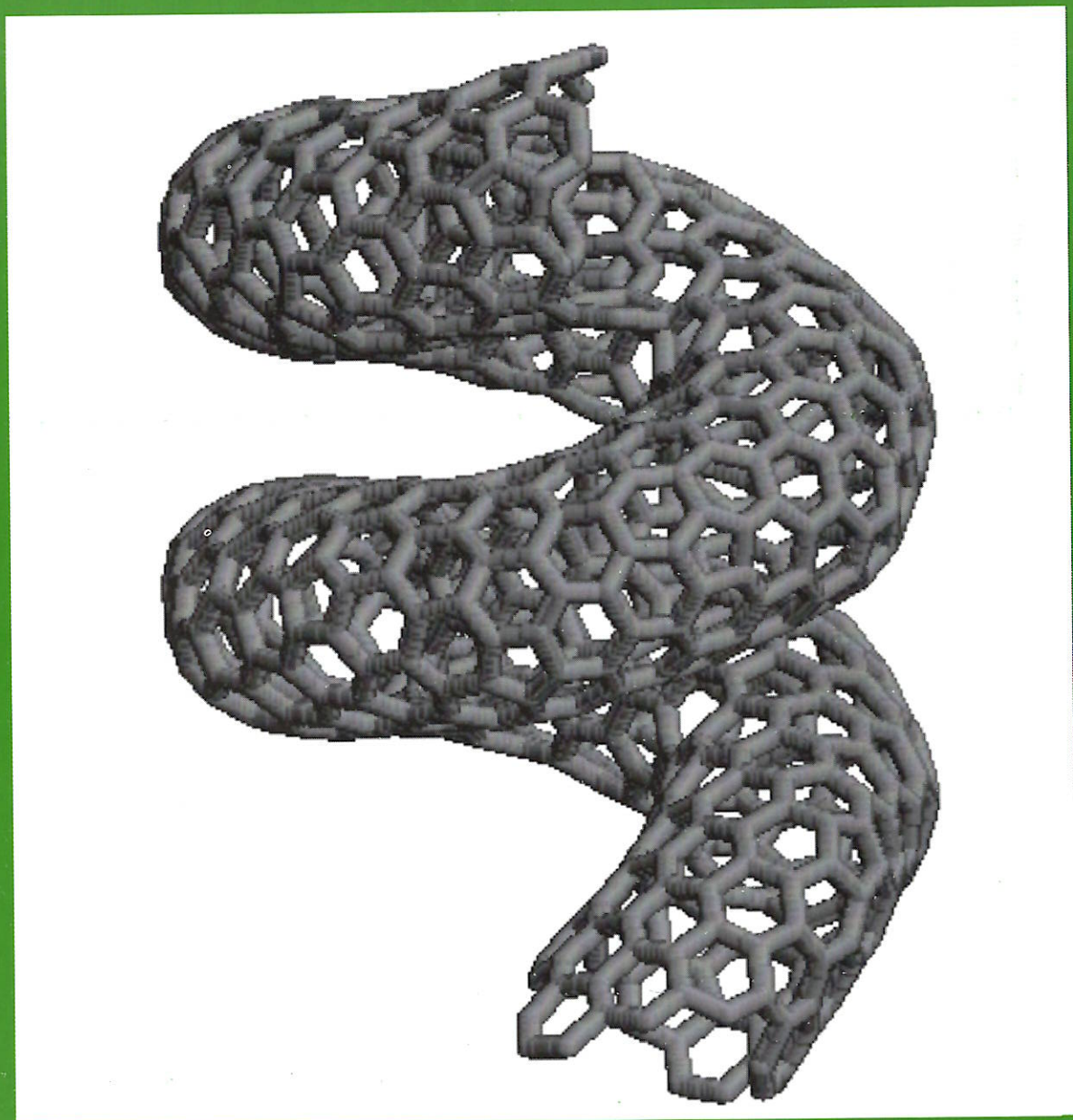


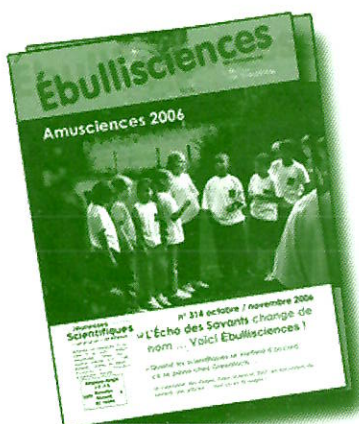


Math-Jeunes

Courbes et surfaces



Février 2008 – 29^e année – N 119 S



Ébullisciences

Le bon réflexe pour comprendre le monde !

Tous les deux mois, des articles sur un thème de société, des expériences à réaliser à la maison, l'agenda des activités des Jeunesses Scientifiques, des jeux, des infos...



JE DÉSIRE RECEVOIR **Ébullisciences**

Pendant 1 an et je verse 7,50 € sur le compte n° 001-0015784-49 de l'association.

Nom, prénom _____
 Date de naissance ____ / ____ / ____ Sexe F / M
 Rue : _____ n° ____ bte ____
 N° Postal : _____ Localité : _____
 Tél : _____

Bulletin à renvoyer à

**Jeunesses
Scientifiques**
 de Belgique
 Avenue Latérale, 17
 1180 Bruxelles
 Tél. : 02 537 03 25
 Fax : 02 537 08 02
 www.jsb.be

Sommaire

Y. Noël-Roch, Choisir sa distance	2
S. Trompler et G. Noël, De belles courbes	5
J. Sharp, Des mécanismes articulés à l'op-art	9
C. Festraets, Projection orthogonale sur un plan	13
S. Trompler et G. Noël, Le tore	19
A. Gazagnes, Un tour de cartes	24
Y. Noël-Roch, Jeux	25
C. Festraets, Olympiades mathématiques	28
N. Miewis, Problèmes	30

En couverture : courbe ou surface ? Ce manchon cylindrique en forme d'hélice a une structure basée sur un réseau d'hexagones. Un bel exemple d'objets mathématiques imbriqués et issus de la biologie moléculaire : il s'agit d'une protéine extraite de la *Brookhaven protein data bank*.
http://www.compbio.dundee.ac.uk/papers/prolog/subsection3_1_1.html

Math-Jeunes

Des courbes et des surfaces

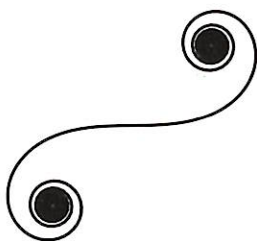
Math-Jeunes a déjà consacré son numéro 107 au thème des courbes. Mais le sujet est inépuisable, aussi avons-nous décidé d'y revenir et de l'étendre quelque peu dans des directions moins fréquentées.

Ainsi, sous la plume de Y. Noël-Roch, le présent numéro propose en premier lieu de jeter un regard vers la *taxi-géométrie*, cette géométrie où les distances se mesurent uniquement à l'horizontale ou à la verticale. Dans un tel contexte, les triangles isocèles, les cercles ou les ellipses prennent des formes bizarres. Si cela vous tente, explorez d'autres formes géométriques « familières ».

Les courbes ne relèvent pas seulement du domaine des mathématiques. Les sciences naturelles et les techniques en fournissent de nombreux exemples. La structure en double hélice de l'ADN est bien connue. En couverture, vous avez pu rencontrer un autre objet issu de la biologie moléculaire, en l'occurrence une protéine dont la structure est particulièrement remarquable. On connaît bien aussi les spirales qu'arborent de nombreux êtres vivants : escargots et mollusques, ou encore fleurs de tournesol. Dans le domaine technique, on pourrait citer les profils très particuliers des tracés des voies de chemin de fer ou des bretelles d'accès aux autoroutes dès lors que les véhicules ne vont plus en ligne droite. Ainsi, les échangeurs autoroutiers sont profilés de façon que les automobilistes roulent à vitesse constante tout en tournant le volant également à vitesse constante. La courbe correspondante porte le nom de *clothoïde*. Elle est donnée par des *équations paramétriques différentielles* :

$$\begin{cases} x'(t) = \cos \frac{\pi}{2} t^2 \\ y'(t) = \sin \frac{\pi}{2} t^2 \end{cases}$$

$x'(t)$ et $y'(t)$ étant les composantes du vecteur vitesse, en un temps unité, le véhicule tourne d'un angle droit, et cela à vitesse constante puisque $x'^2 + y'^2 = 1$.



La clothoïde

Étudier la clothoïde nous fournirait aussi l'occasion de parler de la *courbure* d'une courbe. Personne ne sera étonné d'apprendre que plus une courbe est plate, moins sa courbure est élevée. Mais ceci n'est pas vraiment une définition. Contentons-nous de dire que le *rayon de courbure* d'une courbe en un point est le rayon du cercle qui approche le mieux la courbe en ce point. Et la *courbure* est l'inverse du *rayon de courbure*. La clothoïde se caractérise alors par le fait que sa courbure est proportionnelle à l'espace parcouru.

Comme on le voit, étudier des courbes particulières peut facilement mener loin... Dans *De belles courbes*, S. Trompler et G. Noël présentent des courbes intéressantes pour le physicien : la *cardioïde* et la *néphroïde* qui sont des caustiques obtenues comme enveloppes de rayons lumineux. Ces courbes font partie d'une famille assez large puisqu'elle comprend aussi les cycloïdes, épicycloïdes et hypocycloïdes.

Beaucoup de méthodes peuvent être utilisées pour définir des courbes. On rencontre ainsi des équations de diverses espèces : des équations cartésiennes ou paramétriques, polaires ou différentielles. On peut aussi utiliser des mécanismes physiques. C'est l'objet d'un article que nous sommes particulièrement heureux de présenter à nos lecteurs et qui est paru précédemment dans la revue anglaise *Mathematics Teaching*. Dans cet article, John Sharp réalise de véritables œuvres d'art à partir de mécanismes articulés (*linkage* en anglais).

Les deux derniers articles nous donnent l'occasion de rencontrer des surfaces qui sont aussi des supports de courbes. Dans *Projection orthogonale sur un plan*, C. Festraets montre selon l'inclinaison du plan de projection, la projection orthogonale d'une hélice sur un plan peut avoir des formes très différentes : cercle, sinusoïde, ou *trochoïde*, une famille de courbes qui contient les cycloïdes, cycloïdes allongées et cycloïdes raccourcies. Enfin, S. Trompler et G. Noël s'intéressent aux sections d'un *tore* et retrouvent ainsi les *ovales* de Cassini et la *lemniscate* de Bernoulli.

Choisir sa distance

Yolande Noël-Roch



Un odomètre

1. Introduction

Nous avons l'habitude de mesurer des longueurs et disposons d'instruments pour le faire : une latte graduée pour mesurer l'écart entre deux points sur une feuille de papier, un décimètre pour mesurer la cour de récréation à l'école primaire. Les marcheurs connaissent bien le podomètre (et les imprécisions qui y sont liées!), et les gendarmes l'odomètre (petite roue au bout d'une tige rigide) qui relève du même principe mais le périmètre de la roue est stable (contrairement à la longueur d'un pas au cours d'une longue marche!). Il existe aussi des instruments plus sophistiqués utilisés en arpentage... mais ce serait une autre histoire, reliant l'évaluation de longueur à d'autres notions mathématiques comme par exemple la trigonométrie.

Pour reproduire des longueurs égales, nous ne sommes pas obligés de les connaître : deux points a et b étant donnés, un compas permet de construire n'importe où sur la feuille deux points c et d tels que $||ab|| = ||cd||$ ou encore $d(a,b) = d(b,c)$. Suivant le contexte, nous parlons de « longueurs de segments » ou de « distances entre points » mais dans tous les cas, nous oublions souvent que nous opérons dans un cadre auquel nous avons été conditionnés, celui de la **distance euclidienne**. Dans ce contexte, des ensembles ont été définis en termes de distance et nous sont familiers : médiatrice d'un segment, cercle, ellipse, parabole, hyperbole.

Dans d'autres circonstances, nous aurions pu baigner dans un autre conditionnement, celui de la **taxidistance**. On l'appelle ainsi par allusion à la situation NewYorkaise : la ville est quadrillée de rues dites orientées Nord-Sud et d'avenues dites orientées Est-Ouest. Un taxi qui se déplace d'un point de la 15^e rue à un point de la 9^e avenue parcourt la 15^e rue jusqu'à son croisement avec la 9^e avenue qu'il emprunte alors jusqu'à l'arrivée souhaitée (ceci est une simplification théorique qui ne tient pas compte des sens de circulation!).

2. Distance de deux points

Dans la suite du texte, (x_P, y_P) est la coordonnée du point P .

Distance euclidienne (d_2)

$$d_2(A, C) = \sqrt{6^2 + 5^2} \simeq 7,81.$$

$$d_2(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

$$d_2(A, B) = 4 - 1 = 3$$

$$d_2(A, D) = 2 - (-1) = 3$$

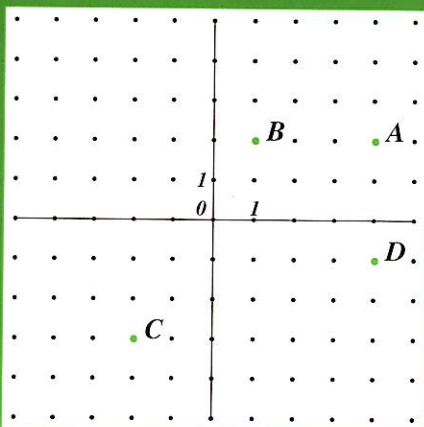
Taxidistance (d_1)

$$d_1(A, C) = 6 + 5 = 11.$$

$$d_1(P, Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$$

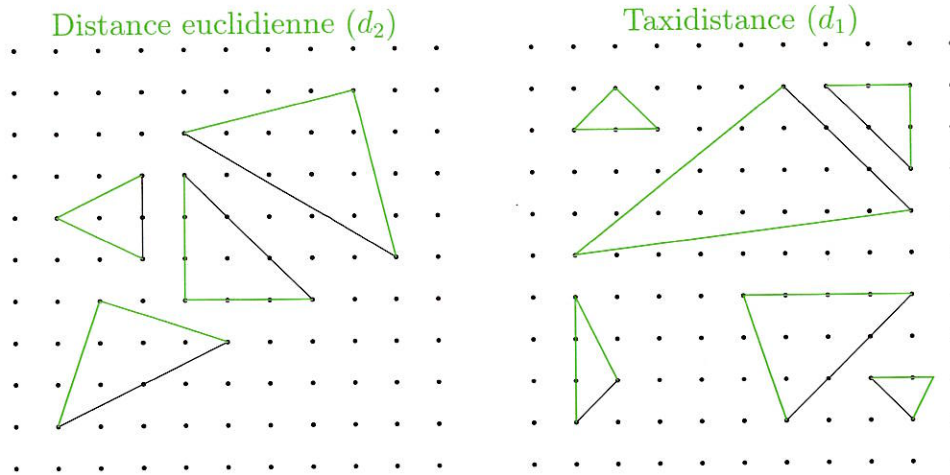
$$d_1(A, B) = 4 - 1 = 3$$

$$d_1(A, D) = 2 - (-1) = 3$$



3. Des triangles isocèles

Dans chacun des triangles, deux côtés de même couleur ont même longueur.



4. Des taxicercles

Le taxicercle de centre C et de rayon r est l'ensemble des points à distance r de C ou encore l'ensemble des points P pour lesquels

$$|x_P - x_C| + |y_P - y_C| = r$$

Par exemple, le taxicercle centré à l'origine du repère orthonormé et de rayon 3 est l'ensemble des points dont la coordonnée (x, y) satisfait l'égalité $|x| + |y| = 3$.

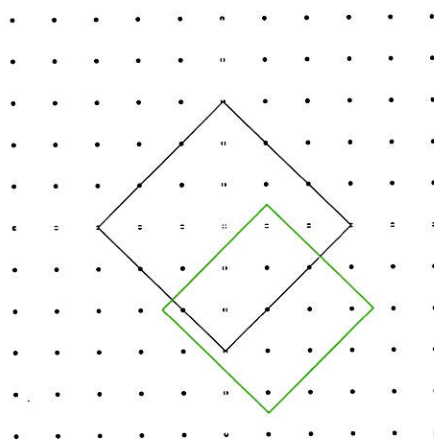
Sachant que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, la condition ci-dessus est équivalente à

$$\begin{cases} \text{Si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 & x + y = 3 \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 & -x + y = 3 \\ \text{Si } x \geq 0 \text{ et } y < 0 & x - y = 3 \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y < 0 & -x - y = 3 \end{cases}$$

Le taxicercle est donc la réunion de quatre segments, chacun étant limité à un quadrant et parallèle à une des bissectrices du repère.

5. Des médiatrices

Deux points A et B sont donnés. Dans les deux contextes (euclidien et taxi), les dessins ci-dessous font apparaître en vert la médiatrice de $[AB]$ et en noir les deux triangles équilatéraux ABC et ABD .



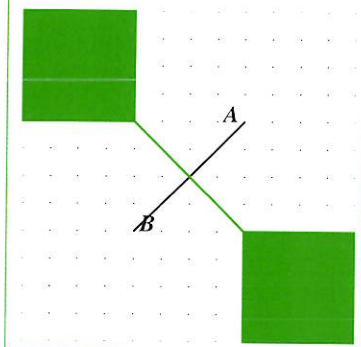
Si le centre du taxicercle est un point C et que son rayon vaut 2.5, la condition

$$|x - x_C| + |y - y_C| = 2.5$$

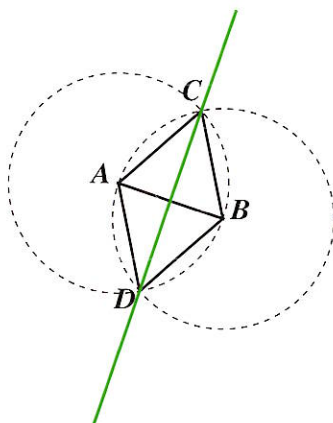
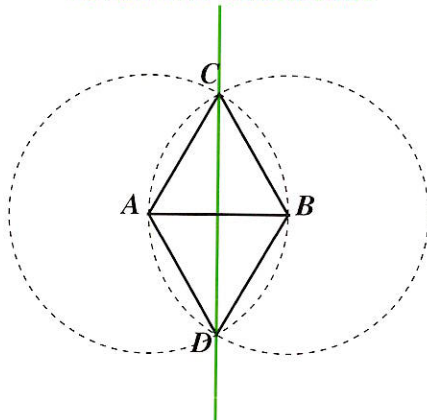
conduit à une analyse semblable dans quatre quarts de plan de sommet C :

$$\begin{cases} \text{Si } x \geq x_C \text{ et } y \geq y_C & x - x_C + y - y_C = 2.5 \\ \text{Si } x < x_C \text{ et } y \geq y_C & -x + x_C + y - y_C = 2.5 \\ \text{Si } x \geq x_C \text{ et } y < y_C & x - x_C - y + y_C = 2.5 \\ \text{Si } x < x_C \text{ et } y < y_C & -x + x_C - y + y_C = 2.5 \end{cases}$$

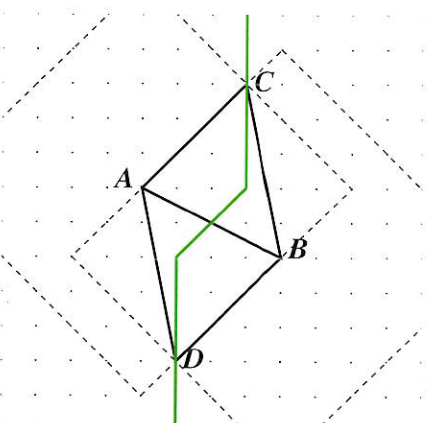
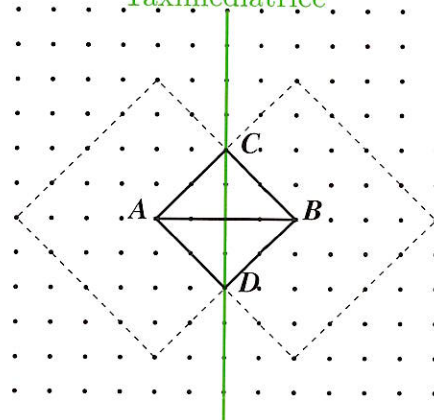
Pour quels couples de points (A, B) la taximédiatrice est-elle la réunion d'un segment et de deux quarts de plan ?



Médiatrice euclidienne



Taximédiatrice

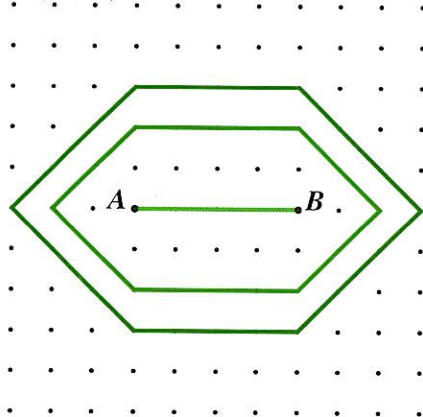


6. Des ellipses et des taxiellipses

Une ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est une constante.

Dans la suite du texte, A et B sont les deux points fixes.

$$d_1(A, B) = 4$$



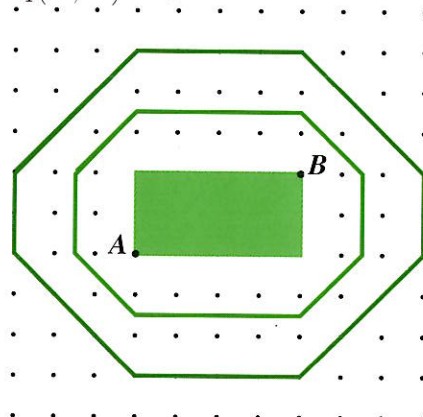
En couleur de plus en plus foncée les taxiellipses dessinées correspondent à

$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 4$$

$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 8$$

$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 10.$$

$$d_1(A, B) = 6$$



En couleur de plus en plus foncée les taxiellipses dessinées correspondent à

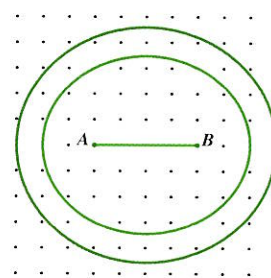
$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 6$$

$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 9$$

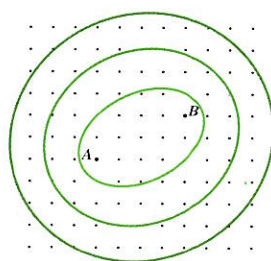
$$d_1(A, P) + d_1(B, P) = 12.$$

Les mêmes familles d'ellipses... plus familières en distance euclidienne !

$$d_2(A, B) = 4$$



$$d_2(A, B) = 2\sqrt{5}$$



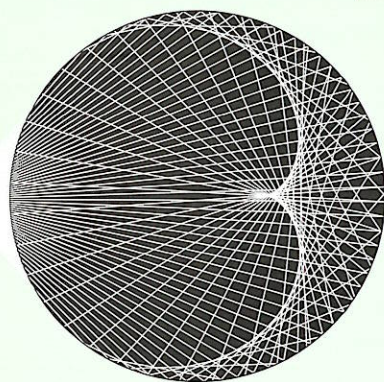
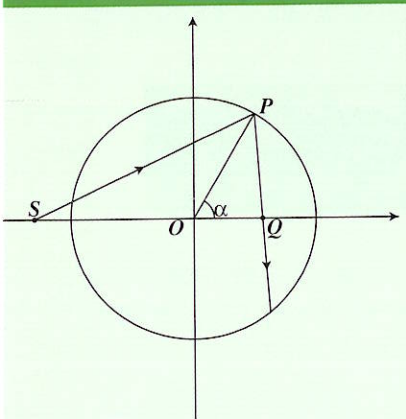
De belles courbes

Simone Trompler et Guy Noël

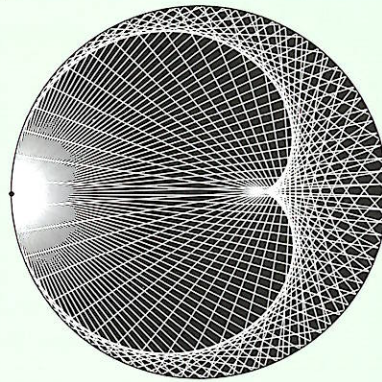
Faites une petite expérience : avec une lampe de poche, éclairez une bague métallique. Une alliance convient parfaitement. Des courbes lumineuses apparaissent. Comment ces courbes se forment-elles ?

Imaginons un rayon lumineux, issu d'un point S et frappant la paroi interne de la bague (circulaire) en un point P . La coordonnée de ce point est facile à trouver : si le rayon de la bague vaut r et si l'angle de la droite OP avec l'axe des x vaut α , P est le point de coordonnée $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.

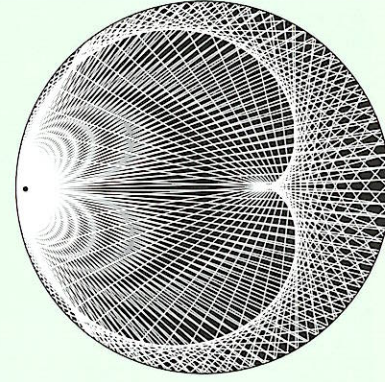
Imaginons donc non plus un rayon lumineux venant frapper l'anneau circulaire, mais un faisceau de rayons issus de S , qui se réfléchissent de cette façon. Pour voir clair (!), augmentons le nombre de rayons issus de S , dessinons en gris les rayons incidents et en blanc les rayons réfléchis, le tout sur un fond noir :



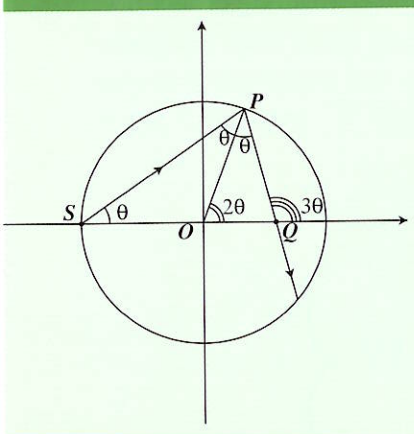
Le point S est extérieur au cercle.



Le point S est sur le cercle.



Le point S est intérieur au cercle.



Clairement les rayons réfléchis sont tous tangents à une courbe en forme de cœur (qu'ils peuvent néanmoins recouper plus loin). Pour le physicien, il s'agit d'une courbe *caustique*, c'est à dire l'*enveloppe* d'une famille de rayons lumineux. Le mathématicien qui s'intéresse d'abord à la forme de la courbe l'appelle une *cardioïde* : une courbe en forme de cœur. On remarque que lorsque le point S est situé à l'intérieur du cercle, la partie gauche de la courbe est floue. Il faut diminuer l'épaisseur des traits pour récupérer de la netteté. Sur notre figure, le point S est proche du cercle. Essayez d'imaginer ce qui arrive lorsqu'il se rapproche du centre !

Nous allons essayer de déterminer l'équation de la cardioïde dans un cas simple : celui de la figure centrale, où le point S est situé sur le cercle. Le triangle OPS est alors isocèle (voir la figure en marge), ce qui permet de déterminer l'équation de la droite D_θ , support du rayon réfléchi correspondant à l'angle $\widehat{OSP} = \theta$:

$$D_\theta : y - y_P = \operatorname{tg} 3\theta (x - x_P)$$

soit, en notant r le rayon du cercle :

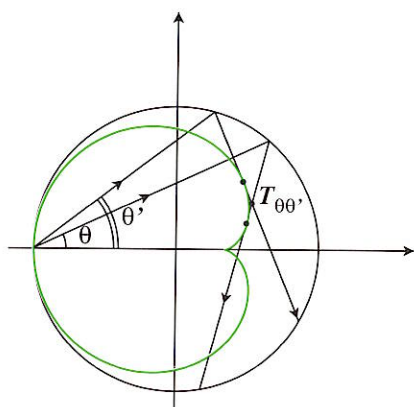
$$D_\theta : y - r \sin 2\theta = \operatorname{tg} 3\theta (x - r \cos 2\theta)$$

ou encore

$$D_\theta : x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = r \sin \theta$$

Remarquez que l'angle θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La cardioïde est l'enveloppe de la famille de droites D_θ . Autrement dit, elle est tangente à toutes ces droites. Pour en trouver un point, considérons deux droites D_θ et $D_{\theta'}$ et calculons leur point d'intersection $T_{\theta\theta'}$.

En faisant tendre θ' vers θ , le point d'intersection $T_{\theta\theta'}$ va tendre vers le point de contact de la cardioïde avec sa tangente D_θ .



Réolvons le système constitué des équations des deux droites D_θ et $D_{\theta'}$.

$$\begin{cases} x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = r \sin \theta & (1) \\ x \sin 3\theta' - y \cos 3\theta' = r \sin \theta' & (2) \end{cases}$$

Soustrayons l'équation (1) de l'équation (2) :

$$x(\sin 3\theta' - \sin 3\theta) - y(\cos 3\theta' - \cos 3\theta) = r(\sin \theta' - \sin \theta)$$

Vous souvenez-vous des formules de Simpson ($\sin p - \sin q = \dots$) ? Appliquez-les, vous obtenez

$$x \sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2} \cos 3 \frac{\theta' + \theta}{2} + y \sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2} \sin 3 \frac{\theta' + \theta}{2} = r \sin \frac{\theta' - \theta}{2} \cos \frac{\theta' + \theta}{2}$$

C'est le moment de faire tendre θ' vers θ . Les facteurs en $\theta' + \theta$ ne posent pas de problème : cette somme va devenir tout simplement 2θ . Par contre $\theta' - \theta$ tend vers 0 et, puisque $\sin 0 = 0$, l'équation va devenir $0 = 0$ ce qui n'est guère utile !

Mais peut-être savez-vous déjà que si x tend vers 0, alors $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1. Et $\frac{\sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2}}{\frac{\theta' - \theta}{2}} = \frac{3 \sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2}}{\frac{\theta' - \theta}{2}}$ tend vers $\frac{3}{2}$. Divisons donc les deux membres de l'équation par $\theta' - \theta$:

$$x \frac{\sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2}}{\frac{\theta' - \theta}{2}} \cos 3 \frac{\theta' + \theta}{2} + y \frac{\sin 3 \frac{\theta' - \theta}{2}}{\frac{\theta' - \theta}{2}} \sin 3 \frac{\theta' + \theta}{2} = r \frac{\sin \frac{\theta' - \theta}{2}}{\frac{\theta' - \theta}{2}} \cos \frac{\theta' + \theta}{2}$$

et faisons tendre θ' vers θ :

$$\frac{3}{2} x \cos 3\theta + \frac{3}{2} y \sin 3\theta = \frac{r}{2} \cos \theta$$

Simplifiez cette équation et introduisez-la dans le système ci-dessus à la place de l'équation (2) :

$$\begin{cases} x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = r \sin \theta & (1) \\ 3x \cos 3\theta + 3y \sin 3\theta = r \cos \theta & (3) \end{cases}$$

Après résolution, une nouvelle application des formules de Simpson met les solutions sous la forme

$$\begin{cases} x = \frac{r}{3} (2 \cos 2\theta - \cos 4\theta) \\ y = \frac{r}{3} (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \end{cases}$$

Nous devons donc calculer les coordonnées du point d'intersection de D_θ et $D_{\theta'}$, en prenant soin de faire tendre θ' vers θ .

Ce calcul est proposé dans l'encadré ci-contre. Nous obtenons l'équation de la cardioïde sous forme paramétrique :

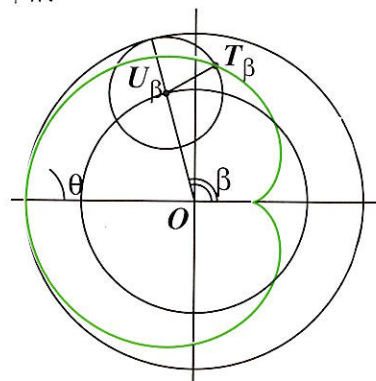
$$\begin{cases} x = \frac{r}{3} (2 \cos 2\theta - \cos 4\theta) \\ y = \frac{r}{3} (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \end{cases}$$

Examinons ces équations de plus près. Remarquons d'abord que, puisque θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, 2θ varie entre $-\pi$ et $+\pi$. Simplifions les formules en rebaptisant l'angle 2θ : posons $2\theta = \beta$. Les équations deviennent

$$\begin{cases} x = \frac{r}{3} (2 \cos \beta - \cos 2\beta) & (4) \\ y = \frac{r}{3} (2 \sin \beta - \sin 2\beta) & (5) \end{cases}$$

où cette fois, β varie entre $-\pi$ et $+\pi$. Nous noterons T_β le point de la cardioïde associé à la valeur β .

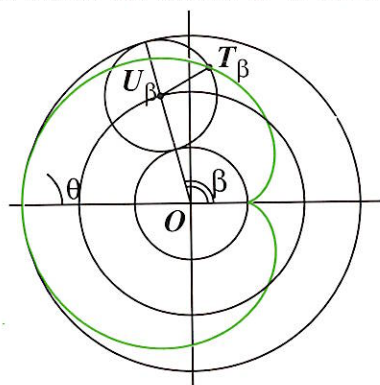
Isolons les premiers termes des seconds membres : $2 \frac{r}{3} \cos \beta$ et $2 \frac{r}{3} \sin \beta$ sont les coordonnées d'un point U_β qui parcourt le cercle de centre O et de rayon $\frac{2r}{3}$, lorsque β varie de $-\pi$ à $+\pi$.



En notations vectorielles, nous pouvons écrire $\vec{OT}_\beta = \vec{OU}_\beta + \vec{U}_\beta T_\beta$. Les composantes du vecteur $\vec{U}_\beta T_\beta$ sont les seconds termes des seconds membres des équations paramétriques de la cardioïde :

$$\left(-\frac{r}{3} \cos 2\beta, -\frac{r}{3} \sin 2\beta\right)$$

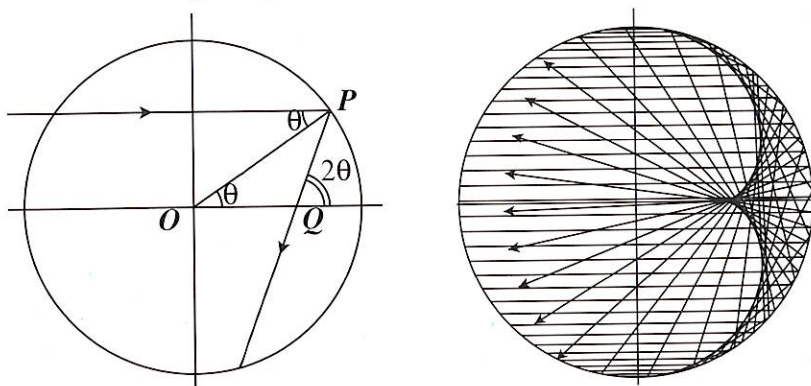
Ainsi, le point T_β de la cardioïde est sur le cercle de centre U_β et de rayon $\frac{r}{3}$. Vu que la distance de U_β à l'origine vaut $\frac{2r}{3}$, ce cercle est tangent au « grand cercle initial » de centre O et de rayon r . De plus il est aussi tangent au cercle de centre O et de rayon $\frac{r}{3}$.



Nous sommes ainsi arrivés à une nouvelle définition de la cardioïde :

La cardioïde est engendrée par le roulement d'un cercle mobile autour d'un cercle fixe de même rayon.

À la cardioïde, nous pouvons associer la *néphroïde* : cette courbe (ainsi nommée parce qu'elle a la forme d'un rein) est aussi une caustique. Comme la cardioïde, elle est obtenue par la réflexion d'un faisceau de rayons lumineux sur les parois d'un anneau, mais cette fois, il s'agit d'un faisceau de rayons *parallèles*, par exemple les rayons du soleil.



Nous pouvons réaliser pour la néphroïde une étude analogue à la précédente. Elle nous amène à des conclusions semblables :

– les équations paramétriques de la néphroïde :

$$\begin{cases} x = r(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta) \\ y = r(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta) \end{cases}$$

La cardioïde Un peu d'histoire

D'après Robert Ferréol, la cardioïde aurait été étudiée dès 1674 par l'astronome danois Ole Römer, plus connu pour avoir été le premier à mesurer la vitesse de la lumière. On trouve trace de la cardioïde dans la correspondance entre de Vaumesle et Huygens en 1679. C'est Philippe de la Hire qui calcule sa longueur en 1708 et Johann Castillon qui lui donne le nom de cardioïde en 1741.

Données techniques

R étant le rayon du cercle mobile :

Longueur : $16R$

Aire : $6\pi R^2$

La néphroïde Un peu d'histoire

La néphroïde a été étudiée par Huygens dans le cadre des caustiques, par Tschirnhaus (1679), Jacques Bernoulli (1692), Daniel Bernoulli (1725) et R. A. Proctor (1878).

Données techniques

R étant le rayon du cercle mobile :

Longueur : $24R$

Aire : $12\pi R^2$

La cycloïde Un peu d'histoire

Pascal raconte les péripéties de l'étude de la cycloïde dans *L'Histoire de la Roulette*. Il attribue ce nom au père Mersenne qui avait proposé aux savants de l'époque d'en chercher la nature et les propriétés. En 1634, Roberval démontra que « l'espace de la roulette est le triple de la roue qui la forme ».

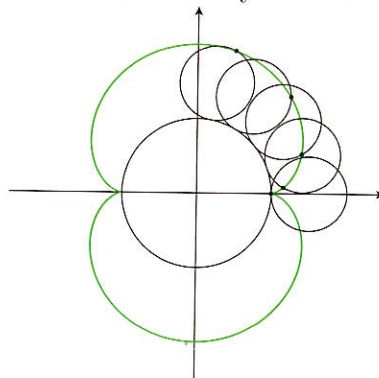
Données techniques

R étant le rayon du cercle mobile :

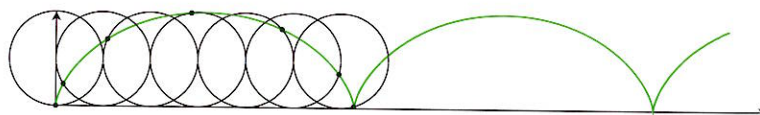
Longueur d'une arche : $8R$

Aire sous une arche : $3\pi R^2$

- son tracé et le fait qu'elle soit engendrée par le roulement d'un cercle mobile autour d'un cercle fixe de rayon double :

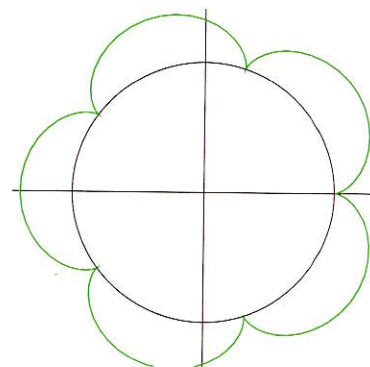
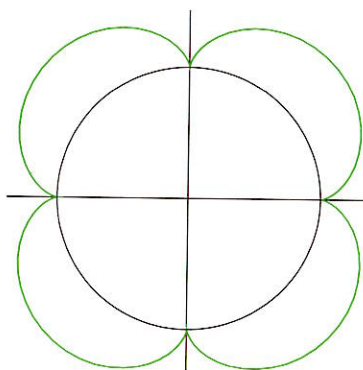


La cardioïde et la néphroïde font partie de la famille des courbes engendrées par le roulement d'un cercle au long d'une *base* : généralement une droite ou un cercle. Vous avez certainement déjà rencontré la *cycloïde* : la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sur une droite. Pensez par exemple à la pipette d'un pneu de vélo !

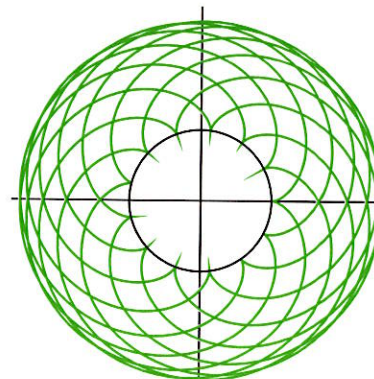
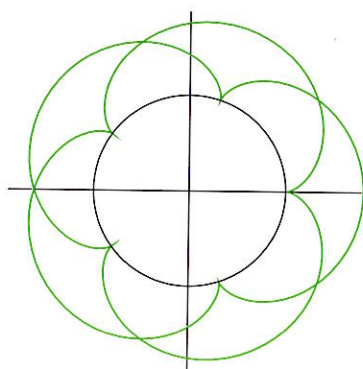


La néphroïde et la cardioïde sont des cas particuliers d'*épicycloïdes*. On appelle ainsi toute courbe engendrée par le roulement d'un cercle sur un autre. Les formes obtenues diffèrent selon le rapport des rayons.

Dans les deux figures suivantes, le rayon d'un des cercles est multiple du rayon de l'autre.



Cette fois, le rapport des rayons est rationnel, mais non entier :



Si le rapport des rayons n'est pas rationnel, la courbe ne se ferme pas...

L'épicycloïde Un peu d'histoire

Les épicycloïdes ont été étudiées par Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz (1686), Newton (1686), de l'Hôpital (1690), Jacques Bernoulli (1690), Jean Bernoulli (1695), la Hire (1694), Daniel Bernoulli (1725), Euler (1745, 1781).

Données techniques

Limitons-nous au cas où le rayon R du cercle fixe est un multiple du rayon r du cercle mobile. Soit $R = nr$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Longueur de la courbe : $8(n+1)r$

Aire intérieure : $(n+1)(n+2)\pi r^2$

Des mécanismes articulés à l'op-art

John Sharp

Contexte historique

Des mécanismes articulés (nous abrégons en « M.A. ») ont été à la base de nombreux courants artistiques. Des harmonographes, basés sur des mouvements de pendule, ont été inventés au dix-neuvième siècle et des versions informatiques ont été utilisées par Bob Brill dans son travail sur les courbes de Lissajous, [1]. De très nombreux tours ou mécanismes à engrenages, développés également au dix-neuvième siècle, ont conduit à la construction des tours de rotation ornementaux qui sont essentiellement des mécanismes cycloïdaux. Des versions plus complexes de ces machines ont servi à graver des plaques pour l'impression de billets de banque, cela aussi est actuellement réalisé par des moyens informatiques.

Dans cet article, je décris mon travail basé sur un M.A. simple, à trois barres. De tels

systèmes ont été développés pour contrôler des mécanismes pendant la Révolution Industrielle.

Le livre de Kempe [2], publié en 1877, consacré au dessin d'une ligne droite, est un classique du genre et des mathématiciens tels que Sylvester et Cayley ont été atteints par le virus des mécanismes. En vue d'agrandir des dessins, Sylvester réalise une invention importante : le pantographe. (Kempe est aussi connu pour sa « démonstration » du théorème des quatre couleurs.) Dans le titre de Kempe, l'expression « ligne droite » est importante : il s'agissait de transformer un mouvement linéaire en une rotation et vice versa. Le M.A. de James Watt en 1784 a permis de créer le mouvement à partir de machines à balancier.

Une méthode pour intéresser des élèves à un sujet est de leur soumettre une situation ouverte et multidisciplinaire qu'ils puissent s'approprier et dont ils puissent suivre le déroulement. Le thème des M.A. est idéal puisqu'il est lié aux mathématiques, à l'ingénierie, à la technologie et, comme je vais le montrer dans la suite, à l'art. S'ajoute à cela la possibilité de construire un M.A. et ensuite de le modéliser et d'en explorer différentes possibilités à l'aide de logiciels de géométrie dynamique. L'aspect technologique peut aussi être abordé sous l'angle historique puisque le

Hourglass ©John Sharp



développement des M.A. a été un facteur essentiel des progrès réalisés pendant la Révolution Industrielle.

De nombreux artistes utilisent des courbes de Lissajous ou des cycloïdes dans leurs œuvres, mais il existe de nombreuses autres courbes qui peuvent être dessinées mécaniquement et pour lesquelles l'usage des M.A. n'apparaît pas de manière évidente. Dans ma lointaine période op-art j'ai utilisé un M.A. simple et je l'ai repris en vue de susciter quelques idées nouvelles sur un thème m'intéressant particulièrement : la lemniscate.

L'original du présent article a été publié sous le titre *Linkages to op-art*, dans le n° 205 (novembre 2007) de la revue *Mathematics Teaching* éditée par l'Association of Teachers of Mathematics (ATM). Une première version avait été présentée à la réunion *London Bridges 2006* dont les *proceedings* ont été publiés par Tarquin. Les informations relatives à l'ATM (affiliation, revues, publications et services professionnels) peuvent être consultées sur le site www.atm.org.uk.

D'un M.A. à la lemniscate.

Le M.A. le plus simple ne comporte qu'une seule barre. Cette « barre-compas » est munie d'un pivot en un de ses points et d'un crayon en un autre point. Quand la barre tourne autour du pivot, le crayon dessine un cercle.

Des M.A. plus compliqués produisent des courbes. Des courbes très compliquées peuvent être engendrées par des M.A. simples alors que le dessin de courbes simples (telles des coniques) requiert souvent des M.A. très compliqués.

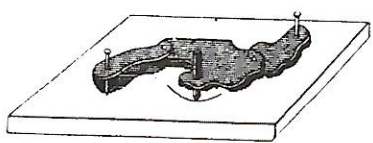


Fig. 1a

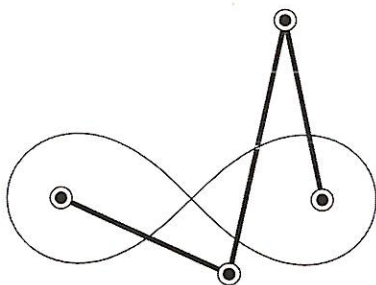


Fig. 1b

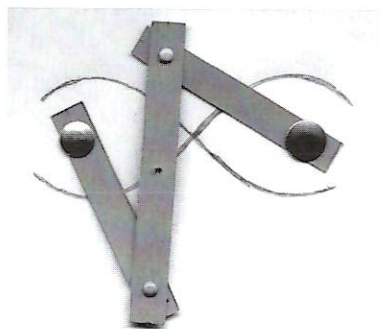


Fig. 2

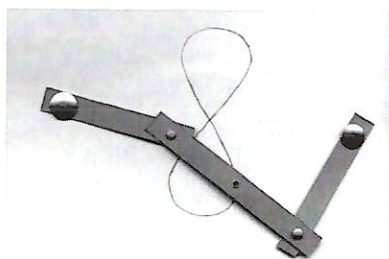


Fig. 3

La figure 1a, extraite de [2] montre un M.A. simple. Actuellement, un tel mécanisme est représenté par un diagramme (figure 1b). Dans cette figure, les deux pivots aux extrémités de la chaîne sont fixes; les autres points tournent autour de ces points fixes. La liberté de mouvement est limitée et chaque point d'une barre décrit une courbe. Ce dispositif est parfois appelé "M.A. à trois barres" et parfois "M.A. à quatre barres", la quatrième barre étant la barre reliant les deux pivots. Dans certaines conditions⁽¹⁾, le point milieu de la barre centrale décrit une courbe en forme de huit appelée « lemniscate de Bernoulli ». Ce M.A. est un des plus simples à réaliser, un modèle en carton est montré dans la figure 2. Les barres du M.A. sont trois rectangles découpés dans du carton; deux ont même longueur, le troisième est plus long, placé entre les deux autres et percé en son centre pour fixer un crayon. Des punaises fixent les pivots. Remarquez que la lemniscate est incomplète. Cela provient de ce que le crayon rencontre les barres.

Vous pouvez prendre plaisir à voir ce qui arrive lorsque vous modifiez la distance entre les points fixes. Des distances supérieures à celle qui produit la lemniscate standard permettent le dessin d'une courbe complète (figure 3). Vous pouvez aussi modifier le rapport des longueurs des barres pour obtenir d'autres courbes ou explorer la famille des courbes obtenues en déplaçant le crayon au long de la barre centrale⁽²⁾.

Géométrie dynamique

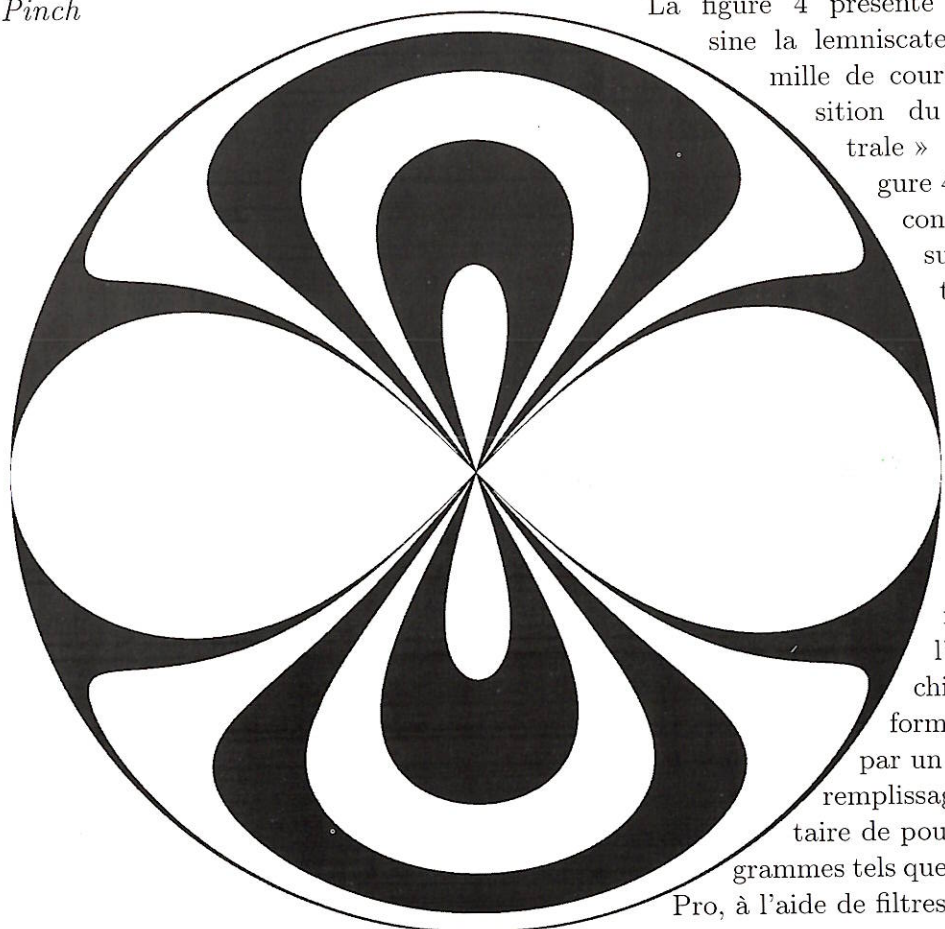
Grâce aux logiciels de géométrie dynamique comme Cabri, Geometer's Sketchpad, Cinderella et d'autres logiciels gratuits tels que Geogebra, il est possible de produire des courbes comme lieux en modélisant informatiquement le M.A. En particulier, Geogebra est excellent pour produire des fichiers qui peuvent être

importés par des logiciels de dessin. De plus, l'usage de ces logiciels permet de faire varier les paramètres et de construire les lieux en temps réel. Cela permet de contrôler l'aspect artistique beaucoup mieux que la manipulation d'équations.

⁽¹⁾ Les longueurs des petites barres valent $\sqrt{2}$, la longueur de la grande barre et la distance entre les deux pivots valent 2. [5]

⁽²⁾ C'est de cette façon qu'il y a 25 ans j'ai dessiné des motifs op-art. Actuellement il est plus facile de dessiner la lemniscate par ordinateur, à partir de son équation polaire : $r^2 = a^2 - (c \sin \theta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \cos^2 \theta})^2$ où a est la longueur des petites barres, $2b$ est la longueur de la barre centrale et $2c$ est la distance des deux pivots.

Pinch



©John Sharp

La figure 4 présente un deuxième M.A. qui dessine la lemniscate. La figure 5 montre une famille de courbes créées en modifiant la position du crayon sur la barre « centrale » (la barre supérieure sur la figure 4). D'autres variations (figure 6) consistent à construire un triangle sur la barre centrale. Ces résultats ont été utilisés pour créer *Shockwave*. Associer et superposer un ensemble de courbes constituent un point de départ idéal pour créer des figures op-art par coloriage en noir et blanc à la manière d'un échiquier. La réalisation est beaucoup plus facile avec un ordinateur qu'avec une plume et de l'encre ou de la peinture. Les fichiers produits par Cinderella au format postscript sont pris en charge par un logiciel graphique et ombrés par remplissage. Ils ont l'avantage supplémentaire de pouvoir être manipulés par des programmes tels que Adobe PhotoShop ou PaintShop Pro, à l'aide de filtres variés.

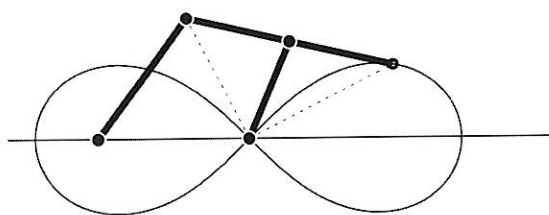


Fig. 4

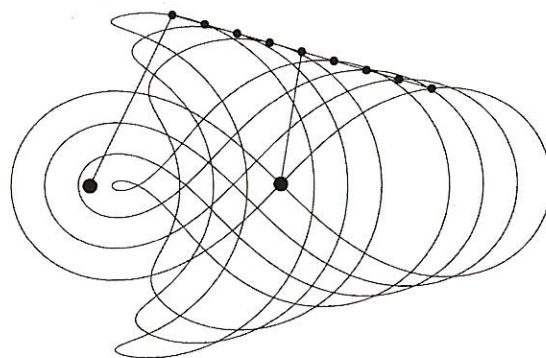


Fig. 5

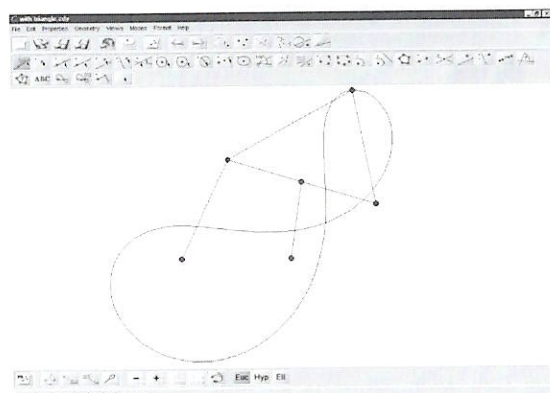
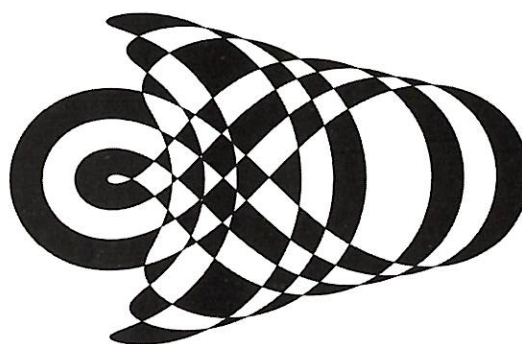
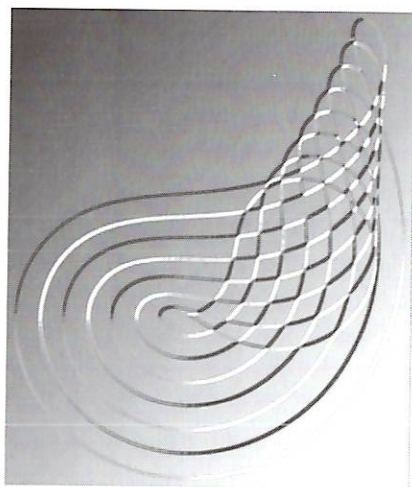


Fig. 6

*Shockwave*

©John Sharp

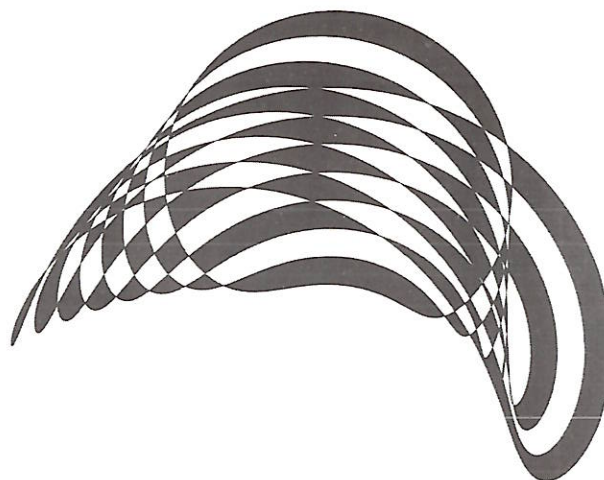


© John Sharp



Falling Water et l'effet de l'usage d'un filtre de relief et d'un filtre impressionniste.

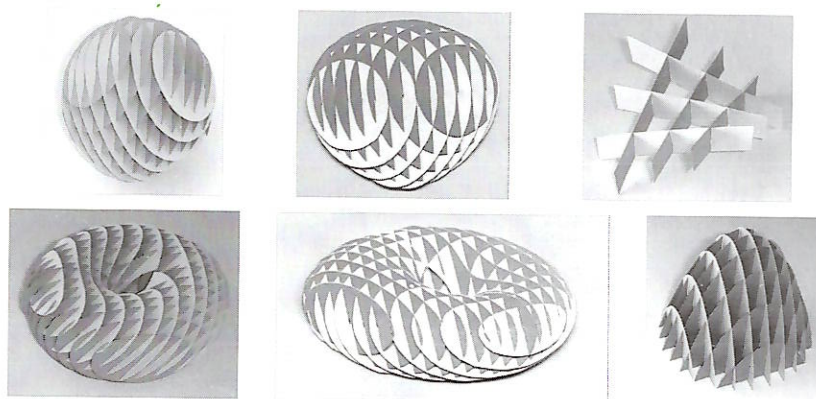
John Sharp est Visiting Fellow at the Institute of Education and London Knowledge Lab et rédacteur en chef de la revue *Infinity* (ed. Tarquin).



D'autres possibilités

On peut aussi utiliser la couleur et faire varier l'épaisseur des traits, mais comme je suis daltonien, j'ai tendance à être plus heureux en noir et blanc ! J'ai l'intention d'explorer une autre option : chacune des courbes est considérée comme une « tranche de surface » et ces tranches pourraient servir à construire une sculpture « Sliceform », [3], [4]. Avec beaucoup plus de M.A. que ceux décrits ci-dessus et en utilisant les variations mentionnées, on obtient de très nombreuses possibilités de création de formes artistiques. Les M.A. que j'ai décrits dans cet article sont très élémentaires. Des mécanismes plus complexes utilisant des barres coulissantes et beaucoup plus de liaisons et de nœuds sont décrits dans [6], [7] et [8]. En même temps que la complexité, le nombre de variables augmente de sorte que la diversité des productions est énorme.

Des Sliceforms



Pour en savoir plus

- [1] Brill, B. *The endless wave*, Bridges proceedings, 56, (2002).
- [2] Kempe, A. B. *How to draw a straight line : a lecture on linkages*, London, (1877).
- [3] Sharp, J. *Sliceforms*, Tarquin, (1995).
- [4] Sharp, J. *Surfaces : an exploration with Sliceforms*, Tarquin, (2005).
- [5] Sharp, J. *The infinite lemniscate*, Infinity, 4, (2006).
- [6] Shikin, E. V. *Handbook and atlas of curves*, CRC Press, (1995).
- [7] Yates, R. C. *Tools : a mathematical sketch and model book*, LSU Press, (1941).
- [8] Yates, R. C. *A handbook of curves and their properties*, reprinted by NCTM, (1947).

Projection orthogonale sur un plan

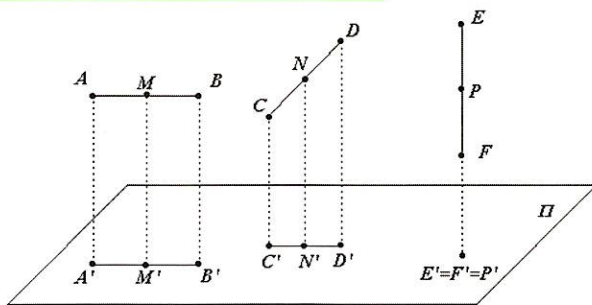
Claudine Festraets

Vous avez sans doute étudié en classe quelques transformations du plan et de l'espace, mais peut-être les projections de l'espace sur un plan vous sont-elles moins familières. Pour commencer, rappelons la définition et quelques propriétés assez évidentes.

La projection sur un plan Π parallèlement à une droite D est une transformation de l'espace qui applique tout point A sur le point A' de Π tel que la droite AA' soit parallèle à D . Lorsque D est perpendiculaire à Π , la projection est dite orthogonale.

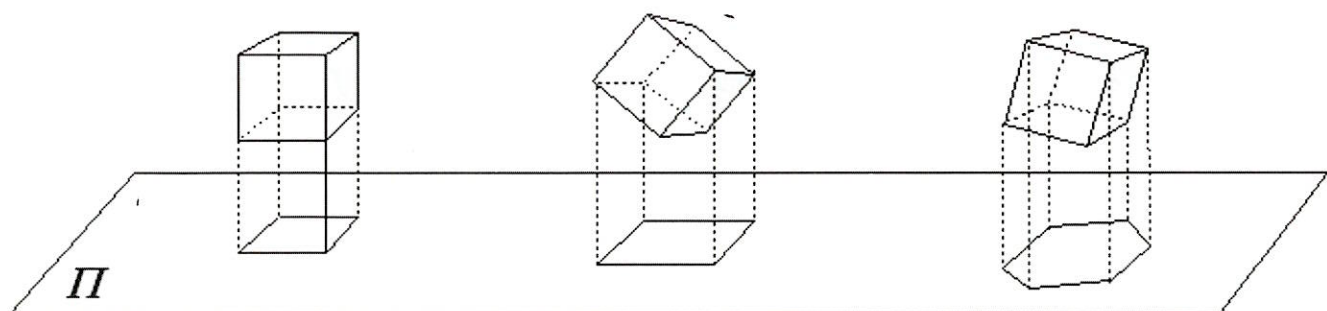
Toutes les projections envisagées ci-dessous sont orthogonales.

Une projection n'est pas une isométrie, il est clair que les longueurs ne sont pas conservées, ainsi la projection d'un segment sur le plan Π a même longueur que le segment si et seulement si le segment est parallèle au plan, sinon sa longueur est plus petite, voire nulle. Cependant le milieu est conservé, propriété que nous utiliserons plus loin.

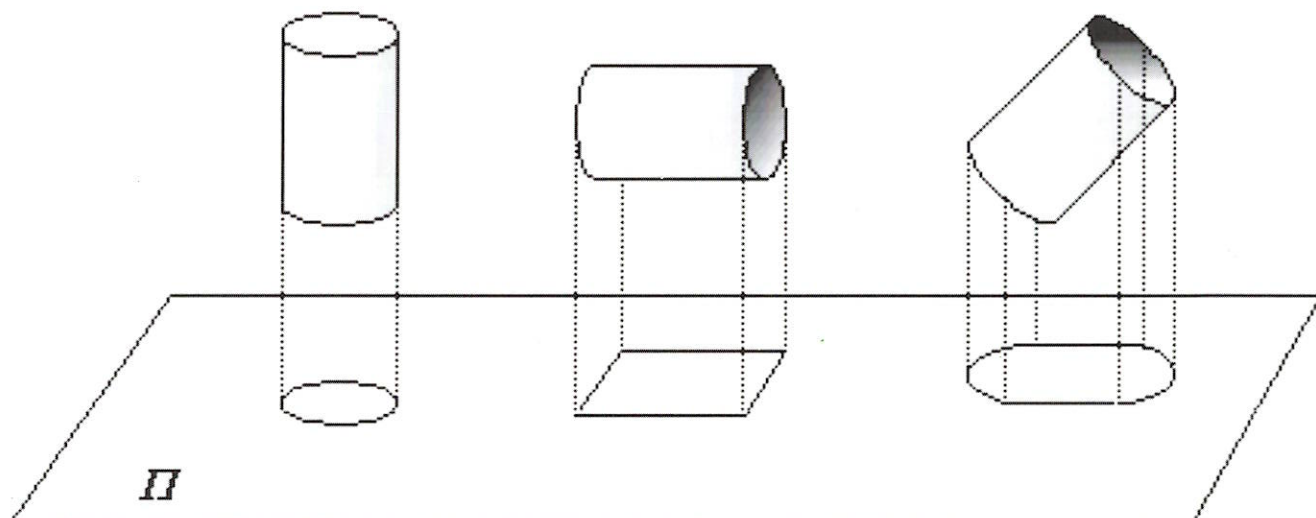


La projection d'une courbe ou d'une surface peut parfois donner des résultats inattendus. Pensez à la projection d'un cercle, est-ce toujours un cercle ? est-ce parfois un segment de droite ? Examinons quelques exemples de projection de solides familiers.

La projection d'un cube est un carré si le plan de projection Π est parallèle à l'une de ses faces, sinon c'est un rectangle non carré ou un hexagone et cet hexagone est régulier lorsque une des droites joignant deux sommets opposés est perpendiculaire à Π .

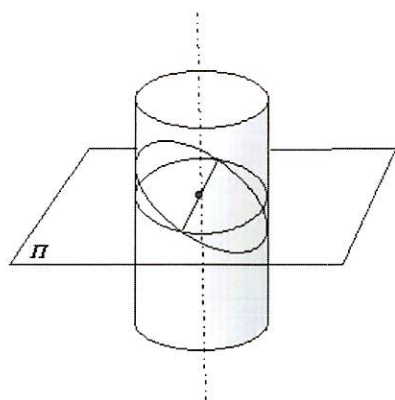


Voici plusieurs manières de projeter un cylindre circulaire.



Question 1 : La projection d'une ellipse peut-elle être un cercle ?

Considérons un cylindre circulaire et coupons-le par un plan Π perpendiculaire à son axe, la section est un cercle. Choisissons un diamètre de ce cercle et faisons pivoter le plan de section autour de ce diamètre. Sauf dans le cas où le plan de section passe par l'axe du cylindre, les sections ainsi obtenues sont des ellipses dont le petit axe est le diamètre de notre cylindre.



Donc toute ellipse peut être considérée comme une section plane d'un cylindre circulaire dont le diamètre a même longueur que le petit axe de l'ellipse et la projection de cette ellipse sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est un cercle.

Question 2 : La projection d'un triangle quelconque peut-elle être un triangle équilatéral ?

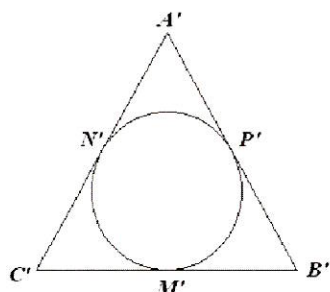
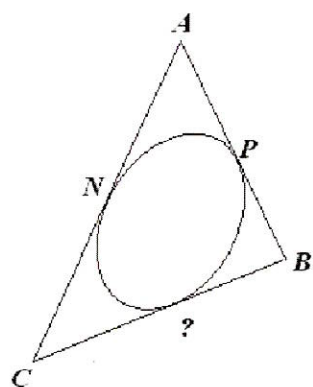
Soit ABC un triangle quelconque, et soient M , N et P les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

La forme générale de l'équation d'une ellipse est

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Dans cette équation, les coefficients a , b , c , d , e , f ne sont pas tous nuls, donc on peut diviser les deux membres par un des coefficients non nul. Restent alors cinq coefficients indéterminés. Pour les déterminer et ainsi connaître l'équation d'une ellipse particulière, il faut se donner cinq propriétés de cette ellipse. Imposons donc cinq conditions à notre ellipse : passer par le point N , passer par le point P , être tangente à la droite AB , à la droite BC et à la droite CA . L'ellipse est ainsi inscrite dans le triangle ABC mais on ignore en quel point de BC elle est tangente.

Projetons sur un plan le triangle et l'ellipse de telle sorte que la projection orthogonale de l'ellipse soit un cercle (on a vu que c'était toujours possible).

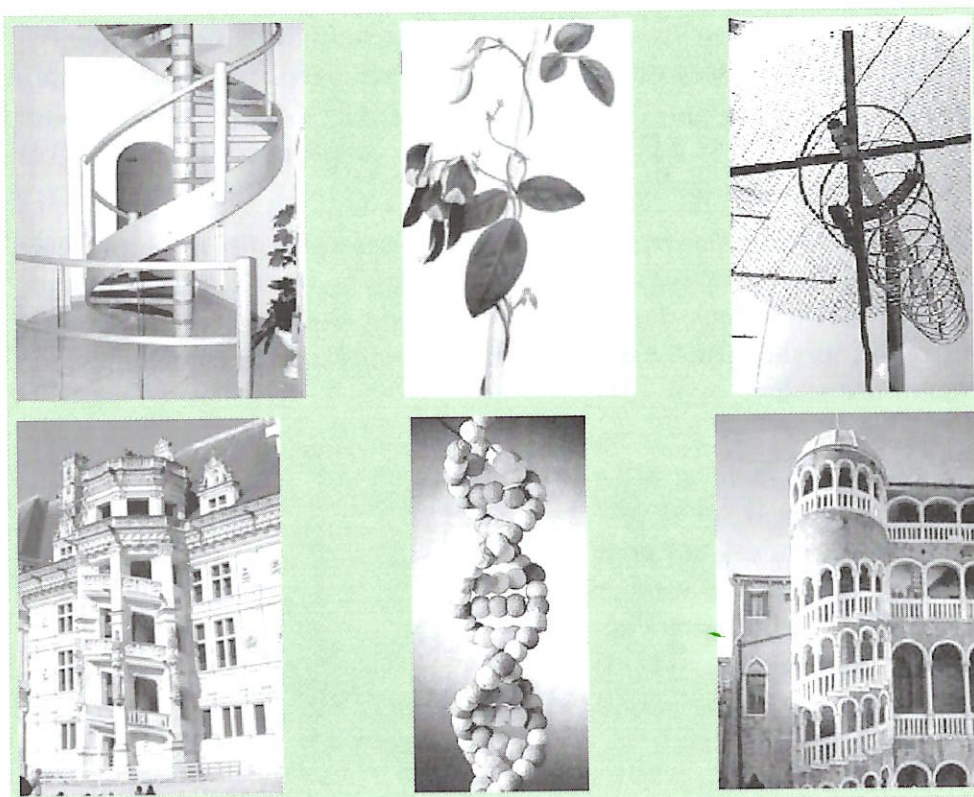


Les segments de tangentes menées d'un point à un cercle ont même longueur, donc $|A'N'| = |A'P'|$, $|C'N'| = |C'M'|$ et $|B'M'| = |B'P'|$. Mais N et P sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et nous savons que la projection respecte le milieu d'un segment, donc N' et P' sont les milieux respectifs de $[A'C']$ et $[A'B']$, d'où $|A'N'| = |C'N'|$ et $|A'P'| = |B'P'|$. Finalement, les six segments de tangentes sont tous égaux, M' est le milieu de $[B'C']$ et le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

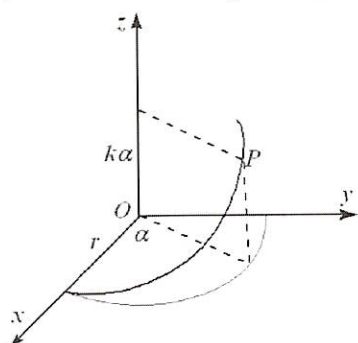
On peut également en conclure que si une ellipse est inscrite dans un triangle et passe par les milieux de deux des côtés du triangle, elle passe aussi par le milieu du troisième côté.

Examinons maintenant la projection d'une hélice circulaire sur un plan. Mais d'abord, qu'est-ce qu'une hélice ? En marge, en voici deux images.

Les deux courbes sont inscrites dans un cylindre circulaire. Au dessus est une hélice *senestre*, au dessous, une hélice *dextre*. Voici quelques exemples : escalier, glycine, antenne, double hélice d'ADN, facades du château de Blois et d'une demeure vénitienne.

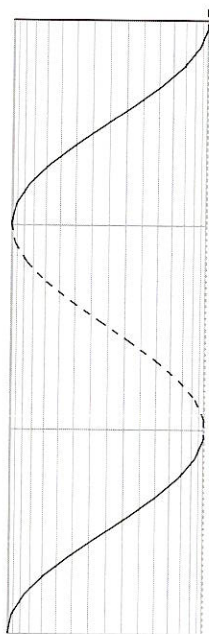


Quelles sont les équations d'une telle courbe ?



L'axe de l'hélice (et l'axe du cylindre circonscrit) étant Oz , les coordonnées du point P de l'hélice dépendent de l'angle α . On a $P = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, k\alpha)$, r est le rayon de l'hélice et k est un nombre réel (positif ou négatif selon que l'hélice est dextre ou senestre) et qui donne le « pas » de la courbe.





Les équations paramétriques de l'hélice sont donc

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = k\alpha \end{cases}$$

le réel α étant le paramètre. La projection de l'hélice sur le plan Oxy (et sur tout plan parallèle) est le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha = r^2$$

Sur le plan Oyz (et sur tout plan parallèle), la projection s'obtient en éliminant α entre les équations $y = r \sin \alpha$ et $z = k\alpha$ ce qui donne $y = r \sin \frac{z}{k}$, c'est l'équation d'une sinusoïde.

De manière analogue, sur le plan Oxz , on obtient la cosinusoïde d'équation $x = r \cos \frac{z}{k}$.

Abordons un problème plus difficile. Comment déterminer les équations de la courbe projection de l'hélice sur un plan Π quelconque ?

Il faut successivement déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à Π , écrire l'équation d'une droite menée d'un point de l'hélice perpendiculairement à Π et déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec Π .

Ces coordonnées donneront les équations paramétriques de la projetée de l'hélice dans le système d'axes $Oxyz$. Mais ce que nous recherchons, ce sont les équations dans le plan Π , il faut donc encore déterminer un repère orthonormé dans ce plan, puis effectuer le changement de repère nécessaire.

Choisissons un plan d'équation simple : $\Pi \equiv y - z = 0$.

Le vecteur $\vec{v} = (0, 1, -1)$ est orthogonal à Π car le produit scalaire $0 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z = y - z$ est nul pour tout vecteur $\vec{p} = (x, y, z)$ appartenant à Π . Le vecteur directeur de la perpendiculaire menée d'un point de l'hélice sur le plan Π est donc un multiple de $(0, 1, -1)$. Il existe donc une constante λ telle que $x - r \cos \alpha = 0 \cdot \lambda$, $y - r \sin \alpha = \lambda$ et $z - k\alpha = -\lambda$.

De là,

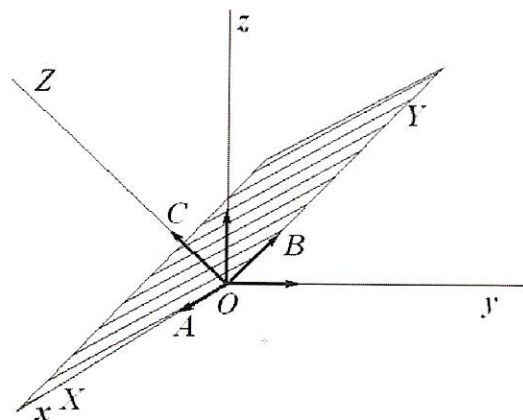
$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha + \lambda, z = k\alpha - \lambda$$

Nous allons déterminer λ en remplaçant x , y et z par leur valeur dans l'équation de Π :

$$r \sin \alpha + \lambda - k\alpha + \lambda = 0$$

on obtient $\lambda = \frac{1}{2}(k\alpha - r \sin \alpha)$, ce qui donne $y = \frac{1}{2}(k\alpha + r \sin \alpha)$ et $z = \frac{1}{2}(k\alpha + r \sin \alpha)$. Les équations de la projetée de l'hélice sont donc

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = \frac{1}{2}(k\alpha + r \sin \alpha) \\ z = \frac{1}{2}(k\alpha + r \sin \alpha) \end{cases}$$



Reste à effectuer un changement de repère pour obtenir ces équations rapportées à une base du plan Π .

Choisissons de nouveaux axes. OX et OY doivent être situés dans le plan Π , donc plaçons l'axe OX sur Ox et les axes OY et OZ comme images de Oy et de Oz par une rotation de 45° autour de Ox . Les vecteurs orthonormés de la nouvelle base sont $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{OC} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

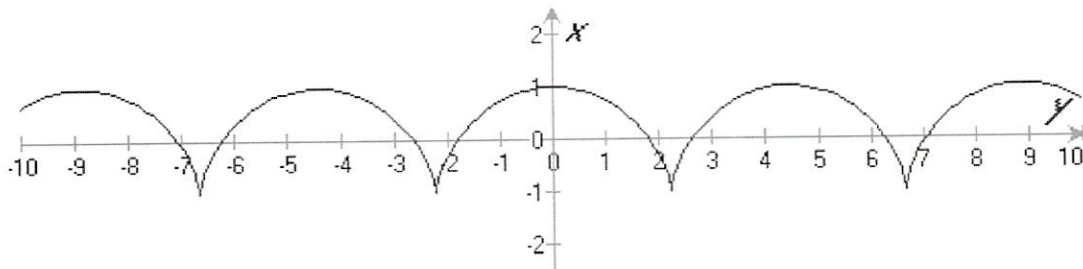
d'où

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - y) \end{cases}$$

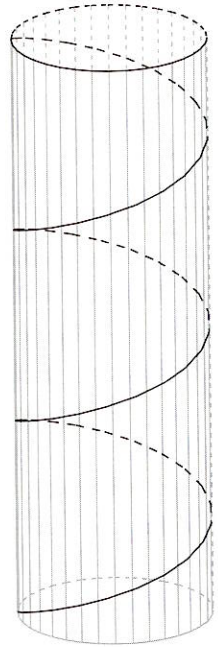
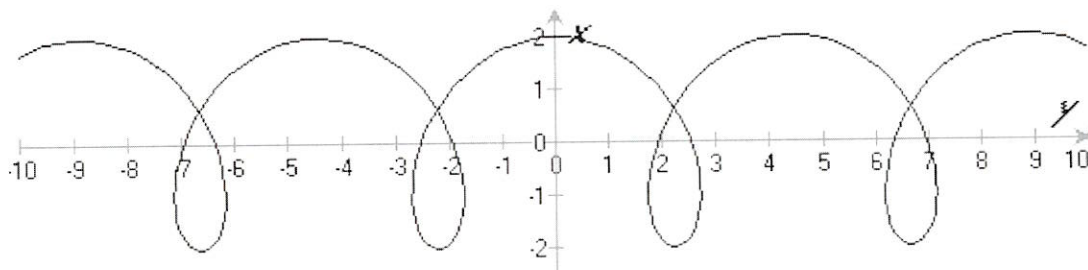
et en remplaçant x, y, z par leurs valeurs établies ci-dessus, on obtient, dans le plan Π :

$$\begin{cases} X = r \cos \alpha \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(r \sin \alpha + k\alpha) \\ Z = 0 \end{cases}$$

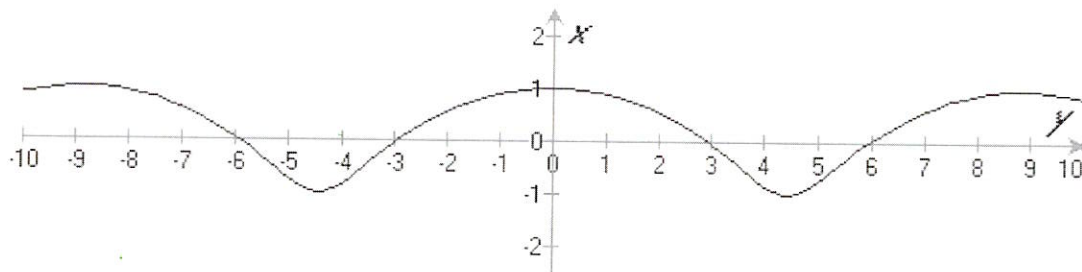
Voici les graphiques de cette courbe pour différentes valeurs de r et de k :
pour $r = k = 1$



pour $r = 2$ et $k = 1$



pour $r = 1$ et $k = 2$



Ces courbes sont des trochoïdes (cycloïde, cycloïde allongée et cycloïde raccourcie). Elles devraient être représentées obliquement puisque que l'axe Oz de l'hélice se projette sur OY . Mais pour une image plus parlante et plus commode, elles sont représentées horizontalement, les axes OX et OY ayant été intervertis.

Il semble que ces courbes aient été étudiées pour la première fois par Dürer. Albrecht Dürer (1471 - 1528) est surtout connu comme peintre et graveur. Mais il s'est aussi intéressé aux mathématiques, en particulier à tout ce qui concerne la perspective et les proportions. Dans son ouvrage « *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* » (Instructions pour la mesure à la règle et au compas), il étudie entre autres la construction de polygones réguliers, de polyèdres et de nombreuses courbes dont les cycloïdes.

Ci-dessous, un autoportrait de Dürer et la gravure « *Mélancolie* ». On y remarque une sphère, un polyèdre et un carré magique situé au-dessus de la tête de l'ange.

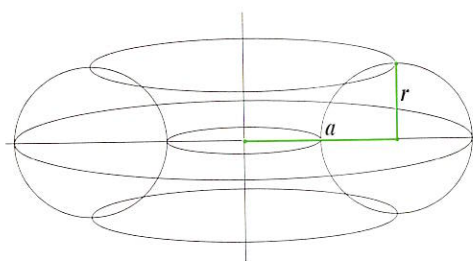


Le tore

Simone Trompler et Guy Noël

1. Une surface de révolution

Le tore est la surface engendrée par un cercle qui tourne autour d'une droite de son plan. Le rayon r du cercle est appelé *rayon mineur* du tore. La distance a du centre du cercle à la droite est appelée *rayon majeur*.



Trois cas sont possibles :

1) $a > r$

C'est le cas le plus fréquent. Le tore est dit « ouvert », « à trou », « à collier », « à gorge ». Ses applications sont nombreuses : chambres à air, bouées, doughnuts (pâtisserie), synchrotron (accélérateur à haute énergie de particules élémentaires), champs magnétiques, enroulement de solénoïdes, certains globules rouges, etc.

2) $a = r$

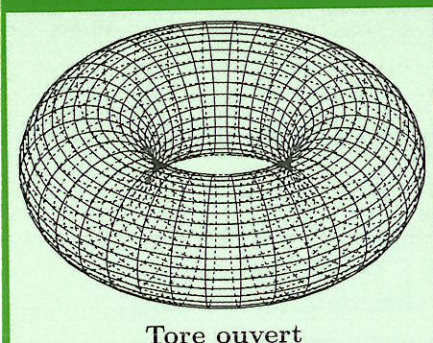
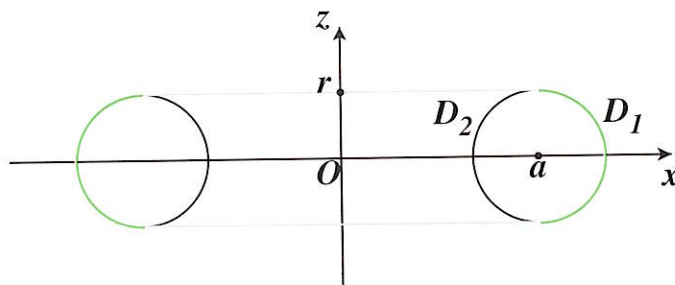
Le tore est à trou nul.

3) $a < r$

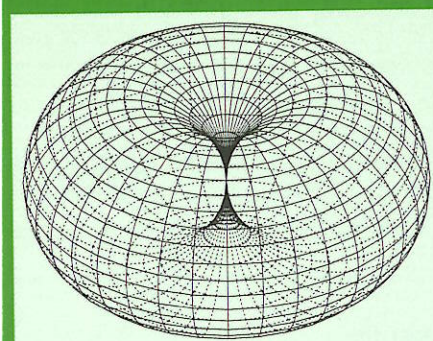
Il s'agit d'un tore « croisé » ou « fermé », comme une citrouille.

Nous examinerons uniquement le premier cas.

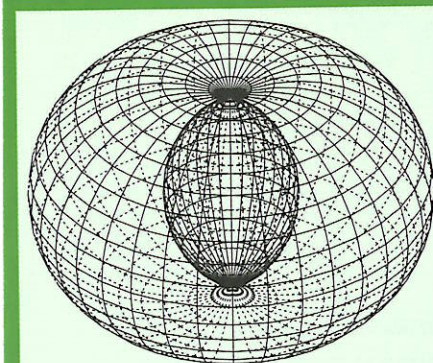
1.1. Volume



Tore ouvert



Tore à trou nul



Tore croisé

Dans le plan xOz , considérons le cercle d'équation $(x - a)^2 + z^2 = r^2$. Coupons ce cercle par une horizontale de hauteur z . Si $|z| < r$, les deux points d'intersection ont pour abscisses :

$$\begin{cases} x_1 = a + \sqrt{r^2 - z^2} \\ x_2 = a - \sqrt{r^2 - z^2} \end{cases}$$

Notons D_1 le demi-cercle constitué des points (x_1, z) (z variant de $-r$ à r) et D_2 le demi-cercle constitué des points (x_2, z) .

Faisons tourner le cercle autour de l'axe des z . Chacun des deux demi-cercles engendre un corps de révolution. Ceux d'entre vous qui ont déjà rencontré le calcul intégral savent que le volume d'un tel corps s'exprime par une intégrale. Le volume du tore engendré s'obtient en soustrayant le volume engendré par D_2 du volume engendré par D_1 . Le calcul est indiqué dans la marge.

Le résultat est donné par la formule

$$V = 2\pi^2 ar^2$$

1.2. Aire

L'aire du tore est également donnée par une intégrale :

$$A = 2\pi \int_{-r}^r (x_1 \sqrt{1 + x_1'^2} + x_2 \sqrt{1 + x_2'^2}) dz$$

Le résultat est

$$A = 4\pi^2 ar$$

2. Sections planes

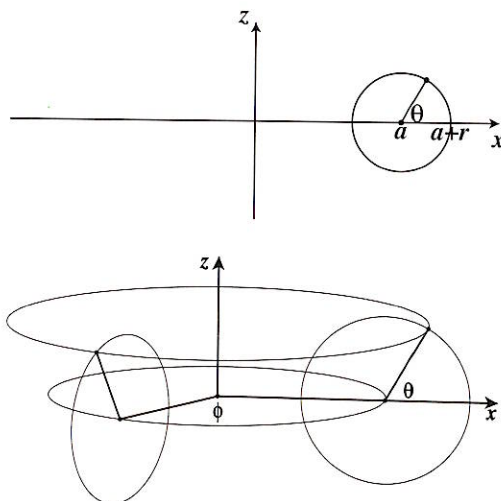
Les sections du tore, appelées « sections spiriques » en référence au cercle générateur ou spire (cf. les spires d'un solénoïde), ont été étudiées, sans doute pour la première fois, par Perseus (mathématicien grec du troisième siècle avant Jésus-Christ).

Dans le plan xOz l'équation cartésienne du cercle qui engendre le tore est $(x - a)^2 + z^2 = r^2$. On peut aussi écrire les équations paramétriques de ce cercle :

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Les équations paramétriques du tore s'obtiennent en introduisant un paramètre supplémentaire, ϕ qui indique de quel angle le point a tourné autour de Oz :

$$\begin{cases} x = (a + r \cos \theta) \cos \phi \\ y = (a + r \cos \theta) \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$



$$V = \pi \int_{-r}^r x_1^2 dz - \pi \int_{-r}^r x_2^2 dz$$

Comme $x_1^2 - x_2^2 = 4ar\sqrt{r^2 - z^2}$, on obtient l'intégrale

$$V = 4\pi ar \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz$$

Savez-vous ce qu'est une dérivée ? Si oui, remarquez que la fonction $4\pi^2 ar$ qui donne la valeur de l'aire est la dérivée par rapport à r de celle qui donne la valeur du volume : $2\pi^2 ar^2$.

Cette particularité est également valable pour la sphère : volume $\frac{4}{3}\pi r^3$, aire $4\pi r^2$.

Pensez aussi aux formules qui donnent l'aire du disque et la longueur du cercle (πr^2 et $2\pi r$).

Des coïncidences ?

On en déduit l'équation cartésienne du tore :

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2 \quad (1)$$

En isolant le radical, puis en élevant au carré, nous obtenons

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \quad (2)$$

Coupons le tore par un plan parallèle à l'axe de rotation Oz à distance d de l'origine. L'équation de l'intersection du plan d'équation $y = d$ avec le tore est

$$(x^2 + d^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + d^2) \quad (3)$$

Pour $d = 0$, nous obtenons évidemment deux cercles, de rayon r et de centres distants de $2a$:

$$(x^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2x^2 \quad (4)$$

D'où

$$(x - a)^2 + z^2 = r^2 \text{ et } (x + a)^2 + z^2 = r^2 \quad (5)$$

Pour $d = r$, on obtient la courbe d'équation

$$(x^2 + z^2 + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + r^2) \quad (6)$$

ce qui peut s'écrire

$$((x - a)^2 + z^2)((x + a)^2 + z^2) = 4a^2r^2 \quad (7)$$

La courbe obtenue est en fait un ovale de Cassini :

Un ovale de Cassini est l'ensemble des points dont le produit des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constant.

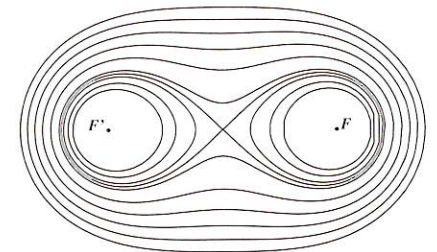
Dans le plan $z = d$, en prenant comme foyers les points $F(a, 0)$ et $F'(-a, 0)$, l'équation de l'ovale de Cassini de constante k est

$$\sqrt{((x - a)^2 + z^2)} \cdot \sqrt{((x + a)^2 + z^2)} = k \quad (8)$$

Les équations (7) et (8) sont équivalentes si

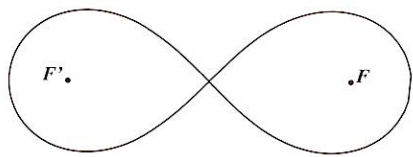
$$k = 2ar \quad (9)$$

Comme on le voit sur la figure ci-contre, on rencontre trois cas bien différents.



Cassini étudia ces courbes en 1680, à propos des mouvements relatifs de la Terre et du Soleil. Cent ans plus tard, on s'aperçut que la lemniscate de Bernoulli en est un cas particulier. Giovanni Francesco Malfatti étudia les propriétés de ces ovales en 1781.

2.1. Le cas $a = 2r$

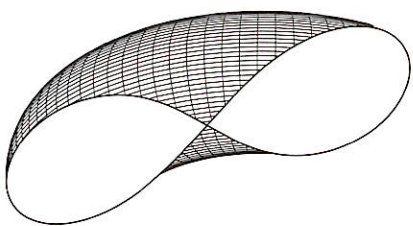


L'ovale de Cassini est alors l'ensemble des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant et égal au carré de la demi-distance entre ces points. Cet ovale a un point double : le point $(0,0)$ appartient à la courbe. Cet ovale avait été étudié dès 1694 par Jacques Bernoulli qui lui donna le nom de *lemniscate* d'après sa forme (*lemniscus*, en latin : ruban). En 1750, Giovanni Fagnano étudia ses nombreuses propriétés.

En posant $r = \frac{a}{2}$ dans l'équation (7), et en simplifiant, on obtient l'équation de la lemniscate sous la forme

$$(x^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 - z^2). \quad (10)$$

Une lemniscate de Bernoulli, en tant que section d'un tore :



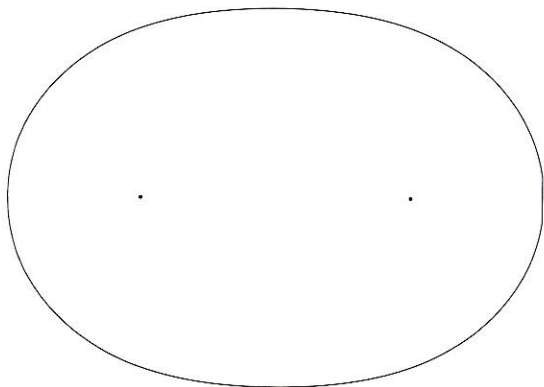
Les coordonnées polaires, dont l'introduction est due à Bernoulli, permettent de donner à la lemniscate une équation beaucoup plus simple.

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \quad (11)$$

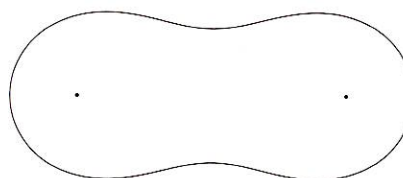
L'aire de la lemniscate est étonnante et jolie : $A = 2a^2$

2.2. Le cas $a < 2r$

L'ovale de Cassini est alors une courbe fermée, convexe ou non.



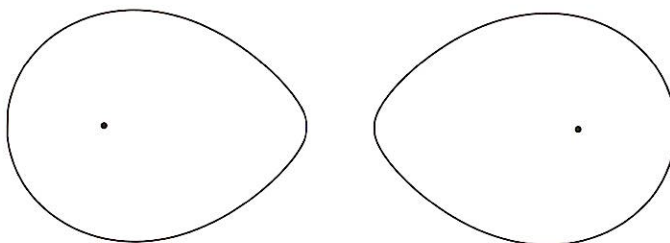
$$a = 4, r = 6$$



$$a = 4, r = 2, 5$$

2.3. Le cas $a > 2r$

La courbe comprend alors deux parties ovales déconnectées.



$$a = 4, r = 1, 96$$

3. Jacques Bernoulli

Jacques Bernoulli (1654-1705) est un mathématicien suisse. Il est le premier membre d'une dynastie qui a produit plusieurs mathématiciens de très haut niveau.

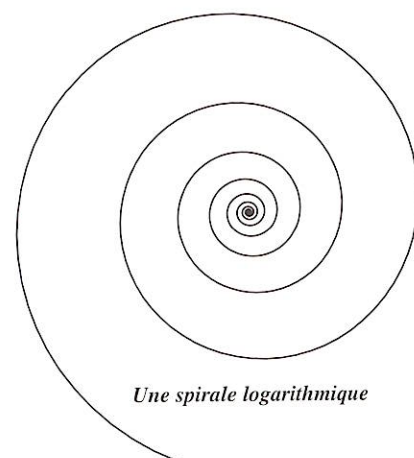
Diplômé en théologie, il s'intéresse surtout aux mathématiques et à l'astronomie. A partir de 1676, il voyage en France, aux Pays-Bas, en Angleterre. Il fait ainsi la connaissance des plus grands scientifiques de son époque, et entretient une correspondance fertile avec eux. Il retourne ensuite à Bâle et devient professeur à l'université.

Il travaille avec son frère Jean, ce qui ne se passe pas sans rivalité entre eux.

Ses contributions en mathématiques sont nombreuses, notamment en théorie des probabilités (*Ars Conjectandi*), mais aussi en algèbre, en calcul infinitésimal, théorie des séries.

Il étudie différentes courbes (dont la lemniscate, en 1694), les épicycloïdes, la spirale logarithmique.

Cette dernière courbe le fascina à un point tel qu'il la fit graver sur sa tombe.



Une spirale logarithmique

4. Jean Dominique Cassini

Ce mathématicien italien (1625-1712) commence par s'intéresser à l'astrologie, plus qu'à l'astronomie, mais est rapidement convaincu qu'il n'y a aucune vérité dans les prédictions astrologiques.

Néanmoins, c'est le point de départ de sa carrière d'astronome. Il adhère d'abord au système solaire géocentrique, puis accepte le modèle héliocentrique de Copernic.

Il mesure la période de rotation de Jupiter et de Mars. Il manque de peu la mesure de la vitesse de la lumière que Römer réalisera en 1676 d'après ses données.

En 1683, il voyage en France et participe à un projet de mesure du méridien de Paris. Malheureusement, le projet est arrêté, faute d'argent.

En 1671, il devient directeur de l'Observatoire de Paris, lors de sa création.

En 1680, il étudie les courbes qui portent son nom à propos du mouvement relatif de la Lune et de la Terre et les propose comme orbites des astres, à la place de l'ellipse. Dès 1711, sa vue baisse et son fils Jacques reprend petit à petit ses activités.



Un tour de cartes

Arnaud Gazagnes

Roméo et Juliette

Présentation

Ce tour de cartes⁽¹⁾ raconte la vie trépidante de deux amoureux, Roméo et Juliette. Il te faut (donc) le Roi et la Reine de Cœur⁽²⁾ et quatorze autres quelconques cartes.

Au fur et à mesure de ton récit, ton spectateur effectuera quelques manipulations : qu'importe celles-ci, elles amèneront toujours le même effet final ! Cherche l'explication.

Il était une fois, il y a quatre siècles, dans la ville de Vérone l'Italienne, deux amoureux, Roméo et Juliette. Ils étaient jeunes, beaux, pleins de vie, ... , et très amoureux. Tu montres les deux cartes.

Mais voilà, leur amour n'était pas du goût de leurs parents et ils devaient s'aimer en cachette. On ne compte plus leurs rendez-vous secrets ! Malgré tout, en dehors de la joie qu'ils avaient de se retrouver, la préparation de leur rencontre suivante était quasiment devenue un jeu. Mais, je ne te le cache pas, cela leur était d'autant plus difficile qu'ils habitaient à deux extrémités opposées de la ville ! Ville que nous allons représenter comme ceci.

Tu disposes les $14 + 2$ cartes en un tableau carré de 4 cartes de côté, toutes les cartes étant face visible, en prenant garde de bien placer les deux héros comme ceci : l'un est « en haut à gauche », l'autre, « en bas à droite » (comme cela est signalé par les deux ♥ dans le tableau ci-dessous)⁽³⁾.

♥		*	
	*		*
*		*	
	*		♥

Mais, un jour, leurs parents furent prévenus par un vil et odieux personnage qui cherchait à gagner quelques piécettes. C'est pourquoi, fous de rage, ils décidèrent d'enfermer Roméo et Juliette chacun dans leur coin et installèrent deux groupes de gardes pour les empêcher définitivement de se retrouver. Pendant ce temps, tu retournes les six cartes marquées dans le tableau, représentant les gardes. Ces six cartes sont donc maintenant face cachée.

Tu prends une mine triste. *Cette histoire est bien triste, n'est-ce pas ? Je vais t'en raconter une autre,*

qui finit bien. Mais, pour l'instant, nous allons ranger la carte de cette contrée lointaine, pour débarrasser la table. Comme d'habitude avec une carte géographique, nous allons la plier le plus possible : elle aura la grandeur d'une carte de jeu. Pour que cela ne soit pas encore une fois un pliage de plus pour moi (pourquoi devrais-je toujours tout faire ?), je vais te demander de participer. Tu vas choisir une ligne ou une colonne du bord de la carte et tu vas la plier sur celle qui la juxtapose, comme lorsque tu plies une carte géographique ; ainsi, une carte face visible va devenir face cachée et vice-versa⁽⁴⁾. Le spectateur s'exécute.

Je t'en prie, recommence, en choisissant une colonne ou une ligne du bord et plie-la : cela peut être la ligne ou la colonne « doublée » ou une toute autre. Le spectateur s'exécute.

Tu te débrouilles pas mal : je vais te laisser finir ainsi, jusqu'à obtenir la carte pliée en 16 couches. Le spectateur s'exécute. Vous avez devant vous la pile de 16 cartes.

Je t'avais promis une histoire qui finit bien : chose due. Et puis moi, je préfère ! Appelle Roméo et Juliette puis claques des doigts. Le spectateur s'exécute.

Et pour te prouver qu'il n'y a rien qui puisse séparer deux personnes qui s'aiment (leurs parents, les gardes, TES propres choix de plis), je te laisse étaler la pile de cartes sur la table. Le spectateur s'exécute.

Regarde ! Deux cartes ne sont pas dans le même sens que les quatorze autres : celles de nos deux amoureux ! Applaudissements du spectateur ébahi !

⁽¹⁾ Ce tour est inspiré de *La tapisserie de M. King*, publié dans le tome 5 de la « Petite anthologie des tours de cartes automatiques » de Richard VOLLMER, publié en 1991.

⁽²⁾ Au passage, les prénoms usuels du Roi et de la Reine de Cœur sont Charles et Judith.

⁽³⁾ Lorsque tu raconteras ton propre tour, veille à ce que le dessin soit « à l'endroit » pour le spectateur.

⁽⁴⁾ A ce stade, il y a deux colonnes ou lignes de 4 cartes et une colonne ou ligne de deux fois 4 cartes.

Jeux

Yolande Noël-Roch

1. Dés et magie

A. Le magicien demande à une personne de lancer deux dés, de mémoriser les deux nombres obtenus et de cacher les dés.

Il donne ensuite les consignes suivantes (la personne effectue les calculs sans donner les résultats) :

- doubler le nombre du premier dé
- ajouter 5 au résultat
- multiplier ce nouveau nombre par 5
- ajouter enfin le nombre donné par le deuxième dé

Le magicien demande ce dernier résultat et est capable de « deviner » les faces apparues sur les deux dés cachés.

B. Plus fort que ce magicien ? Inventer un tour de magie analogue en utilisant trois dés !

2. Découper en triangles

On appelle **diagonale d'un polygone convexe** tout segment joignant deux sommets non consécutifs de ce polygone.

De combien de manières peut-on découper un polygone convexe en triangles en n'utilisant que des diagonales qui ne se « croisent » pas ?

Par exemple, pour un quadrilatère, il existe deux manières :



A. Trouver les cinq façons de procéder pour un pentagone.

B. Qu'en est-il dans le cas d'un hexagone ?

3. Vrai ou faux ?

A.

$$1 + 0 \times 1 \times 2 \times 3 = 1 = 1^2$$

$$1 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 25 = 5^2$$

$$1 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 121 = 11^2$$

...

$$1 + 10 \times 11 \times 12 \times 13 = ? = ?$$

...

On obtient toujours un carré parfait en ajoutant 1 au produit de quatre nombres naturels consécutifs ?

B.

Si $p(x) = x^2 + x + 41$, alors

$p(0) = 0 + 0 + 41 = 41$ est un nombre premier

$p(1) = 1 + 1 + 41 = 43$ est un nombre premier

$p(2) = 4 + 2 + 41 = 47$ est un nombre premier

...

$p(10) = 100 + 10 + 41 = ?$

...

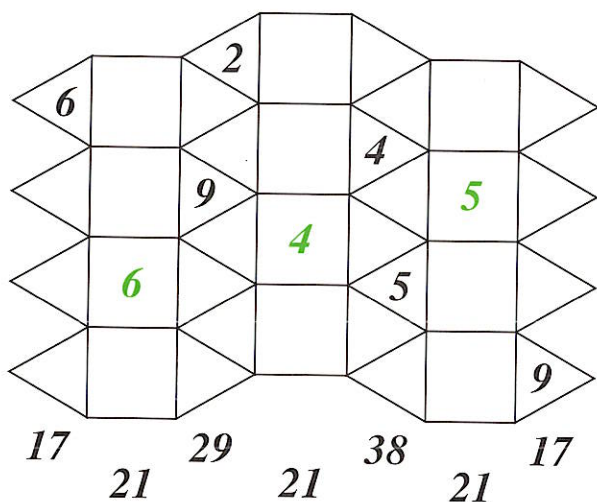
Quel que soit le naturel n , $p(n)$ est un nombre premier ?

4. Qui suis-je ?

Je suis naturel, aussi petit que possible ... mais pas nul ! Ma moitié est un cube, mon tiers est une cinquième puissance et mon cinquième est une puissance septième. Qui suis-je ?

5. Carrés parfaits–stiafrap

extrait de *Mathematical Pie*, n°172, autumn 2007



Calculer tous les nombres (de un chiffre!) manquants.

Un nombre de un chiffre est à inscrire dans chacun des carrés et des triangles sachant que

1. Chaque élément est formé d'un carré central et de deux triangles. Les deux triangles sont occupés par les deux chiffres du carré du nombre qui se trouve dans le carré central (voir ci-dessous : $8^2 = 64$).

Ce carré peut être écrit de gauche à droite ou de droite à gauche.

2. En bas de chaque colonne de carrés et de chaque colonne de triangles est donné le total des nombres de la colonne.

6. Uniformiser

Une suite de carrés et de triangles peut-elle être uniformisée en une suite de triangles en appliquant successivement la même règle :

deux signes voisins sont choisis, un carré devient un triangle et un triangle devient un carré.

Exemple : la suite $\square \triangle \square \square \triangle \triangle \square$ peut être convertie de la façon suivante :

$\square \triangle \square \square \triangle \triangle \square$

$\triangle \square \square \square \triangle \triangle \square$

$\triangle \square \square \square \triangle \triangle \square$

$\triangle \triangle \triangle \square \triangle \square \triangle$

$\triangle \triangle \triangle \triangle \square \square \triangle$

$\triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle$

A. Transformer en suites de triangles (en le moins d'étapes possible) les suites

$\triangle \square \triangle \square \triangle \square \triangle \square$

$\triangle \square \square \square \triangle \square \triangle \square \triangle \triangle \square$

B. Toutes les suites sont-elles transformables en une suite de triangles ?

$\triangle \square \square$

$\triangle \square \triangle$

$\triangle \square \triangle \square \triangle \square$

7. Nombres croisés

Découvrir les naturels a et b en complétant la grille.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement

- b^4 .
- $a(1000a - 1) - 2b^3$.
- $1000a^2 + b^2$.
- a^4 .
- $6a$; ab .

Verticalement

- $10b^3 + 3$.
- $a + b - 2(a^2 + b^2) + \frac{ab^4}{2}$.
- $(12a - 1)(8b + 1)$.
- $10a^2b^2 - a(5b - a)$.
- b^2 .

8. Produits de dés

Extrait de *Mathematical Pie*, n°172, autumn 2007

Deux dés normaux sont lancés et le score est le produit des deux valeurs obtenues.

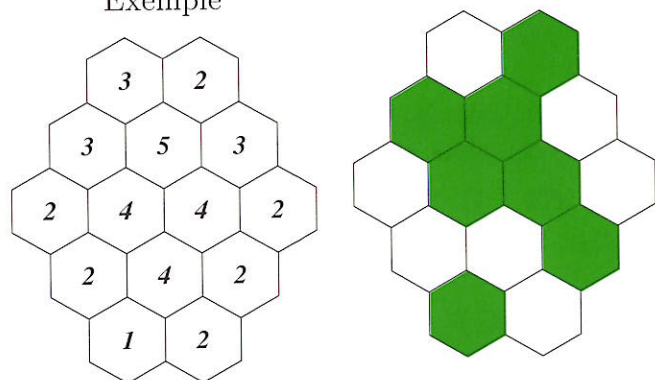
1. Le deuxième score vaut 5 de plus que le premier.
2. Le troisième score vaut 6 de moins que le deuxième.
3. La quatrième score vaut 11 de plus que le troisième.
4. Le cinquième score vaut 8 de moins que le quatrième.

Quels sont les scores successivement obtenus ?

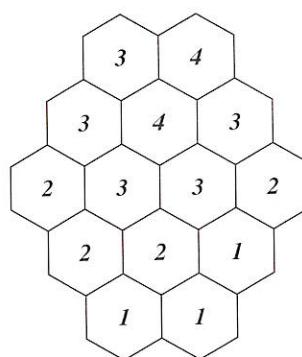
9. Des hexagones

Coloriez certains des hexagones des figures suivantes de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : **tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !**

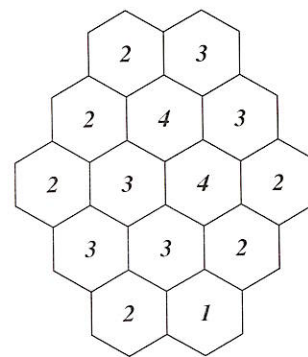
Exemple



Jeu facile



Jeu difficile



10. Alice au Pays des Merveilles

Vous connaissez sans doute le *syllogisme* célèbre

- Tous les hommes sont mortels.
- Socrate est un homme.
- **Socrate est mortel.**

Aucun problème dans ce cas, la troisième proposition se déduit bien des deux précédentes.

Voici des situations tirées des Œuvres de Lewis Carroll (Ed. R. Laffont, tome 2, pp. 697–699, 1989).

Dans deux cas sur les quatre qui suivent, la troisième proposition peut être déduite des deux précédentes. Quels sont ces deux cas ?

- A
- Aucun docteur n'est enthousiaste.
 - Vous êtes enthousiaste.
 - **Vous n'êtes pas docteur.**

- B
- Aucune grenouille n'est poète.
 - Quelques canards ne sont pas poètes.
 - **Quelques canards ne sont pas des grenouilles.**
- C
- Tous les aigles peuvent voler.
 - Quelques cochons ne peuvent pas voler.
 - **Quelques cochons ne sont pas des aigles.**
- D
- Aucun empereur n'est dentiste.
 - Tous les dentistes sont redoutés par les enfants.
 - **Aucun empereur n'est redouté par les enfants.**

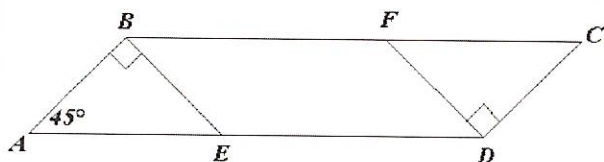
Olympiades mathématiques

Claudine Festraets

L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 16 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques-uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

Midi 9 - Maxi 6

Dans le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous, $|AB| = \sqrt{2}$, $|AD| = 10$, l'amplitude de l'angle \hat{A} vaut 45° et les droites BE et DF sont perpendiculaires à AB . Quelle est la distance entre les droites BE et DF ?



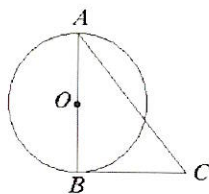
- (A) $\sqrt{2}$ (B) 5,6 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $10 - 2\sqrt{2}$ (E) 8

Solution

Dans le triangle rectangle ABE , $\widehat{BAE} = 45^\circ$, donc $\widehat{BEA} = 45^\circ$ et le triangle est isocèle. Dès lors, $|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 = 2 + 2 = 4$, $|AE| = 2$ et $|ED| = 8$. La perpendiculaire à FD menée par E coupe FD en G . Le triangle rectangle EGD est semblable au triangle rectangle ABE , le rapport de similitude est 4, car $|ED| = 4|AE|$, donc $|EG| = 4\sqrt{2}$ (réponse (C)).

Midi 12 - Maxi 9

Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et la droite BC est tangente au cercle en B . Que vaut l'aire du cercle sachant que $|AC| = 12$ et $|BC| = 8$?



- (A) 12π (B) $8\sqrt{3}\pi$ (C) 16π (D) 20π (E) 80π

Solution

$|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 = 144 - 64 = 80$, d'où $|AO|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 = 20$ et l'aire du cercle vaut 20π (réponse (D)).

Midi 15 - Maxi 11

Dans une assemblée, 60 % sont des femmes. Une femme sur trois est sportive et un homme sur deux est sportif. Parmi les sportifs de cette assemblée, quelle est, exprimée en %, la proportion de femmes ?

- (A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 55

Solution

Si l'assemblée comporte 100 personnes, 60 sont des femmes dont 20 sont sportives et 40 sont des hommes dont 20 sont sportifs. Il y a donc autant de femmes que d'hommes sportifs. Dans l'ensemble des sportifs, la proportion de femmes est de 50 % (réponse (D)).

Maxi 13

Si f est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que $f(x) = 1 - f(x - 1)$, alors $f(x + 1) =$

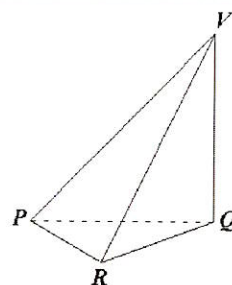
- (A) $2 - f(x - 1)$ (B) $f(x - 1)$ (C) $f(x) + 1$
(D) $f(x - 1) + 2$ (E) $f(x) - 1$

Solution

Dans l'égalité $f(x) = 1 - f(x - 1)$, remplaçons x par $x + 1$. On obtient $f(x + 1) = 1 - f(x) = 1 - (1 - f(x - 1)) = f(x - 1)$ (réponse (B)).

Midi 19 - Maxi 14

Dans le tétraèdre $VPQR$, la droite VQ est perpendiculaire au plan PQR , $\widehat{PQR} = 60^\circ$, $|VP| = |VR| = 10$ et $|VQ| = 8$. Que vaut la longueur de $[PR]$?



- (A) 6 (B) $6\sqrt{2}$ (C) 9 (D) 10 (E) $8\sqrt{3}$

Solution

La droite VQ est perpendiculaire au plan PQR , donc perpendiculaire aux droites QP et QR . Dans le triangle rectangle VQP , $|PQ|^2 = |VP|^2 - |VQ|^2 = 100 - 64 = 36$, d'où $|PQ| = 6$. De même $|RQ| = 6$. Le triangle PQR est isocèle et comme il a un angle de 60° , il est équilatéral, donc $|PR| = 6$ (réponse (A)).

Maxi 15

Si $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$, que vaut $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$?

- Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ Ⓒ $\frac{5}{16}$ Ⓓ $\frac{9}{32}$ Ⓔ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Solution

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{25}{16} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

d'où $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{16} - 1\right) = \frac{9}{32}$ (réponse Ⓓ).

Midi 25 - Maxi 20

Pour réussir cet examen, il faut obtenir une note d'au moins 50 sur 100. La moyenne de ceux qui ont réussi est de 65 sur 100, la moyenne de ceux qui ont échoué est de 35 sur 100 et la moyenne de tous les participants est de 53 sur 100. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont réussi ?

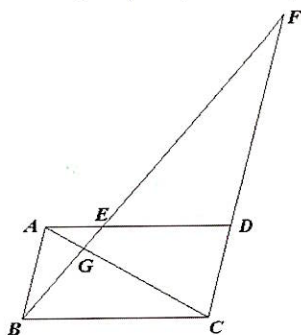
- Ⓐ 66,6 % Ⓑ 60 % Ⓒ 48 % Ⓓ 45 %
Ⓔ 20 %

Solution

Soient a et b respectivement le nombre d'élèves ayant réussi et le nombre d'élèves ayant échoué. Le total des points des élèves ayant réussi est $a \cdot \frac{65}{100}$, celui des élèves ayant échoué est $b \cdot \frac{35}{100}$ et celui de tous les élèves est $(a+b) \cdot \frac{53}{100}$. On a donc $a \cdot \frac{65}{100} + b \cdot \frac{35}{100} = (a+b) \cdot \frac{53}{100}$ ce qui donne après simplifications $5a = 3(a+b)$ et $a = \frac{3}{2}(a+b)$ (réponse Ⓑ).

Midi 27 - Maxi 21

Dans le parallélogramme $ABCD$, une droite issue de B coupe AC en G , AD en E et CD en F . Que vaut $|EF|$ sachant que $|BG| = 4$ et $|GE| = 1$?



- Ⓐ $7\sqrt{3}$ Ⓑ $\sqrt{214}$ Ⓒ 11 Ⓓ 15 Ⓔ Les données sont insuffisantes.

Solution

Les triangles AGE et CGB sont semblables et $|GE| = \frac{1}{4}|BG|$, d'où $|AE| = \frac{1}{4}|BC|$ et $|ED| = \frac{3}{4}|BC|$. Les triangles BFC et EFD sont semblables et puisque $|ED| = \frac{3}{4}|BC|$, on a $|FE| = \frac{3}{4}|FB|$. Or $|BE| = 5$, donc $|FE| = 15$ (réponse Ⓓ).

Maxi 22

$$(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2008^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2007^2) =$$

- Ⓐ 2017 036 Ⓑ 1015^2 Ⓒ $\frac{1}{5} \cdot 4015^2$ Ⓓ $2 \cdot 10^6$
Ⓔ Aucune des valeurs précédentes.

Solution

$$\begin{aligned} (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + (2008^2 - 2007^2) &= \\ 3 + 7 + 11 + \dots + 4015 &= \frac{1}{2}(3 + 4015) \cdot 1004 = 2017036 \end{aligned}$$

(réponse Ⓐ).

Maxi 28

Combien de couples d'entiers (x, y) vérifient l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{3}$?

- Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 3 Ⓓ 9 Ⓔ Une infinité

Solution

Élevons au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{x} = \sqrt{3} + \sqrt{y}$. On obtient $x = y + 3 + 2\sqrt{3y}$, pour $y \in \{0, 3, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n+1}, \dots\}$ ($n \in \mathbb{N}$), toutes les valeurs de x sont entières (réponse Ⓔ).

Maxi 30

Pour combien d'entiers n l'expression $n^4 + 4n^3 - 3n^2 + 4n + 1$ est-elle un nombre premier ?

- Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 4 Ⓔ Une infinité

Solution

L'expression donnée est égale à

$$\begin{aligned} (n+1)^4 - 9n^2 &= ((n+1)^2 - 3n)((n+1)^2 + 3n) \\ &= (n^2 - n + 1)(n^2 + 5n + 1), \end{aligned}$$

elle n'est un nombre premier que si l'un des facteurs vaut 1 et l'autre est premier.

Si $n^2 - n + 1 = 1$, alors $n = 0$ et $n^2 + 5n + 1 = 1$ ou $n = 1$ et $n^2 + 5n + 1 = 7$.

Si $n^2 + 5n + 1 = 1$, alors $n = 0$ et $n^2 - n + 1 = 1$ ou $n = -5$ et $n^2 - n + 1 = 31$.

Pour $n = 1$ et pour $n = -5$, on obtient un nombre premier (réponse Ⓒ).

Problèmes

Nicole Miewis

Voici d'autres solutions aux problèmes proposés dans le n° 118 S de *Math-Jeunes*

Problème 1

Deux autres solutions nous sont parvenues.

1. Le nombre i des électeurs inscrits est la somme des votes exprimés valables, des votes exprimés non valables et des abstentions.

$$i = v_g + v_p + 60 + \frac{i}{10}$$

(v_g et v_p désignant respectivement les nombres de voix recueillies par le gagnant et le perdant.)

Comme $v_p = v_g - 492$ et $v_g = \frac{49}{100}i$, on se trouve devant un système d'équations qui conduit à

$$\frac{49}{100}i + \frac{49}{100}i - 492 + 60 + \frac{i}{10} = i$$

D'où $i = 5\,400$.

Le pourcentage des votes valables pour le candidat élu vaut $\frac{49 \times 54}{5\,400 - (540 + 60)} = 55,125\%$.

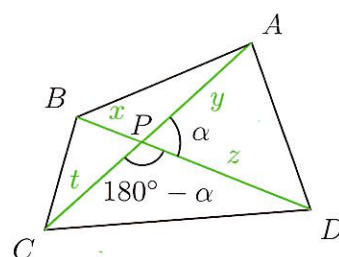
2. Soit x le nombre de votes exprimés pour le gagnant, y le nombre de votes exprimés pour le perdant et z le nombre d'électeurs. On a un système d'équations

$$\begin{cases} x - y = 492 \\ x + y + 60 = \frac{90}{100}z \\ x = \frac{49}{100}z \end{cases}$$

dont la solution est $\begin{cases} x = 2646 \\ y = 2154 \\ z = 5400 \end{cases}$.

Il y a $\frac{90}{100} 5\,400 = 4\,800$ votes valables et le candidat élu a obtenu $\frac{2\,646}{4\,800} 100 = 55,125\%$ de ces votes.

Problème 2



Posons $x = |BP|$, $y = |AP|$, $z = |DP|$ et $t = |CP|$. Remarquons que les angles $\widehat{APD} = \alpha$ et $\widehat{DPC} = 180^\circ - \alpha$ ont le même sinus. Dès lors

$$\frac{x \cdot y \cdot \sin \alpha}{2} = 12 \quad (1)$$

$$\frac{x \cdot t \cdot \sin \alpha}{2} = 9 \quad (2)$$

$$\frac{t \cdot z \cdot \sin \alpha}{2} = 15 \quad (3)$$

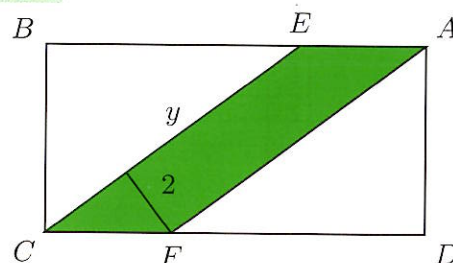
Le quotient des égalités (2) et (3) donne $\frac{t}{z} = \frac{3}{4}$ d'où $t = \frac{3y}{4}$, valeur que l'on reporte dans (3) pour obtenir

$$\frac{3y \cdot z \cdot \sin \alpha}{4 \cdot 2} = 15$$

$$\frac{y \cdot z \cdot \sin \alpha}{2} = 20$$

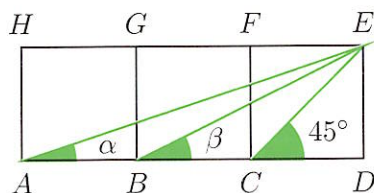
qui est l'aire du triangle DAP .

Problème 4



Posons $y = |CE|$. On a $50 = 2y + 5\sqrt{y^2 - 25}$. En isolant la racine, puis en élevant au carré, on obtient l'équation $21y^2 + 200y - 3\,125 = 0$ dont la seule solution acceptable est $y = \frac{25}{3}$. L'aire du sentier est alors de $\frac{50}{3} \text{ (m}^2\text{)}$.

Problème 5



Posons $|AB| = 1$. Dans ce cas, $|AE| = \sqrt{10}$ et $|BE| = \sqrt{5}$. Les angles α et β sont inférieurs à 45° , ce qui implique que $\alpha + \beta$ est inférieur à 90° .

Soit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$, d'où $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ et donc $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Soit $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Problème 6

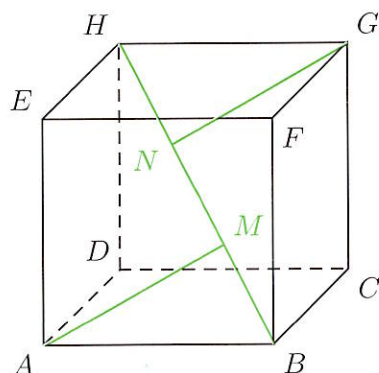
Démonstration vectorielle :

Posons $\vec{\alpha} = \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{CB}$ et $\vec{\gamma} = \overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{AC}$. Le système d'équations

$$\begin{cases} \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \\ \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \overrightarrow{A_1B_1} \\ \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \overrightarrow{B_1C_1} \end{cases}$$

permet de calculer les vecteurs $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$. On trouve par exemple $\vec{\beta} = \frac{\overrightarrow{B_1C_1} - 2\overrightarrow{A_1B_1}}{7}$, ce qui permet la construction du point C. Il en va de même pour les deux autres points cherchés.

Problème 7



1. Une démonstration en géométrie synthétique.

1. Notons M et N les pieds des perpendiculaires issues de A et G . La rotation d'axe HB et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ laisse fixes tous les points de HB (donc le pied

N de la perpendiculaire issue de G) et permute les points G , E , D .

Donc le plan DEG est invariant et la perpendiculaire issue de G en fait partie. Ainsi N est le point de percée de HB dans DEG .

De la même façon, M est le point de percée de HG dans AFC .

Vu la symétrie du cube par rapport à son centre, on a immédiatement $|BM| = |GN|$.

2) Les points H et B sont équidistants de A , F et C . Comme AFC est un triangle équilatéral, HB perce ce triangle en son centre. Donc M est le centre de AFC , ce qui entraîne que AM passe par le milieu de $[FC]$, qui est aussi le centre de la face $BCGF$. Appelons-le, A_2 .

3) Reste à considérer le rectangle $HGBA$. Il contient à la fois AM et GN qui sont deux droites parallèles (perpendiculaires à HB). AM coupe BG en A_2 qui est le milieu de $[BG]$. Par le théorème de Thalès, M est le milieu de $[BN]$, donc $|BM| = |MN|$.

2. Une seconde en géométrie analytique.

Nous paramétrons les sommets du cube :

$$\begin{array}{llll} A(1, -1, -1) & C(-1, 1, -1) & E(1, -1, 1) & G(-1, 1, 1) \\ B(1, 1, -1) & D(-1, -1, -1) & F(1, 1, 1) & H(-1, 1, 1) \end{array}$$

On a l'équation $BH \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ dont un vecteur directeur est $(1, 1, -1)$.

Le plan α orthogonal à BH et contenant G est $x + y - z = -1$.

Le point N commun à BH et α est la solution du système

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \quad \text{On trouve}$$

$$N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

On en déduit que $\|HN\|^2 = \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

De même, le plan β orthogonal à BH et contenant A est $x + y - z = 1$.

Le point M commun à BH et β est la solution du système $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$. On trouve $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

On en déduit que $\|BM\|^2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2 = \frac{4}{3}$.

Finalement, $\|NM\|^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

Solutions des jeux.

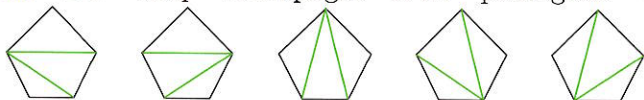
1. Dés et magie

A. Si x et y désignent les résultats du « premier » dé et du « deuxième » dé, le nombre finalement annoncé vaut $10x + 25 + y$. Par exemple, si 48 est le résultat final annoncé, le magicien calcule $48 - 25 = 23$ et annonce 2 et 3 comme valeurs des dés. Toute la magie résulte de l'application d'un algorithme qui fait calculer $10x + y + a$, avec un nombre a connu du magicien.

B. D'une façon analogue, avec trois dés x , y et z , le magicien construit un algorithme qui aboutit au calcul de $100x + 10y + z + \dots$ (un nombre connu !)

2. Découper en triangles

A. Les cinq découpages d'un pentagone :



B. Il existe quatorze découpages d'un hexagone.

Euler a démontré qu'un polygone à n côtés permet $\frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!^2}$ découpages différents.

3. Vrai ou faux ?

A. Vrai : $1 + 10 \times 11 \times 12 \times 13 = 17\,161 = 131^2$

Quel que soit n , $1 + n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2$

B. Faux : En continuant le test pour les nombres naturels jusque 39 inclus, tous les résultats sont des nombres premiers mais sans faire aucun calcul, on voit que $p(41)$ n'est pas premier puisqu'il est multiple de 41.

De manière moins évidente, $p(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41^2$ est aussi multiple de 41.

4. Qui suis-je ?

Le nombre x cherché est nécessairement le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 3 par une puissance de 5, soit $x = 2^y \cdot 3^z \cdot 5^t$.

« $\frac{x}{2}$ est un cube » implique que $y - 1$, z et t sont multiples de 3.

« $\frac{x}{3}$ est une puissance cinquième » implique que $z - 1$, y et t sont multiples de 5.

« $\frac{x}{5}$ est une puissance septième » implique que $t - 1$, y et z sont multiples de 7.

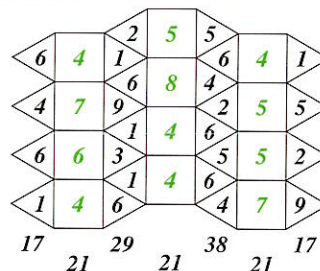
$y = 70$, $z = 21$ et $t = 15$ sont les plus petites valeurs qui satisfont à toutes ces conditions. On a donc

$$x = 2^{70} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15}.$$

Calculer ce nombre revient à calculer $2^{55} \cdot 3^{21} \cdot 10^{15}$. Avec l'aide d'une calculatrice, on obtient

376 873 942 297 556 594 410 389 504 000 000 000 000 000.

5. Carrés parfaits–stiafrap



6. Uniformiser

La règle du jeu ne permet pas de changer la parité du nombre de carrés présents dans la configuration initiale. Les configurations contenant un nombre impair de carrés ne sont donc pas transformables en suites de triangles : c'est le cas des deux dernières suites données en B.

Par contre, toute suite contenant un nombre pair de carrés est transformable en une suite de triangles : c'est le cas des deux suites données en A et de la première donnée en B.

7. Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	1	4	6	4	1
2	3	3	3	3	2
3	3	6	1	2	1
4	1	2	9	6	
5	3	6		6	6

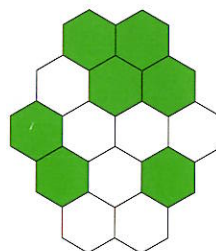
$$a = 6, b = 11.$$

8. Produits de dés

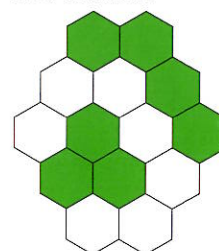
Les scores sont successivement 10, 15, 9, 20 et 12.

9. Des hexagones

Jeu facile



Jeu difficile



10. Alice au Pays des Merveilles

A et C.

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revue trimestrielle publiée par la
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎ 32-(0)65-373729,
GSM : 0473-973808, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : <http://www.sbpn.be>.

Math-Jeunes

Comité de Rédaction : C. Festraets, N. Lambelin, J. Miewis, N. Miewis, G. Noël, Y. Noël-Roch, F. Pourbaix, C. Randour, P. Tilleuil, A. Tilleuil-Lepoutre, S. Trompler, N. Vandennabeele, C. Villers.

Math-Jeunes Junior

Comité de Rédaction : F. Drouin, C. Festraets, B. Honclaire, G. Laloux, G. Noël, Y. Noël-Roch, A. Paternotte, F. Pourbaix, S. Trompler, N. Vandennabeele, C. Villers.

Mise en page et dactylographie : M.-C. Carruana

Tarifs

Abonnements groupés (5 exemplaires au moins)				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	4 €		8 €	
Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (par APMEP)	8 €		16 €	
Europe	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
	19 €	22 €	25 €	28 €

Non prior : ☐ , Prior : ☐

Anciens numéros :

Avant 2004-2005 : 0,25 € par numéro + frais d'expédition

Année 2004-2005 : 0,50 € par numéro + frais d'expédition

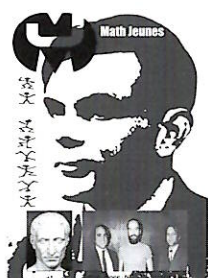
Frais d'expédition : consulter le secrétariat

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

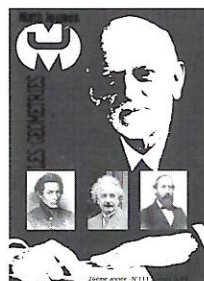
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons.
- pour la France : via l'APMEP (voir le Bulletin Vert).
- pour les autres pays : par virement international au Compte IBAN BE26 0000 7280 1429, BIC BPOTBEB1 de la SBPMef. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais.

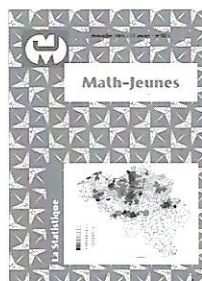
Complétez votre collection de Math-Jeunes.



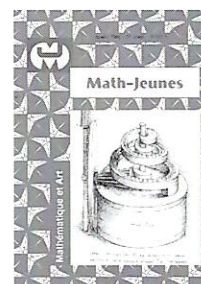
N°110
Le codage



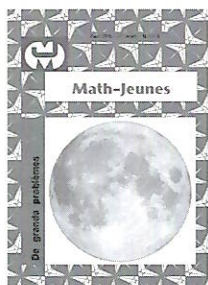
N°111
Les géométries



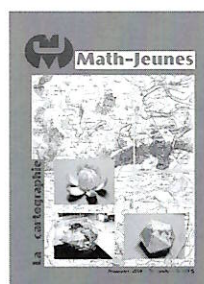
N°112
La statistique



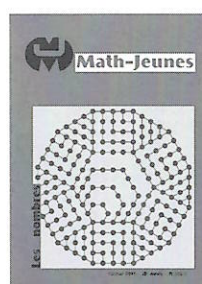
N°113
Mathématique
et art



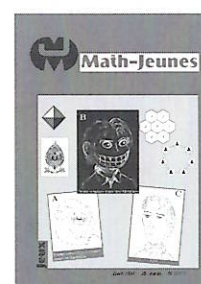
N°114
De grands
problèmes



N°115
La cartographie



N°116
Les nombres



N°117
Jeux

Depuis le n°106, chaque numéro constitue une introduction à un thème particulier. Prix : 0,75 € par série de trois numéros antérieurs au n°112; 1,5 € pour les trois numéros 112 à 114 ou 115 à 117, frais d'expédition en sus.

Sont également toujours disponibles : les numéros 50 à 105 (sauf 61, 68 et 86). Les sommaires sont accessibles à l'adresse www.sbpn.be

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour Math-Jeunes : G. Noël, Rue de la Culée, 86, 6927 Restaigne

– pour Math-Jeunes Junior : A. PATERNOTTE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

© SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.

Math-Jeunes

Périodique trimestriel

24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : G. NOËL
Rue de la Culée, 86 - 6927 Restaigne
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée