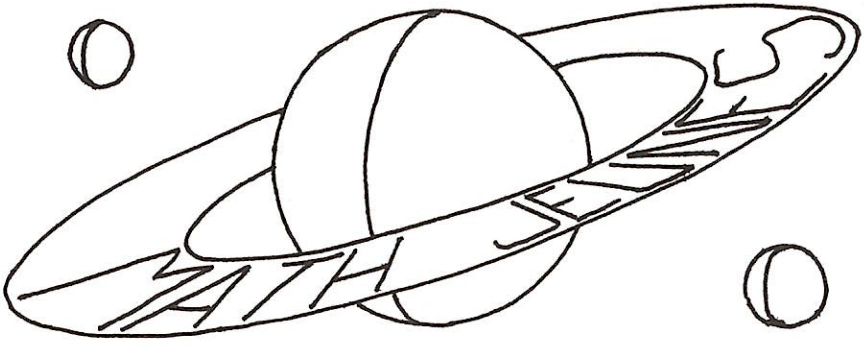
4e Année - N° 15 Mai-Juin 1982



En-tête de A. VIRICEL, de Nancy (France).

Chers amis,

Voici à nouveau une année scolaire qui se termine. Un dernier effort pour bien réussir les bilans de fin d'année et vive les vacances. Nous vous les souhaitons excellentes, vivifiantes et enrichissantes et espérons que vous resterez fièles à M-J. l'année prochaine.

Nous terminons cette année un peu déçus. Nous n'avons, en effet, reçu aucun article sur le thème que nous vous avions proposé. Nous enregistrons donc le manque d'intérêt que vous portez à ce genre d'activité.

En ce qui concerne le rallye-problèmes, nous avons heureusement plus de raisons de nous réjouir. Quelques-uns d'entre vous se sont montré fort persévérants et ont obtenus d'excellents résultats.

Ont été primés :

Pour les classes inférieures : sur un total possible de 128 points

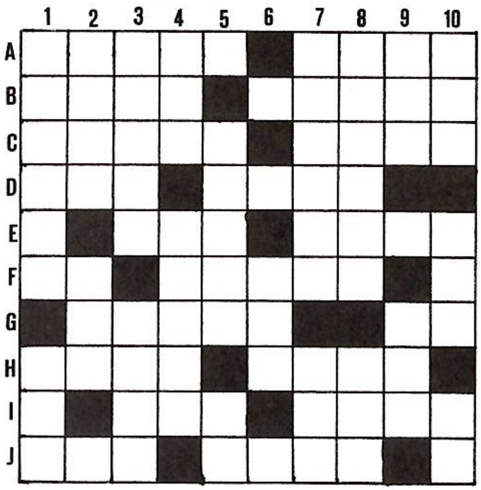
avec	104	GODIN Florent, classe de 3e, Inst. Notre-Dame de la Paix, à Schaerbeek
	64	WAGENAAR Pierre, classe de 3e, Petit Séminaire de Floreffe.
	59	BARTHOLOME Emmanuel, classe de 2e, Athénée Royal de Athus.

Pour les classes supérieures : sur un total de 100 points

avec	100	DEHOMBREUX Pierre, 4è L-M, Institut St Ferdinand, Jemappes
	93	BIANCHI Jean-Pierre, 5è L-M. Collège St Louis, Liège
	86	La classe de 5è L-M., Athénée Royal de Koekelberg
	73	D'OULTREMONT Gilles, 6è Sc.A Collège St Michel, Bruxelles
	71	DEBLIQUY Pierre-Yves, 6è Sc.A Collège St Michel, Bruxelles
	71	BALLANT Denis, Sc. spéciale, Collège St Stanislas, Mons
	70	KNUTS François Gabriel, 5è Sc. B Petit Sém. Floreffe
	63	ROME Jean-Luc, Collège St Barthelemy, Liège
	56	GRISON Laurent 6 Sc B, Collège St Henri Comines
	55	HERVE Constant, 6e, I.E.T.E. Rance
	53	STAFFE Christian, 5e, Petit Séminaire de Floreffe
	40	CASTI Anna Rita, 4e, Athénée Royal de Mons.

Nous adressons des félicitations toutes spéciales à Pierre DEHOMBREUX qui non content de répondre à tous les problèmes du rallye, nous a également fait parvenir des réponses à d'autres problèmes.

Nombres croisés



par PIERRE-YVES DEBLIQUY,
Collège St Michel,
Bruxelles.

HORIZONTALEMENT.

A: Carré parfait, la somme des chiffres = 19 - Nombre premier, le produit des chiffres = 42, la somme est un nombre premier. B: Cube parfait- La somme = 19, le produit = 180. C: Multiple de 32, la somme = 20 - La somme = 22, le produit est une puissance de 3, les deux derniers chiffres sont égaux. D: Carré parfait - Factorielle. E: Ils sont, dans l'ordre, consécutifs - Trois des chiffres sont égaux, le produit = 24. F: Nombre premier - Carré parfait, la somme des chiffres = 4. G: Le produit est nul, la somme = 14. - Multiple de 8 dont la somme des chiffres est 9. H:La somme = 21, le produit = 270. I: Nombre premier - La somme = 12, le premier chiffre vaut la somme du second et du quatrième. J: Nombre premier - Cube du produit de deux nombres premiers.

VERTICALEMENT.

1: Les trois premiers chiffres sont consécutifs, les trois derniers également - Carré parfait. 2: Cube parfait - Formé de multiples du premier. 3. Ce nombre est formé de deux chiffres écrits en alternance - Le produit = 20, la somme = 12. 4: En inversant les deux derniers chiffres, on obtient un carré - Voir 3. 5: Symétrique par rapport au chiffre du milieu - Nombre premier. 6: Racine carrée de F . 7: Trois chiffres identiques - Nombre premier + 1 - Consécutifs décroissants. 8: C_n^{12} - Racine carrée de A. 9: Nombre premier - Multiple de 9, le produit est nul. 10: Puissance de 3 - Trois multiples du deuxième - Nombre premier.

CAR - MATH L'art pour l'art

J-P DECLERCQ, rue de Ten Brielen, 124, - 7780 - COMINES.

Une lectrice de la région de Marche vient de me soumettre une question très pertinente ... j'en résume la substance : " Est-il possible de poursuivre des études supérieures en mathématique où l'on ne trouve pas, dans la grille-horaire, des cours de sciences ? "

La correspondante précise qu'elle ne veut faire ni une licence en math, ni en économie et souhaite, pour faire face à une éventuelle impossibilité, être renseignée sur des cours de sciences qui se donneraient les week-ends.

Comme la question peut concerner plus de monde, je tenterai d'y donner quelques éléments de réponse par l'intermédiaire de notre revue.

Tout d'abord, permettez-moi d'exposer mon point de vue personnel : je crois que vouloir faire de la mathématique purement et simplement, c'est vivre à côté du monde ... un peu à la manière des moniales ou des moines contemplatifs : je ne dénigre pas leur présence priante et le rayonnement spirituel de leur vie mais je crois qu'il faut être conscient, en suivant une telle vocation, qu'elle demande une ascèse et un renoncement hors du commun. De même, si l'on souhaite faire de la mathématique pour elle-même, sans vouloir se pencher sur des applications concrètes, on se destine à une carrière, certes très enrichissante, mais qui demande des forces de réflexion et d'intériorisation exceptionnelles : car, si l'on désire rejeter les supports concrets, il ne reste plus que la logique pure et abstraite.

Par ailleurs, le problème des débouchés se posera certainement de façon cuisante pour quelqu'un qui se serait spécialisé uniquement dans la mathématique pure.

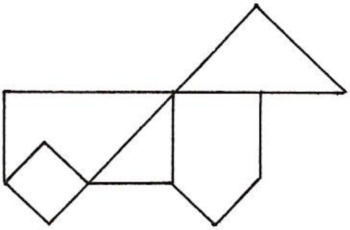
Cet avis personnel étant émis, je me dois de communiquer les quelques (très pauvres) données objectives dont je dispose.

1°) A priori, je ne vois que la carrière d'analyste qui puisse répondre à une telle aspiration.

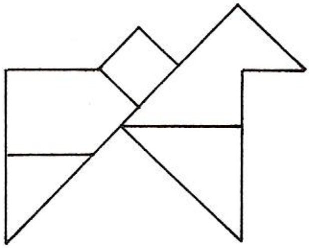
2°) En ce qui concerne le rattrapage en sciences, il existe un cours de vacances pour la chimie organisé par DIOCLES du 1/8 au 12/8 à Courtrai - le prix du séjour est de 11 950 frs - tout compris sauf les frais de déplacement. Pour plus d'information, veuillez vous adresser à DIOCLES, 't Hooghe, 110b - 8500 - KORTRIJK. ... l'enseignement y est dispensé en français.

Vu la pauvreté des informations dont je dispose actuellement, je lance un appel général à tous les lecteurs pour qu'ils m'aident dans mes recherches ... Si vous avez des tuyaux, soyez assez aimables pour m'en faire part . D'avance, un grand merci.

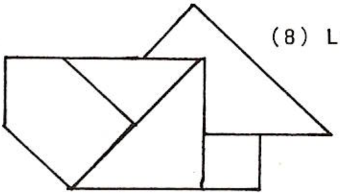
Penta-Puzzle



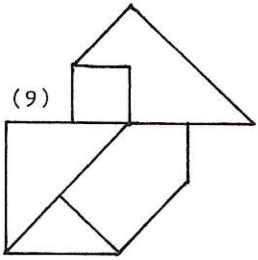
Le basset (6)

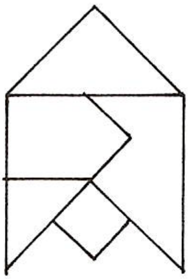


Le dromadaire (7)

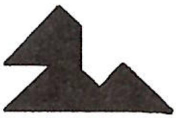


(8) Les canards (9)

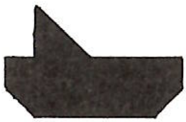




La maison
sur
pilotis
(10)



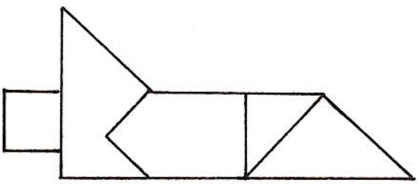
Le petit chien (12)



Le bateau (13)

Voici les solutions des penta-puzzles proposés dans Math-Jeunes 14. Pour les nouveaux énoncés, l'échelle n'est pas respectée.

Les énoncés sont de De Jesus Sanchez de l'Ecole Européenne de Mol.

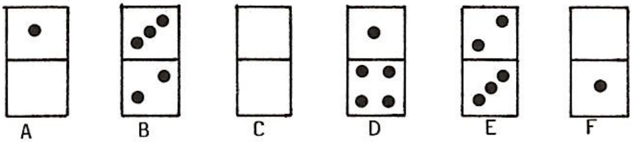


Le jet (11)

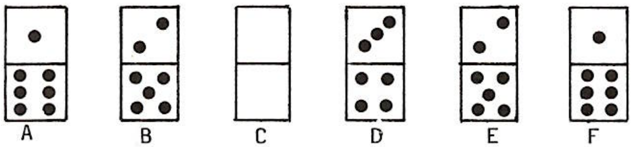
IDÉE : J. MIEWIS

Jouez aux dominos et testez votre esprit logique .

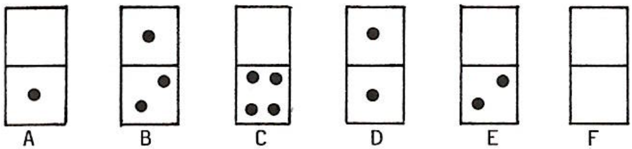
Dans chacune des séries, il y a un lien logique entre les dominos A,B,C,D,E,F. A vous de le découvrir.
Quels sont les points à inscrire ...



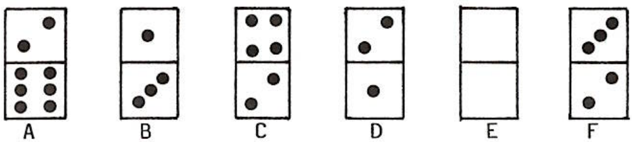
dans le domino C ?



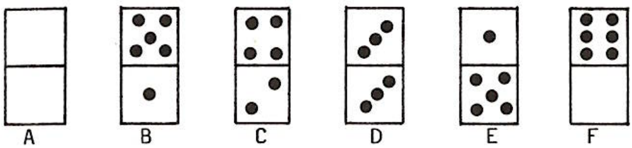
dans le domino C ?



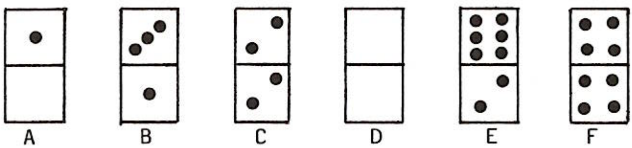
dans le domino F ?



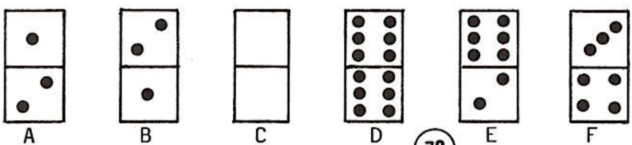
dans le domino E ?



dans le domino A ?



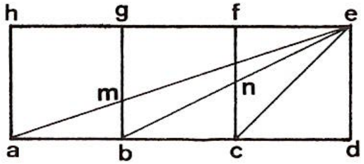
dans le domino D ?

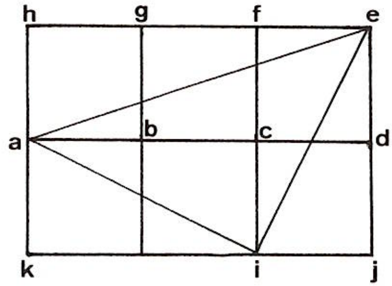


dans le domino C ?

Solution des problèmes

R50 Les nombreuses démonstrations reçues se rangent en deux groupes : les géométriques et les trigonométriques.





Le schéma de gauche va nous permettre d'exposer la démonstration d'Emmanuel BARTHOLOME, 2eme rénovée à l'Athénée Royal d'Athus.

Les triangles abm et ade étant semblables, $[b,m] = \frac{1}{3}[a,b]$ et $\operatorname{tg} e\hat{a}d = \frac{1}{3}$. De même, les triangles bnc et bed étant semblables, $[c,n] = \frac{1}{2}[b,c]$ et $\operatorname{tg} e\hat{b}d = \frac{1}{2}$. On calcule

$$\operatorname{tg}(e\hat{a}d + e\hat{b}d) = \frac{\operatorname{tg} e\hat{a}d + \operatorname{tg} e\hat{b}d}{1 - \operatorname{tg} e\hat{a}d \operatorname{tg} e\hat{b}d} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

En conséquence, $e\hat{a}d + e\hat{b}d = 45°$, ce qui est aussi le cas de $e\hat{c}d$. (Diagonale d'un carré).

La démonstration géométrique de Pierre DEHOMBREUX, 41m à l'Institut St Ferdinand de Jemappes est illustrée par le dessin de droite.

Le triangle aci est isométrique au triangle ebd : la question est ainsi ramenée au calcul de l'angle $e\hat{a}i$! les triangles aci et eij étant isométriques, $e\hat{i}j = i\hat{a}k$, $a\hat{i}k + e\hat{i}j = 90°$, et le triangle aei est isocèle rectangle ; ce qui implique que $e\hat{a}i = 45°$.

Signalons également une démonstration analytique de Jean-Luc ROME, 6scA, Collège Saint-Barthélémy à Liège.

R51 Nous avons reçu énormément de réponses à cette question, mais peu de solutions raisonnées ! Voici celle de Pierre WAGENAAR, 3eme rénovée au Séminaire de Floreffe.

Si n est composé de :	1 chiffre	2 chiffres	3 chiffres.
alors n^3 est composé de :	1 à 3 ch.	4 à 6 ch.	7 à 9 ch.
et n^4 est composé de :	1 à 4 ch.	5 à 7 ch.	9 à 12 ch.

ainsi n a deux chiffres, n^3 en a 4 et n^4 en a 6.

La racine cubique du plus petit nombre de 4 chiffres = 10 et celle du plus grand nombre de 4 chiffres ≃ 21,5 : ainsi

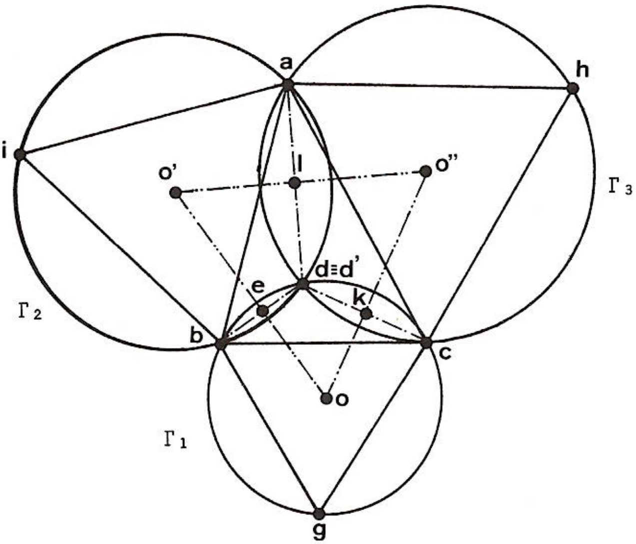
$$10 < n < 21$$

La racine quatrième du plus petit nombre de 6 chiffres ≃ 17.7 et celle du plus grand nombre de 6 chiffres ≃ 31,6 : ainsi

$$18 < n < 31$$

Quatre candidats nous restent : 18,19,20 et 21 . Mais les puissances successives de nombres terminés par 0 ou 1 sont toujours terminées par 0 ou 1. Il reste à essayer 18 et 19. Comme $19^4 = 130321$ comprend deux chiffres 3 , la solution est $n = 18$, $n^3 = 5832$ et $n^4 = 104976$

R54



Nous empruntons cette première démonstration géométrique à Denis BALLANT du Collège St Stanislas de Mons.

Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux bcg, iab et ach.

Considérons Γ_1 et Γ_2 ainsi que oo' la droite des centres des 2 cercles. Les deux cercles se coupent en deux points b et d. bd est l'axe radical des 2 cercles et est par conséquent orthogonal à oo'.

$$bd \perp oo' \qquad (1)$$

Traçons les droites ad et dc. Dans Γ_1, $\hat{g} = 60°$ et $\hat{g}$ est un angle inscit qui délimite sur Γ_1 l'arc $\overset{\frown}{bdc}$. D'autre part, l'angle inscrit $\hat{bdc}$ délimite l'arc $\overset{\frown}{bgc}$: $\hat{bdc}$ et $\hat{g}$ sont supplémentaires : $\underline{\underline{\hat{edk} = \hat{bdc} = 120°}}$ *(2)*

De même, dans Γ_2, on calcule $\hat{adb} = 120°$ et dans Γ_3, $\hat{adc} = 120°$

Considérons Γ_2 et Γ_3 ainsi que o'o" leur droite des centres. Les deux cercles se coupent en d' et a. Montrons que d' = d, c'est-à-dire que les 3 cercles se coupent en un point d.

$\hat{ad'c}$ et $\hat{ahc}$ sont des angles inscrits supplémentaires :

$$\hat{ad'c} = 120°$$

Le lieu des points formant un angle de 120° avec a et c est l'arc $\overset{\frown}{ad'c}$ de Γ_3. Cet arc coupe Γ_2 en d'. d' est donc <u>le seul</u> point de Γ_2 tel que $\hat{ad'c} = 120°$.

$d \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$: dès lors ad est l'axe radical des cercles

Γ_2 et Γ_3 : $\underline{\underline{ad \perp o'o''}}$ *(3)*

de même, dc est l'axe radical des cercles

Γ_1 et Γ_3 : $\underline{\underline{dc \perp oo''}}$ *(4)*

Ainsi $\hat{e} = \hat{k} = 90°$ et $\hat{edk} = 120°$ impliquent que $\hat{eok} = 60°$.

$\hat{e} = \hat{l} = 90°$ et $\hat{lde} = 120°$ impliquent que $\hat{eo'l} = 60°$.

$\hat{lo''k}$ vaut bien sûr 60° et <u>le triangle est équilatéral</u>.

Miguel SEBASTIAN, Pascal WAUTERS, Michel CORNELIS et Philippe DE WAEL de la 51m de l'Athénée Royal de Koekelberg, en plus d'une démonstration géométrique, nous ont fait parvenir cette démonstration trigonométrique.

Dans le triangle abc

$$|ab|^2 + |ac|^2 - |bc|^2 = 2\ |ab|\ |ac| \cos \hat{bac} \qquad (1)$$

Dans le triangle gah

$$|gh|^2 = |ag|^2 + |ah|^2 - 2\ |ag|\ |ah| \cos \hat{gac} \qquad (2)$$

D'une part, $\hat{gac} = \hat{gab} + \hat{bac} + \hat{cah} = 30° + \hat{bac} + 30° = 60° + \hat{bac}$

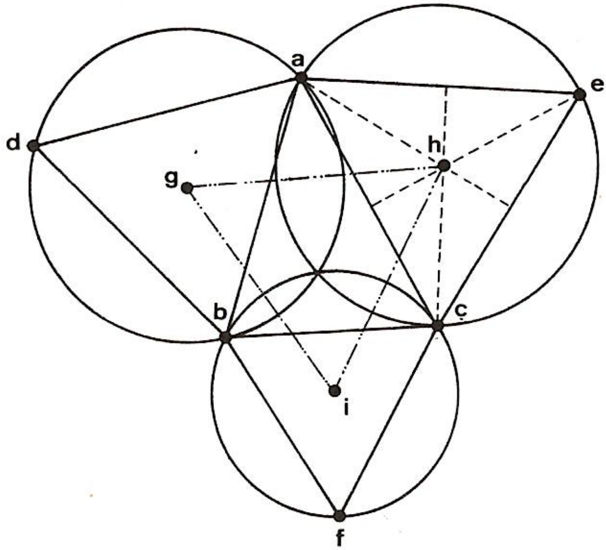
D'autre part : $|ah| = \frac{2}{3}\ |am| = \frac{2}{3}\ |ac| \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}\ |ac|$

Pour la même raison, $|ag| = \frac{\sqrt{3}}{3}\ |ab|$

(2) devient :

$$|gh|^2 = \frac{1}{3}\ |ab|^2 + \frac{1}{3}\ |ac|^2 - \frac{2}{3}\ |ab|\ |ac|\ (\cos \hat{bac} \cos 60° - \sin \hat{bac} \sin 60°\ )$$

$$3\ |gh|^2 = |ab|^2 + |ac|^2 - \frac{1}{2}\ (2\ |ab|\ |ac| \cos \hat{bac}) + 2\sqrt{3}\ \frac{|ab|\ |ac| \sin \hat{bac}}{2}$$



En tenant compte du résultat (1) et de la formule de l'aire de la surface (S) du triangle bac, on peut écrire :

$$3\,|gh|^2 = |ab|^2 + |ac|^2 - \frac{1}{2}\left(|ab|^2 + |ac|^2 - |bc|^2\right) + 2\sqrt{3}\,S$$

$$3\,|gh|^2 = \frac{1}{2}\left(|ab|^2 + |ac|^2 + |bc|^2\right) + 2\sqrt{3}\,S$$

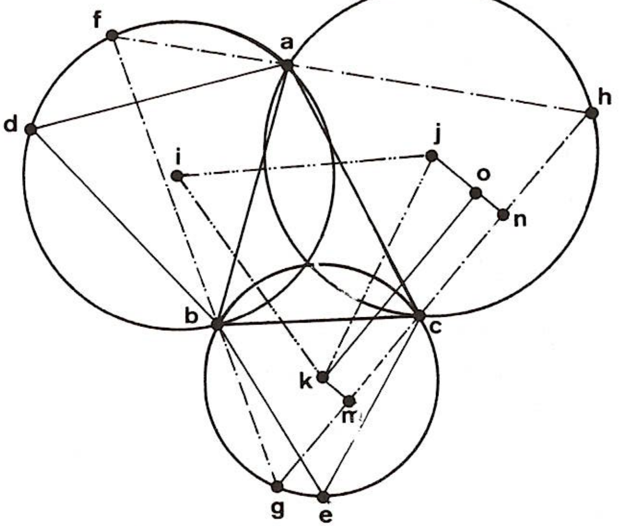
$$|gh|^2 = \frac{1}{6}\left(|ab|^2 + |ac|^2 + |bc|^2\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,S$$

Il est évident qu'un calcul analogue donnerait la même valeur pour $|hi|^2$ et $|gi|^2$. Le triangle est bien équilatéral.

On nous a par ailleurs signalé une très originale démonstration de ce vieux théorème : elle a été proposée par R. HONSBERGER, professeur à l'Université de Waterloo (Canada.) La voici dans sa merveilleuse simplicité :

l'angle $\hat{d}$ vaut 60°: si f est un point quelconque sur l'arc $\overset{\frown}{adb}$, $b\hat{f}a$ vaut aussi 60°. On trace fb qui recoupe le cercle de centre k en g. $b\hat{g}c$ vaut 60° car il intercepte le même arc que $b\hat{e}c$. Les droites gc et fa se coupent en un point h formant un triangle équilatéral. Puisque $a\hat{h}c$ = 60°, h appartient au cercle de centre j (lieu des points d'où le segment ac est vu sous un angle de 60°).

On projette j en n et k en m sur gh : ko est // à mn.



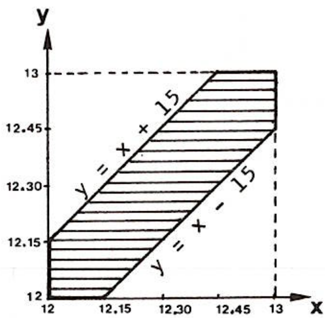
$|ko|$ vaut la moitié de $|gh|$ (car $|gm| = |mc|$ et $|cn| = |nh|$)

$|ko|$, côté du triangle rectangle est inférieur à $|kj|$, hypoténuse de celui-ci. Lorsque g se déplace sur le cercle de centre k, le plus grand des triangles équilatéraux de type fgh sera obtenu lorsque gh sera // à kj (c'est-à-dire lorsque le triangle kjo disparait !).

Mais dans ce cas-limite, le triangle fgh est toujours équilatéral, ses côtés sont toujours égaux et ils ont le même maximum qui vaut le double de kj, de ki ou de ij. Ainsi ijk est bien équilatéral !

R55

Voici la solution de Jean-Luc ROME, 6ScA, Collège St Barthélémy à Liège.



Si l'un des amis arrive au temps x, et l'autre au temps y, ils se rencontreront si

$$| x - y | \leqslant 15$$

ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} y \leqslant x + 15 \\ y \geqslant x - 15 \end{cases}$$

Le N.C.P. se représente par

$\{(x,y) | 12 \leqslant x \leqslant 13 \text{ et } 12 \leqslant y \leqslant 13\}$

Si l'unité de mesure est la minute, la "surface" vaut 3600 (min^2).

Le N.C.F. est représenté par la surface hachurée. Comme les deux triangles non hachurés forment un carré dont la surface est de 45^2 (min^2); le N.C.F. vaut 3600 - 2025 = 1575 (min^2).

La probabilité de rencontre $= \frac{N.C.F.}{N.C.P.} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16} \simeq 0,43$

R56 Thierry BRASSEUR, 6lm à l'Athénée Royal de Hannut nous indique comment réaliser la *Victoria Magna*.

41 progressions arithmétiques.

(2,3,4)	(12,16,20)	(12,20,28)	(4,20,36)
(3,4,5)	(8,12,16)	(20,28,36)	(5,25,45)
(4,5,6)	(2,7,12)	(7,16,25)	(16,36,56)
(5,6,7)	(15,20,25)	(5,15,25)	(7,28,49)
(6,7,8)	(20,25,30)	(4,16,28)	(20,42,64)
(7,8,9)	(3,9,15)	(6,18,30)	(42,66,90)
(5,7,9)	(30,36,42)	(2,15,28)	(4,30,56)
(2,5,8)	(2,9,16)	(2,16,30)	(8,36,64)
(3,6,9)	(42,49,56)	(28,42,56)	(6,36,66)
(6,9,12)	(4,12,20)	(15,30,45)	(28,64,100)
(4,8,12)			

18 progressions géométriques.

(9,45,225)	(4,12,36)	(9,6,4)	(25,15,9)
(4,16,64)	(2,12,72)	(45,30,20)	(25,20,16)
(4,20,100)	(4,8,16)	(16,12,9)	(36,30,25)
(5,15,45)	(2,4,8)	(225,90,36)	(49,28,16)
(3,6,12)			

17 progressions harmoniques.

(2,3,6)	(3,5,15)	(90,120,72)	(9,16,72)
(4,3,6)	(5,9,45)	(7,12,42)	(12,15,20)
(4,6,12)	(5,8,20)	(8,15,120)	(25,45,225)
(4,7,28)	(6,8,12)	(9,15,45)	(15,20,30)
(45,36,30)			

R57 Rosario SALAMONE, lère Candi aux Facultés Polytechnique de Mons nous a fait parvenir la proposition suivante :

> La somme Σ des nombres de m chiffres différents pris parmi les n chiffres $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ vaut
>
> $\frac{(\text{1er terme + dernier terme})}{2}$. nombre de termes
>
> si et seulement si les $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ forment une suite arithmétique.

Quelle est la somme Σ des nombres de m chiffres différents pris parmi les n chiffres $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$?

Avec $0 \neq t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$, il y a A_m^n nombres.

- Parmi ces A_m^n nombres, A_{m-1}^{n-1} se terminent par t_1

  A_{m-1}^{n-1} se terminent par t_2

  ...

- Parmi ces A_m^n nombres, A_{m-1}^{n-1} avant-dernières places sont occupées par t_1

  ...

- ...

Donc : Somme des unités : $A_{m-1}^{n-1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$

+ Somme des dizaines: $A_{m-1}^{n-1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot 10$

+ Somme des centaines: $A_{m-1}^{n-1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot 100$

+ ...

+ Somme des "10^{m-1}" : $A_{m-1}^{n-1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot 10^{m-1}$

$$\Sigma = A_{m-1}^{n-1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot (10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1)$$

Si les $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ sont en Suites Arithmétiques, on a

$$t_1 = t_1$$
$$t_2 = t_1 + r$$
$$\ldots$$
$$t_n = t_1 + n.r$$

où r est la raison de la suite.

On sait que : $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = \dfrac{t_1 + t_n}{2} \cdot n$

Ainsi,

$$\Sigma = A_{m-1}^{n-1} \cdot \frac{t_1 + t_n}{2} \cdot n \cdot (10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}.A_m^n.(10^{m-1}.t_1 + 10^{m-2}.t_1 + \ldots + 10.t_1 + t_1 + 10^{m-1}.t_n + 10^{m-2}.t_n + \ldots + 10.t_n + t_n)$$

car $A_{m-1}^{n-1} \cdot n = A_m^n$.

En remplaçant t_n par $t_1 + nr - r$, on trouve :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \, . \, A_m^n \, . \, (10^{m-1}.t_1 + 10^{m-2}.t_1 + \ldots + 10.t_1 + t_1 + 10^{m-1}.t_n$$

$$+ 10^{m-2}.(t_1 + nr - r) + \ldots + 10.(t_1 + nr - r) + t_1 + nr - r$$

$$= \frac{1}{2} \, . \, A_m^n \, . \, (10^{m-1}.t_1 + 10^{m-2}.t_1 + \ldots + 10.t_1 + t_1 + 10^{m-1}.t_n$$

$$+ 10^{m-2}.t_1 + 10^{m-2}.nr - 10^{m-2}.r \; \underline{\underline{- 10^{m-2}.\, r + 10^{m-2}.\, r}}$$

$$+ 10^{m-3}.t_1 + 10^{m-3}.nr - 10^{m-3}.r \; \underline{\underline{- 10^{m-3}.2r + 10^{m-3}.2r}}$$

$$+ \ldots$$

$$+ 10.t_1 \quad + 10.nr \quad - 10.r \quad \underline{\underline{- 10.(m-2)r + 10.(m-2)r}}$$

$$+ t_1 \quad + nr \quad - r \quad \underline{\underline{- (m-1)r \quad + (m-1)r}}$$

(Les termes soulignés sont nuls !)

$$\Sigma = \frac{1}{2} \, . \, A_m^n \, . \, (10^{m-1}.t_1 + (10^{m-2}.t_1 + 10^{m-2}.r) + \ldots$$

$$+ (10.t_1 + 10.(m-2)r) + (t_1 + (m-1)r) + 10^{m-1}.t_n$$

$$+ (10^{m-2}.t_1 + 10^{m-2}.nr - 10^{m-2}.r - 10^{m-2}.r)$$

$$+ (10^{m-3}.t_1 + 10^{m-3}.nr - 10^{m-3}.r - 10^{m-3}.2r)$$

$$+ \ldots$$

$$+ (10t_1 + 10.nr - 10.r - 10.(m-2)r)$$

$$+ (t_1 + nr - r - (m-1)r) \;)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \, . \, A_m^n \, . \, (10^{m-1}.t_1 + 10^{m-2}.(t_1 + r) + \ldots + 10.(t_1 +$$

$$(m-2)r) + (t_1 + (m-1)r)$$

$$+ 10^{m-1}.t_n + 10^{m-2}.(t_1 + (n-2)r) + 10^{m-3}.(t_1 + (n-3)r) + \ldots$$

$$+ 10.(t_1 + (n-m+1)r) + (t_1 + (n-m)r) \;)$$

Or $t_2 = t_1 + r$; $t_3 = t_1 + 2.r$; ... ; $t_n = t_1 + (n-1)r$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \, . \, A_m^n \, . \, (10^{m-1}.t_1 + 10^{m-2}.t_2 + \ldots + 10.t_{m-1} + t_m$$

$$+ 10^{m-1}.t_n + 10^{m-2}.t_{n-1} + \ldots + 10.t_{n-m+2} + t_{n-m+1} \;)$$

Et comme $10^{m-1}.t_1 + \ldots + t_m$ et $10^{m-1}.t_n + \ldots + t_{n-m+1}$ sont respectivement le plus petit et le plus grand des nombres que l'on peut écrire avec m chiffres choisis parmi les n $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ chiffres donnés, on peut déduire la thèse.

R58 Les cheminements les plus divers furent pris pour résoudre ce problème. Comme nous ne pouvons tous les écrire, voici les solutions :

```
1 0 8 9 7 0 9 | 1 2              9 8 6 3 0 4 | 1 3 2
1 0 8         |-----------       9 2 4       |--------
-------       | 9 0 8 0 9        -----       | 7 4 7 2
      9 7                          6 2 3
      9 6                          5 2 8
      -----                        -----
        1 0 9                        9 5 0
        1 0 8                        9 2 4
        -----                        -----
            1                          2 6 4
                                       2 6 4
                                       -----
                                           0
```

Nos chaleureuses félicitations à Pierre WAGENAAR, 3f, Séminaire de Floreffe, Christian STAFFE, 51m, Séminaire de Floreffe, Pierre DEHOMBREUX, 41m, Institut St Ferdinand, Jemappes, Florent GODIN, 1f, Institut Notre Dame de la Paix, Schaerbeeck, François-Gabriel KNUTS, Séminaire de Floreffe, Anna-Rita CASTI, 4e, Athénée Royal Jean d'Avesnes, Mons, Thierry BRASSEUR, 61m, Athénée Royal de Hannut, la classe de 4a du Collège Christ-Roi d'Ottignies, Vincent JACQUEMART de Carlsbourg, Jean-Pierre BIANCHI, 51m, Collège St Louis, Liège, Gilles d'OULTREMONT, 6Sca, St Michel, Bruxelles, Robert VERTENUEIL, 6, IPET de Nivelles, Emmanuel BARTHOLOME, 2e, Athénée Royal de Athus, la 6Sca de la Communauté Educative Jean 23 de Pesche, Denis BALLANT de St Stanislas, Mons, la 4a de Saint-Michel, Gosselies, Marc BOUTEFEU, 6e à l'IPET de Nivelles, Jean-Luc ROME, 6Sca, Collège St Barthélémy, Liège, la 51m de l'Athénée Royal de Koekelberg, Thierry HYPERSIEL, 5Sca, de l'Athénée Royal de Thuin, Laurent GRYSON,6e, Collège St Henry de Comines et Jacques BERNARD, 51m du Collège d'Erpent.

R59

$$(\text{COS})^2 + (\text{SIN})^2 = \text{UNITE}$$
$$(142)^2 + (235)^2 = 75389$$

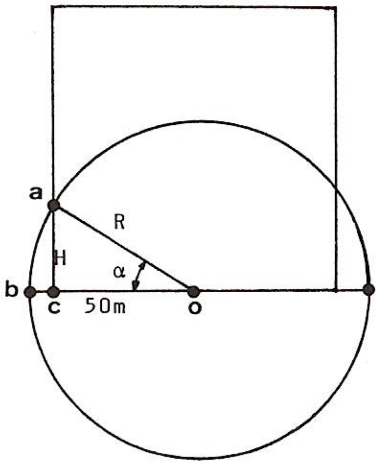
R60 Soit R la longueur de la corde qui retient la chèvre. Notre problème est de découvrir le lien entre ce R et la surface que la chèvre peut brouter et que l'on sait devoir être 5000 m^2.

La surface cherchée vaut bien sûr la surface du demi-cercle moins deux fois la valeur de la surface abc.

Surface abc = surface oab - surface aco.

Surface oab = $\frac{\alpha R^2}{2}$

Surface aco = $\frac{50\ H}{2}$



Le théorème de Pythagore nous permet de calculer H :

$$H - \sqrt{R^2 - 50^2}$$

D'autre part, tg $\alpha = \frac{H}{50}$

et donc $\alpha = \text{arctg}\ \frac{H}{50}$

$$\alpha = \text{arctg}\ \frac{\sqrt{R^2 - 50^2}}{50}$$

La surface"broutable" vaut :

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - 2\left(\frac{\alpha R^2}{2} - \frac{50}{2} H\right)$$

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \alpha R^2 + 50\sqrt{R^2 - 50^2}$$

et puisque S = 5000, nous obtenons la jolie équation :

$$\boxed{5000 = \frac{\pi R^2}{2} + 50\sqrt{R^2 - 50^2} - R^2\ \text{arctg}\ \frac{\sqrt{R^2 - 50^2}}{50}}$$

La méthode la plus simple pour résoudre ce type d'équation est de confier le travail à une calculatrice programmable pour approcher au mieux la valeur de R.

La technique est simple : partant d'une valeur de R certainement trop faible (50), on calculera la valeur de S et on la comparera à la valeur 5000. Lorsque S < 5000, on ajoutera une petite quantité à R (0,1) et on recommencera le calcul.

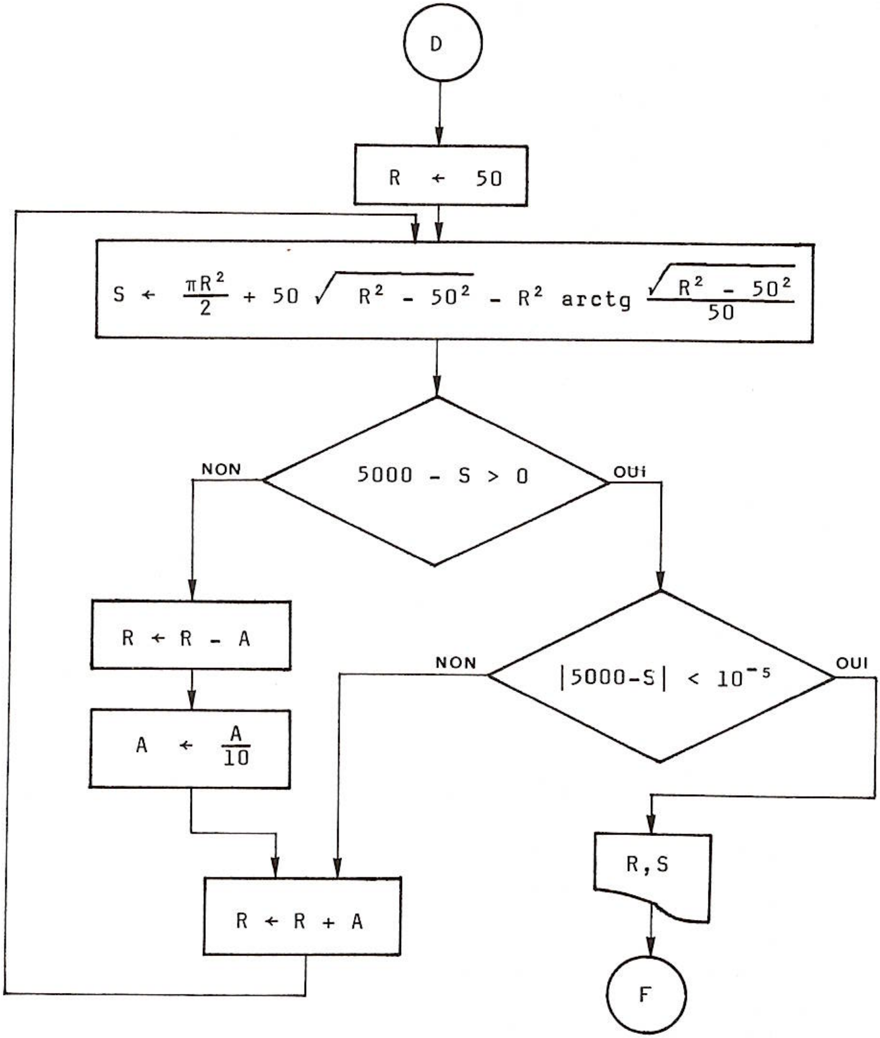
Au moment précis où S dépasse pour la première fois 5000, on diminuera R de 0,1 et on recommencera l'avance par saut de 0,01.

Le processus s'arrète lorsque l'erreur entre S et 5000 est inférieur à une borne fixée d'avance (1 unité demandée dans l'énoncé, mais notre programme sera arrêté lorsque l'erreur sera inférieure à 10^{-5}).

Le programme demandera 88 itérations pour rejoindre pour la première fois 5000, puis en 25 itérations fournira :

$$\boxed{R = 58{,}2822162}$$

ce qui correspond à une surface de 4999.999995
La réponse au problème posé est donc 58 m
Le programme est valable pour HP 67 - HP 97.



Contenu des mémoires :

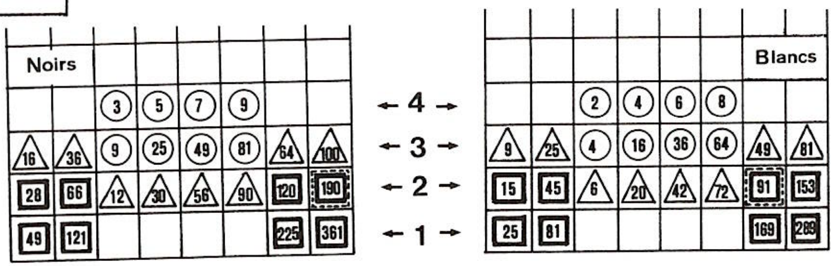
M1 : 50
M2 : R
M3 : R^2
M4 : S
M5 : $\sqrt{R^2 - 50^2}$
M6 : 5000
M7 : A

Initialisation :

A

```
01 LBL A
02 5
03 0
04 STO 1
05 STO 2
06 5
07 0
08 0
09 0
10 STO 6
11 .
12 1
13 STO 7
14 LBL 1
15 RCL 2
16 X²
17 STO 3
18 Pi
19 x
20 2
21 ÷
22 STO 4
23 RCL 3
24 RCL 1
25 X²
26 -
27 √x
28 STO 5
29 RCL 1
30 x
31 ST+4
32 RCL 5
33 RCL 1
34 ÷
35 TAN⁻¹
36 RCL 3
37 x
38 ST-4
39 0
40 RCL 6
41 RCL 4
42 -
43 X>Y?
44 GTO 2
45 RCL 7
46 ST-2
47 1
48 0
49 ST÷7
50 LBL 4
51 RCL 7
52 ST+2
53 GTO 1
54 LBL 2
55 RCL 6
56 RCL 4
57 -
58 ABS
59 .
60 0
61 0
62 0
63 0
64 0
65 1
66 X>Y?
67 GTO 3
68 GTO 4
69 LBL 3
70 RCL 2
71 PRT X
72 RCL 4
73 PRT X
74 RTN
```

R61



Philippe PETERS, 5eT.Q.Elec à l'IETE de Rance, la 6Sca de la Communauté Educative Jean 23 à Pesches, Marc BOUTEFEU, 6e à l'IPET de Nivelles et Laurent GRYSON, 6e au Collège St Henry de Comines nous ont apporté les éléments de réponse :

61.1 : les ronds de la ligne 3 sont les carrés des ronds de la ligne 4.

61.2 : Les triangles de la ligne 2 représentent les sommes des ronds des lignes 3 et 4.

61.3 : Si les triangles de la ligne 3 ont la valeur n ; si les cercles de la ligne 4 ont la valeur m et si les triangles de la ligne 2 ont la valeur p ; alors $n = (1 + 1/m).p$. (Ex: $81 = (1 + 1/8).\ 72$)

61.4 : Les carrés de la ligne 2 sont obtenus par l'addition des triangles correspondants des lignes 2 et 3.

61.5 : Si le nombre dans les ronds de la quatrième ligne est m, et si les carrés de la seconde ligne valent s, les nombres des carrés de la 1ère ligne se calculent par

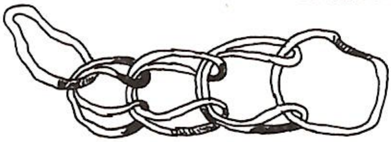
$\frac{2m + 1}{m + 1} \cdot s$. (Ex: $81 = \frac{2 \times 4 + 1}{4 + 1} \cdot 45$)

Signalons que les valeurs des pyramides sont :

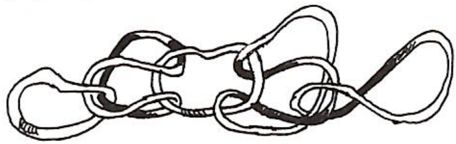
$$91 = 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 \quad \text{et}$$
$$190 = 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2$$

R62

Situation n° 1

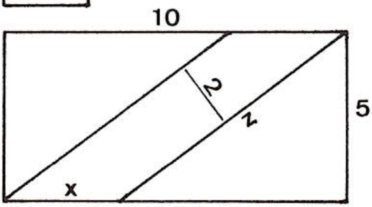


Situation n° 2



Situation n° 3

R63 La démonstration la plus rencontrée pour ce problème est sans conteste, l'écriture sous deux formes de la valeur de la surface totale :



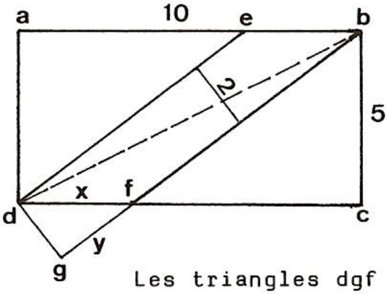
$$2.(\tfrac{1}{2}.5.(10 - x)) + 2.z = 50$$

avec $z = \sqrt{5^2 + (10 - x)^2}$

calculé par le théorème de Pythagore. L'équation irrationnelle se réduit à l'équation du second degré :

$$21\, x^2 + 80\, x - 500 = 0$$

dont la seule solution physiquement acceptable est 10/3.



Le second dessin illustre une démonstration plus géométrique :

$|db| = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125}$

$|gb| = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11$

Les triangles dgf et bcf sont semblables, ainsi :

$\frac{x}{11-y} = \frac{2}{5} = \frac{y}{10-x}$ d'où le sytème : $\begin{cases} 5x + 2y = 22 \\ 2x - 5y = 20 \end{cases}$

d'où l'on tire $x = \frac{10}{3}$ et la surface du parallélogramme est $\frac{10}{3}.5 = \frac{50}{3}$. Bravo à Denis BALLANT, St Stanislas, Mons, Pierre DEFUSTER, Collège St Michel de Gosselies, Jacqueline VANDENBERGHE, 5sca, Providence de Gosselies, Christian STAFFE,51m, de Floreffe, Anna-Rita CASTI, 4e, Athénée Royal Jean d'Avesnes à Mons, Vinciane BANDOUX, 5lm à l'Enfant Jésus de Nivelles, Pierre DEHOMBREUX, 4Lm, St Ferdinand à Jemappes, Sylvie TIBAUT, 5e, Athénée Royal Vauban à Charleroi, et François-Gabriel KNUTS du Séminaire de Floreffe.

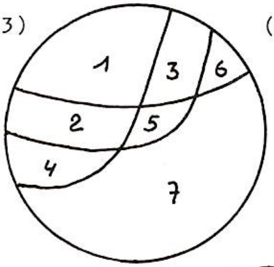
R64 Jean-Pierre BIANCHI, 5lm au Collège St Louis à Liège nous conseille de prendre 3 variables :

T : la capacité de la cuve (en litres).
t : le temps que mettrait Silène pour boire T seul (en heures).
v : la vitesse à laquelle Bacchus boit (en litres par heure).

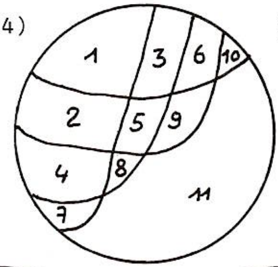
Nous savons que Bacchus boit pendant $\frac{3}{5}t$, donc il boit $\frac{3}{5}vt$ lit. et Silène boit $T - \frac{3}{5}vt$ litres, donc s'ils avaient commencé à boire ensemble, Bacchus aurait eu $\frac{2}{3}\left(\frac{5T - 3vt}{5}\right)$ litres (1).
Dans ce cas Silène aurait bu $\left(\frac{10T - 6vt}{15v}\right)\frac{T}{t}$ (2).
De l'équation (1) + (2) = T, on déduit que $3vt = 2T$. (3)
Pour vider la cuve ensemble l'un après l'autre, il leur a fallu $\frac{3}{5}t + \left(\frac{5T - 3vt}{5}\right)\frac{t}{T} = \frac{6}{5}t$ (grâce à (3).)
S'ils avaient commencé ensemble, ils auraient mis $\frac{10T - 6vt}{15v}$ h. $= \frac{2T}{5v}$ h. L'énoncé nous dit que $\frac{6t}{5} - 6 = \frac{2T}{5v}$ d'où $\frac{T}{v} = 15$ heures.
Donc Bacchus mettrait 15 heures pour boire seul ; quant à Silène, il en mettrait 10 puisque (3) $\rightarrow t = \frac{2T}{3v}$.

R65 Mademoiselle Martine URBAIN de Colfontaine nous a prouvé qu'il était plus facile de travailler avec des droites "non tendues" ! Voici ses schémas :

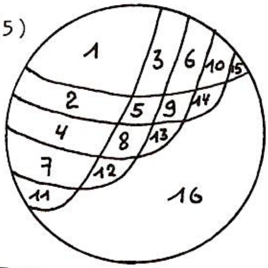
(3)



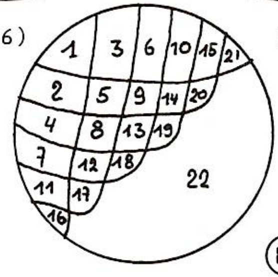
(4)



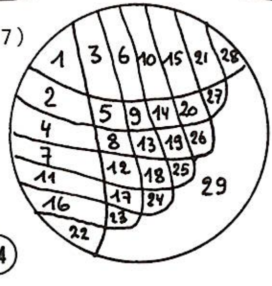
(5)



(6)



(7)



3 cordes donnent $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ régions.
4 cordes donnent $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ régions.
...
n cordes donnent $1 + 1 + 2 + \ldots + n-1 + n$ régions.

La formule des sommes dans les suites arithmétiques nous donne $1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{1}{2} n\,(n+1)$.

Et 10 cordes donnent $1 + \frac{1}{2} 10 \cdot 11 = 1 + 55 = 56$ régions.

R66 Puisque ce nombre est tout simplement $10^{21} + 1^{21}$,

donc suivant l'humeur $10^{3^7} + 1^7$ ou $10^{7^3} + 1^3$,

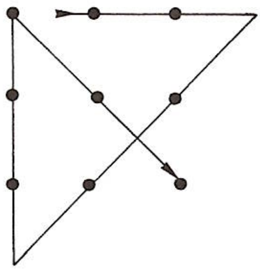
il est divisible par $10^3 + 1$ (ou encore $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$)

et par $10^7 + 1$ (ou encore $10\,000\,001 = 11 \cdot 909091$)

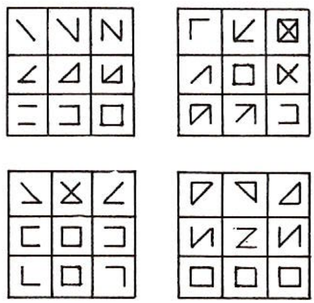
Donc notre nombre $= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 909091 \cdot N$. On calcule que N vaut 1 098 900 989 011 ou encore $7 \cdot 127 \cdot 2689 \cdot 459691$.

$$\boxed{10^{21} + 1 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 127 \cdot 2689 \cdot 459691 \cdot 909091}$$

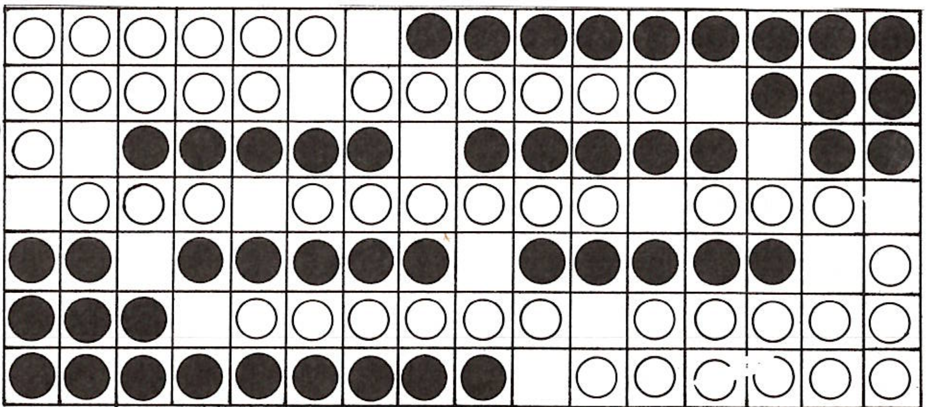
R67



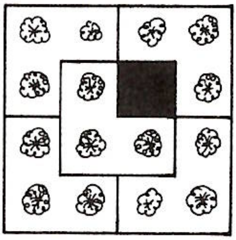
R68



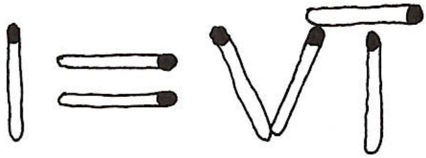
R69



R70



R71



R72

Le nombre formé par les 4 chiffres de la plaque peut s'écrire $\overline{aabb}$ = 1000.a + 100.a + 10.b + b
= 1100.a + 11.b = 11.(100.a + b)

Il est divisible par 11 ; or c'est un carré parfait, donc il est divisible par 11^2 : cela signifie que 100.a + b doit être divisible par 11.

Mais 100.a + b = 99.a + (a + b) et ce nombre est multiple de 11 si et seulement si a + b est multiple de 11. Les valeurs possibles de a et de b sont données par le tableau

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2

Comme de plus un carré parfait ne se termine jamais ni par 2, ni par 3, ni par 7, ni par 8, il reste les nombres

2299 , 5566 , 6655 , 7744

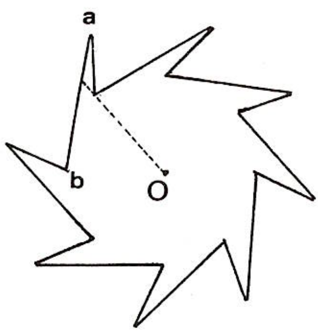
Le seul carré parfait est 7744 (qui est le carré de 88).

D'autre part, W est la 23eme lettre de l'alphabet, on peut donc penser que les deux lettres consécutives sont B et C (deuxième et troisième lettre de l'alphabet !)

R73

Bravo à F. GODIN, 14 ans de l'INDP de Bruxelles et à Hervé CONSTANT de 6eTQ Electricité de l'Institut Technique de l'état à Rance d'avoir pensé à une lame de scie circulaire !

Le côté ab n'est en effet pas entièrement visible depuis le centre O.



R74

Le nombre comportera 11 chiffres : 111 - 100.
Il s'agit de <u>99 999 785 960</u> .

R75

Voici la démonstration par récurrence de Denis BALLANT, Collège St Stanislas à Mons.

Si n = 1 , $5^{2n} + 3.2^{5n-2} = 5^2 + 3.2^3 = 25 + 24 = 49 = \mathbf{M}7$

Admettons maintenant que $5^{2n} + 3.2^{5n-2} = \mathbf{M}7$ et montrons que $5^{2(n+1)} + 3.2^{5(n+1)-2} = \mathbf{M}7$.

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} + 3.2^{5(n+1)-2} &= 5^{2n+2} + 3.2^{5n+3} \\ &= 5^{2n}.5^2 + 3.2^{5n-2}.2^5 \\ &= 5^2\,(5^{2n} + 3.2^{5n-2}) + (2^5-5^2).3.2^{5n-2} \\ &= 5^2.\mathbf{M}7 + 7.3.2^{5n-2} \end{aligned}$$

Voici une démonstration plus spécialement basée sur les congruences :

$5^2 = 25 = 4 \text{ mod } 7$ donc $25^n = 4^n \text{ mod } 7$

de même:

$2^5 = 32 = 4 \text{ mod } 7$ donc $32^n = 4^n \text{ mod } 7$

ainsi :

$5^{2n} - 2^{5n} = 0 \text{ mod } 7$ (ce qui signifie que 5^{2n} et 2^{5n} admettent le même reste de division par 7.)

Reprenons le nombre $5^{2n} + 3.2^{5n-2}$ et écrivons :

$$\begin{aligned} 5^{2n} + 3.2^{5n-2} &= 5^{2n} + (\,7 - 4\,).2^{5n-2} \\ &= 5^{2n} + 7.2^{5n-2} - 4.2^{5n-2} \\ &= 5^{2n} + 7.2^{5n-2} - 2^2.2^{5n-2} \\ &= 5^{2n} + 7.2^{5n-2} - 2^{5n} \end{aligned}$$

Or $5^{2n} - 2^{5n} = 0 \text{ mod } 7$ et $7.2^{2n-5} = 0 \text{ mod } 7$

R76

On calcule facilement que Josèphe se trouvait en trente-unième place et son compagnon à la seizième !

◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎◎

A propos d'un anniversaire

On dit d'un réel qu'il est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers : ainsi 2,5 est algébrique puisque racine du polynôme $P(x) = 2x - 5$ de même $\sqrt{2}$ est algébrique puisque racine du polynôme $Q(x) = x^2 - 2$. Dans le cas contraire, le nombre est *transcendant*.

On s'aperçoit rapidement que la forme décimale d'un nombre transcendant doit être infinie et apériodique. Cela revient à dire que les décimales d'un nombre transcendant sont aléatoires. Existe-t-il de tels nombres ?

C'est en 1844 que le français LIOUVILLE prouva l'existence de transcendants. En 1874, le russe CANTOR démontra que "la plupart" des nombres réels sont transcendants (en fait il démontra que l'ensemble des réels algébriques est dénombrable). Ainsi un réel a une "forte probabilité" d'être transcendant ; une toute autre affaire est de démontrer qu'un nombre donné est transcendant.

En 1873, le français HERMITE va prouver qu'un nombre donné est transcendant : c'est le nombre e employé en analyse en rapport avec une fonction logarithmique un peu spéciale. (Vous le rencontrerez dans le cours de rhéto !)

Il y a maintenant exactement un siècle, en 1882, l' l'allemand CARL LOUIS FERDINAND LINDEMANN démontrait que le fameux nombre π exprimant le rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre était lui aussi transcendant. Cette démonstration prouvait également l'impossibilité totale de "construire" géométriquement ce nombre avec une latte et un compas : le problème de la quadrature du cercle était définitivement réglé : c'était là chose impossible !

Avec e et π, on sait que ln 2, que e^{π}, que $2^{\sqrt[3]{2}}$ sont transcendants et à ce jour c'est à peu près tout ! On ne sait toujours pas si $e+\pi$ est transcendant ou non !

MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Francaise. (S.B.P.M.e.f. Association sans but lucratif)

Editeur responsable:	*Rédacteur (et courrier):*	*Abonnement 82-83*
W. VANHAMME	*J. MIEWIS*	*(5 numéros)*
Rue Firmin Martin, 2	*Avenue de Peville, 150,*	*Benelux: 60FB*
1160 - Bruxelles	*4030 - Liège-Grivegnée*	*Etranger: 120FB*

Les abonnements sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur. Abonnement à verser au compte 001-0828109-96 de Math-Jeunes, chemin des Fontaines, 14bis, 7460 - CASTEAU