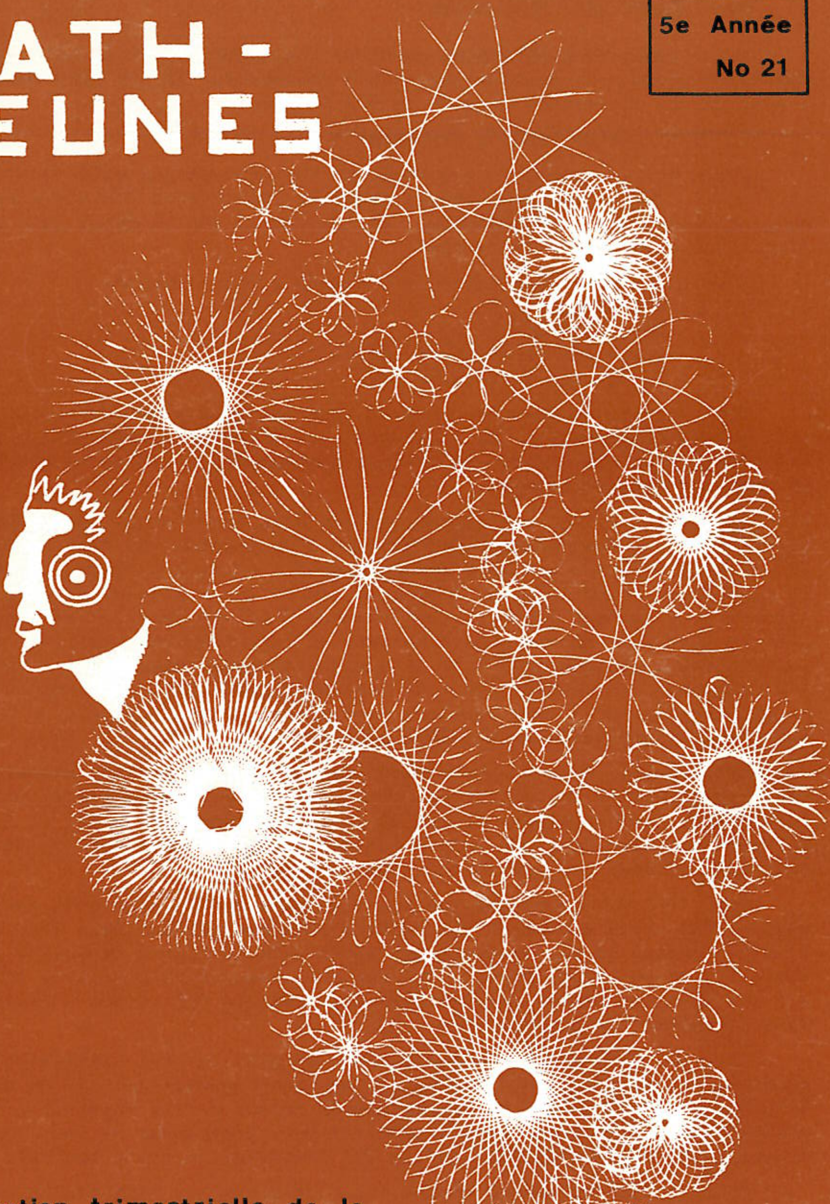
MATH-JEUNES

5e Année
No 21



Publication trimestrielle de la
**SOCIETE BELGE des PROFESSEURS
de MATHEMATIQUE d'Expression Française** (A.S.B.L.)

MATH-JEUNES FAIT PEAU NEUVE

Cette année MATH-JEUNES ne paraîtra que quatre fois .... mais chaque numéro comprendra 24 pages et sa propre couverture. Il n'y aura donc plus d'envoi d'une couverture séparée en fin d'année.

Pourquoi quatre numéros seulement ?

Parce que l'expérience a montré que vos professeurs pouvaient difficilement rentrer vos abonnements avant la fin du mois d'octobre et même souvent avant la mi-novembre. Par ailleurs, dès le début juin beaucoup d'entre vous sont en examens.

Vous devez donc vous attendre à recevoir votre journal
- fin novembre
- début janvier
- avant les vacances de Pâques
- au courant du mois de mai.

Vous verrez, en ouvrant celui-ci, que les huit pages centrales ont leur propre numérotation. En regroupant les différentes livraisons de ces pages, vous construirez un lexique comprenant de brèves biographies de nombreux mathématiciens.

Pour mieux situer ces mathématiciens dans leur temps, nous vous conseillons, si vous n'étiez pas abonnés l'an dernier, de vous procurer le poster historique que MATH-JEUNES a publié en juin dernier. Le prix du poster est 30 FB (pour la Belgique), 60 FB (pour l'étranger). Par paquets de 5 posters les prix sont ramenés à 120 FB (pour la Belgique) (240 FB pour l'étranger). Les étrangers qui utilisent un organisme bancaire doivent majorer de 100 FB le montant de leur commande pour couvrir nos frais de recouvrement (seul un règlement par c.c.p. ou un mandat postal international nous parvient sans frais). Pour le numéro de compte consultez le cartouche en dernière page de couverture.

Cette année, tous les problèmes entrent dans le rallye. Rappelons que nous attendons vos solutions, même partielles, aux problèmes qui vous intéressent. Les résultats de celles-ci sont comptabilisés et, en fin d'année, un classement aux points est effectué. Les meilleurs résultats sont récompensés, les meilleures solutions publiées.

Rappelons également que les pages de MATH-JEUNES vous sont ouvertes. Nous sommes prêts à publier les résultats de vos travaux dans l'un ou l'autre domaine de la mathématique, après avis favorable du comité de rédaction de la revue. Ainsi, l'an dernier, avons-nous publié le travail sur les spirales rédigé par des élèves du collège Christ-Roi d'Ottignies. Nous attendons vos propositions.

Pour que MATH-JEUNES puisse devenir de plus en plus intéressant, il faut que notre budget soit suffisant, or, notre budget est lié au nombre d'abonnés. Alors, faîtes de la propagande auprès de vos camarades, dans votre classe et hors de votre classe. Si leur professeur ne leur a pas encore parlé de MATH-JEUNES, qu'ils lui demandent de les y abonner.

Si vous êtes un ancien abonné, nous espérons que MATH-JEUNES continuera à vous plaire. Aux nouveaux abonnés nous souhaitons de prendre bien du plaisir à sa lecture. Faîtes-nous éventuellement part de vos desiderata.

LA REDACTION

720 = 478 = 1011

Les Phéniciens, qui vivaient sur la côte de Syrie-Palestine depuis le milieu du troisième millénaire furent probablement les premiers à parvenir à simplifier l'écriture en "inventant" l'alphabet. Grands commerçants, ils firent sentir leur influence sur toute la région du Proche-Orient. Vers le 5ème siècle a.J.C., les Israélites adoptèrent cet alphabet : ces 22 lettres allaient évoluer vers une forme plus massive que nous leur connaissons. Les lettres hébraïques se lisent de droite à gauche, cinq d'entre elles prennent une forme différente lorsqu'elles figurent en position finale.

La numération hébraïque traditionnelle - numérotation des versets de l'Ancien Testament, pagination de certains textes, dates du calendrier israélite,... - consiste à employer les 22 lettres prises dans l'ordre : au 9 premières (de alef à tet), on associera les 9 premiers nombres (de 1 à 9) ; les 9 suivantes (de yod à tsadé) aux neuf dizaines et les quatre dernières (de qof à taw) aux quatre premières centaines.

Les versions en position finale des cinq lettres kaf, mem, nun, pe, tzade servent pour écrire les centaines de 500 à 900. Pour ces centaines, on fait parfois usage d'une écriture additive, 600 étant représenté par les signes 400 et 200 écrits côte à côte. L'écriture des milliers s'obtient en surmontant de deux points la lettre numérale que l'on veut multiplier par 1000 : ce système permet l'écriture des nombres jusqu'à 999 999 (ce qui est généralement assez pour paginer un livre !). Pour indiquer l'année 5744 par exemple, on écrira :

ה̈ ן מ״ד

4 40 700 5000

Les deux accents situés entre les deux dernières lettres à gauche sont un signe qui avertit le lecteur que la succession de lettres n'est pas un mot. Lorsque le nombre n'est représenté que par une seule lettre, on place un seul accent en haut à gauche.

