son adversaire peut jouer l'état terminal. Nous leur attribuons le nombre de GRUNDY 1.
- L'état $(1,1)$ donne accès aux états $(0,0)$ (gagnant), $(1,0)$ et $(0,1)$ (perdants). C'est donc un état perdant.
  Son nombre de GRUNDY *sera le plus petit naturel qui n'est nombre de* GRUNDY *d'aucun état auquel il donne accès.*
  Comme les nombres de GRUNDY de $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont 0 et 1, le nombre de GRUNDY de $(1,1)$ sera 2.
- On continue de proche en proche de la même manière : à chaque étape on détermine les états qui ne donnent accès qu'à des états dont le nombre de GRUNDY a déjà été déterminé. Et on donne à chacun d'eux comme nombre de GRUNDY le plus petit naturel qui n'est nombre de GRUNDY d'aucun des états auxquels il donne accès.

D'un état gagnant on ne peut accéder qu'à des états perdants. Ceux-ci ayant des nombres de GRUNDY strictement positifs, le plus petit naturel différent de chacun d'entre eux est 0 : le nombre de GRUNDY d'un état gagnant est bien 0.

D'un état perdant on peut toujours accéder à un état gagnant. Celui-ci a 0 comme nombre de GRUNDY. Donc le nombre de GRUNDY de l'état perdant sera strictement positif.

Ce faisant, on trouve pour le jeu ci-dessus les nombres de GRUNDY repris sur la figure suivante :

4.	5.	3.	2.	7.
3.	4.	5.	6.	2.
2.	0.	1.	5.	3.
1.	2.	0.	4.	5.
0.	1.	2.	3.	4.

Pas beaucoup de choix pour gagner ! Le jeu sera plus amusant pour un réseau plus grand. À vous de déterminer les nombres de GRUNDY pour la taille que vous choisirez.

Retour au jeu de Nim à plusieurs tas

En principe, il n'y a donc aucune difficulté à déterminer la stratégie gagnante correspondant à n'importe quel jeu de ce type : « il suffit » de dessiner le graphe représentant les transitions entre tous les états du jeu, et de l'utiliser pour déterminer les nombres de GRUNDY

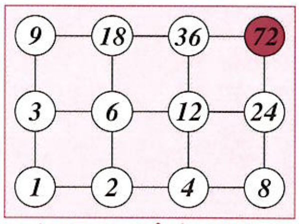
Le nombre interdit

Au début du jeu, un nombre naturel plus grand que 1 (le nombre interdit) est choisi. Chaque joueur, à son tour, choisit un nombre vérifiant les conditions suivantes :

- ***le nombre choisi doit diviser le nombre interdit (sans lui être égal),***
- ***le nombre choisi ne peut diviser aucun des nombres choisis précédemment.***

Le premier joueur bloqué a perdu.

Pour visualiser les coups autorisés, on dessine le *treillis* des diviseurs du nombre interdit. Par exemple, voici le treillis des diviseurs de 72 :



On trouve aisément une stratégie gagnante si le nombre interdit est de l'un des types p^n, $p_1^n p_2$ ou $p_1^n p_2^n$, ou p, p_1 et p_2 sont des nombres premiers. Pour le reste...

Le jeu de Juniper Green

Au départ du jeu, un nombre naturel n est choisi. Lors du premier coup, le premier joueur choisit un nombre pair compris entre 1 et n. Ensuite, chaque joueur choisit, à son tour, un nombre de $\{1,\ldots,n\}$ qui est aussi un diviseur ou un multiple du nombre précédent. Le premier joueur bloqué a perdu.

Sauf pour de très petites valeurs de n, on ne connaît pas la stratégie gagnante !

en attribuant d'abord 0 aux états terminaux, puis en remontant les différents états de proche en proche.

Hélas, le graphe peut comporter plusieurs milliers d'états. L'opération est alors pratiquement irréalisable ! Heureusement, GRUNDY a indiqué comment calculer les nombres qui portent son nom dans le cas du jeu de Nim à plusieurs tas (relisez l'encadré de la page 16) et son résultat peut s'étendre à d'autres situations.

Commençons par le jeu de Nim à un seul tas, avec la règle *chaque joueur peut prélever autant d'allumettes qu'il le désire.* Les états du jeu sont notés $n, n-1, \dots, 1, 0$ d'après le nombre d'allumettes restant sur la table. Nous notons $\gamma(k)$ le nombre de GRUNDY de l'état k.

L'état 0 étant l'état terminal, on a $\gamma(0) = 0$, puis $\gamma(1) = 1$ (de l'état 1 on n'a accès qu'à l'état 0), $\gamma(2) = 2$ (de l'état 2, on a accès aux états 0 et 1). De proche en proche, on trouve $\gamma(k) = k$ pour tout k.

Pour le jeu de Nim à deux tas, avec la même règle de prise que ci-dessus, il est entendu que, à chaque coup, toutes les allumettes doivent être prélevées dans un seul tas. Un état du jeu est un couple de nombres (k_1, k_2), égaux aux nombres d'allumettes des deux tas. D'un état (k_1, k_2) on peut accéder aux états du type (k_1, h_2) avec $h_2 < k_2$ et aux états du type (h_1, k_2) avec $h_1 < k_1$.

Par exemple, de $(k_1, 0)$, on ne peut atteindre que des états $(h_1, 0)$ (si un tas est épuisé, il le reste). Les nombres de GRUNDY des états $(k_1, 0)$ sont donc identiques à ceux obtenus quand il n'y a qu'un tas : $\gamma(k_1, 0) = k_1$. De même $\gamma(0, k_2) = k_2$.

À partir des valeurs de $\gamma(k_1, 0)$ et $\gamma(0, k_2)$, calculons les valeurs de tous les $\gamma(k_1, k_2)$ de proche en proche. Reportons ces valeurs sur un réseau carré : la valeur affectée en un point P est le plus petit naturel n'apparaissant en aucun autre point du bord supérieur ou du bord droit du rectangle de diagonale $[OP]$.

4	5	6	7	0
3	2	1	0	7
2	3	0	1	6
1	0	3	2	5
0	1	2	3	4

Constatez qu'en tout point de ce réseau on a $\gamma(k_1, k_2) = k_1 \oplus k_2$. Démontrons que ce résultat est général en considérant des valeurs quelconques de k_1 et k_2. Notons P le point (k_1, k_2), $\mathscr{R}$ le rectangle de diagonale $[OP]$ et $\mathscr{B}$ l'ensemble des points des bords supérieur et droit de $\mathscr{R}$ autres que P. Par récurrence, nous pouvons supposer $\gamma(i, j) = i \oplus j$ pour tout (i, j) appartenant à $\mathscr{B}$.

$\gamma(k_1, k_2)$ est donc le plus petit naturel différent de $i \oplus j$ pour tout $(i, j) \in \mathscr{B}$. Or $k_1 \oplus k_2$ est bien un naturel différent de tous ces nombres car, par exemple, $k_1 \oplus k_2 = k_1 \oplus j \Rightarrow k_2 = j$.

De plus, pour tout autre naturel $h < k_1 \oplus k_2$, on peut trouver soit un $i < k_1$ tel que $h = i \oplus k_2 = \gamma(i, k_2)$, soit un $j < k_2$ tel que $h = k_1 \oplus j = \gamma(k_1, j)$. D'où $\gamma(k_1, k_2) \neq h$. Ainsi, on a bien $\gamma(k_1, k_2) = k_1 \oplus k_2$.

