4e Année - N° 17 Novembre-Décembre 1982

Rallye Problèmes

Contrairement aux années précédentes, il n'y aura qu'un seul classement. On tiendra compte lors de la correction et de l'attribution des points de l'âge des participants. C'est pourquoi les problèmes qui entrent en ligne de compte (ceux marqués d'une astérisque) pour le rallye ne précisent plus le nombre de points attribués.

Les énoncés des problèmes du rallye paraîtront (ou ont paru) dans les numéros 16, 17, 18 et 19. Les solutions aux problèmes des numéros 16 et 17 sont attendus pour fin février. Les autres dates seront fixées ultérieurement. Envoyez dès maintenant les réponses aux problèmes que vous avez déjà résolus en indiquant clairement

1 Votre nom
2 Votre adresse personnelle
3 Le nom de l'école que vous fréquentez (avec indication de la ville)
4 La classe à laquelle vous appartenez.

Challenge Programmation

Consultez le formulaire accompagnant votre MATH-JEUNES n° 17 . Ce formulaire, complètement rempli, devra accompagner l'envoi de votre programme. Pour les thèmes à programmer, consultez, si vous ne l'avez déjà fait la première page de M-J n° 16.

Auto-collants MATH-JEUNES

Cher ami, abonné à MATH-JEUNES, l'en-tête de ce numéro reproduit en partie l'auto-collant qui est joint à l'envoi de ce numéro. Faites bon usage de ce gadget pour mieux faire connaître votre petite revue dans votre entourage.

En-têtes MATH-JEUNES

Nous arrivons au bout de notre réserve. Dessinateurs, nous comptons sur vous.

Ecoutons les trois interlocuteurs lors d'une discussion sur le problème de la chute libre :

Salviati : Je doute fort qu'Aristote ait jamais vérifié par expérience que deux pierres, l'une étant dix fois plus lourde que l'autre, lâchées au même instant d'une hauteur de cent brasses, tomberaient à des vitesses si inégales qu'au moment où l'une toucherait le sol, l'autre n'aurait encore parcouru que dix brasses.

Simplicio : Ses propres paroles nous montrent pourtant qu'il l'a expérimenté, puisqu'il dit : *Nous voyons que le plus pesant* ... Ce *nous voyons* fait allusion à une expérience.

Sagredo : Mais, moi, signor Simplicio, je vous assure que j'ai l'épreuve qu'un boulet de canon de cent, de deux cents livres, ou plus encore, n'aura pas pris l'avance d'une palme, à son arrivée au terrain, sur une balle de mousquet d'une demi-livre, la hauteur de chute fût-elle de deux cents brasses.

Salviati : Mais, sans autre expérience, on prouvera clairement, par une démonstration courte et concluante, qu'il n'est pas vrai qu'un mobile plus lourd se meuve plus vite qu'un mobile moins lourd, pourvu que tous deux soient de même matière, comme ceux, en somme, dont parle Aristote. Aussi vous demanderai-je, signor Simplicio, si vous admettez qu'à tous corps grave, en chute libre, corresponde une vitesse déterminée, telle qu'on ne puisse l'augmenter ou la réduire sinon par l'effet de quelque violence ou en lui opposant quelque résistance.

Simplicio : Il n'est pas douteux qu'un même mobile dans un même milieu ait, par nature, une vitesse réglée et déterminée qui ne pourra être accrue sinon par un *impetus* nouveau, ni diminuée sinon par un retard dû à quelque obstacle.

Salviati : Si donc nous avions deux mobiles dont les vitesses naturelles seraient inégales et si nous les joignons ensemble, il est manifeste que, dans une certaine mesure, le plus rapide serait retardé par le plus lent et le plus lent accéléré par le plus rapide. N'êtes-vous pas de mon avis ?

Simplicio : Je pense que les choses se passeraient ainsi, très certainement.

Salviati : Mais s'il en est ainsi, et s'il est vrai, d'autre part, qu'une grosse pierre se meut à une vitesse disons de huit degrés, et une pierre petite à une vitesse de quatre degrés, leur composé devra se mouvoir à une vitesse inférieure à huit degrés, mais les deux pierres conjointes en font une plus grosse que la première qui se mouvait à huit degrés de vitesse; donc, ce composé (qui pourtant est plus grand que la première pierre toute seule) se mouvra plus lentement que cette première pierre, pourtant moindre, ce qui est contraire à votre hypothèse. Vous voyez donc, comment, si je suppose que le mobile le plus lourd se meut plus vite que le moins lourd, j'en arrive à conclure que c'est le plus lourd qui se meut le moins vite.

Simplicio : Oh! voilà qui passe tout à fait ma conception. Votre raisonnement est en vérité fort bien conduit; toutefois, j'ai peine à croire qu'une larme de plomb puisse se mouvoir aussi vite qu'un boulet d'artillerie.

Salviati : Vous auriez dû dire : un grain de sable aussi vite qu'une meule de moulin. Je ne voudrais pas, signor Simplicio, qu'à l'exemple de tant d'autres, détournant notre propos de son objet principal, vous vous attachiez à telle chose que j'ai dite et qui s'écarterait de la vérité de l'épaisseur d'un cheveu, pour essayer de dissimuler, sous ce cheveu, l'erreur, aussi grosse qu'une amarre, qu'un autre a commise: Aristote dit : " Une boule de fer de cent livres, tombant d'une hauteur de cent brasses, arrive au sol avant qu'une boule d'une livre soit descendue d'une brasse ". Je dis, moi, qu'elles arrivent en même temps; vous faites l'expérience et vous constatez que la plus grosse boule devance de deux doigts la plus petite, c'est-à-dire qu'au moment où la plus grosse boule touche terre, l'autre en est encore éloignée de deux doigts; et vous voudriez maintenant, derrière ces deux doigts, cacher les quatre-vingt-dix-neuf brasses d'Aristote, et, relevant mon erreur minime, passer sous silence une erreur énorme.

Simplicio, confus, doit battre en retraite quand Salviati démontre que la théorie d'Aristote se contredit. Pourtant s'il ne peut réfuter la logique de Salviati, ses propres yeux lui montrent quand même une légère différence dans les temps de chute de deux objets. Salviati énonce ensuite un principe important pour l'étude des sciences : il n'est pas important que les temps de chute soient *légèrement différents*, mais qu'ils soient *pratiquement égaux*. Quelques années après la mort de Galilée, l'invention de la pompe à vide permettra à d'autres de montrer que Galilée avait vu juste.

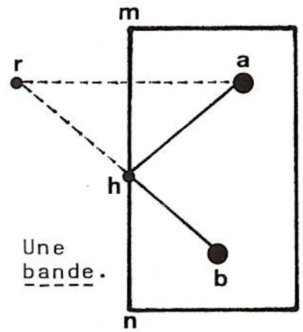
Savoir quoi négliger s'est avéré presque aussi important pour le développement des sciences que savoir quoi considérer. En observant la chute d'un corps, vous voyez les effets combinés de la chute des corps et de la résistance de l'air sur les objets en mouvement. Pour comprendre ce que vous voyez,il vous faut partir d'un cas simple (la chute sans résistance). C'est là chose facile pour nous qui connaissons la pompe à vide, mais à l'époque de Galilée, ceci constituait une explication difficile à accepter car il parlait de mouvements valables dans un monde dont il ne pouvait démontrer l'existence! Pour Aristote et ses partisans, il faut étudier le monde réel qui nous entoure et non pas le monde imaginaire (de science-fiction ?) imaginé par Galilée.

Pour renverser Aristote, il fallait à Galilée des talents de mathématicien pour visualiser dans notre esprit un modèle de la chute des corps, un doigté pour les expériences où il fonda ses certitudes, un style littéraire habile et une grande persévérance...

REFLEXIONS SUR UN BILLARD

Au jeu de billard, quel chemin doit suivre une bille pour toucher la bille adverse, s'il lui faut d'abord frapper : 1° une bande; 2° deux bandes; 3° trois bandes; 4° les quatre bandes ? (On admet que les chemins suivis par la bille avant et après avoir touché une bande, sont également inclinés sur cette bande.)

1° La bille doit toucher une bande :



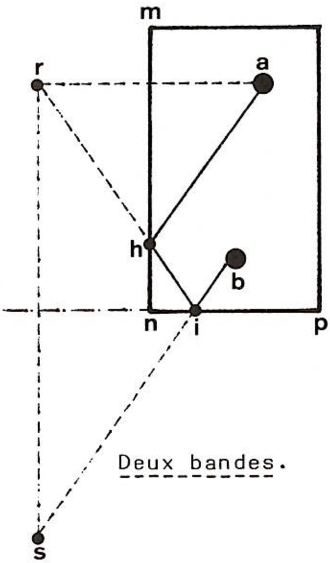
Une bande.

Soient a et b les positions respectives du joueur et de l'adversaire.
Prenons r le symétrique de a par rapport à mn et traçons rb qui rencontre mn en h.
ahb est le chemin demandé : en effet

$\widehat{ahm} = \widehat{mhr}$ (mh est médiatrice de ar)

et $\widehat{mhr} = \widehat{nhb}$ (angles opposés par le sommet)

2° La bille doit toucher deux bandes :



Deux bandes.

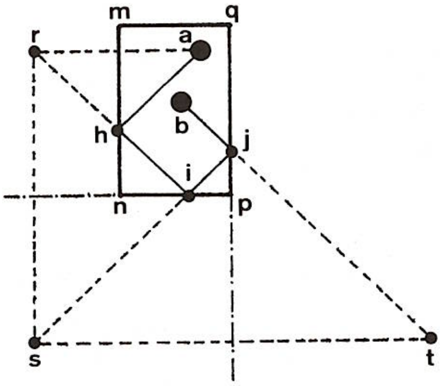
Soient a et b les positions respectives des billes.
Soient r le symétrique de a par rapport à mn et s le symétrique de r par rapport à np.
On joint b et s : la droite bs rencontre np en i. La droite ri rencontre mn en h. Le chemin ahib est le chemin demandé car en chacun des points h et i, les chemins sont également inclinés sur les bandes.

3° La bille doit toucher trois bandes :

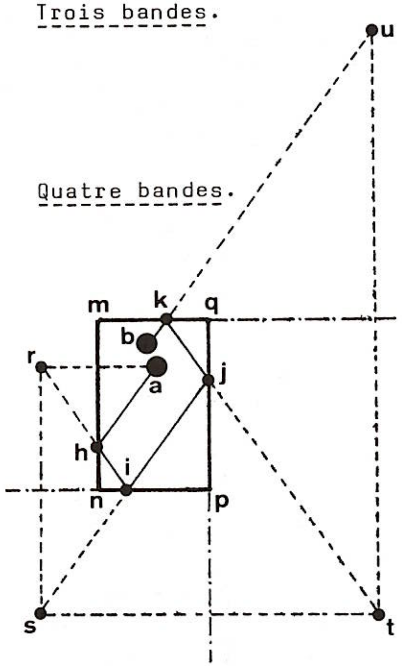
r est le symétrique de a par rapport à mn, s le symétrique de r par rapport à np, t le symétrique de s par rapport à pq. Traçons bjt, jis, ihr et ah. Le parcours est ahijb, à cause de l'égalité des angles d'incidence aux points h,i et j.

4° La bille doit toucher quatre bandes :

Comme précédemment, appelons r le symétrique de a par rapport à mn, s le symétrique de r par rapport à np, t le symétrique de s par rapport à pq, u



Trois bandes.



Quatre bandes.

le symétrique de t par rapport à mq.
Traçons bku, kjt, jis, ihr et ah. Le parcours est ahijkb pour la raison désormais classique.

On pourrait se proposer de chercher le chemin à suivre pour revenir au point de départ, après avoir touché les quatres bandes.

L'application de la méthode précédente montre que le chemin parcouru par la bille est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux diagonales du rectangle des bandes.

Théoriquement, on peut demander que la bille a rencontre un nombre quelconque de fois les bandes successives du billard avant d'atteindre la bille b de l'adversaire.

Pour résoudre cette question, il suffit de continuer la recherche des points symétriques de a par rapport aux bandes successives un nombre de fois marqué par le nombre de bandes que doit rencontrer la bille.

La longueur du chemin parcouru par la bille a est dans tous les cas représentée par la distance du point b au dernier symétrique obtenu.

Les points h,i,j,k,... peuvent se trouver tous ou en partie sur les prolongements des bandes.

On procède dans ces cas de la même manière pour obtenir le chemin suivi par la bille.

On peut aussi poser le problème en ne fixant pas les bandes et l'ordre dans lequel elles doivent être touchées : on calcule alors le nombre de solutions distinctes.

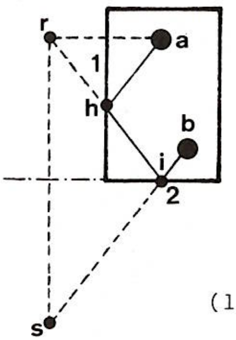
Pour plus de facilité convenons de dénommer les bandes successives mn, np, pq, qm par les chiffres 1,2,3 et 4.

1°. La bille doit toucher une bande :

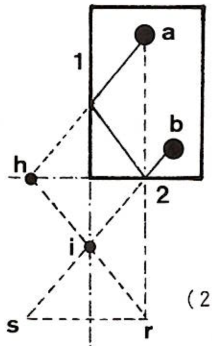
Il est évident que cette bande pourra être successivement ou la bande 1, ou la bande 2, ou la bande 3, ou la bande 4. Il y a donc 4 solutions possibles.

2°. La bille doit toucher deux bandes :

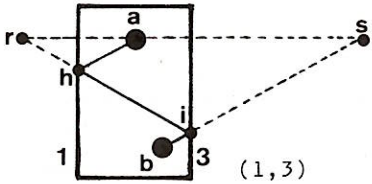
Les bandes successivement rencontrées peuvent être groupées comme il suit :
(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,1),(1,4),(1,3),(3,1), (2,4),(4,2). Il y a donc 12 solutions théoriques mais elles ne sont pas distinctes : les chemins (1,2) et (2,1), quoique différents dans la façon de les obtenir, ne le sont pas dans leur partie utile. Ces deux solutions sont donc confondues. Il en est de même pour (2,3) et (3,2), (3,4) et (4,3), (4,1) et (1,4). Tandis que les solutions (1,3) et (3,1) sont distinctes l'une de l'autre ainsi que (2,4) et (4,2).
Il y a donc 8 solutions distinctes et possibles.



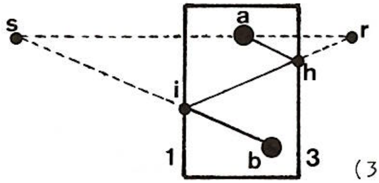
(1,2)



(2,1)



(1,3)



(3,1)

3°. La bille doit toucher trois bandes :

Le nombre de possibilités est bien sûr de A_4^3 , soit 24 solutions théoriques.

4°. La bille doit toucher quatre bandes :

Il y a 4! possibilités.

Le coin des problèmes

par Ghyslaine Marin

83 Le billard.

Combien y a-t'il de manières vraiment différentes pour qu'une bille a touche une bille b après avoir touché 3 ou 4 bandes ? (On sait que dans chacun des cas, le nombre théorique est 24 : voir page 24). N'oubliez pas de nous dessiner ces cas.

84 Les triangles curieux.

Le triangle qui a pour côtés 7m, 15m et 20m a une vraiment curieuse valeur pour son aire ! Saurez-vous trouver pourquoi cette valeur est curieuse? Et trouverez -vous les valeurs des côtés des 4 autres triangles jouissant de la même propriété? (Les côtés doivent mesurer un nombre entier de mètres)

85 Le millionième nombre.

On écrit dans un ordre croissant tous les nombres de dix chiffres distincts obtenus en permutant 0,1,2,...,9; le premier chiffre ne peut être 0.
La liste commence donc par :

1023456789
1023456798
1023456879

Trouvez (sans utiliser de calculatrice !) le millionième nombre de la liste et expliquez votre méthode.
(aimablement communiqué par Claudine FESTRAETS.)

86 J'attendrai.

"Non, Monsieur, je regrette mais je ne puis vous accorder la main de ma fille. Elle est beaucoup trop jeune (16 ans) et vous avez trois fois son âge !"
"Mais, Monsieur, si au lieu du triple de son âge, j'en avais le double, m'accorderiez-vous sa main ?"
"Ah! Dans ce cas, je ne dirais pas non !"
"Bien! Alors, Monsieur, j'attendrai!"

Combien de temps ?

87 Le jardinier.

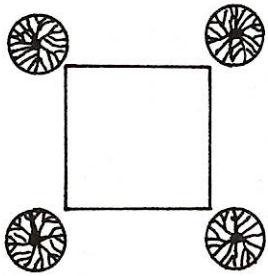
Un jardinier doit déposer une brouette de terreau au pied de chacun des 30 arbres formant un côté d'une allée de son jardin. Les arbres sont à 6 m de distance les uns des autres, et le tas de terreau est à 10 m en avant du premier arbre du même côté de l'allée. Quel chemin le jardinier aura-t-il parcouru après avoir achevé son travail et ramené la brouette près du tas de terreau ?

88 La rencontre des aiguilles.

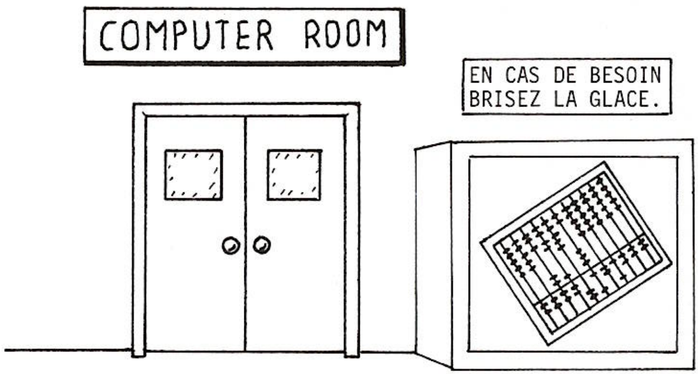
A 12 h, une des aiguilles d'une montre couvre l'autre. Mais ce n'est pas le seul moment de la journée où la rencontre a lieu. Pourrez-vous indiquer tous les moments où cela se produit ?

89 L'étang.

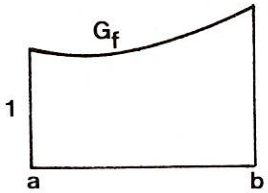
Aux quatre coins d'un étang carré poussent quatre vieux chênes. On voudrait doubler la surface de l'étang tout en lui gardant sa forme carrée et sans toucher aux vieux chênes. Comment faire cela sans inonder les pieds des chênes ?

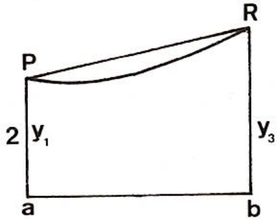


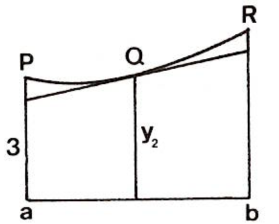
****

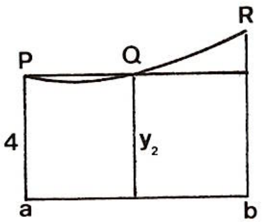


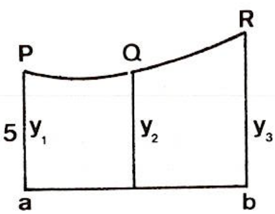
L'intégration numérique











Le trapèze curviligne de la figure 1 a pour aire :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Souvent la fonction f n'est pas intégrable par les techniques de primitivation. Le calcul numérique de l'aire peut être recherché à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Trois méthodes sont couramment utilisées, dont voici les principes :

Méthode des trapèzes:

On remplace la courbe représentative de f (G_f) par la corde PQ. Si l'on pose $h = b-a$, on a : $T = \frac{h}{2}(y_1 + y_3)$ (fig 2)

Méthode des tangentes:

On remplace la courbe par la tangente en Q (fig 3) ou, ce qui revient au même, par la parallèle à l'axe des abscisses en Q (fig 4). On a : $M = h\,y_2$

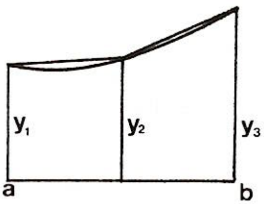
Méthode de Simpson :

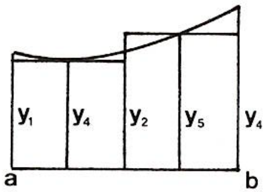
Ce mathématicien (1710-1761) chercha une formule où l'on remplaçait la courbe par un arc de parabole passant par P, Q et R. On démontre facilement (mais ce n'est pas notre propos ici) que l'on a :

$$S = \frac{h}{6}\,(\,y_1 + 4y_2 + y_3\,) = \frac{T + 2M}{3}$$

Ces trois réels, T, M et S sont des approximations de l'intégrale I. L'erreur $|I-T|$ est du même ordre que $|I-M|$, mais en règle générale, l'erreur $|I-S|$ est nettement plus petite.

L'idée de l'itération consiste à remplacer h par h/2 puis par h/4 ...
Voyons la première étape qui consiste à remplacer T, M, S par de meilleures approximations T_1, M_1 et S_1





$$T_1 = \frac{h}{4}(y_1+y_2)+\frac{h}{4}(y_2+y_3)$$
$$= \frac{h}{4}(y_1+y_3) + \frac{h}{2}y_2$$
$$= \frac{T+M}{2}$$

$$M_1 = \frac{h}{2}y_4 + \frac{h}{2}y_5$$

M_1 s'obtient donc en additionnant les nouvelles ordonnées introduites et en multipliant la somme par h/2 . La connaissance de T_1 et M_1 amène S_1.

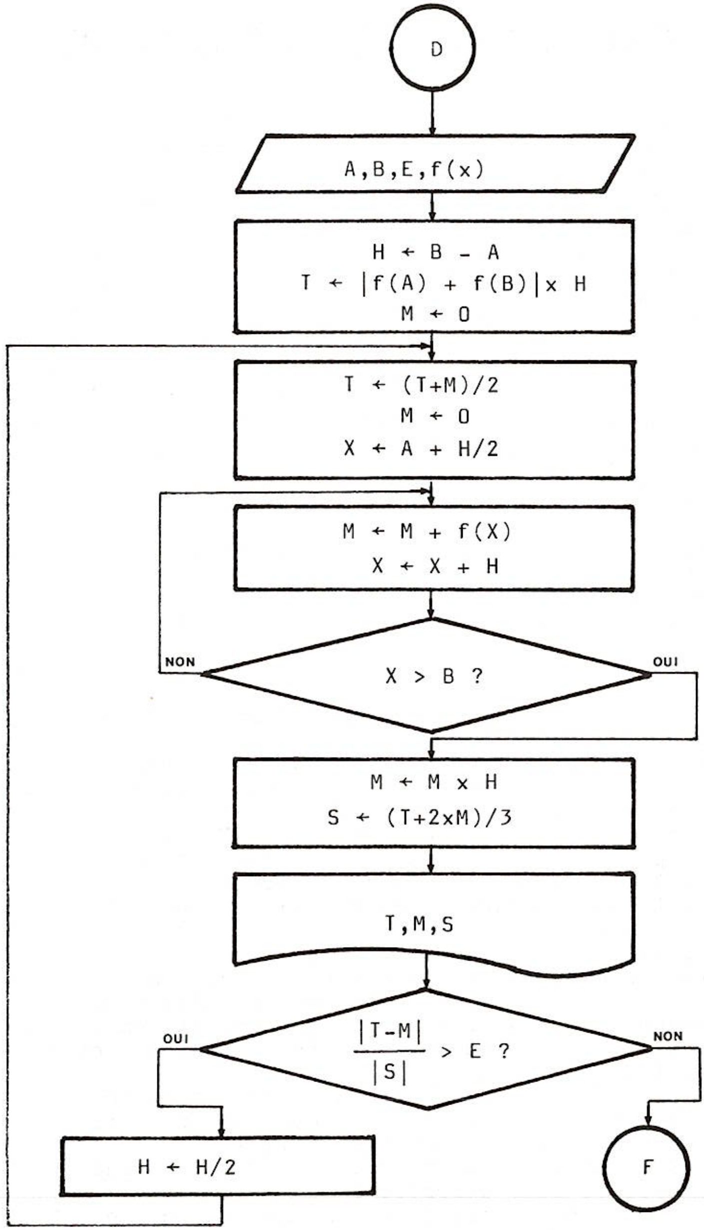
Le programme ci-dessous calcule par les trois méthodes

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Suite aux demandes de nos lecteurs, nous donnons la version BASIC du programme. L'organigramme de la page suivante permet de composer sans problèmes son propre programme.

```
 1Ø DEF FN F(X) = 4/(1+X*X)
 2Ø READ A,B,E
 3Ø PRINT "T","M","S"
 4Ø H = B-A
 5Ø T = (FN F(A) + FN F(B))*H
 6Ø M = Ø
 7Ø T = (T+M)/2
 8Ø M = Ø
 9Ø FOR X = A+H/2 TO B STEP H
1ØØ M = M + FN F(X)
11Ø NEXT X
12Ø M = M*H
13Ø S = (T+2*M)/3
14Ø PRINT T,M,S
15Ø H=H/2
16Ø IF ABS(T-M)/ABS(S)>E THEN GOTO 70
17Ø DATA Ø,1,1E-6
18Ø END
```

En général |T-M| est plus grand que les deux erreurs |I-T| et |I-M|, alors que |S| est en général très voisin de I. Il en résulte la ligne 16Ø.


D
A,B,E,f(x)
H ← B – A
T ← |f(A) + f(B)| x H
M ← 0
T ← (T+M)/2
M ← 0
X ← A + H/2
M ← M + f(X)
X ← X + H
X > B ?
NON
OUI
M ← M x H
S ← (T+2xM)/3
T,M,S
|T-M| / |S| > E ?
OUI
NON
H ← H/2
F

Comment devient-on astronome ?

C'est la question que j'ai posée à l'un des "patrons" de l'Observatoire Royal d'Uccle, le professeur Paul Paquet, chef de la section "Heure et Astronomie Méridienne".

Non seulement il a eu la gentillesse de répondre à mes questions mais, pour mieux faire comprendre certains détails, il m'a fourni plusieurs documents concernant la terre vue par les astronomes; l'heure et la rotation de la terre... Le volume des informations étant important, il m'est difficile de le résumer sans en sacrifier des parties essentielles. Je me propose donc de vous tenir en haleine pendant plusieurs mois et de ne vous livrer aujourd'hui que le compte rendu de l'interview du professeur Paquet en réservant la publication des annexes à un (ou plusieurs) numéros ultérieurs.

Q: Quelle est votre formation au niveau du secondaire ?

R: Scientifique A.

Q: Avez-vous suivi une année de Mathématique Spéciale ?

R: Non.

Q: Voulez-vous résumer votre formation et votre carrière à l'Université ?

R: Licence en Sciences Mathématiques (1960).
Assistant au département de Mécanique Céleste (1960-1962).
Assistant à l'Observatoire (1962).
Doctorat en Sciences (Mathématiques, Mécanique Céleste) en 1967.
Chef de la Section Heure et astronomie méridienne depuis 1970.

Q: Comment peut-on entrer dans le cadre du personnel de l'Observatoire, faut-il nécessairement une formation universitaire pour y accéder ?

R: Il faut une formation universitaire (Math., Phys., Ing. Civil) pour accéder au cadre du personnel scientifique. Il existe un cadre non universitaire accessible aux étudiants qui terminent des humanités (orientation quelconque).

Q: Que fait-on dans un observatoire ?

R: Le premier objectif est l'étude du mouvement des astres, depuis la terre jusqu'aux étoiles les plus éloignées. L'observation de leur comportement permet, en effet, d'en décrire la cinématique et ensuite de tenter d'expliquer celle-ci par la dynamique.
Un second objectif est l'étude de la structure, de la composition et de l'évolution physique des astres. Comment nait une étoile, une planète, etc...!

Q: Pourquoi observer les étoiles, quelles informations peuvent-elles nous apporter ?

R: On observe les étoiles pour étudier leur mouvement et déterminer leur distance, leur composition chimique, leur âge. La distance par exemple est un paramètre fondamental pour comprendre la vie d'une étoile, de sa naissance à sa mort. Une application immédiate et naturelle est d'estimer l'évolution de notre soleil qui est une étoile comme une autre mais qui a le privilège particulier de disposer de notre survie. La vie du soleil est limitée et, d'avoir compris la nature des étoiles, on commence à voir apparaitre des théories surprenantes visant à la prolonger de plusieurs milliards d'années.

Q: *L'Observatoire comporte également une "Section de l'Heure". Pourquoi se donne-t-on tant de mal pour obtenir l'heure exacte ?*

R: Tout phénomène observé doit être situé dans une échelle de temps dont la résolution sera plus ou moins fine selon l'objectif poursuivi. Des extraits d'une petite brochure décrivant les activités de l'Observatoire vous donneront une idée des précisions demandées et justifieront l'effort entrepris. (*).

Q: *Quels conseils donneriez-vous à un jeune qui achève le cycle des humanités et souhaiterait faire de l'astronomie ?*

R: Entreprendre une licence en Sciences mathématiques ou physiques est la démarche la plus normale.
A partir de la licence, choisir des cours à option orientés vers la géophysique et l'astronomie. Il n'est pas nécessaire d'être astronome pour faire de l'astronomie ! Il existe des associations d'amateurs souvent régionales et une Société Belge d'Astronomie (Av. Circulaire,3, 1180 Bruxelles) qui édite une bonne revue : "Ciel et Terre" et qui peut vous fournir les adresses des associations d'amateurs dans votre région.

Dans la lettre qu'il a annexée à ses réponses, le Professeur Paquet précise : "De toute manière je reste à votre disposition si vous souhaitez des informations complémentaires" ...
Si le sujet vous intéresse, vous savez donc ce qu'il vous reste à faire !
Pour clore ce premier article consacré à la carrière d'astronome je me dois d'exprimer ici nos sincères remerciements au Professeur Paquet pour son aimable collaboration.

Courrier de cette rubrique : *J.P. DECLERCQ,*
rue de Ten Brielen, 124,
7780 - COMINES.

(*) Dans le prochain numéro ! Promis, juré ...

MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française. (S.B.P.M.e.f., A.S.B.L.)

Edition et Rédaction : W. VANHAMME et J. MIEWIS.
Courrier : Math-Jeunes, Av. de Péville,150, 4030, Liège.
Abonnement : *5 numéros + 1 hors série* : Math-Jeunes, Cpt 001-0828109-96 , Ch. des fontaines,14bis,7460 - Casteau.
(Belgique 60FB - Etranger 120FB). Les abonnements sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.

Règlement du Challenge

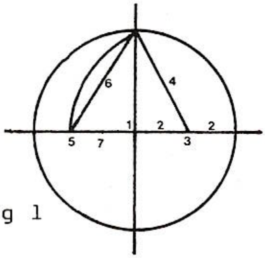


fig 1

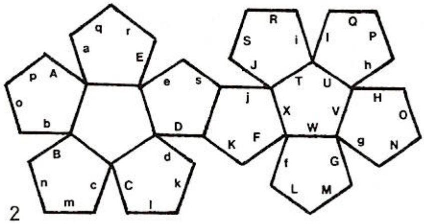


fig 2

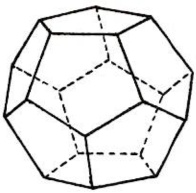


fig 3

La figure 1 montre la construction du côté du pentagone (6) et du côté du décagone (7) . Tracer 2 axes perpendiculaires dans un cercle (1); prendre la moitié (3) du rayon (2) et tracer avec le rayon (4) l'arc de cercle qui donne 5.

La figure 2 montre un assemblage de 12 pentagones pour former le DODECAEDRE (fig 3). Un côté de 10 cm fait très bien l'affaire. Deux lettres identiques seront collées ensemble : veiller donc à prévoir de petits onglets bien utiles pour le collage.

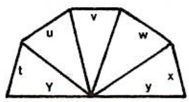


fig 4

Sur chaque face du dodécaèdre, nous collons une petite pyramide à base pentagonale. Le développement de ces pyramides (il en faut 12) est montré sur la fig 4 : il s'agit de demi-décagones construits avec un rayon de 16 cm. (Pensez aux inévitables onglets...)

Le solide obtenu est un DODECAEDRE ETOILE. Il fut découvert par KEPLER (1571-1630). Il fait partie des 4 polyèdres étoilés réguliers.

Il a 12 faces, 12 sommets et 30 arêtes : il ne vérifie donc pas la relation d'Euler :

$$F + S = A + 2$$

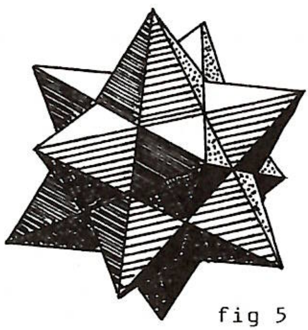


fig 5