Les nombres 15 et 16 ne sont pas notés

	יה 5 10	et	יו 6 10
mais	טו 6 9	et	טז 7 9

car ils pourraient être lus YH (10+5) et YW (10+6) qui sont des formes abrégées de l'écriture hébraïque du nom divin YHWH (Yahvé) ,nom personnel du dieu d'Israël, qui ne peut ni être écrit, ni prononcé suivant un précepte de la religion juive.

Sans être un adepte, on peut signaler ici "le calcul alphabétique" dont le principe de base consiste à calculer la valeur des lettres d'un mot et d'ainsi associer un nombre à un mot, puis d'en tirer diverses constatations de type magique (?), divin (?) ou kabbalistique...

Ainsi, le lion (aryieh) doit être puissant (guebourah), car :

אריה	גבורה
H Y R A	H R W B G
5 10 200 1 = 216	*5 200 6 2 3 = 216*

Des spéculations faites par les mystiques chrétiens autour du nombre 666 que l'apôtre Jean avait attribué à ce qu'il avait appelé la *Bête de l'Apocalypse* ont mené à des résultats très inattendus : en voici un premier :

Ainsi, CESAR NERON se devait d'être le premier persécuteur des chrétiens, puisque :

קסר נרון

N W R N R S Q

50 6 200 50 200 60 100 = 666

Parlons à présent de l'alphabet grec, lui aussi issu du phénicien, mais modifié plus profondément. Les lettres digamma, san et koppa ont été abandonnées; le waw phénicien a donné l'upsilon et trois signes phi, khi et psi ont été ajoutés pour exprimer des sons nouveaux; l'oméga est une variante du omicron. L'alphabet compte ainsi 24 lettres. Pour ce qui est de l'écriture des nombres, on replace le digamma "à sa place" pour obtenir les nombres de 1 à 9 associés aux lettres alpha jusqu'à thêta. De iota à pi, on aura les 8 premières dizaines. Koppa vaudra 90; de rô à oméga, les huit premières centaines et san vaudra 900. Les milliers seront représentés par la première série de alpha à thêta agrémentée en haut à gauche d'un trait. Ce système permet d'atteindre 9999. Pour indiquer 1983, on écrira:

ˈα ϡ π γ

1000 900 80 3

א	alef	1	Α α	alpha (a)	1
ב	bêt (b)	2	Β β	bêta (b)	2
ג	gimmel (g)	3	Γ γ	gamma (g)	3
ד	dalet (d)	4	Δ δ	delta (d)	4
ה	he (h)	5	Ε ε	epsilon (e)	5
ו	waw (w)	6	Ϛ ϛ	digamma	6
ז	zahin (z)	7	Ζ ζ	dzêta (z)	7
ח	het (h)	8	Η η	êta (è)	8
ט	tet (t)	9	Θ θ	thêta (th)	9
י	yod (y)	10	Ι ι	iota (i)	10
כ (ך)	kaf (k)	20 (500)	Κ κ	kappa (k)	20
ל	lamed (l)	30	Λ λ	lambda (l)	30
מ (ם)	mem (m)	40 (600)	Μ μ	mu (m)	40
נ (ן)	nun (n)	50 (700)	Ν ν	nu (n)	50
ס	samekh (s)	60	Ξ ξ	ksi (ks)	60
ע	ayin	70	Ο ο	omicron (o)	70
פ (ף)	pe (p)	80 (800)	Π π	pi (p)	80
צ (ץ)	tzade (tz)	90 (900)	Ϻ ϡ	san	900
ק	qof (q)	100	Ϙ ϙ	koppa	90
ר	resh (r)	200	Ρ ρ	rô (r)	100
ש	shin (sh)	300	Σ σ (ς)	sigma (s)	200
ת	taw (t)	400	Τ τ	tau (t)	300
			Υ υ	upsilon (u)	400
			Φ φ	phi (f)	500
			Χ χ	khi (kh)	600
			Ψ ψ	psi (ps)	700
			Ω ω	omega (ô)	800

Le nombre 10 000, c'est-à-dire la *myriade* était exprimé par un M (l'initiale de myriade); les quatre lettres (au plus) indiquées à gauche de ce M représentaient le nombre de myriades: ainsi 12 345 678 s'écrit

ʹα σ λ δ Mʹε χ ο η

1000 200 30 4   5000 600 70 8

(1234).10000   *5678*

Chez DIOPHANTE d'ALEXANDRIE, le M est remplacé par un point. Quant à APOLLONIUS de PERGE, il fait surmonter le M d'un α : c'est la myriade de la première classe. Un M surmonté d'un β , myriade de la seconde classe vaudra 100 000 000; la présence d'un η équivaut à 10 puissance 8x4. On peut "monter" jusqu'à M surmonté de ʹαϡϙθ , égal à 10 exposant (4x9999) : ce n'est pas mal. Ainsi, 987 654 321 000 s'écrit :

$\overset{\beta}{M}$ʹθ ω ο ς $\overset{\alpha}{M}$ʹε υ λ β και ʹα

$(10000)^2 \times 9876$ $(10000) \times 5432$ (et) 1000

Dans un traité intitulé l'ARENAIRE (de arena, le sable), ARCHIMEDE se propose de compter le nombre de grains de sable contenus en une sphère dont le diamètre est la distance de la terre aux étoiles fixes : pour ce faire, il mélangera les deux systèmes en créant l'octade, suite de 8 chiffres avec un M ou un point intercalaire, comme chez Diophante. Le M surmonté d'un α vaut 100 000 000 : il monte ainsi à la puissance 10 exposant (8x9999). Ce procédé est resté tout théorique, les grecs lui préférant le sytème d'Apollonius pour sa relative simplicité.

Le calcul alphabétique, qui chez les Grecs s'appelle <u>ISOPSEPHIE</u>, est aussi très fertile en considérations mystico-douteuses : le pauvre Néron (νερων) est associé à la phrase: il tua sa propre mère (ιδιαν μητερα απεκτεινε)

ν ε ρ ω ν   ι δ ι α ν   μ η τ ε ρ α   α π ε κ τ ε ι ν ε

50 5 100 50 800 = <u>1005</u>   *10 4 10 1 50 40 8 300 5 100 1 1 5 80 20 300 5 10 50 5 = <u>1005</u>*

et si le Nil (νειλος) permet aux Egyptiens de marquer l'année par ses crues régulières, c'est tout simplement parce que

ν ε ι λ ο ς

50 5 10 30 70 200 = <u>365</u>

A	1	K	10	T	100
B	2	L	20	U,V,W	200
C	3	M	30	X	300
D	4	N	40	Y	400
E	5	O	50	Z	500
F	6	P	60		
G	7	Q	70		
H	8	R	80		
I,J	9	S	90		

Les systèmes alphabétiques numéraux ont subsisté longtemps après l'apparition des chiffres hindous-arabes que nous connaissons aujourd'hui. On créa même une numération basée sur l'alphabet latin (ci-dessus) qui coexistait avec le système romain plus traditionnel. Ce système fonctionnait sur le modèle grec. On s'en servit en 1584 pour démontrer que le réformateur allemand LUTHER était la bête de St Jean, puisque

L U T H E R N U C

30 200 100 8 5 80 40 200 3 = 666

Ce à quoi, les disciples de Luther répondirent que l'un des titres papaux: vicaire du fils de Dieu (VICARIVS FILII DEI) dans lequel on ne prend que les lettres ayant une signification dans le système numérique romain original, donnait

V I C AR **I V** S F **I L I I** **D** E **I**

5 1 100 1 5 1 50 1 1 500 1 = 666

ce qui fut loin de calmer les esprits...