Ce résultat s'étend aux jeux de Nim à plus de deux tas : le nombre de GRUNDY d'un état $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ vaut $k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_n$. Vous savez maintenant comment gagner !

L'addition digitale

L'*addition digitale*, notée $\oplus$, est une addition qui se pratique sur les écritures binaires des nombres « en oubliant d'effectuer les reports d'une colonne à l'autre ». Par exemple, pour $7 = 111$ et $5 = 101$, le calcul de $7 \oplus 5$ est le suivant :

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

de sorte que $7 \oplus 5 = 2$.

L'addition digitale est associative,

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

et commutative,

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

Quel que soit n, $n \oplus 0 = n$ et $n \oplus n = 0$. On en déduit la règle de simplification : $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$.

Montrons que si $a < b \oplus c$, on peut trouver une égalité $a = b' \oplus c'$ avec soit $b' = b$ et $c' < c$, soit $b' < b$ et $c' = c$.

On considère les chiffres binaires de $b \oplus c$ à partir de la gauche et on repère le premier à être plus grand que le chiffre de même rang de a.

Nécessairement, à ce rang se trouvent un 0 dans a et un 1 dans $b \oplus c$. Ce 1 provient de l'addition digitale d'un 1 et d'un 0, l'un dans b, l'autre dans c. Supposons que le 1 soit dans b. (On procède de même s'il est dans c.) Remplaçons-le par un 0.

Il reste, sans toucher à c, à adapter un à un les chiffres situés plus à droite dans b de façon à construire un nombre b' qui sera certainement inférieur à b et qui vérifiera l'égalité $b' \oplus c = a$.

Leonhard Euler

Simone Trompler

Leonhard EULER

(1707-1783)

Leonhard Euler, mathématicien suisse, est considéré souvent comme le plus important de la génération qui a suivi Newton et un des plus grands de tous les temps

C'est son père qui lui a appris les rudiments de mathématique et c'est probablement lui qui lui en a donné le goût. Dès lors, il lit des livres de mathématique par lui-même. A quatorze ans, il entre à l'université de Bâle ; il y fait la connaissance du célèbre mathématicien Johann Bernoulli, qui le prend sous son aile en voyant ses extraordinaires aptitudes pour les mathématiques. Son père voudrait lui voir embrasser la carrière ecclésiastique et Leonhard apprend la théologie, la médecine, l'astronomie, les langues orientales avec une même facilité, mais sans l'enthousiasme qu'il éprouve pour les mathématiques. Grâce à Johann Bernoulli, il obtient de son père de suivre sa passion.

Quand ses études à l'université de Bâle sont terminées (il a dix-neuf ans), il a déjà lu beaucoup d'œuvres, notamment de Descartes, Newton, Galilée et bien d'autres. Il a aussi une publication à l'impression.

En 1727, il concourt au Grand Prix de l'Académie de Paris sur la meilleure disposition du mât sur un navire et gagne la deuxième place.

On lui offre alors un poste à l'Académie de Saint-Pétersbourg pour enseigner l'application des mathématiques et de la mécanique à la physiologie.

De 1727 à 1730, il est officier dans la marine russe. En 1730, il est nommé professeur de physique et de mathématiques à l'Académie de Saint-Pétersbourg. Il publie une quantité phénoménale d'articles.

En 1741, il quitte Saint-Pétersbourg pour l'Académie de Berlin et il y reste 25 ans, tout en gardant des contacts étroits avec la Russie où il retourne comme directeur de l'Académie.

Malheureusement, peu après, alors qu'il avait déjà perdu l'usage d'un œil, il perd complètement la vue. Il continue cependant à publier grâce à sa mémoire exceptionnelle, en dictant ses œuvres à ses fils. Il meurt en 1783.

Sa contribution aux mathématiques touche à tous ses aspects. Il est impossible de la détailler ici, mais remarquons qu'Euler est à la base de beaucoup de nos notations actuelles : en voici quelques exemples :

- la lettre π pour le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre,
- la lettre e pour représenter la base des logarithmes naturels,
- le symbole i pour $\sqrt{-1}$,
- Σ pour la sommation,
- l'usage des lettres a, b, c pour les côtés d'un triangle et A, B, C pour les sommets, R, r, s pour le rayon du cercle circonscrit, du cercle inscrit et du semi-périmètre, avec la relation qui les lie : $4Rrs = abc$.

On lui doit aussi la notation $f(x)$ pour une fonction de x. Il est le premier à considérer $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ comme des nombres, des rapports et non plus comme des cordes. Il est l'auteur de cette relation entre les nombres les plus fascinants de toute la mathématique :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Amené à s'intéresser à la théorie des réseaux, en 1716 , il résout le problème des sept ponts de Koenigsberg : il prouve qu'il est impossible de les traverser tous à la suite sans passer deux fois par l'un d'entre eux. Il généralise la question et énonce des théorèmes qui peuvent être considérés comme le début de la théorie des graphes et de la topologie :

Un graphe possède une chaîne eulérienne si et seulement si ses sommets sont tous de degré pair sauf au plus deux. (Une chaîne eulérienne est une chaîne passant par tous les sommets une et une seule fois).

Si un graphe a exactement deux sommets de degré impair, il a au moins une chaîne eulérienne qui doit commencer et finir à un de ces deux sommets.

Un graphe eulérien possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est un nombre pair, double du nombre d'arêtes.

On lui doit le célèbre formule d'Euler qui lie le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre :

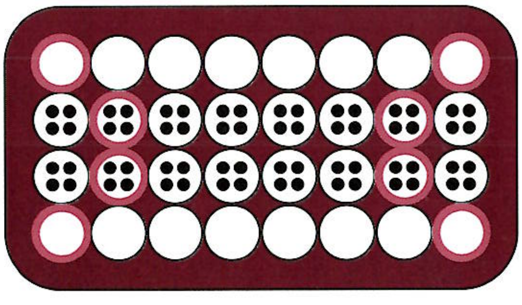
$$f + s - a = 2$$

Des jeux de semis

Ces jeux sont très répandus en Asie et en Afrique. On les désigne souvent sous le nom général de *Mancala* mais les variantes sont nombreuses, ont des noms spécifiques et se jouent sur des plateaux différents. Nous nous attarderons ici au jeu dénommé *Igisoro*, encore pratiqué régulièrement au Rwanda.

Photo extraite du site `www.africakids.com`

Dans un plateau en bois, sont creusées quatre rangées de huit trous circulaires. Huit des trente-deux cases (entourées sur la figure ci-dessous) jouent un rôle particulier. Nous les appellerons les *cases spéciales*. Pour préparer le jeu, quatre pions sont placés dans chacune des rangées centrales.



Chaque joueur ne manipule que les pions situés dans les deux rangées de cases qui sont de son côté, sauf lorsqu'il capture des pions de son adversaire. Le but du jeu est de capturer tous les pions de l'adversaire. Les joueurs jouent chacun à son tour.

Pour jouer, chaque joueur choisit une des cases situées de son côté, en prend le contenu, et sème les pions qui s'y trouvaient un à la fois dans les cases suivantes (toujours de son côté), en tournant dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre.

Si le dernier pion qu'il sème atterrit dans une case vide, la distribution est terminée, et c'est au tour de l'autre joueur. Par contre, si le dernier pion est placé dans une case contenant au moins un pion, deux possibilités existent :

$\boxed{1.}$ si la case d'arrivée se trouve dans la rangée centrale, et si les deux cases de l'adversaire situées en regard sont occupées chacune par au moins un pion, le joueur est obligé de capturer le contenu de ces deux cases. Il les resème dans son propre jeu, à partir de la case où il avait placé son premier pion à la distribution précédente. Une nouvelle distribution commence qui suit les mêmes règles que la précédente ;

$\boxed{2.}$ sinon, le joueur prend le contenu de la case où il a placé son dernier pion et recommence une distribution suivant les mêmes règles à partir de la case suivante. Plusieurs distributions peuvent ainsi se succéder avant que le tour revienne à l'autre joueur.

Les cases spéciales permettent d'inverser le sens de parcours : si une distribution s'achève dans une de ces cases et si celle-ci n'est pas vide, le joueur peut choisir d'inverser le sens de distribution. Ce sens doit alors être conservé tant que les distributions se succèdent, sauf si à nouveau une d'entre elles se termine dans une case spéciale, ce qui permet de rétablir le sens normal

Ajoutons que les prises sont interdites durant les trois premiers tours, ce qui permet aux deux joueurs de préparer leurs positions...

Ce jeu très populaire nécessite de grandes qualités de perception d'une situation, de prévision des mouvements qui suivront et de calcul mental. Il faut aussi du temps : certaines parties peuvent durer des heures...

Jeux

Yolande Noël-Roch

1. Nombres croisés

Découvre les naturels a, b, c et d en complétant la grille.

	1	2	3	4	5	6	7
1				■			
2					■		
3			■			■	
4	■			■			■
5		■			■		
6			■				
7				■			

Horizontalement

1. Trois termes successifs d'une progression arithmétique ; a^{2a}.
2. $\sum_{i=3}^{12} i^3$; $a^b b^a$.
3. ab^a ; $a(a+b)-b$.
4. $a^{2b}+b^b$; $a^2+b(b-1)$.
5. a^2b^2 ; $(ab)^2$.
6. c^2-a+b ; $b^{(a^2)}a^b$.
7. b^{b+c} ; $b(a^{a+b}+c-1)$.

Verticalement

1. Le $(a+b)^{\text{e}}$ terme de la progression géométrique de raison a et de premier terme b ; un triplet pythagoricien.
2. b^{a^2+b} ; a^{2b}.
3. Le produit des chiffres est 21 ; b^2+c^2.
4. $b+c^2$; $(a-b+c)^2$.
5. b^{2b} écrit en base $a+b$; $(b^b)^a$.
6. a^a ; 4873 écrit en hexadécimal.
7. $(a+c)^a-(a+c)^b+a^a$; $b^2d^2+a+b+c$

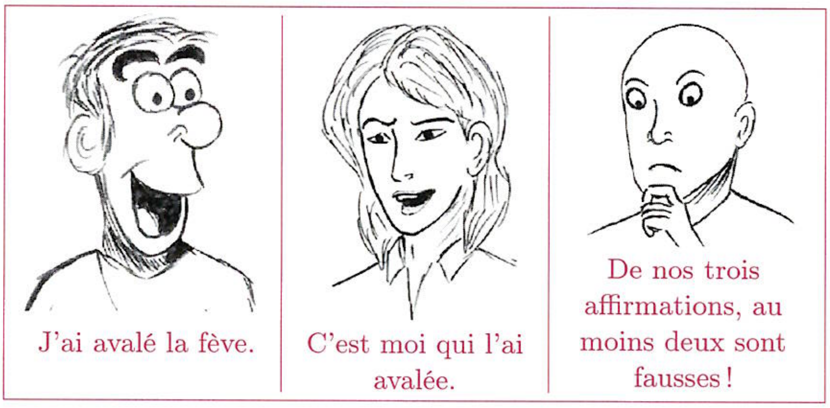
2. Des jeux logiques

A. Les familles Véritas et Menthos

Tous les membres de la famille Véritas disent toujours la vérité ... et tous ceux de la famille Menthos mentent toujours. Malheureusement, rien ne permet de les reconnaître physiquement. En page 1 de couverture, ils nous posent une énigme qui permet de trouver le nom de famille de deux d'entre eux. Quels sont-ils ?

B. La galette des rois

Le patissier Blackwhite a placé au hasard dans ses galettes des rois une fève blanche ou une fève noire. Trois amis ont mangé la galette après avoir décidé que celui qui trouvait la fève devait l'avaler. Voici leurs déclarations :



Aide le patissier à trouver qui a mangé la fève et quelle était sa couleur sachant que les trois amis ont respecté une consigne :

- si quelqu'un a avalé une fève blanche, il doit dire la vérité ;
- si quelqu'un a avalé une fève noire, il doit mentir
- si quelqu'un n'a pas trouvé de fève, il est libre de mentir ou non.

C. La soupe aux choux

Françoise aime la soupe aux choux.

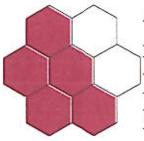
Henri n'aime pas la soupe aux choux.

Toute personne qui aime la soupe aux choux dit toujours la vérité.

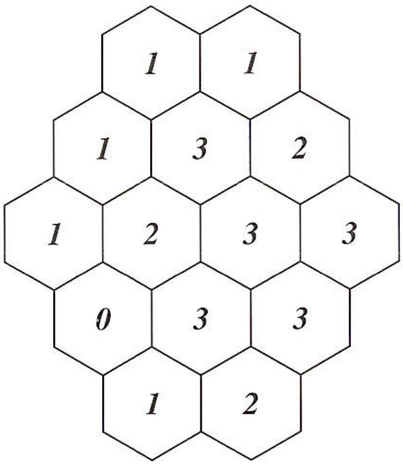
Toute personne qui n'aime pas la soupe aux choux ment toujours.

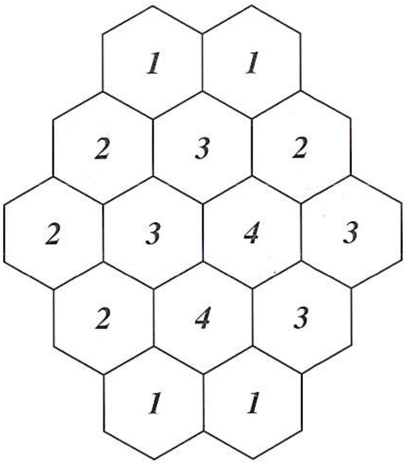
Des déclarations de Henri et Françoise, peut-on déduire qui aime la soupe aux choux ?

D. Les hexagones



À l'aide des nombres donnés dans les alvéoles, colorie (ou non) chacun des hexagones de manière à ce que **tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre**. Attention, tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même, comme le montre, ci-dessus, la solution du problème posé en couverture.





3. Des jeux arithmético-algébriques

A. Décoder des sommes ou de produits

Les symboles ♥, ♦, ♣ et ♠ cachent, dans chacun des tableaux ci-dessous, quatre nombres entiers (un même symbole prend toujours la même valeur, deux symboles différents prennent deux valeurs différentes, les deux grilles sont indépendantes).

Décoder des sommes.

♠	♦	♥	♣	♣	8
♣	♠	♣	♣	♠	18
♥	♦	♣	♠	♣	8
♠	♠	♠	♣	♣	17
♦	♦	♠	♣	♣	15
7	12	9	19	19	

En lignes et en colonnes, tu connais la somme des cinq nombres. Les valeurs inconnues sont non strictement comprises entre -5 et 5.

Décoder des produits.

♦	♣	♦	♠	♦	512
♣	♣	♣	♠	♦	2048
♠	♣	♣	♦	♣	2048
♠	♠	♠	♥	♦	12
♣	♣	♠	♠	♥	192
256	4096	256	12	1536	

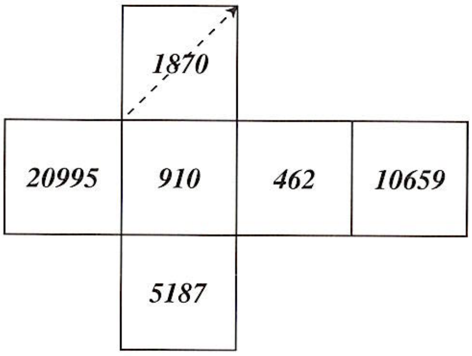
En lignes et en colonnes, tu connais le produit des cinq nombres. Les valeurs inconnues sont non strictement comprises entre 1 et 10.

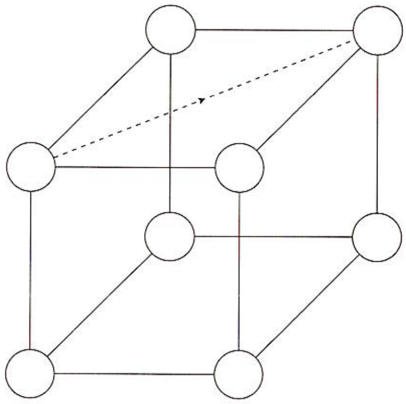
B. Produits en cube

Huit nombres différents doivent être placés aux sommets d'un cube (chacun une seule fois !) de façon à respecter les produits inscrits sur les faces du développement.

Dans la situation donnée en page 1 de couverture, les nombres à placer sont les naturels de 1 à 8.

Dans la situation ci-contre, les nombres à placer sont les huit premiers nombres premiers.

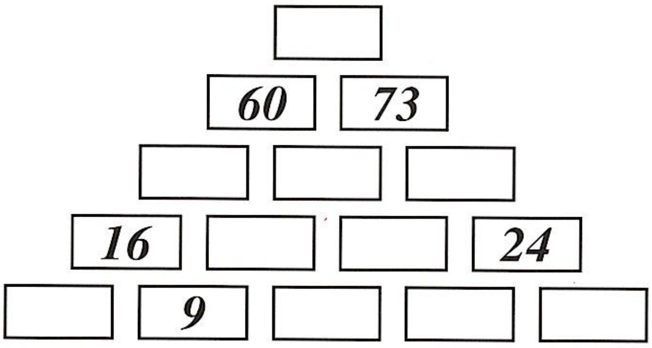




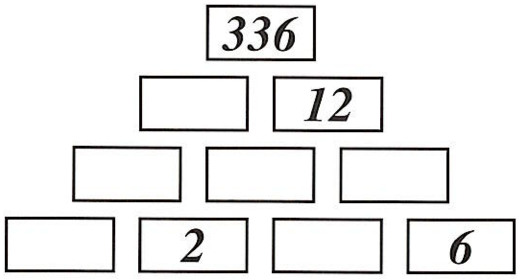
C. Des murs additifs ou multiplicatifs

Selon que le mur est « additif » ou « multiplicatif », chaque brique contient un nombre qui est la **somme** ou le **produit** des deux nombres contenus dans les deux briques qui la supportent.

Compléter le mur additif



Compléter le mur multiplicatif



4. Un puzzle

Des carrés ([1]) sont partagés en quatre zones par les deux diagonales. Chacune des zones est coloriée en utilisant trois couleurs différentes. En voici par exemple quatre :

A. Combien de carrés coloriés différents peut-on obtenir ? (Nous ne comptons que les carrés qui ne sont pas applicables l'un sur l'autre par une rotation.)

Un fichier imprimable d'une page, appelé MacMahon.pdf reprenant l'ensemble des carrés de Mac Mahon peut être téléchargé à l'adresse `www.sbpm.be`.

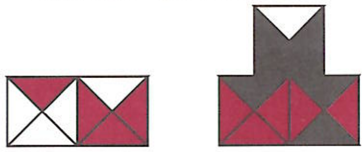
Ces petits carrés sont les pièces de nos puzzles.

B. Deux contraintes sont imposées pour raccorder deux pièces :
- les bords doivent doivent coïncider exactement,
- deux bords qui se touchent doivent présenter la même couleur.

([1]) Ce support est proposé dans la brochure *Jeux 6* de l'APMEP sous le titre « Les carrés de Mac Mahon ».

Assemblage correct

Assemblages incorrects

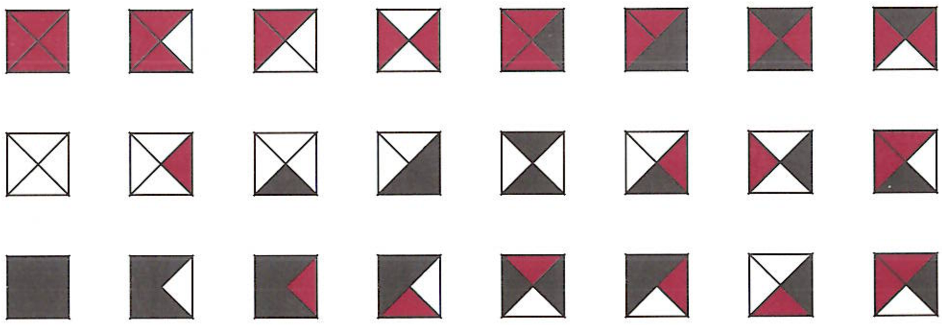


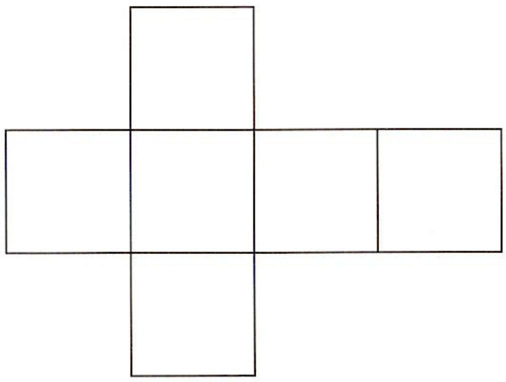
B1. En supposant que les carrés aient 2 cm de côté, un jeu de pièces permet de paver un rectangle de 12 cm sur 8 cm. Réaliser un tel rectangle.

B2. Avec trois jeux de pièces, nous pouvons assembler trois rectangles pour ébaucher une **bande** illimitée. Mais si nous voulons pouvoir assembler ces trois rectangles en une bande de 36 cm sur 8 cm, nous devons prévoir le raccordement des « petits » bords des rectangles. Il faut donc que les couleurs sur ces deux bords concordent !

B3. Avec quatre jeux de pièces, nous pouvons entamer un **pavage du plan** ! Mais cette fois, il faut de plus prévoir la cohérence entre les couleurs des deux autres bords !

C. Enfin, avec un seul jeu de pièces, nous pouvons donner un caractère spatial à notre puzzle. Nous pouvons coller les 24 pièces de 2cm de côté sur un cube de 4cm d'arête . . . toujours en faisant en sorte que les couleurs soient accordées d'une pièce à ses voisines, aussi bien sur les faces du cube qu'en ses arêtes.





Tout cela est possible . . . bon amusement !

5. Pour continuer à jouer, soit en obtenant des situations variées des types 2D, 3A ou 3B ou pour obtenir d'autres jeux, consulte le site www.conifere.be

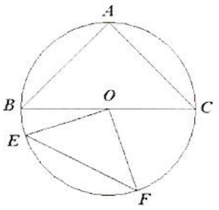
Tu pourras choisir un niveau de difficulté qui te convient. Tu trouveras aussi des jeux à deux joueurs qui te permettront de choisir l'ordinateur comme adversaire. Comme la programmation n'est pas toujours terminée, l'ordinateur peut mal jouer, te laissant ainsi une chance de gagner !

Olympiades mathématiques

Claudine Festraets

La demi-finale de l'Olympiade est à présent terminée. Voici les solutions de quelque uns des exercices qui t'ont été proposés. Si tu es parmi les finalistes, je te félicite, sinon exerce-toi pour l'an prochain.

Maxi 2 - Midi 8



Dans le cercle de centre O, le triangle isocèle BAC est rectangle en A et le triangle EOF est rectangle en O. Quel est le rapport de l'aire de BAC à celle de EOF ?

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) 1,5 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2 (E) $\sqrt{2}+1$

Solution

Soit r le rayon du cercle. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}|AO|.|BC| = \frac{1}{2}r.2r = r^2$. L'aire du triangle EOF vaut $\frac{1}{2}|OE|.|OF| = \frac{1}{2}r^2$. le rapport des deux aires est donc 2.

Maxi 5 - Midi 9

Le baril de pétrole coûtait 60 dollars il y a un mois. Depuis, ce prix a augmenté de 20 % alors que la valeur du dollar a chuté de 20 % par rapport à l'euro. Pendant le mois dernier, le prix en euros du baril

(A) a baissé de 40% ; (B) a baissé de 4% ;
(C) est inchangé ; (D) a augmenté de 4% ;
(E) a augmenté de 44%.

Solution

Le prix en dollars a augmenté de 20%, il est alors de $60 \times \frac{120}{100}$ dollars. Mais la valeur du dollar a diminué de 20%, donc en euros, le nouveau prix est de $60 \times \frac{120}{100} \times \frac{80}{100} = 60 \times \frac{96}{100}$. Il a diminué de 4%.

Maxi 10 - Midi 17

Sans réponse préformulée - Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre de 108 cm. Je la plie en deux dans un sens, en quatre dans l'autre et j'obtiens ainsi un carré. Quel est, en centimètres, le périmètre de ce carré ?

Solution

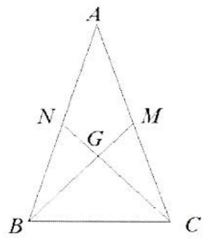
Soient x et y les dimensions du rectangle ; son périmètre vaut $2x + 2y = 108$. Après le premier pliage, les dimensions sont $\frac{x}{2}$ et y ; après le second pliage, elles sont $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{4}$. On obtient un carré, donc $y = 2x$. En remplaçant y par $2x$ dans l'équation $2x + 2y = 108$, on obtient $6x = 108$ d'où $x = 18$ et le périmètre du carré vaut $2x = 36$.

Maxi 12 - Midi 19

Le triangle isocèle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $|BC| = \sqrt{2}$. Les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

(A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 3,5

Solution



Puisque le triangle ABC est isocèle, $|BM| = |CN|$. Le point G d'intersection des médianes est tel que $|BG| = 2|GM|$ et $|CG| = 2|GN|$. Le triangle BGC est rectangle et isocèle, la longueur de son hypoténuse est $\sqrt{2}$, donc $|BG| = |CG| = 1$ et alors $|BM| = |CN| = 1,5$.
AireABC = 2.aireBCM = $|BM|.|CG| = 1,5.1 = 1,5$

Maxi 19 - Midi 25

Un vase cylindrique de hauteur H est rempli à moitié d'eau. Dans le fond du vase, on pose une bougie cylindrique dont le diamètre vaut la moitié de celui de la base du vase et dont la hauteur est double de celle du vase. À quelle hauteur va se situer le nouveau niveau de l'eau ?

(A) $\frac{2}{3}H$ (B) $\frac{3}{4}H$ (C) $\frac{4}{5}H$ (D) H
(E) Le vase va déborder.

Solution

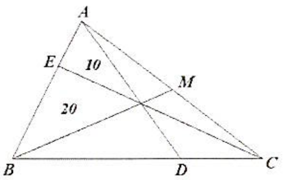
Soient r le rayon de la base de la bougie, $2r$ celui de la base du vase et H' la hauteur de l'eau après avoir plongé la bougie dans le vase. Le volume de l'eau est constant, il vaut

$$\pi 4r^2\frac{H}{2} = \pi 4r^2H' - \pi r^2H'$$

le second membre représentant le volume de la couronne d'eau entourant la bougie. Après simplification, cette équation devient $2H = 3H'$, d'où $H' = \frac{2}{3}H$.

Maxi 23 - Midi 30

Dans la figure ci-contre, M est le milieu de $[AC]$ et les droites AD, BM et CE sont concourantes. Deux des petits triangles déterminés par



AD, BM et CE ont pour aires 10 et 20. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

(A) 60 (B) 75 (C) 85 (D) 90
(E) Il manque des données.

Solution

Soit K le point d'intersection des droites AD, BM, CE. Comme M est le milieu de $[AC]$, les triangles AKM et CKM ont même aire, soit a. Les triangles ABM et CBM ont aussi même aire, d'où $20 + 10 + a =$ aire $BKC + a$, d'où aire $BKC = 30$. Le point E partage le segment $[AB]$ dans le rapport $\frac{1}{2}$, donc aire$BCE = 2.$aire ACE, $20 + 30 = 2(10 + 2a)$ et $2a = 15$. L'aire du triangle ABC vaut $10 + 20 + 30 + 2a = 75$.

Maxi 14

On sait que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$. Pour tout entier n supérieur à 2007, le nombre de nombres premiers strictement supérieurs à $(n! + 1)$ et strictement inférieurs à $(n! + n)$ vaut

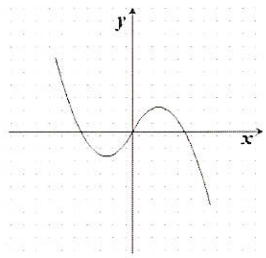
(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{n}{2}$ (D) $n - 2$ (E) n^2

Solution

Si x est un nombre inférieur ou égal à n, $n!$ comtient le facteur x et donc $(n!+x)$ est divisible par x. D'où $(n!+2)$ est divisible par 2, $(n!+3)$ est divisible par 3, ..., $(n! + (n-1))$ est divisible par $(n-1)$, donc pour $n > 0$, aucun de ces nombres n'est premier.

