4e Année - N° 13 Janvier-Février 1982

MATH JEUNES

En-tête de Philippe DE WAEL,
de Bruxelles

Cher ami , chère amie,

Au moment de mettre sous presse
BECKER Martine, de Charleroi,
BIANCHI Jean-Pierre, de Liège,
CONSTANT Hervé, de Rance,
CROKAERT Pierre, de Braine l'Alleud,
DARDENNE Didier, de Rance,
DEHOMBREUX Pierre, de Jemappes,
DIVRY Bruno, de Rance,
GODIN Florent, de Schaerbeek,
KNUTS, François-Gabriel, de Floreffe
LURSON Michèle, de Liège,
MORMONT Christine, de Liège,
PEETERS Philippe, de Rance,
ROMME Jean-Luc de Liège,
STAFFE Christian, de Floreffe,
WAGENAAR Pierre, de Floreffe,
nous ont déjà fait parvenir des solutions à divers problèmes. Et toi ?

Quinze sur cinq mille cela ne fait pas une très grosse moyenne! Manque d'intérêt, nous ne croyons pas, manque de courage pour rédiger et envoyer une solution, peut-être, crainte de ne pas obtenir un très bon score, possible, et pourtant, nous sommes certains que beaucoup parmi vous enverron des réponses au concours de Tintin ou de Spirou, alors pourquoi pas à MATH-JEUNES ? Les problèmes que nous vous posons demandent fort peu de références à vos cours, ils font surtout appel à cette merveilleuse faculté : "le don d'imagination" et celle-ci se cultive .

Nous attendons aussi de nos dessinateurs des projets d'en-têtes. Ici aussi, nous faisons appel à votre imagination. Les dessins sont sélectionnés pour leur originalité, mais aussi pour la valeur de leur graphisme. Le soin dans la réalisation de beaucoup d'entre eux n'est pas suffisant pour qu'ils puissent être retenus. Rappelons les dimensions à respecter : longueur 15 cm , hauteur 6 cm. Tenez compte du fait qu'ils seront réduits de 25% lors de l'impression. Ne chargez pas trop.

La rédaction.

SURTOUT, ne pas perdre la boule...

Dans un plan, les points situés à une distance de l'origine inférieure à R (le rayon) constituent la *boule de centre O, de rayon* R. Nous la noterons B(O,R). Le rayon est ce que vous pensez; oui mais voilà, pour le matheux, ce n'est point si simple. L'existence d'un " rayon " est liée à l'existence d'une notion de *distance* susceptible de caractériser l'écart réciproque, relativement à un point de vue, entre deux points du plan.

Plus précisément, une "distance" entre éléments d'un ensemble est une fonction d , qui associe, à deux éléments x et y d'un ensemble, un nombre positif ou nul : leur distance d(x,y), de telle sorte que :

- → *La distance entre deux éléments différents n'est pas nulle !* (c'est la moindre des choses, non ?)
- → *Il y a équivalence entre l'aller et le retour !*
- → *Si, pour aller de x à y, on s'impose de passer par un intermédiaire z, cela ne peut qu'allonger la distance totale (à l'extrême rigueur, cela ne l'allongera pas, mais notre système d'explication ne comprendrait pas que cela soit plus court).* (ce qui n'est plus évident depuis l'invention des autoroutes ... mais passons ...)

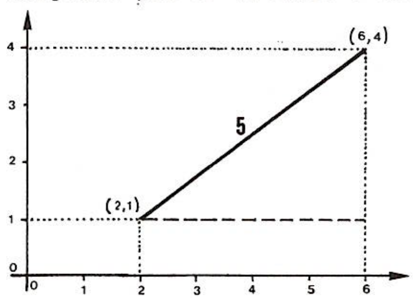
En termes savants, si E est notre ensemble, ces propripriétés se formalisent :

$$d(x,y) = 0 \iff x = y \qquad \forall\, x \in E, \forall\, y \in E$$

$$d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall\, x \in E, \forall\, y \in E$$

$$d(x,z) + d(z,y) \geqslant d(x,y) \qquad \forall\, x \in E, \forall\, y \in E, \forall\, z \in E$$

La voie des mathématiques est décidément étrange : vous connaissez les propriétés de la distance, mais vous ne savez toujours pas la mesurer ! Alors voici quelques idées :



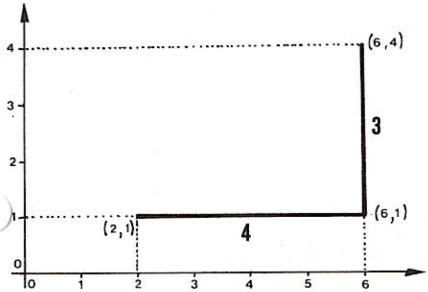
Si vous pensez, avec Pythagore, que la distance entre les points de coordonnées (2,1) et (6,4) a quelque raison de valoir 5, c'est que votre définition de la distance est la suivante :

Si x admet la coordonnée (x_1,x_2),
si y admet la coordonnée (y_1,y_2),

alors $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Distance Euclidienne.

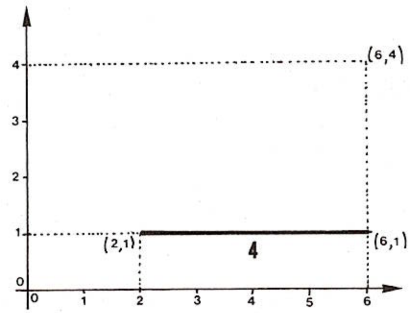
Si vous pensez, avec Papy, que seuls les déplacements horizontaux et verticaux sont permis, alors la distance entre les points de coordonnée (2,1) et (6,4) vaut la somme des distances entre (2,1) et (6,1) et entre (6,1) et (6,4). Son nom rappele la distance parcourue par un taxi dans une ville-type, New-York (où il n'y aurait pas de sens interdits, sinon le second axiome ne se vérifierait pas!).



Si x admet la coordonnée (x_1,x_2),
si y admet la coordonnée (y_1,y_2),

alors $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Taxidistance.



Dans le même type de ville, on peut imaginer la distance de deux points comme la distance minimale qu'il faut parcourir en quittant un point pour être sûr d'apercevoir l'autre point dans un lointain horizontal ou vertical. Remarquons que cette distance " minimale " se définit par un maximum (!!)

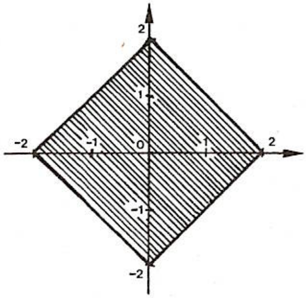
Si x admet la coordonnée (x_1,x_2),
si y admet la coordonnée (y_1,y_2),

alors $d(x,y) = \text{maximum } (|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

Maxidistance.

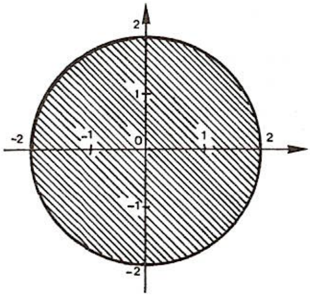
Le lecteur consciencieux vérifie que l'on a bien défini trois distances. Suivant la définition choisie, la distance entre les points de coordonnées (2,1) et (6,4) vaut 5,7 ou 4.

Pour ces trois types de mesures, prenons un rayon de boule valant 2 et repésentons nos boules : ce n'est pas la quadrature du cercle, mais presque ...



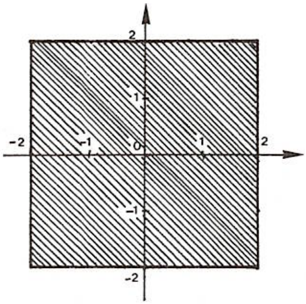
Taxiboule.

Si $(x_1,x_2) \in B(0,2)$,
alors $|x_1| + |x_2| < 2$



Boule Euclidienne.

Si $(x_1,x_2) \in B(0,2)$,
alors $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2$



Maxiboule.

Si $(x_1,x_2) \in B(0,2)$,
alors $|x_1| < 2$ et $|x_2| < 2$

Lorsque le signe d'inégalité employé dans les définitions des boules est, comme ci-dessus, $(<)$, on parle de *Boules ouvertes*. Si le signe est $(\leqslant)$, on parle bien entendu de *Boules fermées*.

On peut en fait flanquer R^2 d'une infinité de distances qui se ressemblent étrangement :

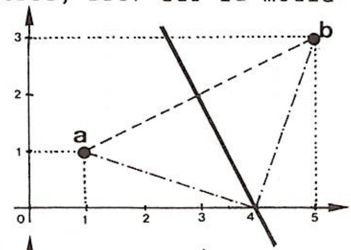
$$d_n((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt[n]{(x_1 - y_1)^n + (x_2 - y_2)^n}$$

La distance Euclidienne est d_2 ; la taxidistance d_1.
Si vous dessinez, sur un même graphique, les boules associées à ces distances, vous comprendrez certainement pourquoi la maxidistance se note plutôt d_∞ .

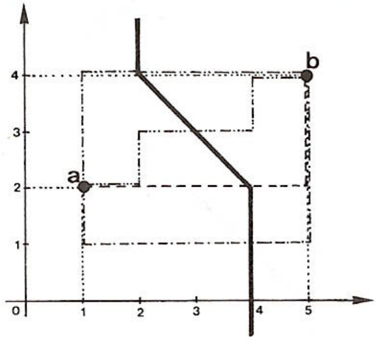
Signalons que l'on généralise facilement ces distances à R^3 : ne vous inquiétez donc pas lorsque vous croisez une orange cubique ou octaédrique ...

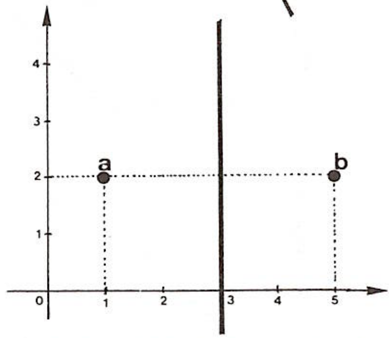
Après que nous nous sommes intéressés aux points à égale distance d'un point fixe, nous allons nous pencher sur ceux qui sont à égale distance de deux autres, bref sur la médiatrice d'un couple de points du plan.

Chacun connait la nature linéaire des médiatrices relativement à la distance Euclidienne (voir ci-contre).

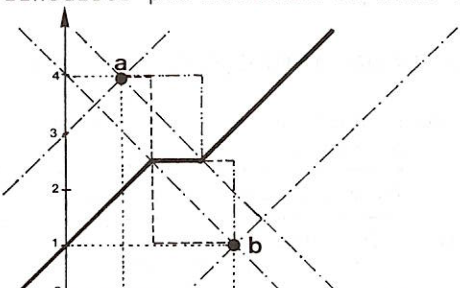


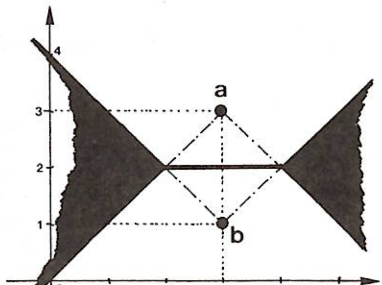
Les "taximédiatrices" sont, elles,parfois linéaires par morceaux : (voir ci-dessous)

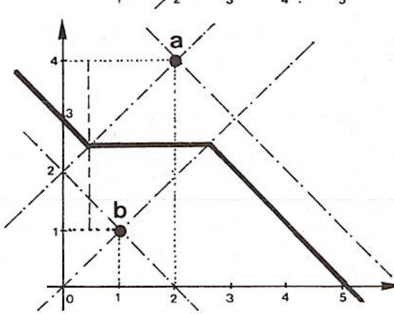


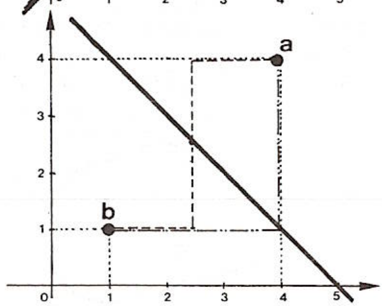


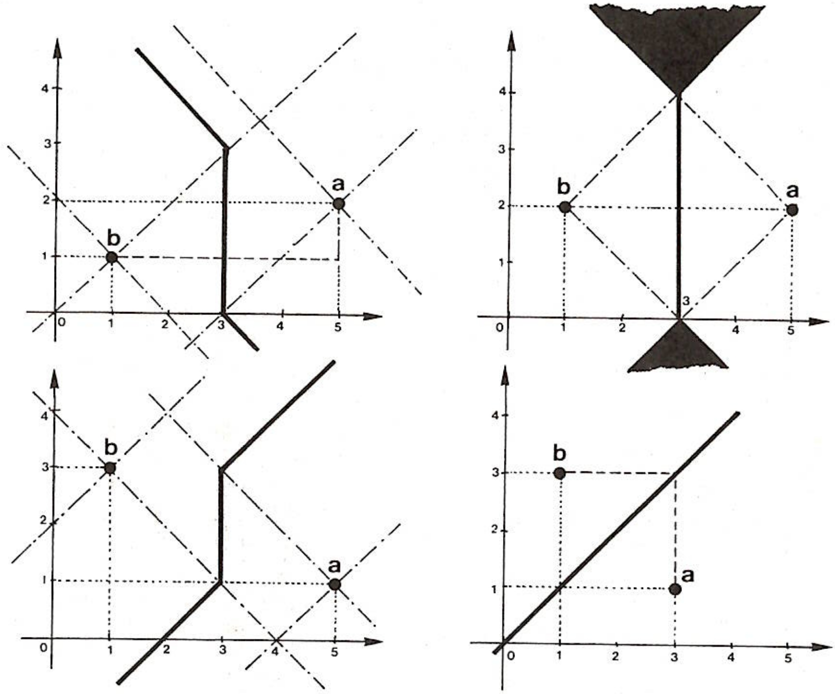
Quant aux "maximédiatrices", elles peuvent être linéaires, linéaires par morceaux ou même des plages entières du plan !











QUESTION : Les taxi-médiatrices peuvent-elles aussi contenir des plages entières du plan ?

◎◎◎ LES DISTANCES ULTRAMETRIQUES ◎◎◎

Les distances ultramétriques sont des distances possédant une propriété supplémentaire, à savoir :

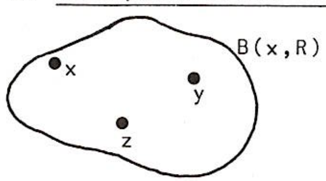
$$\boxed{d(x,y) \leqslant \text{maximum}\ (\ d(x,z), d(y,z)\ ) \quad \forall\, x,y,z \in E}$$

Soit un ensemble E où est définie une distance d ultramétrique : des résultats étonnants sont démontrables :

1) Tous les triangles x,y,z de E sont isocèles.

Chacun de leurs côtés étant inférieur à l'un des deux autres, il ne peut y en avoir un strictement plus grand ; les deux plus grands côtés sont donc égaux !

2) Tout point d'une boule est centre de cette boule.



Soit $y \in B(x,R)$, donc $d(x,y) \leqslant R$
$B(y,R) \subseteq B(x,R)$ puisque
$\forall z \in B(y,R)$, $d(z,y) \leqslant R$ et
$d(x,y) \leqslant R$ impliquent $d(x,z) \leqslant R$
De même, $B(x,R) \subseteq B(y,R)$, donc
$B(x,R) = B(y,R)$

3) <u>Le diamètre d'une boule est égal à son rayon.</u>

L'existence de $B(x,R)$ laisse supposer l'existence de $w \in B(x,R)$ tel que $d(x,w)=R$. Si on définit le diamètre d'une boule comme la distance maximale entre deux points de la boule, si y et z sont les extrémités d'un tel diamètre, alors $d(y,z) \geqslant R$. Mais $d(y,z) \leqslant \max(d(x,y),d(x,z))$ car $d(x,y)$ et $d(x,z) \leqslant R$.

A notre insu, nous sommes en fait plongés dans un monde ultramétrique. Imaginons Monsieur Dupont demeurant au 3eme étage d'un immeuble et Monsieur Durant au 6eme. Il y a gros à parier qu'ils affirmeront être tous deux à la même distance de la gare de leur ville. Si vous demandez à deux habitants de Charleroi à quelle distance ils demeurent du centre de Liège, ils vous feront la même réponse ! Le Montois et le Bruxellois s'estimeront à même distance de Tokyo ! Ces habitudes de langage créent en fait une *hiérarchie* des distances, en contradiction totale avec les principes de la distance Euclidienne (qui vous semblait pourtant si évidente il y a peu ...)

En fait, deux Belges peuvent s'estimer séparés par une distance d évaluée comme suit :

$d(x,y) = 1$ s'ils sont dans des pièces différentes d'un même appartement.
$d(x,y) = 2$ s'ils sont dans des appartements différents d'un même immeuble.
$d(x,y) = 3$ s'ils sont dans des immeubles différents d'un même quartier.
$d(x,y) = 4$ s'ils sont dans des quartiers différents d'une même localité.
$d(x,y) = 5$ s'ils sont de localités différentes.

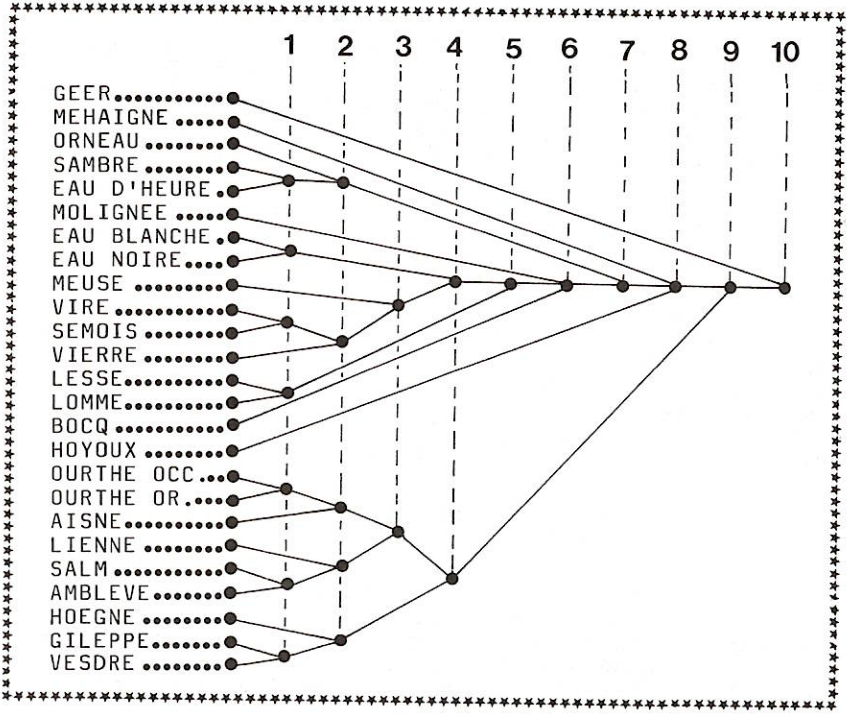
(On vérifie facilement que les triangles sont isocèles).

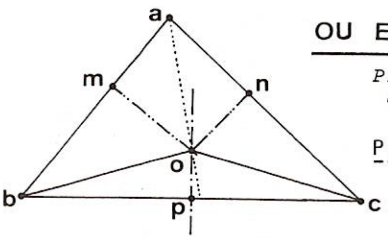
Le temps nécessaire à la communication d'une information entre deux fonctionnaires par la voie hiérarchique est aussi un exemple étonnant de distance ultramétrique. L'encadré de la page suivante qui représente les principaux affluents de la Meuse en Belgique peut représenter une structure ultramétrique si on y définit la distance entre deux rivières par l'ordre du confluent le plus à gauche par lequel on doit obligatoirement passer pour "nager" de la source d'une rivière à une autre.

ainsi d(LOMME,SALM) = 9
d(LOMME,SAMBRE) = 7 (c'est bien un triangle isocèle !)
d(SALM,SAMBRE) = 9

mais les triangles sont parfois équilatéraux puisque :

d(VIRE,MEHAIGNE) = 8
d(VIRE,HOYOUX) = 8
d(MEHAIGNE,HOYOUX) = 8





OU EST L'ERREUR ?

Problème communiqué par M.AERENS, Collège Jean XXIII, 1150-Bruxelles.

Proposition : Deux segments de longueurs inégales, ont la même longueur !

Hypothèse: $||\vec{ab}|| < ||\vec{ac}||$

Thèse : $||\vec{ab}|| = ||\vec{ac}||$

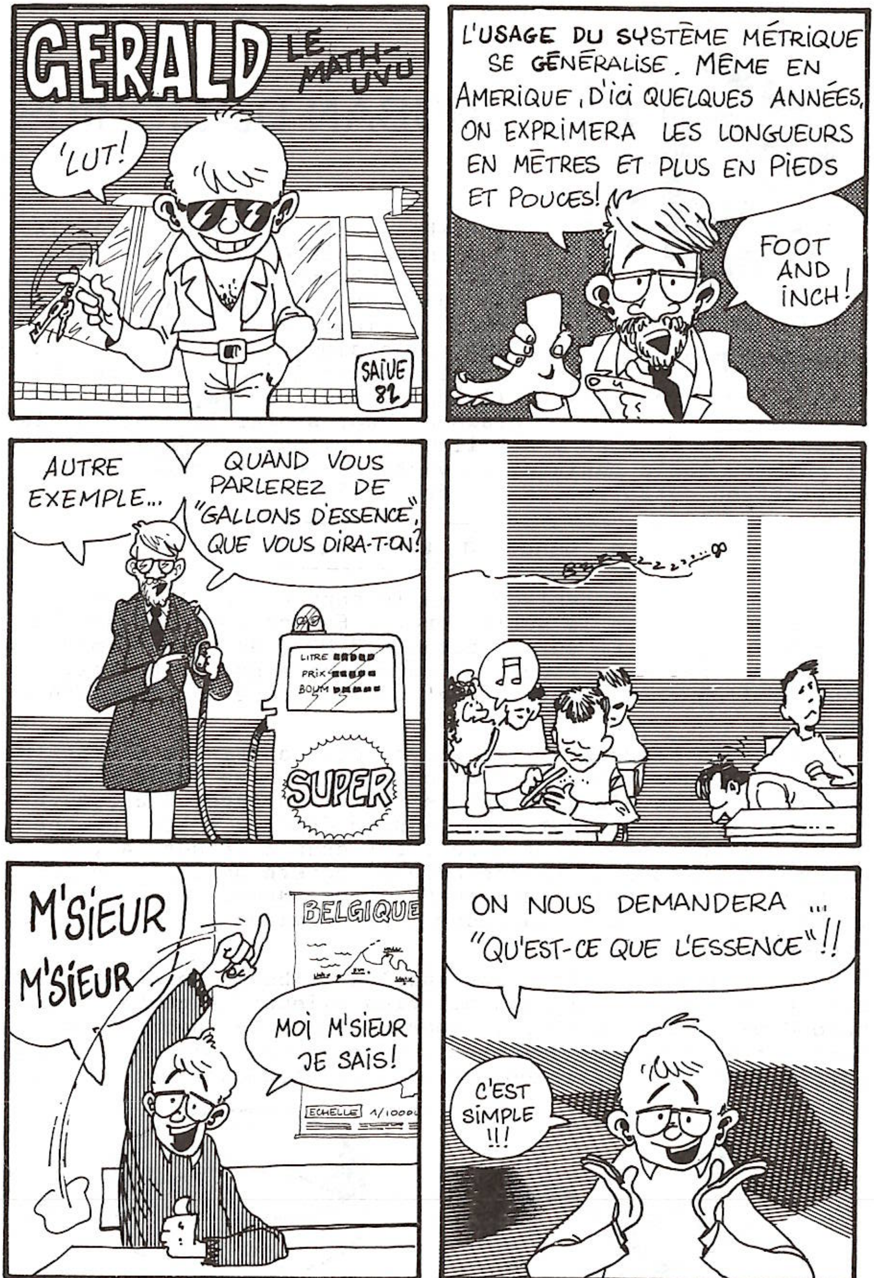
Démonstration:

Dans le triangle abc, traçons la bissectrice de l'angle a et la médiatrice du côté bc. Puisque le triangle n'est pas isocèle, ces deux droites se coupent en un point unique O. Il est aisé de prouver que :

les triangles aom et aon sont égaux, d'où $||\vec{am}|| = ||\vec{an}||$

les triangles omb et onc sont égaux, d'où $||\vec{mb}|| = ||\vec{nc}||$

En additionnant, on obtient : $||\vec{ab}|| = ||\vec{ac}||$



DESSIN: SAIVE
SCENARIO: VANHAMME

LE RUBAN DE MÖBIUS

Le timbre-poste ci-contre symbolise l'union douanière Belgique - Pays-Bas - Luxembourg par une bande sans fin composée des drapeaux des trois pays. La figure 2 représente de façon plus simple une bande cylindrique. La figure 1 (ou le timbre) est-elle uniquement une façon plus complexe de représenter la bande de la figure n° 2; ou bien y a-t'il une véritable différence ? Et puis de toute manière, en vertu de quel(s) critère(s) pourrait-on détecter une différence ?

La bande à une face.

Une fourmi se déplace dans le sens de la flèche et essaie d'atteindre le petit cercle. Est-ce possible sur la première bande ? Et sur la seconde ? Même en transformant la bande n° 2 selon la figure 3, cela n'aide pas la fourmi, sauf si l'on presse A vers B et si l'on crée en cet endroit un pont.

Dans la bande n° 1, la fourmi peut atteindre n'importe quel point sans devoir passer par-dessus les bords : c'est une surface qui n'a donc qu'une face ! Surface, face, bords sont ici pris dans leur sens le plus évident à tout un chacun. Si la bande de la figure 1 est coupée (figure 4), il est alors impossible d'atteindre le repère sans passer par un bord. La surface a dans ce cas deux faces. On peut ainsi distinguer les deux surfaces : la première a une face, la seconde en a deux.

La bande à une face est appelée la bande de MöBIUS du nom de l'astronome et mathématicien allemand Auguste Ferdinand Möbius (1790 - 1868). Remarquons que les notions de forme et de longueur qui nous sont si familières dans la géométrie sont ici négligées. On a admis implicitement de pouvoir

Fig 1

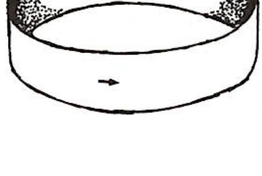


Fig 2

modifier les longueurs et largeurs des bandes : cette partie de la mathématique étudiant les déformations continues (sans cassures, sans collages, sans découpes...) des surfaces est la <u>topologie</u>.

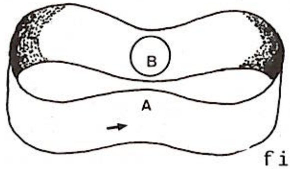


fig 3

Ainsi la bande n°5 pouvant être obtenue de la bande n°1 par transformation est aussi une bande de Möbius.

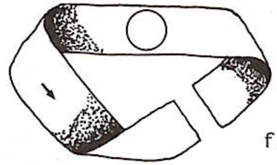


fig 4

Jusque là, notre démarche fut plutôt intellectuelle : voyons à présent comment on peut fabriquer ces bandes de Möbius. Prenons une bande de papier et collons-la de telle sorte que les lettres A coïncident entre elles comme d'ailleurs les lettres B (fig6). Cela signifie que l'on doit tordre la bande une fois au moins ! La figure 7 est facilement transformable pour obtenir la figure 5. Par contre, on voit qu'il nous faut la tordre trois fois pour obtenir la bande n°1 ou le motif du timbre. (voir fig 8)

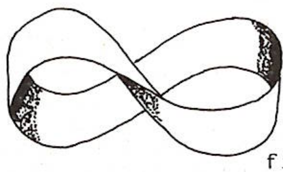


fig 5

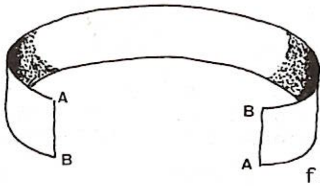


fig 6

Tant que nous en sommes au bricolage, construisez une bande de Möbius du type de la figure 7 avec une largeur de 4 cm. Découpez-la en deux dans le sens de la longueur. Qu'obtenez-vous ? Pouviez-vous le prévoir ? Recommencez l'opération. Qu'obtenez-vous? Pouviez-vous le prévoir?

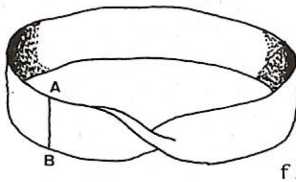


fig 7

Voici une autre expérience: imaginez être en possession d'un cachet avec lequel vous pouvez trouer le papier. Admettons que votre cachet représente la lettre S. La surface de la figure 9 est à traiter de façon à ce que sur une face les S soient lisibles et que sur l'autre ils apparaissent comme leurs images dans un miroir. C'est le même phénomènes que des lettres sur une vitrine : on peut toujours savoir en regardant la forme du S si l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur de la pièce. Une telle surface est dite orientable. Essayez avec la bande de la figure 7 : vous pouvez la fabriquer en papier fin et inscrire les lettres

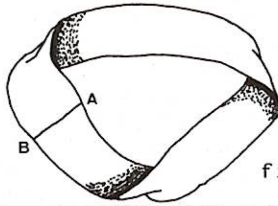


fig 8

au marqueur de sorte qu'elles soient lisibles des deux côtés. (Si on peut parler de deux côtés ?)

Un autre fait : si vous déplacez votre doigt le long d'un bord d'une bande de Möbius à partir d'un certain point; lorsque vous reviendrez en ce point, vous aurez parcouru la totalité du bord : donc la bande de Möbius n'a qu'un bord !

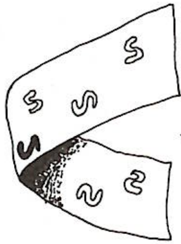


fig 9

En pliant un rectangle...

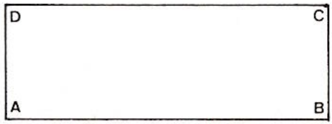


fig 10

Nous allons regarder quelles surfaces nous pouvons créer au départ d'une figure rectangulaire ABCD. Ceci se passera en pensée : on trouve difficilement une matière qui supporte les manipulations que nous nous promettons de lui faire subir.

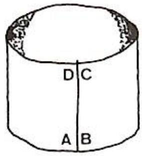


fig 11

1. On attache AD sur BC (A sur B, D sur C)
   On obtient une bande cylindrique avec 2 bords et 2 faces. Un nombre pair de torsions est permis. On obtient le même résultat en attachant AB à DC. (fig 11)

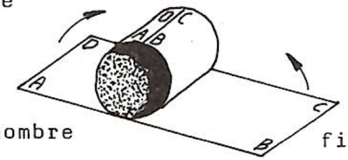


fig 12

2. On attache AD sur CB après un nombre impair de torsions : c'est une bande de Möbius. Même résultat lorsque AB est attaché à CD.

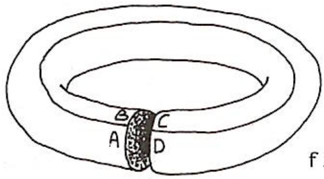


fig 13

3. On attache AD à BC et AB à DC sans torsions : la première collure nous donne un cylindre que l'on suppose suffisament long pour que les extrémités puissent se rejoindre. (12 et 13). On obtient un tore creux à deux faces.

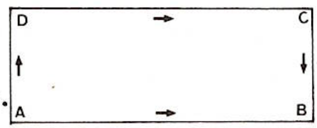


fig 14

4. On attache AB à DC sans torsion et AD à CB avec torsion. Nous allons essayer de visualiser ce cas. Les flèches des figures 14 à 19 indiquent comment les raccordements doivent se faire. Si l'on admet que des surfaces peuvent s'interpénétrer sans point commun, on obtient la figure 19 connue sous le nom de "bouteille de Klein": elle a une face et pas de bord !

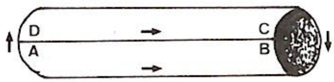


fig 15

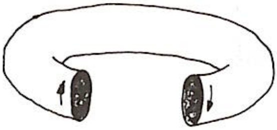


fig 16

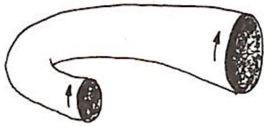


fig 17

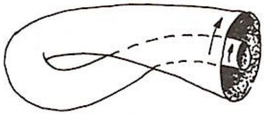


fig 18

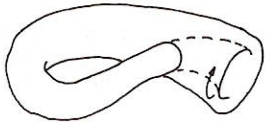
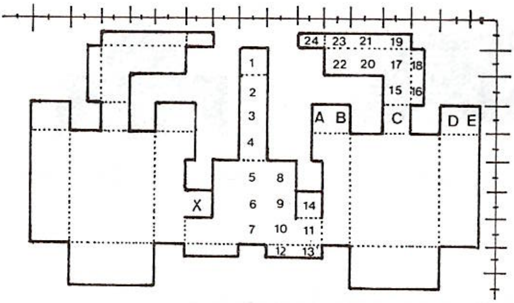
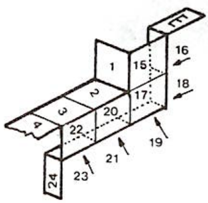


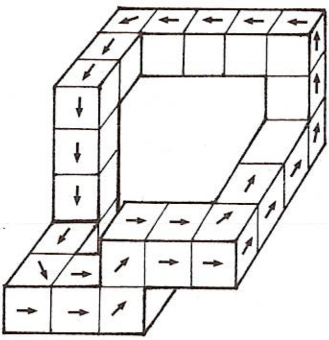
fig 19

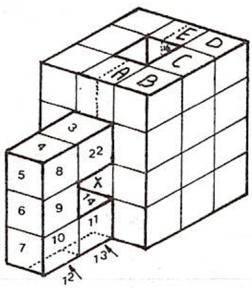
Pour les bricoleurs.

Avec un peu d'imagination, les modèles plus anguleux ci-dessous peuvent vous permettre de construire une bouteille de Klein ainsi qu'un anneau prismatique à une face : ce dernier étant une généralisation du ruban de Möbius où l'on tient compte de l'épaisseur du papier.







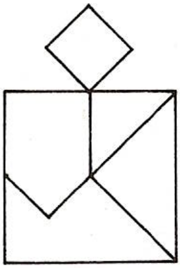


Traduction de Philippe Berghe.
(Sur un article de Pythagoras, octobre 1976.)

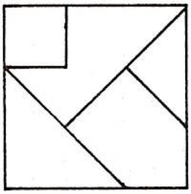
Le Penta-Puzzle

C.FESTRAETS.

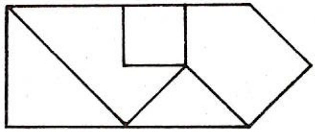
Voici les solutions des trois premiers penta-puzzles et les énoncés de trois nouveaux. Les figures des nouveaux problèmes ne sont pas construites à l'échelle !



Les 2 carrés.

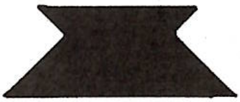


Le carré.



Le missile.

La ferme (*)

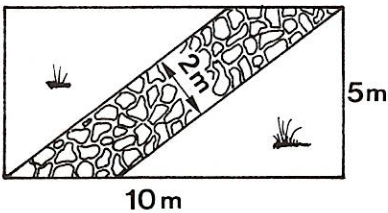


L'enclume (**)

La roquette (***)

Le coin des problèmes

63 Le sentier dans la prairie.



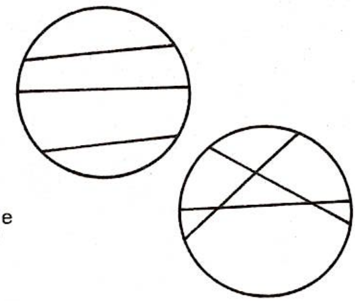
On considère une prairie de 5m sur 10 m. Elle est coupée par un sentier de 2 m de large comme sur le dessin ci-contre.
Calculer l'aire de ce sentier.

(Aimablement communiqué par M. Jean-Pierre ANDRIEN.)

64 SILENE ET BACCHUS.* (-,10)

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gêne
Aux dépens de son ami.
Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé.
Bientôt le dieu s'éveille et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
Si les deux compagnons s'étaient mis à l'ouvrage
Ensemble dès l'abord, Bacchus pour son partage
Eût eu de ce qu'à l'autre il a laissé tantôt
Les deux tiers, et la cuve eût six heures plus tôt
été vidée à fond. Je vous laisse à conclure,
Par une algèbre habile et sûre,
Combien il faut exactement
A chaque drôle isolément
Pour vider la cuve entière
Sans le secours de son digne confrère.

65 Les dix cordes.* (10,10)



Trois cordes d'un disque délimitent au moins quatre régions et au plus sept lorsqu'elles sont bien disposées.

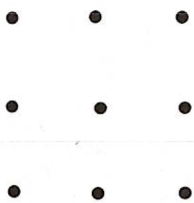
Quel est le nombre maximal de régions délimitées par dix cordes ?

Et par n cordes ?

66 Est-il premier ?* (10,-)

Le nombre 1 000 000 000 000 000 000 001 est-il premier ?

67 Les neuf points.

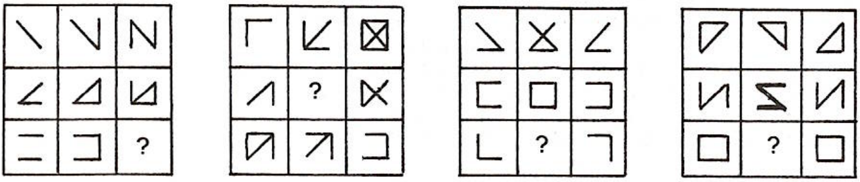


Comment joindre ces 9 points par 4 segments de droites consécutifs, c'est-à-dire sans lever le crayon du papier ?

(Aimablement communiqué par M. AERENS.)

68 Les carrés logiques. * (8,8)

Remplacez le point d'interrogation par le symbole qui complète



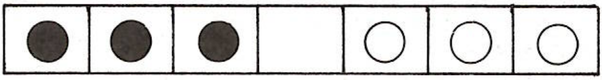
logiquement ces carrés.

69 Le jeu de la grenouille.

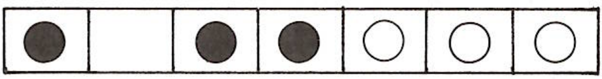
Considérez une ligne de 7 cases, sur laquelle vous disposez, comme sur la figure, trois pions blancs et trois pions noirs. Vous pourrez déplacer les pions en respectant les règles suivantes:

- les pions noirs ne peuvent se déplacer que vers la droite, les blancs vers la gauche;
- dans chacun de ses mouvements, chaque pion ne peut venir occuper qu'une case vide, soit en avançant d'une case, soit en sautant (comme une grenouille) au dessus d'un pion de couleur opposée.

au début :



Vous aurez gagné si, en respectant ces règles, vous arrivez à inverser la position des pions blancs et des pions noirs par rapport à leur position initiale. Et maintenant, à vous de jouer... (et de nous expliquer votre tactique ...)
Exemple de jeu perdu : Si l'on commence par faire jouer deux fois consécutivement les noirs, on peut faire avancer le dernier pion noir et l'on arrive à la situation bloquée :



MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française.
(*S.B.P.M.e.f. Association sans but lucratif.*)

Editeur responsable	Rédacteur (et courrier)	Abonnements :
W. VANHAMME,	J. MIEWIS,	(5 numéros)
Rue Firmin Martin,2,	Avenue de Péville,150,	BENELUX : 50FB
1160 - BRUXELLES.	4030 - LIEGE-GRIVEGNEE.	Etranger:100FB

Les abonnements sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur. Compte 001-0828109-96 de Math-Jeunes, chemin des Fontaines,14bis à 7460 CASTEAU.