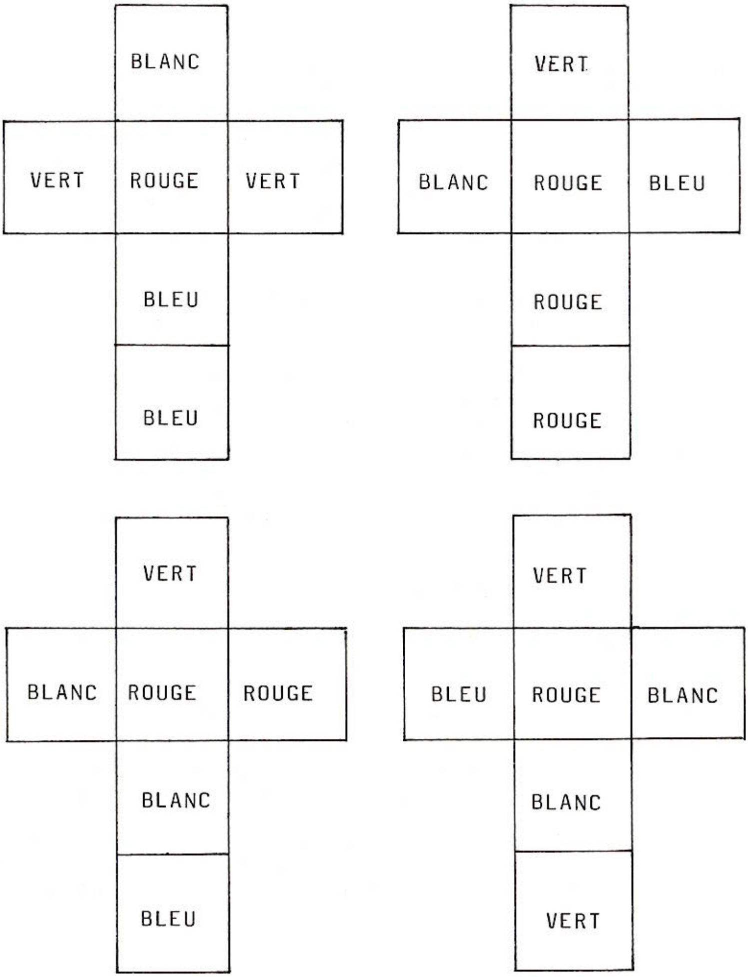
Que conclure de ce sujet inattendu ? Qu'il était inévitable que de tels systèmes d'écriture des nombres mènent à des interprétations bien éloignées des mathématiques. Qu'il vaut mieux en sourire et les considérer comme un jeu de l'esprit.

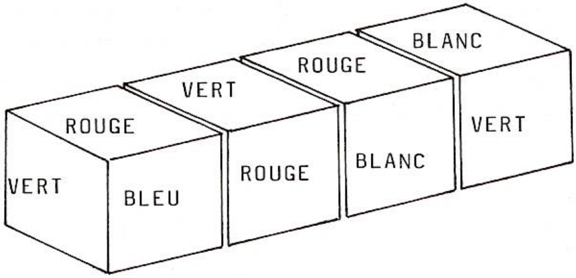
On voit aussi que le système de base 10 qui nous entoure est plus simple, mais peut-être moins incitateur à la rêverie.

Et puisque MATH-JEUNES = 478 dans le système numéral latin, 1011 dans le système romain original, et 720 si on l'écrit μαθ ιευνες, bref qu'il ne vaut pas 666, nous en serons rassurés...

Les cubes

Il n'est pas si facile que cela de jouer aux cubes ! Commencez par confectionner 4 cubes identiques, de 5cm de côté par exemple, et coloriez-les comme il est indiqué.

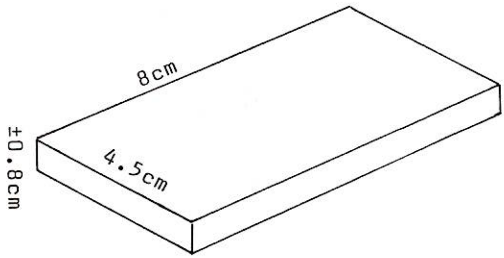




Voici une manière de les installer tous les quatre: vous constaterez que la face avant présente les quatre couleurs différentes : appelons-la une bonne face. Par contre la face supérieure présente deux fois la couleur rouge : appelons-la une mauvaise face.

Pouvez-vous placer les quatre cubes de façon à montrer quatre bonnes faces, au sens où nous l'entendons ci-dessus.

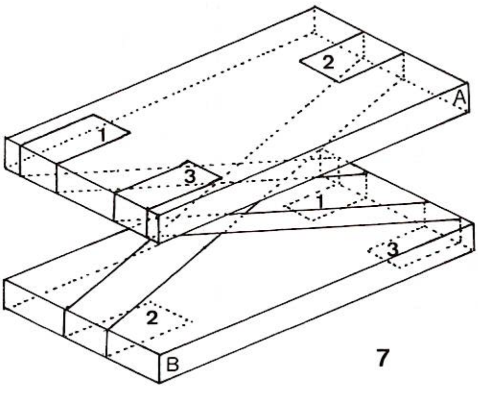
Les claquettes



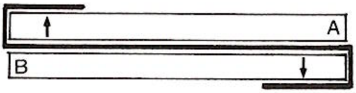
Procurez-vous 6 petites plaques en bois du format indiqué ci-contre.

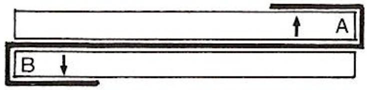
Demandez ensuite à votre maman de vous procurer 2m10 de ruban de ±12mm de largeur.

Vous le couperez en 15 bouts de 14cm; ceux-ci vont servir à attacher entre elles les plaques. Trois bouts seront nécessaires pour relier entre elles deux plaques.

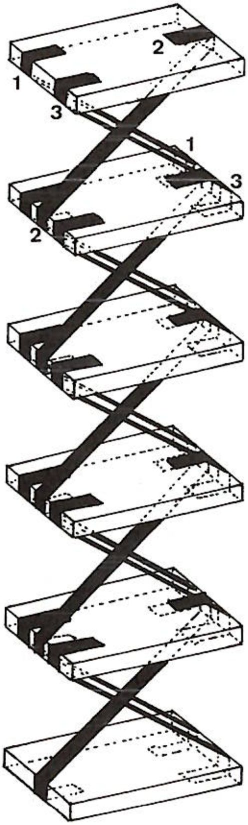


Observez bien les "chemins" suivis par les trois rubans pour relier les deux plaques. Attention, dans la pratique, les rubans seront tendus pour qu'une fois attachés, les deux plaques soient le plus proches possibles l'une de l'autre.





Le dessin de gauche représente le chemin des rubans 1 et 3. Celui de droite représente le chemin du ruban 2.



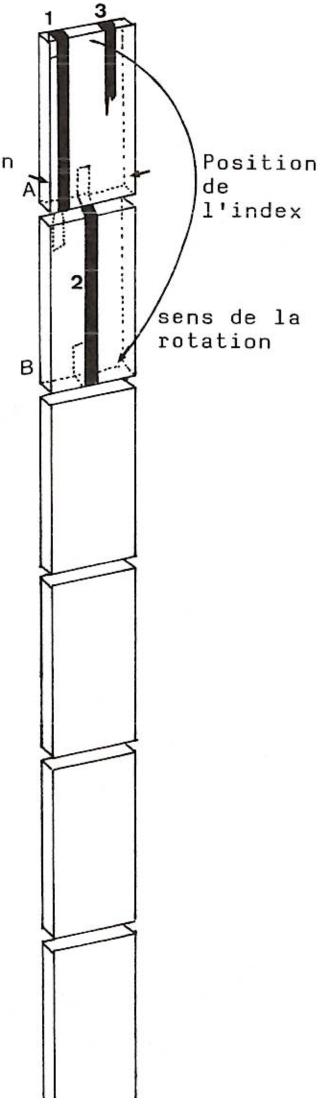


Schéma d'agencement des 6 pièces.
Attention: dans la réalité, il faut tendre les rubans avant de les coller de manière à ce que les plaques soient le plus proche possible l'une de l'autre.

Tenez ensuite l'ensemble comme indiqué à droite et effectuez un mouvement du poignet dans le sens indiqué: vous aurez l'impression que la plaque A se détache et se retrouve au bas du montage.
Bon amusement.

A

ABEL Henrik Niels (1802-1829) Norvégien (L5).

En 1826, il démontre qu'il est impossible de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré plus grand ou égal à 5. Ce résultat sera redécouvert et complété largement par Galois. Pour sa démonstration, Abel fut amené à introduire la notion nouvelle de corps (les rationnels, les réels, les complexes sont des corps). Il étudia des conditions suffisantes de convergence pour des séries numériques, des séries de fonctions et certaines classes d'intégrales.
Mort jeune après avoir confié son travail à Cauchy -qui l'avait égaré-, Abel a su attacher son nom à plusieurs concepts de la mathématique moderne.

ABOUL-WAFA al-Buzgani (940-998) Persan (L2).

Systématise toute la trigonométrie connue. Démontre les formules d'angle double et de demi-angle liées à la fonction tangente. Il construit une table des sinus de 15' en 15' avec 8 chiffres exacts par des méthodes d'interpolation.
Il appartient à l'école de Bagdad fondée par Tabit ben Qurra. Il traduit Diophante, Euclide et commente l'Al Jabr de Al Khuwarizmi.

ADELARD de Bath (1075-1160) Anglais (L3).

Premier traducteur en latin des Eléments d'Euclide et des tables d'astronomie d'Al Khuwarizmi à partir de l'arabe. Il traduit également en latin l'Almageste de Ptolémée à partir du grec. Par ces traductions, l'Occident est confronté pour la première fois avec des textes structurés et logiques.

AGNESI Maria Gaetana (1718-1799) Italienne (L5).

Après des essais philosophiques, Agnesi publie en 1748 l'Instituzioni analitiche, base structurée du Calcul Différentiel. Elle y décrit une cubique particulière, la Versiera, qui par une erreur de traduction deviendra la Sorcière.
En 1750, elle sera la première femme à occuper une chaire de mathématique à l'Université de Bologne.

AL-BATTANI As Sabi (850-929) Arabe (L2).

Dans un ouvrage intitulé "Sur le mouvement des étoiles", Al-Battani emploie les formules trigonométriques des angles complémentaires et les formules du cosinus pour les triangles sphériques. Tables des sinus de degré en degré.

AL-BIRUNI Abu Rayan (973-1048) Persan (L2).

La plus grande figure de la science et de la philosophie iranienne. Il ramena d'Inde le principe positionnel de numération. En géométrie, il démontre la formule de Héron (surface d'un triangle à partir des côtés) et celle de Brahmagupta concernant les aires des quadrilatères inscriptibles.
On lui doit de nombreux travaux scientifiques (notion de vitesse et d'accélération, traité sur les ombres projetées par un gnomon) et anthropologiques (description géographique et des croyances religieuses des Hindous).

ALCUIN d'York (735-804) Anglais (L2).

Présenté à Rome à Charlemagne, Alcuin jouera un role prépondérant dans la réorganisation de l'enseignement voulue par l'empereur. Il avait publié pour la jeunesse un ouvrage intitulé Propositiones ad acuendos juvenes qui demeure le plus ancien exemple connu de récréations mathématiques. (C'est un peu l'ancetre de Math-Jeunes...)

AL-KHUWARIZMI Muhammad Ben Musa (v820) Arabe (L2).

Il était originaire de Khuwarism, l'actuelle Khiva en république d'Uzbekistan. On sait de ce fondateur de la mathématique arabe qu'il vécut à la cour du calife Al-Manoum qui régna à Bagdad de 813 à 833. On lui doit un manuel d'arithmétique (dont on ne possède que des extraits en latin: de numero Indorum) dans lequel il expose le système indien de numération. Le Moyen Age ignorant verra en lui le père du système et son nom, légèrement modifié va donner "algorithme", synonyme de procédé systématique de calcul.
Il publie également d'importantes tables trigonométriques qui seront traduites en Occident par Adélard de Bath ainsi que des travaux de géographie et de géodésie.
Mais l'un des plus grands monumemts de l'histoire de la mathématique, composé vers 850 est HISAB AL-JABR WAL MUKABALA que l'on peut traduire par "science de la transposition et de la réduction". C'est de ce titre que va dériver le terme ALGEBRE, synonyme de la science des équations. L'essentiel de l'Algèbre comptemporaine y est résumé: on le considère comme le meilleur exposé de ces techniques car à la différence de l'Arithmétique de Diophante, on ne tente plus de ramener le probième à la géométrie. Descartes et Fermat rassembleront un jour les deux sciences pour créer la Géométrie Analytique.

AL-KARHI Abu Bakr (v1020) Arabe (12).

Successeur d'Aboul-Wafa, on lui doit entre autres la solution des équations bicarrées, la somme de carrés et de cubes. Il fut un des rares mathématiciens arabes à tenter de mettre au point une notation symbolique.

AL-KASI Giyad Al-Din (v1427) Persan (L3).

Travaille à Samarkand sous la direction du prince mongol Ulugh Beg qui y a fait construire un observatoire célèbre. On lui doit l'invention des fractions décimales et de la technique dite de Horner.

ALEMBERT Jean le Rond d' (1717-1783) Français (L5).

Abandonné sur les marches de l'Eglise Saint-Jean-le-Rond, Jean fut élevé par un couple de vitriers. Il entre à douze ans au Collège des Nations pour y étudier le droit. Il devient académicien à 23 ans. De 1751 à 1772, il collabore avec Diderot à l'Encyclopédie. En mathématique, on lui doit le critère du quotient de convergence des séries et le théorème fondamental de l'algèbre: un polynome de degré n admet n racines dans le champs des complexes. Il s'est intéressé à la dynamique, aux logarithmes des quantités négatives et à la définition de la dérivée sous forme de limite.

ANAXAGORE de Clazomène (-500,-428) Grec (L1).
Astronome remarquablement clairvoyant qui avait compris que la lune ne brillait pas par elle-même comme le soleil. Cette affirmation scandaleuse lui valut la prison où il se consacra à des recherches sur les quadratures. Libéré par l'influence d'un de ses élèves, il quitta Athènes pour toujours.

ANAXIMANDRE (-611,-545) Grec (L1).
Elève de Thales, il est le fondateur de l'Astronomie grecque et le premier à s'intéresser à la Cosmologie. Il prona la symétrie et introduit la géométrie et des proportions mathématiques dans ses essais d'interprétation du ciel: terre ronde, voute céleste en demi-sphère...

APOLLONIUS de Perga (v-262,v-180) Grec (L1).
Originaire d'Alexandrie, Apollonius participa au développement de la bibliothèque de Perga fondée à l'image de celle de son pays. Astronome de talent, on lui doit surtout huit livres sur les sections coniques où il définit pour la première fois les termes ellipse, hyperbole et parabole. Il établit à cette occasion la plupart des propriétés des coniques (seul l'excentricité n'apparait pas) et de nombreux lieux géométriques et constructions (le cercle tangent à trois cercles donnés par exemple).
Signalons que la première version francaise des "Coniques" fut écrite par un Belge, P. Ver Eecke, en 1922.

ARCHIMEDE (-287,-212) Grec (L1).
Comme physicien, on lui doit la première loi de l'hydrostatique, la vis sans fin, la théorie des leviers et des roues dentées. Comme mathématicien, on lui doit un calcul de la longueur de la circonférence par des polygones inscrits à grand nombre de cotés, l'aire et le volume des corps ronds, l'étude des spirales et des tangentes aux courbes.
Grand distrait, il perdait souvent son savon dans le bain (eureka!); il ne vit pas non plus le soldat qui le tuait durant le siège de Syracuse par les Romains. En 1269, le Belge Guillaume de Moerbeke publiera les premières versions latines des textes d'Archimède (traduits de l'arabe).

ARCHITAS de Tarente (-430,-360) Grec (L1).
Pythagoricien, ami de Platon a écrit le premier traité de mécanique basé sur des principes mathématiques. Le livre VIII des Eléments d'Euclide reprend les travaux d'Architas sur les proportions et les similitudes. Il trouva une solution dans l'espace au problème de la duplication du cube. Il serait le père du cerf-volant en Occident.

ARISTARQUE de Samos (v-310,v-230) Grec (L1).
Astronome grec qui le premier affirma que la terre et les planètes tournent autour du soleil (17 siècles avant Copernic). Il établit des techniques pour évaluer les distances terre-lune et terre-soleil, mais les résultats qu'il obtint ne sont pas valables, car basés sur des observations imprécises.

ARYABHATA (v450) Indien (L2).
Mathématicien et Astronome, Aryabhata emploie, dès 510, le principe de position et un zéro dans la numération. Il inventa le sinus verse (= 1-cos), tombé en désuétude depuis et proposa la valeur 3,1416 pour pi. Il expliqua la rotation apparente du soleil par la rotation de la terre. Il est aussi le père des fractions continues qu'il employait pour résoudre des équations.

●●●● B ●●●●

BAIRE René-Louis (1874-1932) Français (16).
Un des fondateurs de la topologie, on lui doit la notion d'ouvert et de continuité.

BARROW Isaac (1630-1677) Anglais (L4).
Titulaire d'une chaire de mathématique à Cambridge, Barrow produit le premier exposé complet et systématique des propriétés infinitésimales des courbes connues à son époque. Il entrevoit la relation inverse entre différenciation et intégration, lien que son successeur à Cambridge, Newton perfectionnera lorsque Barrow abandonnera la mathématique pour la théologie.

BAYES Thomas (1702-1761) Anglais (L4).
Il s'est occupé de la détermination de la probabilité des causes à partir des effets observés. Il a donné son nom à la formule des probabilités conditionnelles.

BEDE le Vénérable (Saint) (v673-735) Anglais (L2).
Moine bénédictin, Bède est l'un des plus grands érudits de son temps. Ses nombreux travaux englobent entre autres un traité sur le calendrier et la détermination mathématique de la fête de Pâques ainsi qu'un traité sur la représentation des nombres au moyen des doigts. Canonisé en 1899 pour ses nombreux travaux théologiques, il est fêté le 27 mai.

BERNOULLI Daniel (1700-1782) Suisse (L5).
Fils de Jean, on lui doit la traduction analytique du problème des deux corps, l'introduction des fonctions circulaires et des séries trigonométriques (étudiées après par Fourier). En physique, son traité "Hydrodynamica", fondé sur le principe de la conservation de l'énergie cinétique contient l'ébauche d'une théorie cinétique des gaz.

BERNOULLI Jacques (1654-1705) Suisse (L4).
Frère de Jean, il possède la chaire de mathématique de l'université de Bale. Grand zélateur de Leibniz, il adopte les notations différentielles (le nom Intégrale est de lui). Son nom est attaché à la lemniscate, à la spirale logarithmique et aux sommations partielles des puissances n-ièmes.
On lui doit aussi une loi des grands nombres en probabilité.

BERNOULLI Jean (1667-1748) Suisse (L4).
Frère de Jacques et père de Daniel, professeur de L'Hospital, il lui inspirera l'analyse des infiniment petits. C'est lui qui donnera une définition analytique (=non géométrique) de la notion de fonction. En physique, on lui doit le principe des vitesses virtuelles.

BEZOUT Etienne (1730-1783) Français (L5).
Avec quelques autres, il a mis au point les techniques des déterminants. On lui doit aussi l'étude des équations algébriques.

BIENAYME Jules Irénée (1796-1878) Français (L5).
Inspecteur général des finances, il est connu pour la découverte d'une inégalité fondamentale en probabilité.

BOETIUS Anitius Manlius Severinus (v480-524) Romain (L2).
Homme d'état remarquable, il fut consul à Rome sous Théodoric, mais tombé en disgrace pour des raisons religieuses, il fut emprisonné, puis mis à mort après une longue détention.
Il a traduit en latin l'Almageste de Ptolémée et les Eléments d'Euclide. On lui doit diverses méthodes de classification des nombres et une interprétation mystique des nombres. Son Arithmétique fut la seule source à laquelle le monde médiéval ait puisé pendant près de mille ans.

BOMBELLI Raphael (1526-1573) Italien (L4).
On lui doit la résolution de l'équation cubique et la démonstration du rôle des nombres complexes dans la solution d'équations. Il est le premier à suggérer l'emploi de symboles (p et m) pour l'addition et la soustraction.

BOLYAI Farcas (1775-1856) Hongrois (L5).
Ami de Gauss, il tenta en vain de démontrer le postulat des parallèles.

BOLYAI Janos (1802-1860) Hongrois (L5).
Avec Lobatchevski, il poursuivit les travaux de son père et créa la géométrie absolue ou le postulat des parallèles est un axiome que l'on peut modifier, créant ainsi la géométrie hyperbolique: par un point extérieur à une droite, on mène une infinité de parallèles.

BOOLE George (1815-1864) Anglais (L5).
S'étant lié d'amitié avec De Morgan entreprend ses propres recherches sur la logique. Sa conception très abstraite de l'algèbre lui fait découvrir "les lois de la pensée" qui seront à l'origine de l'unification par la logique des mathématiques. Son système est d'application en probabilité et depuis peu est utilisé dans l'étude des circuits électriques dont les structures sont à la base de la construction des calculatrices et ordinateurs.

BOREL Emile (1871-1956) Français) (16).

Il a donné son nom à de nombreux théorèmes sur les séries divergentes et les espaces topologiques. Il a mis au point la définition de mesure et d'ensemble de mesure nulle sur laquelle est basée l'intégrale de Lebesgue, outil essentiel de l'analyse contemporaine. Il est le pionnier de la théorie des jeux stratégiques développée ensuite, mais indépendamment par Von Neumann (1903-1957).

BOURBAKI Nicolas (1939) (L6).

Après un vaste programme de recherches sur l'axiomatique en mathématique, Bourbaki publie dès 1939 un survol organisé de la mathématique anarchique du début du siècle. La mathématique doit s'organiser autour de l'idée de structure. Il met aussi l'accent sur le sens important de l'histoire. La base de sa pensée est dans "les Eléments", régulièrement mis à jour.
Un dernier détail: Bourbaki n'existe pas : c'est le pseudonyme collectif d'un groupe de mathématiciens où l'anonymat est de rigueur. On sait seulement qu'il est né en France...

BRADWARDINE Thomas (v1290,1349) Anglais (L3).

Philosophe, théologien et mathématicien, surnommé "Doctor profundus" à cause de son érudition, il développe la théorie des proportions et propose des lois du mouvement. Il pressentit le calcul différentiel par la doctrine des indivisibles.

BRAHE Tycho (1546-1601) Danois (L3).

Protégé par son souverain, le roi Frédéric II de Danemark, Brahe construit à Uraniborg le premier observatoire digne de ce nom. Il accumulera de nombreuses observations dont l'un de ses élèves, Képler, tirera des lois célèbres. Refusant les théories de Copernic et de Ptolémée, il en élabora une lui-même, sans se douter qu'elle n'était qu'une variante mathématique du système copernicien.

BRAHMAGUPTA (598-665) Indien (L2).

Le plus grand des astronomes indiens. Dans son "Ouverture du monde", deux chapitres sont consacrés aux mathématiques : il y parle de progression arithmétique, de solutions négatives d'équations, des propriétés des triangles rectangles et des règles des signes dans les produits et les quotients.
Il a également généralisé la formule de Héron aux quadrilatères cycliques.

BRIANCHON Charles Julien (1785-1864) Français (L5).

Elève de Monge, Brianchon a laissé son nom à un théorème célèbre sur les diagonales principales des hexagones circonscrits à une conique, théorème dual de l'hexagramme de Pascal. Ces deux théorèmes sont fondamentaux dans l'étude projective des coniques.

BRIGGS Henry (1561-1630) Anglais (L3).
Après l'invention des logarithmes par Néper, Briggs suggère d'employer la base 10. De la rencontre de ces deux hommes, naitront les mantisses et les caractéristiques, permettant la rédaction des tables de logarithmes (dits vulgaires). Telle une trainée de poudre, ces techniques de calculs vont se répandre dans tous les milieux scientifiques où elles vont permettre -sans jeu de mots- les calculs astronomiques.

BUFFON Georges Louis Leclerc, comte de (1707-1788) Français (L4).
Ce naturaliste, écrivain et académicien a donné aux mathématiques une méthode probabiliste pour calculer une approximation de pi: elle est basée sur la chute d'épingles sur un plancher...

•••• C ••••

CAMPANUS de Novare (v1482) Italien (L3).
Sa traduction des Eléments d'Euclide sera le premier texte imprimé de ces Eléments. Personnellement, il s'est soucié de l'angle des tangentes aux points de contact de plusieurs courbes et de la trisection de l'angle.

CANTOR Georg (1845-1918) Allemand (L5).
Après avoir soutenu une thèse de philosophie, Cantor s'intéressent aux séries trigonométriques, puis il se lie avec Dédekind. La correspondance des deux hommes révèle les idées fondamentales de la théorie des ensembles, des nombres transfinis, de la distinction entre la puissance du dénombrable et celle du continu. Les attaques de certains mathématiciens contre ses théories vaudront à Cantor plusieurs dépressions nerveuses. Aujourd'hui, ses idées sont devenues classiques.

CARDAN Hiéronimo (1501-1576) Italien (14).
Médecin, Astrologue et Mathématicien, Cardan eut une vie mouvementée : expulsion, emprisonnement, soupconné de magie. Il est pourtant le meilleur algébriste de son époque et son "Ars Magna" contient la résolution de l'équation du troisième degré, examinée cas par cas et celle du quatrième degré dont il attribue la paternité à Ferrari. La résolution de ces équations fut en fait la plus grande contribution à l'algèbre depuis les Babyloniens. En ce sens, Cardan apparait comme le stimulus de la recherche algébrique de cette époque.

CARNOT Lazare Nicolas Marguerite (1753-1823) Français (L5).
Après une formation d'ingénieur militaire, Carnot se brouille avec les autorités du corps royal du génie. En 1791, on le retrouve à l'Assemblée législative, puis en 1793, il dirigera l'armée du nord à la victoire de Wattignies. Il sera du Directoire, puis ministre de la guerre de Napoléon. La restauration lui vaudra l'exil. Cette longue carrière politique ne l'empèche pas de consacrer du temps à des activités scientifiques : théorie des transversales, réflexions sur la méthaphysique du calcul infinitésimal. Il fonde avec Monge la géométrie moderne et est le premier historien sérieux des mathématiques. Il remit à l'honneur les transformations

géométriques comme l'involution et l'homographie.

CARTAN Elie (1869-1951) Francais (L6).
Professeur à la Sorbonne, il consacre ses travaux à la théorie des groupes, approfondissant l'oeuvre de Lie. Il a devancé Einstein en découvrant les spineurs, éléments d'algèbres particulières, qui jouent un rôle fondamental en physique des particules. Théoricien profond, Cartan fut aussi un grand vulgarisateur et pédagogue.

CASSINI Jean-Dominique (1625-1712) Italien (L4).
Professeur d'astronomie à l'université de Bologne, il est invité en France par Colbert pour fonder l'Observatoire de Paris. On lui doit la découverte de plusieurs satellites de Saturne et une "Carte de la Lune" restée sans rivale jusqu'à l'apparition de la photographie. En mathématique, on lui doit des courbes particulières : les ovales et les lemniscates.

CASSIODORE Senator (v490) Romain (L2).
Questeur, puis consul, Cassiodore écrivit un "Arithmetica" qui a servi de manuel dans les écoles au début du Moyen Age et comme source de référence pour d'autres ouvrages de niveau inférieur. Dans son oeuvre, il démontre que "Dieu a crée l'univers sur les concepts de nombre, de mesure et de poids".

CATALAN Eugène-Charles (1814-1894) Français (L5).
Né à Bruges de parents français, Catalan fut professeur dans différents Collèges et occupa entre autres la chaire d'Analyse à l'Université de Liège de 1865 à 1884. Il a consacré de nombreux travaux aux intégrales multiples, imaginant la méthode de réduction aujourd'hui classique. Il étudia aussi les séries et produits infinis, les polyèdres semi-réguliers et les lignes de courbure de l'espace. Son arrivée en Belgique eut une influence profonde sur le développement des Mathématiques dans notre pays.

CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857) Français (L5).
D'une santé fragile, Cauchy devait son éducation à son père. En 1805, il est second au concours d'entrée à Polytechnique. En 1811, il soumet son premier mémoire consacré aux polyèdres: il n'existe pas de polyèdres réguliers sauf ceux ayant 4,6,8,12 ou 20 faces. En 1814, c'est un mémoire sur les intégrales définies, puis la démonstration d'un postulat de Fermat: tout naturel est somme de trois nombres triangulaires, de quatre carrés,... En 1816, il est nommé académicien et sa réputation ne cesse de se répandre. Monarchiste convaincu, il refusa le serment à Napoléon III lors de sa nomination à la Sorbonne. Napoléon l'ayant dispensé, il répondit au geste condescendant de l'empereur en distribuant son traitement aux pauvres de Sceaux où il habitait.
Dans les notes de ses cours, Cauchy développe la rigueur en analyse et dans le calcul des séries. Il s'occupera aussi des fonctions de variables complexes et il fondera la théorie des groupes finis. Il a aussi énoncé des théorèmes fondamentaux sur les déterminants et sur les équations différentielles.

Une formule étonnante

Voici une étoile à quatre branches. Je te propose de chercher son aire. La méthode que tu pourrais employer serait de diviser cette étoile en figures géométriques dont tu connais la formule d'aire (*fig.1*). De cette manière, tu trouveras son aire.

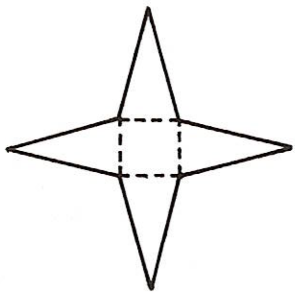


fig.1

Dans cet article, tu vas apprendre une méthode étonnante qui te permettra d'évaluer l'aire de l'étoile et de tout autre polygone non croisé.

Pour commencer, tu prends une feuille quadrillée et tu redessines l'étoile de telle sorte que chaque sommet corresponde à un point du quadrillage *(fig.2)*.

La formule que l'on va utiliser est la suivante :

$$\boxed{\text{aire } (P) = i + \frac{b}{2} - 1}$$

où ***P*** *est un polygone non croisé dont tous les sommets sont des points du quadrillage*

i désigne le nombre de points du quadrillage se trouvant à l'intérieur du polygone

b désigne le nombre de points du quadrillage se trouvant sur le bord de P

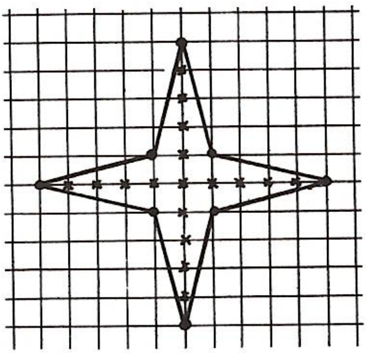


fig.2

L'unité que l'on choisira sera évidemment l'aire d'un carreau.

Calculons l'aire de notre étoile. Comptons le nombre de points à l'intérieur (*marqués d'une croix*) nous trouvons : i = 17, et le nombre de points sur le bord *(marqués d'un gros point)* : b = 8. Appliquons la formule·

$$17 + \frac{8}{2} - 1 = 20 \text{ carreaux}$$

Après avoir vérifié le résultat, je te propose de calculer l'aire des figures suivantes (*fig.3*) en utilisant cette formule. Si cela n'est pas valable, essaye d'expliquer pourquoi.

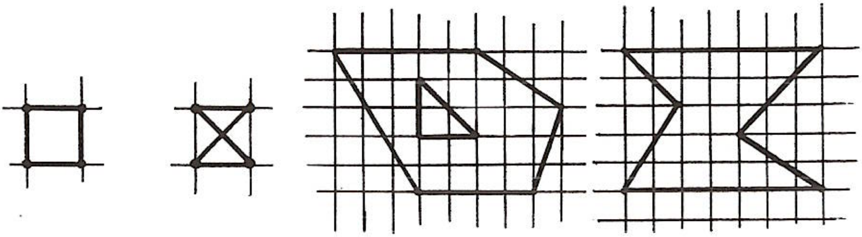


fig.3

Démontrons cette formule surprenante en procédant par étapes successives.

(1) Dessinons un rectangle ABCD en plaçant les côtés sur des lignes du quadrillage (*fig.4*) et cherchons-en l'aire.

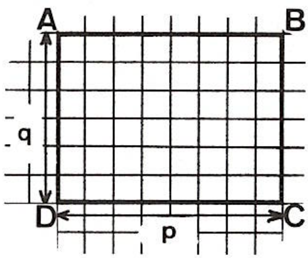


fig.4

La longueur étant de *p carreaux* et la largeur de *q carreaux*, il y a *(p-1)* points entre A et B, ceux-ci étant exclus; de même sur la largeur, on compte *(q-1)* points en ne tenant pas compte des extrémités.
On trouve :

$$b = 2(p-1) + 2(q-1) + 4$$
$$= 2(p+q)$$

et

$$i = (p-1)(q-1).$$

Appliquons la formule :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (p-1)(q-1) + \frac{1}{2}\,2(p+q) - 1$$

$= pq$ qui est bien l'aire du rectangle considéré.

(2) Passons maintenant au cas des triangles. Mais avant d'aborder le problème des triangles quelconques (les sommets étant toujours des points du quadrillage), commençons par le cas d'un triangle rectangle dont 2 côtés sont portés par le quadrillage.
Prenons, par exemple, le triangle de sommets ACD, moitié du rectangle précédent ABCD (*fig.5*). Appelons *d* le nombre de points sur l'hypoténuse AC, les extrémités, A et C, étant toujours exclues.

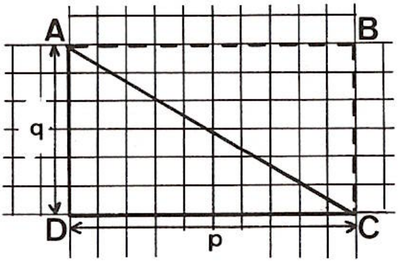


fig.5

On trouve :

$$b = (p-1) + (q-1) + d + 3$$
$$= p + q + d + 1$$

et

$$i = \frac{1}{2}(\ (p-1)(q-1) - d);$$

ce qui donne si on applique la formule :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{1}{2}((p-1)(q-1) - d) + \frac{1}{2}(p+q+d+1) - 1$$
$$= \frac{1}{2}\ pq$$ qui est l'aire du triangle ACD.

(3) Pour vérifier la formule dans le cas de triangles quelconques, nous avons besoin d'un résultat supplémentaire. Le voici : Si on coupe un polygone en 2 polygones, P_1 et P_2 (*fig.6*), voyons ce qui se passe.

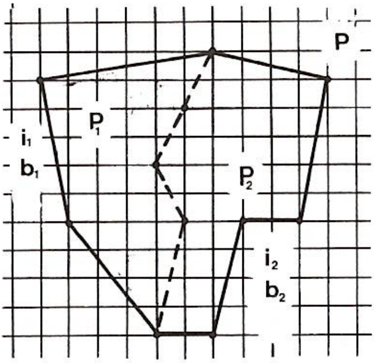


fig.6

La découpe ne peut pas se faire n'importe comment; il faut tenir compte d'une hypothèse H qui est la suivante :

l'intersection des 2 polygones doit être une ligne polygonale dont les sommets sont tous des points du quadrillage.

Dans ces conditions, nous obtenons :

$b = b_1 + b_2 - 2(d+1)$ et $i = i_1 + i_2 + d$

où b et b_i *sont les nombres de points respectivement sur sur les bords de* P et P_i

i et i_i *sont les nombres de points respectivement à l'intérieur de* P et P_i

d est le nombre de points sur la ligne séparant les 2 polygones, en excluant toujours les extrémités.

Si S et S_i désignent les aires respectives de P et P_i, et tenant compte de l'hypothèse H,

$$S = S_1 + S_2$$

les implications suivantes sont évidentes :

$$\left(S_1 = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 \quad \text{et} \quad S_2 = i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right) \Longrightarrow S = i + \frac{b}{2} - 1$$

$$\left(S = i + \frac{b}{2} - 1 \quad \text{et} \quad S_1 = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) \Longrightarrow S_2 = i_2 + \frac{b_2}{2} - 1$$

(4) Nous pouvons maintenant vérifier la formule dans le cas d'un triangle quelconque.

Traçons un tel triangle et appelons-le T (*fig.7*) . Considérons le plus petit rectangle le contenant.

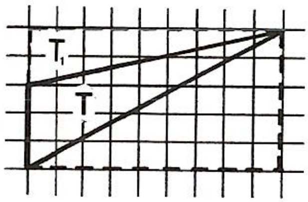


fig.7

T_1 et $T \cup T_1$ sont 2 triangles dont 2 des côtés sont portés par le quadrillage; la formule est donc vérifiée pour ces triangles.
Appelons i_1, b_1 et S_1 les éléments de T_1
i, b et S les éléments de T

Nous obtenons :

$$\text{aire } (T_1) = S_1 = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{aire } (T \cup T_1) &= (i + i_1 + d) + \frac{1}{2}(b + b_1 - 2(d+1)) - 1 \\ &= i + i_1 + d + \frac{b}{2} + \frac{b_1}{2} - d - 2 \\ &= i + i_1 + \frac{b}{2} + \frac{b_1}{2} - 2 \end{aligned}$$

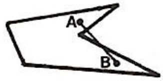
De plus T et T_1 satisfont l'hypothèse H; nous pouvons en déduire l'aire du triangle T :

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

La formule est donc également vraie dans le cas de triangles quelconques.

(5) Généralisons à des polygones convexes.
Un polygone est dit être convexe si, lorsque l'on prend 2 points à l'intérieur de ce polygone, le segment les reliant est entièrement inclus dans celui-ci.

oui



non

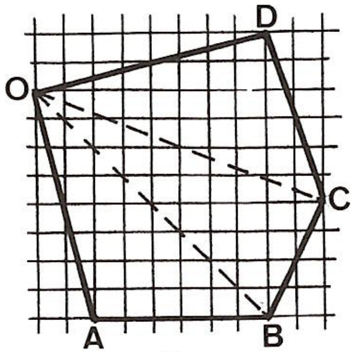


fig.8

Prenons, par exemple, le polygone convexe OABCD (*fig.8*). Divisons-le en triangles. Les triangles OAB et OBC sont dans les conditions permettant d'appliquer la formule et satisfont également l'hypothèse H; ce qui nous permet d'affirmer que la formule est vraie pour le polygone OAC. Par le même raisonnement en considérant les figures OAC et OCD, on prouve que la formule est valable pour le polygone convexe OABCD.

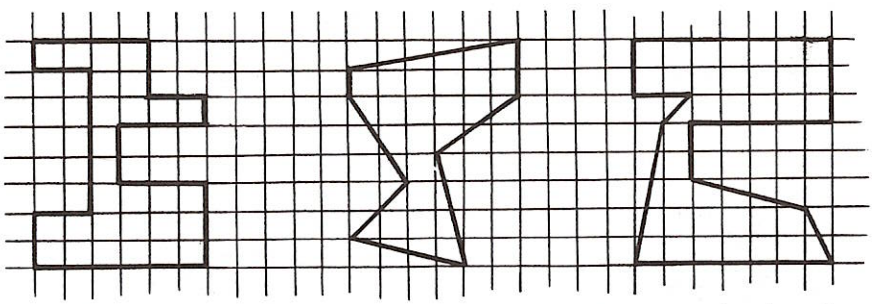
6 Tout cela nous permet de passer enfin au <u>cas général</u> : aux polygones non croisés dont tous les sommets correspondent à des points du quadrillage.
Supposons que notre polygone P puisse se décomposer en un nombre fini de polygones convexes P_1 , P_2 , ..., P_n de telle manière qu'on ait les 2 conditions suivantes satisfaites :

(A)

1. $P = P_1 \cup P_2 \ \dots \cup P_n$
2. $\forall\, k=1, \dots, n-1;\ k \in \mathbb{N}$: *les polygones* $P_1 \cup \dots \cup P_k$ *et* P_{k+1} *vérifient l'hypothèse H.*

Si de telles conditions sont vérifiées, par un raisonnement analogue à celui fait précédemment, nous pouvons affirmer que la formule est vraie pour tout polygone non croisé de ce type.

Voici des polygones non croisés; essaye de trouver pour chacun une décomposition en polygones convexes satisfaisant les 2 conditions précédentes. Ensuite applique la formule qui te donnera l'aire.



Qui nous enverra une stratégie valable pour tout polygone non croisé, démontrant ainsi la supposition (A) ?

Après avoir démontré la formule permettant d'évaluer l'aire de polygones non croisés, généralisons-la pour des figures non polygonales F, mais dont les sommets se trouvent toujours sur des points du quadrillage.

Voici <u>la formule générale</u> :

$$\boxed{\text{aire } (F) = i + \frac{b}{2} + \gamma(F)}$$

où $\gamma(F)$ *est un terme dépendant uniquement de la forme de la figure F. Nous venons de voir que si F est un polygone non croisé,* $\gamma(F) = -1$.

Que vaut ce coefficient dans le cas d'une couronne ?
Considérons la figure F *(fig.9)* ; elle est formée de 2 polygones non croisés, P_1 et P_2 . Nous avons :

$$F = P_1 - P_2$$

Ces 2 polygones étant non croisés vérifient la formule

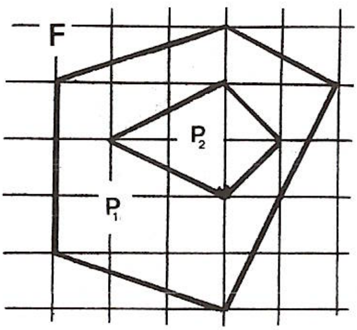


fig.9

d'aire; je peux donc écrire :

$$\text{aire } (P_1) = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1$$

$$\text{aire } (P_2) = i_2 + \frac{b_2}{2} - 1$$

Si i et b sont les éléments de F, on peut également écrire :

$$i = i_1 - (b_2 + i_2)$$

$$b = b_1 + b_2$$

Et puisque :

$$\text{aire } (F) = \text{aire } (P_1) - \text{aire } (P_2)$$

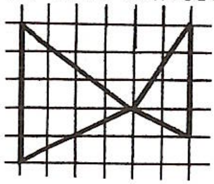
on obtient :

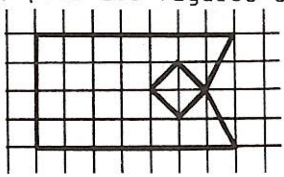
$$\text{aire } (F) = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 - (i_2 + \frac{b_2}{2} - 1)$$

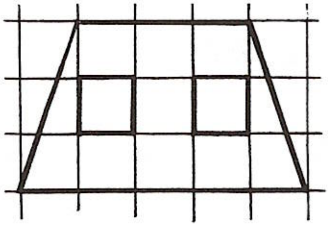
$$= i + \frac{b}{2}$$ Ce qui nous permet de dire

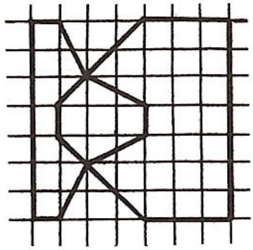
que pour une couronne, $\gamma(F) = 0$.

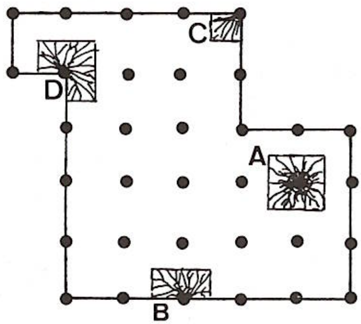
De la même manière, calcule $\gamma(F)$ pour les figures suivantes :











Si les côtés sont portés par le quadrillage, on peut formuler un autre raisonnement qui permettra de trouver l'aire, par une technique que nous qualifierons d'écologique.

Imaginons que le polygone soit un verger : chaque point du quadrillage est occupé par cette nouvelle race de pommier qui a la particularité de développer ces branches en un carré parfait (voir le modèle en A).

L'automne nous permet de distinguer quatre cas d'espèce dans la chute des pommes.

Les pommiers de type A (franchement à l'intérieur du verger) laissent tomber toutes leurs pommes à l'intérieur : ils compteront donc pour une unité dans la production de pommes.

Les pommiers situés sur le bord comptent tous pour une demi-unité, à ceci près que les pommiers de type C, qui ne produisent qu'un quart seraient ainsi comptés pour un quart de trop et les pommiers de type D pour un quart trop peu.

On peut facilement se convaincre que la différence entre le nombre de coins de type C et le nombre de coins de type D doit être 4. En effet, imaginez-vous en train de contourner un tel verger, dans le sens horloger, vous devrez exécuter 4 quarts de tour à droite pour revenir au départ ; tout quart de tour à gauche doit être compensé par un quart de tour à droite.

On se résume donc en remarquant que les pommiers du bord seront à quatre reprises comptés pour un quart de trop. La formule peut donc s'exprimer par :

Récolte de pommes = nb de pommiers intérieurs
+ (nb de pommiers sur le bord)/2
- 1

Le coin des problèmes

96 Carrés parfaits particuliers.

Le carré de 7810 est 60996100, nombre formé de deux tranches de quatre chiffres formant deux nombres consécutifs. Est-il le seul carré formé d'une manière analogue ?

97 Régions du plan.

On trace sur une feuille fixe un cercle de rayon 4 cm. On y inscrit un carré ABCD. On marque en trait fort l'arc CDAB. Sur une feuille de papier transparent on décalque le carré ABCD. On appelle M le point homologue de A. On déplace par translation le papier calque. On compte le nombre de points d'intersection de l'arc fixe CDAB et du contour du carré mobile. Indiquer pour chaque position de M sur la feuille fixe le nombre de ces points.

98 Huit lettres.

G	E	F
H	C	B
D		A

Huit lettres sont disposées dans les cases du carré ci-contre. Il faut les mettre par ordre alphabétique en les déplaçant sur la case libre. C'est facile à faire si vous n'êtes pas lié par le nombre de coup. Mais le problème consiste à réussir avec le minimum de coups possible. Quel est ce minimum ? Et quels sont les mouvements?

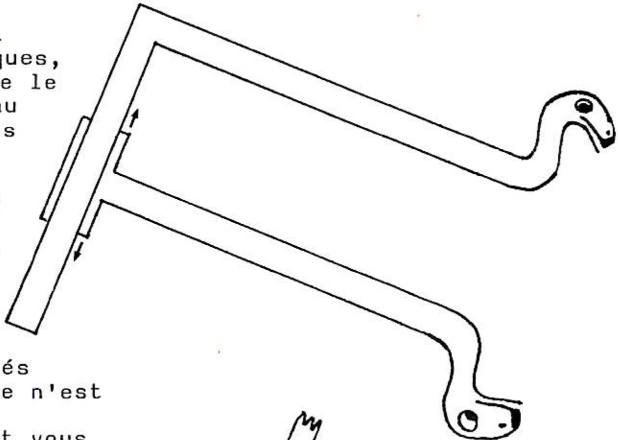
99 Les trisectrices.

Pouvez-vous trouver trois paires de trisectrices des angles d'un triangle quelconque telles que leurs points d'intersection soient les sommets d'un triangle équilatéral? Et le démontrer ?

100 Les deux bougies.

Tout à coup, la lumière électrique s'éteignit dans l'appartement, les fusibles venaient de sauter. J'allumai 2 bougies qui se trouvaient là et je continuai à travailler jusqu'à ce que le réseau fût réparé. Le lendemain, je voulus savoir combien de temps l'appartement était resté privé de courant. Je n'avais pas noté l'heure à laquelle la lumière s'était éteinte, ni à laquelle elle s'était rallumée. Je ne connaissais pas non plus la longueur initiale des bougies: je me souvenais qu'elles étaient neuves, de même longueur, l'une prévue pour brûler 5 heures et l'autre 4. Maman, qui avait jeté les restes des bougies se souvenait que l'une était quatre fois plus longue que l'autre. Quelle a été la longueur de la panne ?

L'extracteur de racine cubique



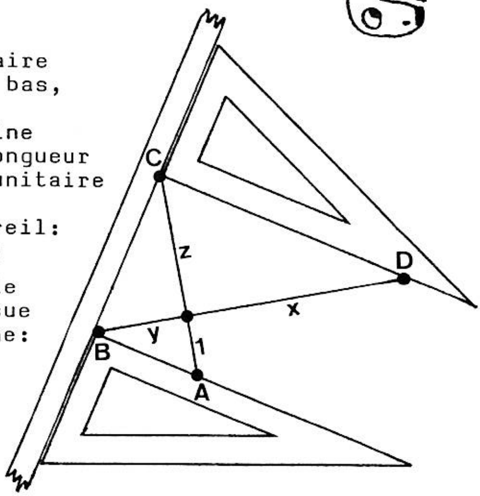
Les Romains, qui étaient gens pratiques, avaient remarqué que le diamètre du faisceau de cordes élastiques d'une catapulte devait être égal à la racine cubique du centuple du poids du projectile à lancer.

Ils devaient bien sûr exprimer le diamètre et le poids dans des unités appropriées, mais ce n'est pas ici notre but

Le dessin du haut vous montre "la machine à extraire les racines cubiques"; en bas, une version plus moderne.

Soit à extraire la racine cubique d'un segment de longueur x. On dessine un segment unitaire perpendiculairement à x.

Puis on "place" l'appareil: c'est loin d'être évident!



Dans le triangle ABC, le théorème de la hauteur issue de l'angle droit nous donne:

$$y^2 = 1.z$$

Dans le triangle BCD, la même relation nous donne :

$$z^2 = y.x$$

Il suffit de combiner les deux relations pour découvrir que

$$y^3 = x$$

y est donc la racine cubique cherchée de x.

SOMMAIRE MATH-JEUNES 21

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'Expression française.
A.S.B.L.

Rédaction et Edition de Math-Jeunes

Gh. MARIN, J. MIEWIS et W. VANHAMME

Courrier

Math-Jeunes, Avenue de Péville, 150, 4030 - Liège

Abonnement

Belgique :	*groupés (5 au moins)*	*60 FB*	*par abonnement*
	isolés	*100 FB*	
Etranger :	*par paquets de 5*	*600 FB*	*le paquet*
	isolé	*200 FB*	

Compte n° 000-0728014-29 , SBPM
Chemin des Fontaines, 14 bis, 7460 - Casteau
Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont normalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.

Poster historique: *Belgique : 30 FB*
par paquets de 5 : 120 FB
Etranger : 60 FB
par paquets de 5 : 240 FB

Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme à payer de 100 FB.