Maxi 21

Sans réponse préformulée - Le graphe représenté ci-dessous est celui de la dérivée f' d'une fonction f. Il est défini pour tout réel, est symétrique par rapport à l'origine des axes et ne coupe l'axe des x qu'en trois points. Combien de réels a sont tels que $\forall x \in \mathbb{R} : f(a) \geqslant f(x)$?



Solution

La dérivée f' est successivement positive, nulle, négative, nulle, positive, nulle et négative. La fonction f est donc succesivement croissante, décroissante, croissante puis décroissante, elle admet un minimum en 0 et deux maxima l'un à gauche, l'autre à droite de l'origine. Puisque f' est symétrique par rapport à l'origine des axes, c'est une fonction impaire, donc f est paire et symétrique par rapport à l'axe Oy, les deux maxima ont pour abscisses a et $-a$ et sont tels que $f(a) = f(-a) \geqslant f(x)$ pour tout x appartenant au domaine de la fonction f.

Maxi 24

L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm vaut X cm^2. L'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 cm vaut Y cm^2. L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 1 cm vaut Z cm^2. Une seule des relations ci-dessous est correcte, laquelle ?

(A) $X < Y < Z$ (B) $Z < X < Y$ (C) $Y < Z < X$
(D) $X < Z < Y$ (E) $Z < Y < X$

Solution

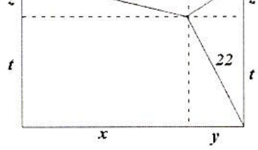
$X = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$; $Y = \frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $Z = \frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Donc $Z < Y < X$.

Maxi 29

Sans réponse préformulée - Un point intérieur à un rectangle est à une distance de 22 cm d'un des sommets et à une distance de 24 cm du sommet opposé. Sa distance à un troisième sommet est 6 cm. Quelle est, en centimètres, sa distance au quatrième sommet ?

Solution

Dans la figure ci-contre, Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire



$x^2 + z^2 = 24^2 = 576$,
$y^2 + z^2 = 6^2 = 36$
et $y^2 + t^2 = 22^2 = 484$.

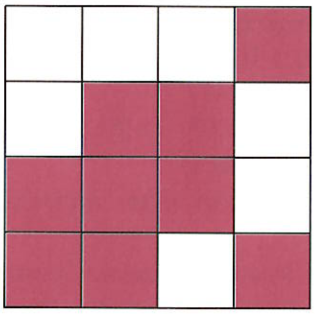
D'où $x^2 + t^2 = (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2) + (y^2 + t^2) = 576 - 36 + 484 = 1024 = 32^2$ La quatrième distance vaut donc 32.

Rallye problèmes

Nicole Miewis

Solutions des problèmes proposés dans les numéros 115 et 116.

1. Les cases colorées



2. Les deux astres

Suppposons que les deux astres apparaissent simultanément pour la première fois j jours après le 1er janvier 2006. Alors j est un multiple de 105 et $j-6$ est un multiple de 81. Cherchons donc des naturels k et n tels que $j = 105 \cdot k$ et $j - 6 = 81 \cdot n$. Cela signifie résoudre l'équation

$$105 \cdot k = 81 \cdot n + 6$$

qui se simplifie en

$$35 \cdot k = 27 \cdot n + 2$$

Comme $35 = 27 + 8$, on peut aussi écrire

$$27 \cdot k + 8 \cdot k = 27 \cdot n + 2$$

ce qui entraîne que $8 \cdot k - 2$ est divisible par 27. Donnant à k les valeurs 1, 2… on trouve que la plus petite valeur possible de k est 7. Effectivement $105 \cdot 7 = 735 = 9 \cdot 81 + 6$ est bien un multiple de 81 augmenté de 6.

Donc $j = 735$: la date d'observation simultanée des deux astres est le 735e jour après le 1er janvier 2006, soit le 6 janvier 2008.

3. Rien compris

Soient x et y les deux nombres naturels. Les fantaisies de Thomas conduisent à la relation $xy - 60 = \frac{x}{y} + 60$. En isolant x, on trouve $x = \frac{120y}{y^2-1}$ qui doit être un nombre naturel. En utilisant un tableur, on trouve les couples de nombres naturels, inférieurs à 120 tels que x soit un multiple de y.

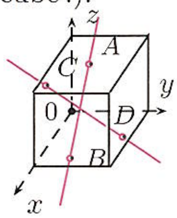
x	y	$xy - 60$	$\frac{x}{y} + 60$
11	11	$11 \cdot 11 - 60 = 61$	$1 + 60 = 61$
25	5	$25 \cdot 5 - 60 = 65$	$\frac{25}{5} + 60 = 65$
32	4	$32 \cdot 4 - 60 = 68$	$\frac{32}{4} + 60 = 68$
45	3	$45 \cdot 3 - 60 = 75$	$\frac{45}{3} + 60 = 75$
80	2	$80 \cdot 2 - 60 = 100$	$\frac{80}{2} + 60 = 100$

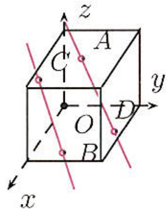
6. La pelouse.

Après la première tonte, Jean stocke 120 litres de gazon. Après la deuxième tonte, il ajoute 120 litres au $\frac{120}{4} = 30$ litres restant de la première tonte.
Après la troisième tonte, la masse de gazon est : $120 + \frac{120}{4} + \frac{120}{4^2}$.
Après la vingt-quatrième tonte, la masse de gazon est : $120\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{1}{4^{23}}\right)$.
L'expression entre parenthèses est la somme des vingt-quatre premiers termes d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme 1. Cette somme vaut $\dfrac{1 - \frac{1}{4^{24}}}{1 - \frac{1}{4}} \approx \dfrac{4}{3}$.
Le volume stocké après 24 semaines est donc de près de 160 litres.

4. Les épées de Majix

Les épées sont AB et CD ou AD et BC (AC et BD n'est pas acceptable car l'épée AC ne traverse pas le cube !).





Utilisons la géométrie analytique de l'espace avec le repère orthonormé de la figure (les arêtes ont une longueur de 80 cm).

On a : $A(40;40;80)$, $B(80;40;10)$, $C(70;10;80)$ et $D(50;80;10)$.

Considérons d'abord le cas des deux droites AB et CD. Par distance entre AB et CD, nous entendons la *plus courte distance* entre un point P de AB et un point Q de CD. Nous savons que cette distance est la plus courte quand la droite PQ est la perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD.

Exprimons vectoriellement les conditions $PQ \perp AB$ et $PQ \perp CD$.

Les conditions de perpendicularité $PQ \perp AB$ et $PQ \perp CD$ s'expriment par la nullité des produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ}$. Décomposons $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ sont respectivement des multiples de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$: nous posons $\overrightarrow{AP}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ}=\mu\,\overrightarrow{CD}$. Les conditions de perpendicularité s'expriment à présent par deux équations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot(-\lambda\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\mu\,\overrightarrow{CD})=0 \\ \overrightarrow{CD}\cdot(-\lambda\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\mu\,\overrightarrow{CD})=0 \end{cases}$$

Or $|AB|^2 = 6500$, $|CD|^2 = 13800$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=4100$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1200$ et $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=-2700$. Le système devient donc

$$\begin{cases} -6500\lambda+4100\mu=-1200 \\ -4100\lambda+13800\mu=2700 \end{cases}$$

Les solutions sont $\lambda=\frac{2763}{7289}\approx 0{,}379$ et $\frac{2247}{7289}\approx 0{,}308$, de sorte que les coordonnées des points P et Q sont approximativement

$P :\ (40;40;80)+0{,}379\cdot(40;0;-70)$
$\quad=(55{,}16;40;54{,}47)$

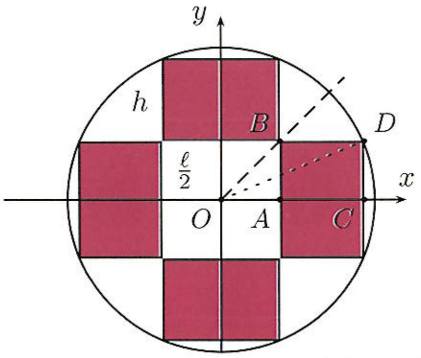
$Q :\ (70;10;80)+0{,}308\cdot(-20;70;-70)$
$\quad=(63{,}84;36{,}6;53{,}4)$

La distance $|PQ|$ vaut donc approximativement 9,38 cm.

On procède de la même manière pour déterminer la distance des droites AD et BC. On trouve 29,69 cm.

5. Les sets de table

Représentons les quatre sets rectangulaires ($\ell \times h$) identiques en position « optimale » sur une table ronde de rayon r.



Posons $\overline{AC}=\overline{BD}=h$ et $\overline{AB}=\overline{CD}=\frac{\ell}{2}$.

L'amplitude de l'angle $\widehat{BOA}$ est 45° ; le triangle OAB est isocèle et $\overline{AB}=\overline{OA}$. Le triangle OCD est rectangle et

$$(\overline{OA}+\overline{AC})^2+\overline{CD}^2=r^2$$

Les deux paramètres ℓ et h sont liés par la relation : $\left(\frac{\ell}{2}+h\right)^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=r^2$.

On en déduit que $h=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4r^2-\ell^2}-\ell\right)$.

L'aire des 4 sets est :

$$A(\ell)=2\ell\left(\sqrt{4r^2-\ell^2}-\ell\right).$$

Cette aire sera maximale si $A'(\ell)=0$. Le calcul de la dérivée $A'(\ell)$ conduit à la condition $4r^2-2\ell^2-2\ell\sqrt{4r^2-\ell^2}=0$.

En élevant au carré, on a l'équation bicarrée $\ell^4-4r^2\ell^2+2r^4=0$, dont la seule solution acceptable est $\ell=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ car elle seule, donnera une hauteur positive

$$h=\frac{r}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

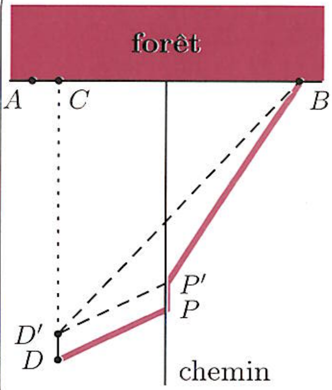
On peut remarquer que l'amplitude de l'angle $\widehat{COD}$ est de 22°30′.

7. L'élection.

Si x désigne le nombre total d'élèves, $0{,}8x$ élèves sont venus voter (ils se répartissent entre votes blancs ou nuls et votes exprimés).
Comme le nombre de votes blancs et nuls est de $0{,}05 \cdot 0{,}8x = 0{,}04x$, le nombre de votes exprimés est $0{,}8x - 0{,}04x = 0{,}76x$.

Les 1254 personnes qui ont voté pour Antoine représentent 55% de $0{,}76x$. Après calcul, $x = 3000$.
Finalement, $3000 - 1254 = 1746$ personnes n'ont pas voté pour Antoine.

8. Course d'orientation



Le concurrent rejoint le chemin en P, parcourt sur celui-ci 500 m jusqu'en P' puis rejoint indifféremment A ou B, puisque $\overline{P'A} = \overline{P'B}$. Le choix du point d'arrivée n'influence donc pas la longueur du parcours.
La longueur du trajet est $\overline{DP} + 500 + \overline{P'B}$. Considérons le point D' tel que $DD'P'P$ est un parallélogramme. La longueur du trajet est $500 + \overline{D'P'} + \overline{P'B}$. Ce trajet est minimum lorsque P' est aligné avec D' et B. Le triangle $D'CB$ est rectangle, $\overline{D'C} = 5400 - 500 = 4900$, $\overline{CB} = 5000 + 2000 = 7000$. On en déduit par le théorème de Pythagore que $\overline{D'B} = 8545$ et le trajet minimal est $8545 + 500 = 9045$ (résultat arrondi au mètre).

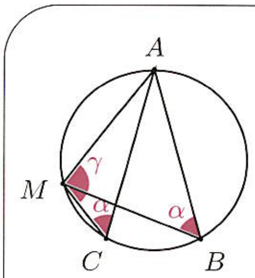
9. Les cartes.

Les positions indiquées dans le tableau ci-dessous sont données en partant toujours du dessus du paquet.

Position initiale	après le 1$^{\text{er}}$ mélange	après le 2$^{\text{e}}$ mélange	après le 3$^{\text{e}}$ mélange	après le 4$^{\text{e}}$ mélange	après le 5$^{\text{e}}$ mélange
1	16	25	4	31	1
2	32	17	8	29	2
3	15	9	12	27	3
4	31	1	16	25	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

On se rend compte en poursuivant le tableau qu'après le 5$^{\text{e}}$ mélange, on retrouve le jeu rangé tel qu'il était avant le 1$^{\text{er}}$ mélange. Comme $2007 = 401 \times 5 + 2$, la position des cartes après 2007 mélanges sera identique à celle du 2$^{\text{e}}$ mélange. La carte du dessus du paquet initial est donc à présent en 25$^{\text{e}}$ place.

10. Oh Lac…



On sait que $\overline{AC} = \overline{AB} = 500$ m. Posons $x = \overline{CM}$. Alors $\overline{AM} = 5x$ et $\overline{BM} = 7x$.
x est aussi en mètres par minute la vitesse du kayak.

Les points A, B, C et M sont cocycliques, donc $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = \alpha$. Dans le triangle ABM,

$$25x^2 = 49x^2 + 500^2 - 2 \cdot 500 \cdot 7x\cos\alpha$$

Dans le triangle ACM,

$$25x^2 = x^2 + 500^2 - 2 \cdot 500 \cdot x\cos\alpha$$

On en déduit : $x^2 = 7812{,}5$ et donc $x = 88{,}389$ (en m/min.), soit 5,3 km/h.
Posons $\gamma = \widehat{CMA}$. Dans le triangle MCA,

$$500^2 = 25x^2 + x^2 - 2 \cdot 5x^2 \cos\gamma$$

On en tire $\cos\gamma = -0{,}6$ et $\sin\gamma = 0{,}8$ ($\sin\gamma$ est positif puisque $90° < \gamma < 180°$).
La règle des sinus permet de calculer le rayon du lac puisque le diamètre du cercle circonscrit au triangle ACM vaut $\frac{AC}{\sin\gamma}$.
On a $R = 312{,}5$ m.

Solutions des jeux.

1. Nombres croisés

$a = 3$, $b = 2$, $c = 7$ et $d = 13$.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	■	7	2	9
2	6	0	7	5	■	7	2
3	2	4	■	1	3	■	7
4	■	8	5	■	1	1	■
5	3	■	3	6	■	3	6
6	4	8	■	4	6	0	8
7	5	1	2	■	4	9	8

2A. Les familles Véritas et Menthos

- *B* ne peut dire la vérité s'il affirme que tout le monde ment. B est donc est un Menthos.
- Cette information et la déclaration de *A*, qu'elle soit vraie ou fausse, impliquent que *C* est un Véritas
- La famille de *A* ne peut être déduite des informations.

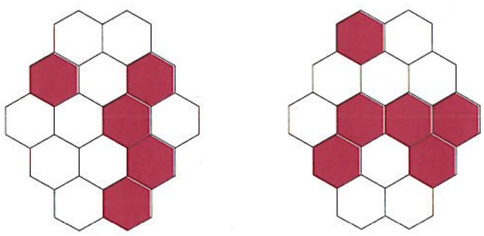
2B. La galette des rois

C'est *C* qui a avalé la fève et elle est blanche.

2C. La soupe aux choux

Les déclarations sont contradictoires. Par exemple, si Henri dit la vérité, alors Françoise aime le soupe aux choux. Donc elle dit la vérité et Henri n'aime pas la soupe aux choux. Henri doit donc mentir ... Toutes les alternatives conduisent à une contradiction. Les deux amis ont créé un paradoxe !

2D. Les hexagones



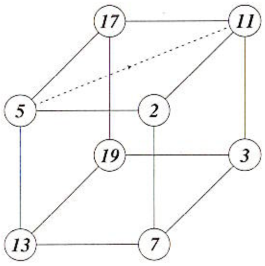
3. Des jeux arithmético-algébriques

3A.

3	2	-5	4	4
4	3	4	4	3
-5	2	4	3	4
3	3	3	4	4
2	2	3	4	4

4	8	4	1	4
8	8	8	1	4
1	8	8	4	8
1	1	1	3	4
8	8	1	1	3

3B.



3C. Mur additif :

133
60 73
29 31 42
16 13 18 24
7 9 4 14 10

Murs multiplicatifs :

Solution unique dans les naturels :

336
28 12
14 2 6
7 2 1 6

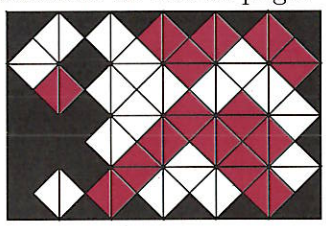
Deuxième solution dans les entiers :

336
28 12
-14 -2 -6
-7 2 -1 6

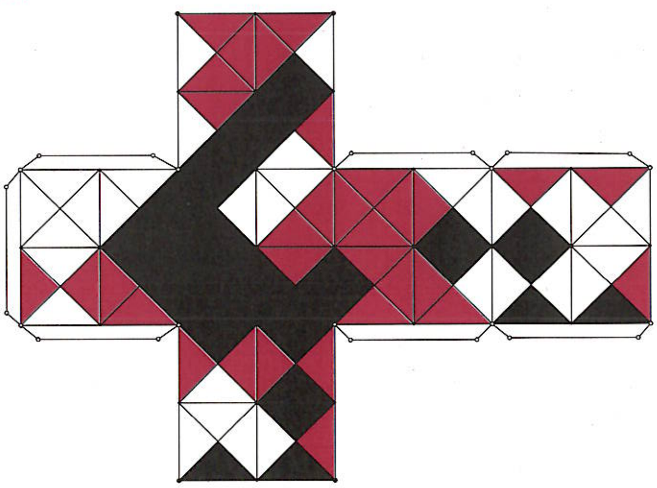
4. Un puzzle

A. Le coloriage des quarts de carrés produit un ensemble de 24 pièces.

B. *Qui peut le plus peut le moins.* Voici un rectangle formé des 24 pièces et dont les bords sont entièrement noirs. Tu trouveras cette solution et d'autres sur le site mentionné en bas de page.



C.



www.ac-orleans-tours.fr/maths-1/rallye/ral2000/im_ralim_86-95/94f3sol2.gif

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- ☞ pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- ☞ pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBP-Mef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (par APMEP)	8 €		16 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Non prior : ✉, Prior : ✉̸

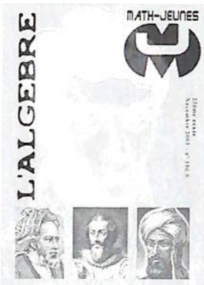
Anciens numéros :

Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition

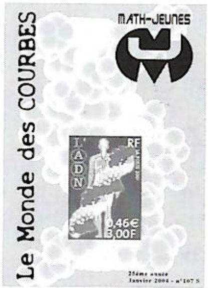
Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition

Frais d'expédition : consulter le secrétariat

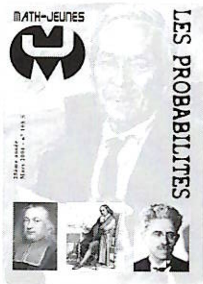
Complétez votre collection de *Math-Jeunes.*



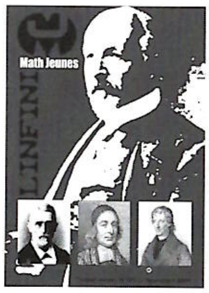
N°106
L'algèbre



N°107
Les courbes

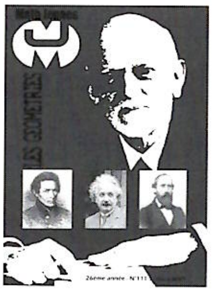


N°108
Les probabilités

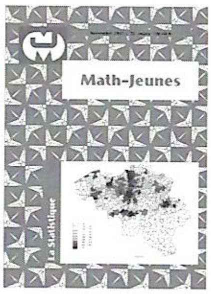


N°109
L'infini

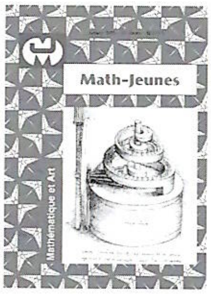
N°110
Le codage



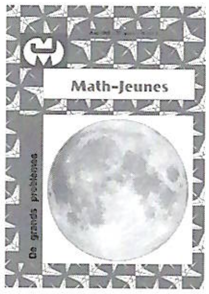
N°111
Les géométries



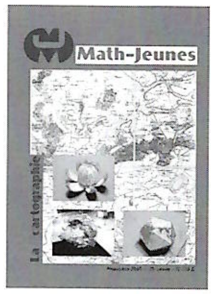
N°112
La statistique



N°113
Mathématique
et art



N°114
De grands
problèmes



N°115
La cartographie

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € pour les trois numéros 106 à 108; 1,5 € pour les trois numéros 109 à 111, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont accessibles à l'adresse `www.sbpm.be/mj2.htm`

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :
– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Resteigne
– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : G. NOËL
Rue de la Culée, 86 - 6927 Resteigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée