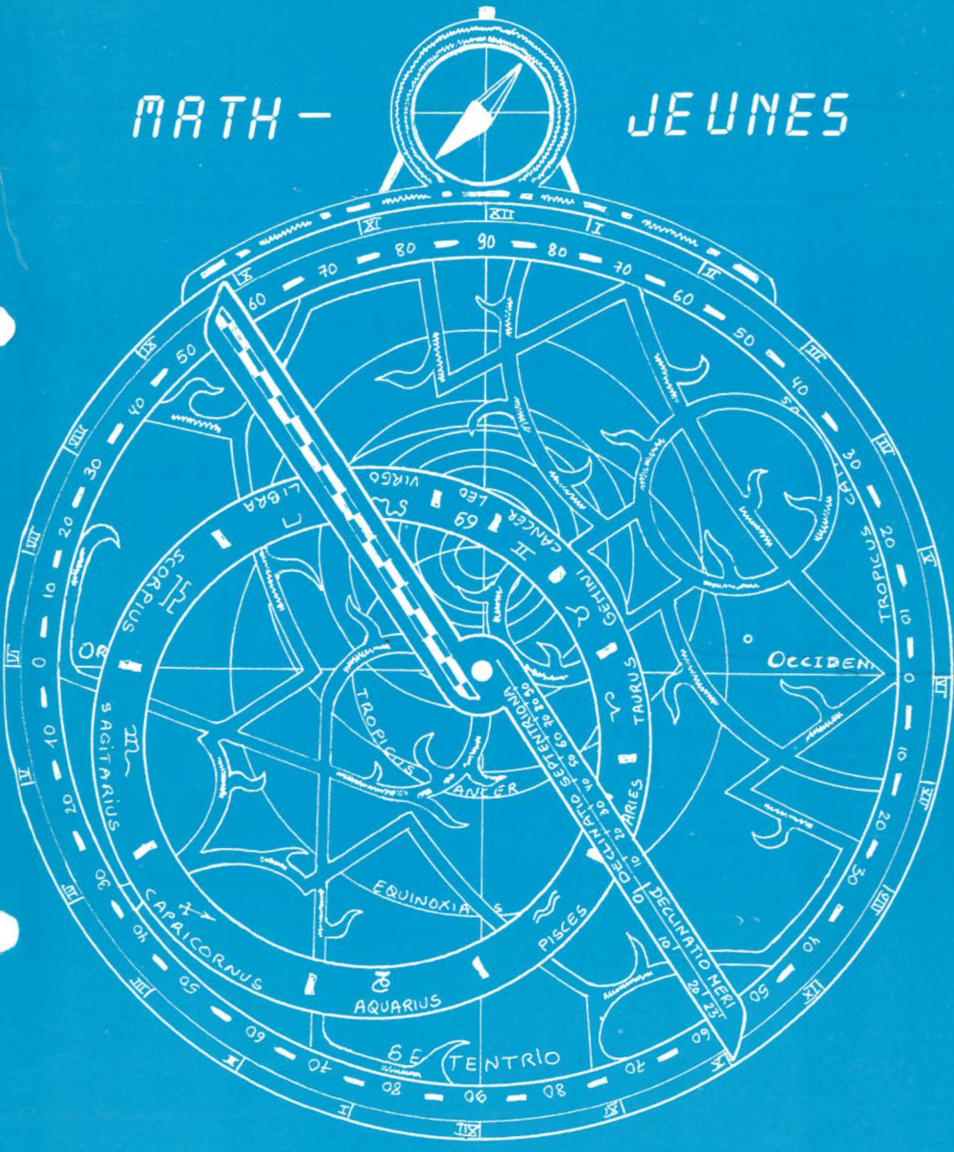
7e Année Numéro 26 Printemps 1985

MATH- JEUNES



Publication trimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. A.S.B.L.

Chers amis,

Avez-vous pu identifier le dessin choisi cette année 1984-85 pour illustrer la page couverture de votre journal ?

Il s'agit d'un ancien appareil de mesure

L ' ASTROLABE

Si nous consultons le petit Larousse, nous trouvons comme définition :

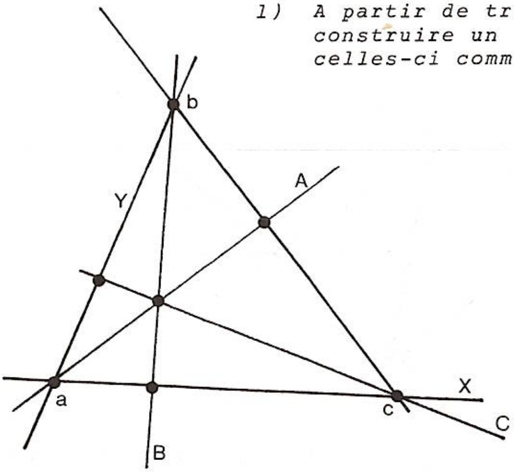
"Instrument servant à mesurer la hauteur d'un astre au dessus de l'horizon "

Qui (ou quel groupe) pourra-t-il nous expliquer son fonctionnement ?

La meilleure description sera publiée dans le numéro 27.

Des droites remarquables

1) A partir de trois droites concourantes, construire un triangle qui admette celles-ci comme hauteurs .



A , B , C les 3 droites.

Soit a un point de A.
Par a, menons X ⊥ B.
Par a, menons Y ⊥ C.

Soit c le point commun à X et C.
Soit b le point commun à Y et B.

Le triangle abc est une solution du problème.

La justification découle d'elle-même des constructions.

2) A partir de trois droites concourantes, construire un triangle qui admette celles-ci comme médiatrices.

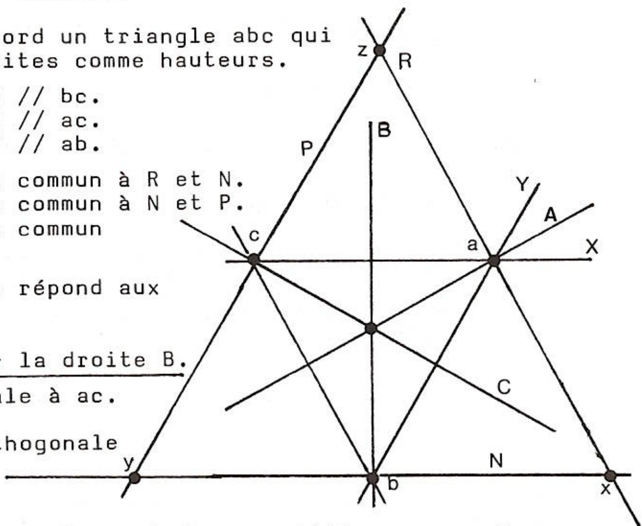
A , B , C les 3 droites.

Construire d'abord un triangle abc qui admette ces droites comme hauteurs.

Par a, menons R // bc.
Par b, menons N // ac.
Par c, menons P // ab.

Soit x le point commun à R et N.
Soit y le point commun à N et P.
Soit z le point commun à P et R.

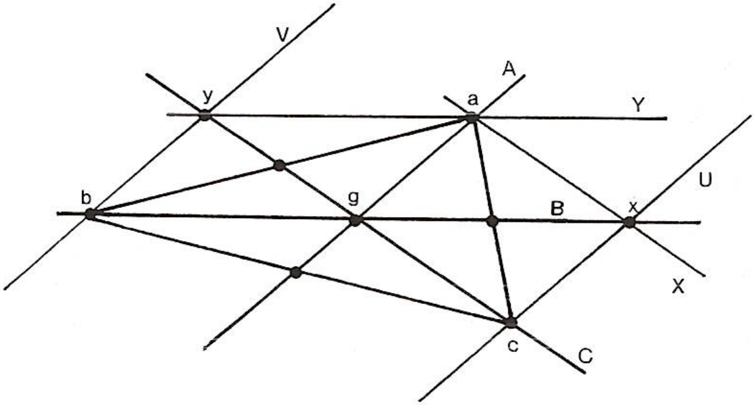
Le triangle xyz répond aux conditions.



Justifions pour la droite B.

B est orthogonale à ac.
ac est // à N.
Donc, B est orthogonale à N.

De plus, acyb et acbx sont des parallélogrammes. Donc b est le point milieu du segment xy.



3) A partir de trois droites concourantes, construire un triangle qui admette celles-ci comme médianes.

A , B , C les trois droites.

Soit a un point de A.

Par a, menons X // C.
Par a, menons Y // B.

Soit x le point commun à X et B , soit y le point commun à Y et C.

Par x, menons U // A.
Par y, menons V // A.

Soit b le point commun à V et B , soit c le point commun à U et C.

Le triangle abc répond aux conditions.

En effet, soit g le point d'intersection des droites A, B et C. Montrons que B est médiane du triangle abc.

Par construction, axcg est un parallélogramme, et dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Dès lors, B comprend b, mais aussi le point milieu du segment ac.

J.P. Andrien.

! *Entre-nous, si le prix des voitures s'était aligné sur le prix des ordinateurs ces 20 dernières années, une Rolls-Royce coûterait aujourd'hui un peu plus de 100 frs !!!*

Héron et la racine carrée

Au premier siècle après Jésus-Christ, Héron d'Alexandrie proposa, pour connaître la valeur de la racine carrée d'un nombre positif A, de se choisir comme approximation arbitraire a_0, et de calculer a_1 par cette formule :

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right)$$

On trouverait a_2 en recommençant le calcul, a_1 ayant pris la place de a_0. On continue ainsi aussi loin qu'on le désire.

Justifions cet algorithme de recherche de la racine carrée d'un nombre positif.

1. Le théorème.

> Soient trois réels strictement positifs A, a, b avec $a < b$.
> Alors l'intervalle $[a,b]$ contient le réel $\sqrt{A}$ si $a \times b = A$.

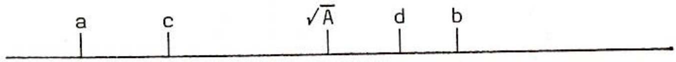
Il suffit de poser $a = \sqrt{A} - x$, avec $x > 0$.

$$b = \frac{A}{a} = \frac{\sqrt{A}.\sqrt{A}}{\sqrt{A} - x} = \frac{\sqrt{A}(\sqrt{A} - x) + x\sqrt{A}}{\sqrt{A} - x} = \sqrt{A} + \frac{x\sqrt{A}}{\sqrt{A} - x} = \sqrt{A} + y$$

avec $y > 0$. $[a,b]$ est donc bien un intervalle qui contient $\sqrt{A}$.

2. L'algorithme.

Considérons $c \in [a,b]$ tel que $c \times d = A$, nous allons montrer que dans ce cas, $d \in [a,b]$ également.



$c = a + m$ avec $m < b - a$
$d = b + n$. Il nous faut montrer que $n < 0$.

$ab = A = cd = (a + m)(b + n) = ab + an + mb + mn.$
Nous pouvons donc dire :
$0 = an + mb + mn$ ou encore $n(a + m) = - mb$
Et donc :

$$n = \frac{-mb}{a + m} < 0$$

Choisissons un point a_0 quelconque :

- si a_0 est inférieur à $\sqrt{A}$, $\sqrt{A}$ appartient à l'intervalle $[a_0 , \frac{A}{a_0}]$.
- si a_0 est supérieur à $\sqrt{A}$, $\sqrt{A}$ appartient à l'intervalle $[\frac{A}{a_0} , a_0]$.

Dans les deux cas, en effet $A = a_0 . \frac{A}{a_0}$.

On se choisit pour c le point milieu de cet intervalle, soit

$$c = a_1 = \frac{1}{2} (a_0 + \frac{A}{a_0})$$

et $\sqrt{A}$ appartiendra dans le premier cas à l'intervalle $[a_1 , \frac{A}{a_1}]$

dans le second cas à l'intervalle $[\frac{A}{a_1} , a_1]$

et en vertu de la remarque ci-dessus, ce dernier intervalle est dans les deux cas inclus au précédent.

Il n'y a qu'à calculer a_2 à partir de a_1 par la même formule. Ensuite, a_3, a_4, a_5 , ...

Où s'arrêter ?

- soit lorsque a_i et $\frac{A}{a_i}$ ont été trouvés très proches l'un de l'autre .
  Mathématiquement, cela revient à arrêter l'algorithme lorsque les deux bornes de l'intervalle qui encadre $\sqrt{A}$ ont une différence inférieure en valeur absolue à une limite que l'on s'impose au début du problème.
- soit lorsque a_{i+1} a été trouvé suffisamment proche de a_i.
  Mathématiquement, cela revient à arrêter l'algorithme lorsque la différence des bornes inférieures des intervalles lors de deux itérations successives a été trouvée inférieure en valeur absolue à une limite que l'on s'impose au début du problème.

Nous allons examiner les deux algorithmes. A priori, rien ne permet de préférer l'un à l'autre, seule, la comparaison des longueurs des programmes permet ce choix.

l'algorithme.

Données : A nombre positif dont on recherche la racine carrée.

E précision acceptée au départ : si Z est notre solution, la différence entre le carré de Z et A sera inférieure à E.

Itération : a_0 quelconque

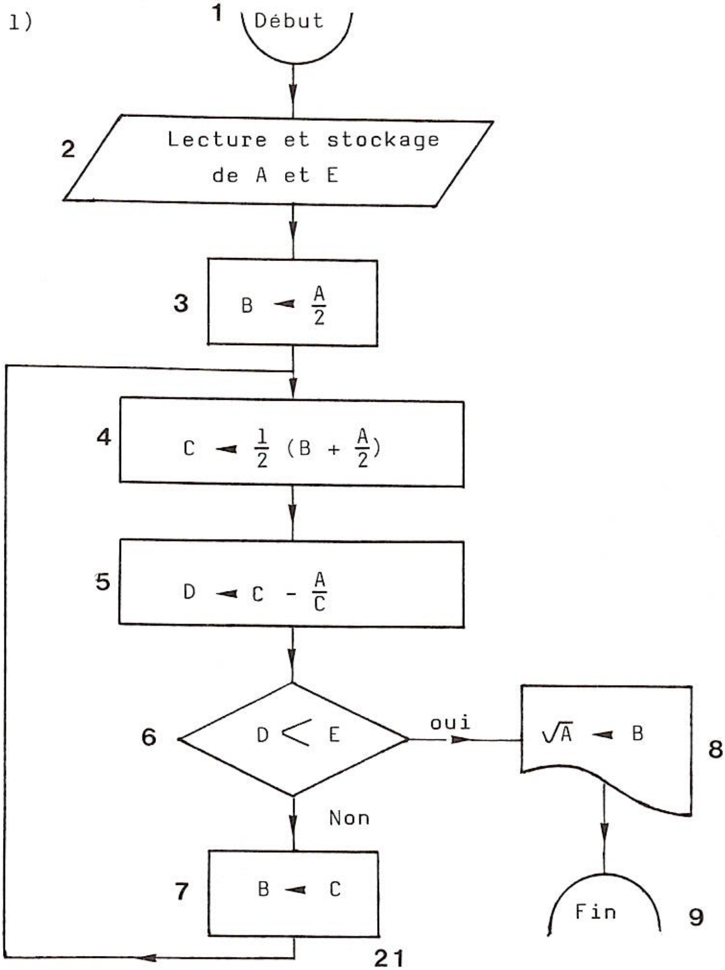
$$a_i = \frac{1}{2} \left(a_{i-1} + \frac{A}{a_i - 1}\right)$$

Arrêt type 1 : lorsque $a_i - \frac{A}{a_i}$ est inférieure à E

Arrêt type 2 : lorsque $a_{i-1} - a_i$ est inférieure à E

3. L'organigramme.

(type 1)



(type 2) La case numéro 5 est remplacée par celle-ci :

$\boxed{D \blacktriangleleft B - C}$

4. Les programmes pour T.I.57 et H.P. 97.
****

T.I.57

```
RCL1        2
:           =
2           STO3
=           -
LBL1        RCL2
STO2        =
:           +/-
RCL1        X<t
=           GTO2
1/x         RCL3
+           GTO1
RCL2        LBL2
=           RCL2
:           R/S
```

H.P.97

```
*LBL A      RCL2
 STO1       -
 2          CHS
 :          RCLE
*LBL 1      X>Y?
 STO2       GTO2
 RCL1       RCL3
 :          GTO1
 1/x       *LBL 2
 RCL2       RCL2
 +          RTN
 2
 :
 STO3
```

►Initialisation :

T.I.57	H.P.97
E	E
STO7	STO E
A	A
STO1	A
RST	
R/S	

►Registre :

T.I.57	H.P.97
A en mémoire 1	A en mémoire 1
B en mémoire 2	B en mémoire 2
C en mémoire 3	C en mémoire 3
E en mémoire 7	E en mémoire E

►Label :

T.I.57	H.P.97
1 : non au test	1 : non au test
2 : oui au test	2 : oui au test

►Essai :

T.I.57	H.P.97
A = 64 , E = 10^{-7}	A = 64 , E = 10^{-7}
Itérations successives :	Itérations successives :
1 32.	1 32.
2 17.	2 17.
3 10.382353	3 10.3823529
4 8.2733294	4 8.2733294
5 8.004515	5 8.0045151
6 8.0000013	6 8.0000013
7 8.	7 8.

1 + 1 = 2, 2 + 2 = 4...

Ou la petite histoire du calcul ...

La fraction 22/7 est la meilleure approximation de Π parmi toutes les fractions ayant deux chiffres au numérateur, et un seul chiffre au dénominateur. Archimède a trouvé les approximations

$$3\frac{10}{71} < \Pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

en faisant usage d'un polygône régulier à 96 côtés.

Neper est le premier a introduire le nom de logarithme, lorsqu'il publie ses tables permettant de réduire les multiplications en additions, mais c'est Euler qui définit le premier les logarithmes comme exposants.

Depuis l'origine des temps, l'homme calcule : il est confronté à des problèmes de quantité, donc de *dénombrement* (commerce, troc, ...), à des problèmes de *périodicité* (lunaison, jour-nuit, ...).
Le calcul a joué un rôle important dans l'évolution de la mathématique, de la science en général.

Au début, le calcul est considéré comme une *science pratique* par Platon et Euclide notamment. Pour eux, calcul et mathématique sont deux choses tout à fait différentes. Archimède de Syracuse donne au calcul un statut théorique. Il l'intègre à la mathématique. Citons, pour mémoire , le calcul de Π par Archimède.

Au Moyen-âge, c'est l'Astronomie qui motive les mathématiciens arabes. Ils développent l'algèbre, perfectionnent des techniques de calcul.

AU XVI° siècle, l'astronomie, la navigation et le commerce contribuent largement au développement des techniques de calcul numérique, et à sa vulgarisation. Un mathématicien flamand, Simon Stevin, dit Simon de Brugges, publie en 1582 les premières tables d'intérêt et il introduit l'usage des fractions décimales. Notons qu'il est aussi un des premiers mathématiciens à accepter les racines négatives comme solutions d'une équation.

AU XVII° siècle, on voit apparaître la notion de logarithme chez l'écossais John Neper et chez l'anglais Henry Briggs. Ils développent à eux deux le logarithme décimal, outil bien adapté aux calculs numériques.

C'est en utilisant les logarithmes et en se basant sur les observations faites par l'astronome danois Tycho Brahé, que l'astronome allemand Johannes Kepler découvre les lois des mouvements des planètes, en 1627.

Jusqu'au XIX° siècle, les sciences sont le point de départ de nombreuses découvertes dans le domaine numérique. Sir Isaac Newton et Wilhelm Leibnitz fondent le calcul différentiel. Leonhard Euler introduit notamment les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques. Citons encore Carl Friedrich Gauss qui est un remarquable calculateur, entre autres.

A partir du XIX° siècle, de nombreux problèmes soulevés en particulier par la physique, ne peuvent être résolus, faute de méthodes numériques adaptées : c'est le déclin du domaine numérique jusqu'en 1940 . A cette époque, les problèmes de logistiques soulevés par la guerre demandent de puissants instruments de calcul : c'est la naissance de l'ordinateur. L'informatique et le calcul numérique deviennent sciences à part entière et se mettent au service de toutes les disciplines scientifiques et technologiques. Vous connaissez la suite !

Bien que cela paraisse incroyable, Gauss a donné sa mesure avant l'âge de trois ans. Un samedi, son père établissait la feuille de paie hebdomadaire des ouvriers sous ses ordres, sans remarquer que son fils suivait ses opérations avec attention ; arrivé à la fin de ses calculs, le père fut fort surpris d'entendre son fils murmurer : " Papa, le calcul n'est pas juste, il faudrait mettre ... " , et la vérification du compte montra que le chiffre indiqué par Gauss était exact.

Plus célèbre est l'anecdote suivante : à l'école primaire, aucun des enfants n'avait entendu parler des progressions arithmétiques, et le maître se plaisait à donner à faire des additions dont lui-même pouvait donner la solution en quelques secondes, mais qui demandaient beaucoup plus de temps à ses élèves : par exemple : 81.297 + 81.495 + 81.693 + ... + 100.899 où la différence entre deux nombres consécutifs est toujours la même : 198, et où l'on a 100 nombres à additionner. Le maître avait à peine fini de poser le problème, que Gauss déposait son ardoise, calcul fini . Il n'avait indiqué qu'un seul nombre : 18.037.404 qui est le total exact.

Vers la fin de sa vie Gauss aimait à raconter cette histoire. Sans doute, ce résultat est-il facile à obtenir quand on connait les progressions arithmétiques, mais personne n'avait montré à Gauss le truc pour résoudre rapidement semblable problème et on avouera que pour un gamin de 10 ans, c'est une chose assez extraordinaire de le trouver par lui-même instantanément.

P.S. Pour ceux qui ne connaissent pas (encore) le procédé: il suffit d'effectuer l'opération suivante :

$$\frac{81.297 + 100.899}{2} \times 198$$

La géométrie (2)
Thalès de Milet

Chez les Grecs, la géométrie , en tant que science de l'espace, est l'un des objets essentiels de l'étude mathématique. On trouve dans cette mathématique deux aspects nouveaux par rapport à celle des civilisations précédentes:

- d'une part, les motivations s'enrichissent : à côté d'une *mathématique utile* en rapport avec l'architecture, la peinture, la musique, on voit naître une mathématique à caractère philosophique qui s'inscrit dans une recherche générale d'explication du monde
- d'autre part, les mathématiques vont devenir une *science déductive* : les notions de démonstration, de théorème, de définition, d'axiome vont apparaître.

Seulement on sait peu de choses sur les débuts de la géométrie grecque car on ne dispose pas de documents de cette époque et par conséquent, on ne peut faire que des hypothèses plausibles sur l'état de leurs connaissances.

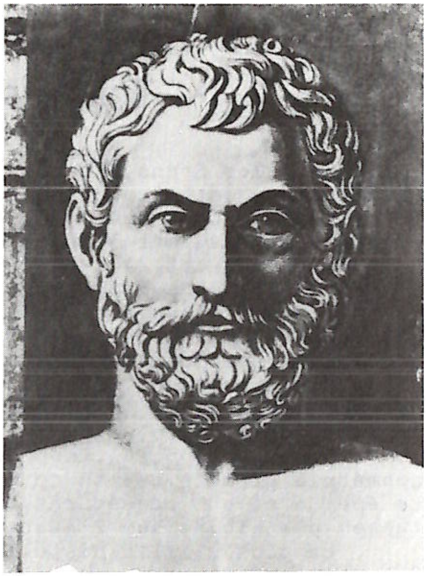
La plus vieille histoire des mathématiques grecques fut écrite par Eudème, un disciple d'Aristote, au IV*ième* siècle avant notre ère. Un extrait de cet ouvrage perdu apparaît dans le "Commentaire sur le livre I des éléments d 'Euclide", écrit par Proclus au VI*ième* siècle après J.C.. On y apprend, entre autres, que le fondateur des mathématiques grecques, et plus précisément le fondateur de la géométrie grecque, fut *Thalès de Milet*.

Il vécut au VII*ième* siècle avant J.C.; il fut, à la fois, homme politique, marchand, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien. Sa réputation dans le monde ancien était immense et il est incontestable qu'il fut une très grande figure intellectuelle et morale, son nom est d'ailleurs mentionné sur toutes les listes des Sept Sages.

Il semble avoir été marchand pendant la première partie de sa vie; il acquit ainsi une fortune considérable qui lui permettra de voyager et d'étudier le reste de sa vie.

Il se décida sur ses vieux jours à faire un voyage en Egypte. Le roi Amasis, qui aimait et protégeait les savants, l'accueillit fort bien et lui facilita l'entrée des temples où les prêtres gardaient jalousement une science embryonnaire et empirique : la science égyptienne, d'après les découvertes archéologiques les plus récentes, se réduisait à des procédés sommaires d'arpentage, souvent approximatifs. Ce fut donc le Grec qui en remontra aux Egyptiens: arrivé à Memphys, il se rendit au pied de la Grande Pyramide et, devant le roi, la cour et les prêtres médusés, il calcula la hauteur du monument. Sans doute se servit-il de la comparaison de l'ombre de l'édifice et celle de sa canne plantée verticalement ** . *(** voir problèmes.)*

Il n'est donc pas question d'attribuer à Thalès la découverte de cette théorie géométrique que l'on appelle *similitude*, et c'est d'une manière bien illégitime que le *théorème des proportions* porte son nom. Quatre propositions seulement semblent devoir lui être rapportées - encore qu'il ne s'agisse pas de démonstrations, mais de constructions pratiques, avec la règle et le compas - : un cercle est coupé par un diamètre en deux parties égales ; les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ; deux droites qui se coupent forment deux angles opposés égaux ; un triangle rectangle peut être inscrit dans une demi-circonférence.



- Thalès de Milet -

Toutefois, il ne paraît pas déraisonnable de croire que Thalès put rapporter d'Egypte quelques connaissances des listes d'éclipses, par exemple. Il apprit alors à prédire celles-ci *grosso modo*, comme les Babyloniens le faisaient depuis deux mille ans. En particulier, il prédit une éclipse de soleil en 585 avant J.C. qui par chance tomba juste, si l'on songe que le phénomène put n'être que partiel ou bien visible en Amérique du Sud !

De nombreuses légendes entourent la vie de Thalès. Un jour qu'il conduisait une caravane, un mulet chargé de sel tomba à l'eau au passage d'un gué. Sorti de l'eau, le mulet sentit sa charge plus légère. Aussi, au gué suivant, se roula-t-il volontairement dans l'eau afin de sentir de nouveau une diminution de charge. Pour le guérir de ce vice, Thalès le fit charger d'éponges. Lorsque le mulet voulut se livrer à sa petite fantaisie, il fut bien attrapé car au lieu d'une charge allégée, il sentit un fardeau écrasant.

On rapporte également l'histoire suivante : irrité des remarques de quelques concitoyens à propos de sa sagesse qui ne lui avait pas apporté la richesse, il voulut démontrer qu'on pouvait facilement et rapidement devenir riche; il s'appropria le contrôle absolu des pressoirs à olives de son pays, au moment où il jugea que la récolte des olives serait abondante et, ainsi, il put imposer le prix qu'il voulait à tous ceux qui devaient utiliser ses pressoirs, ce qui lui rapporta une fortune en une seule saison. Puis ayant prouvé son point de vue, il abandonna ses affaires et retourna à ses occupations d'ordre philosophique et mathématique.

On peut raisonnablement affirmer que Thalès de Milet a pavé la voie de ses successeurs en ouvrant la porte de l'organisation rationnelle des mathématiques.

Les maths dans la B D

L'extrait ci-contre (Merci M.GREG) aborde un thème mathématique. Quelle réflexion vous inspirent les mots "disques" et "cercles" ?

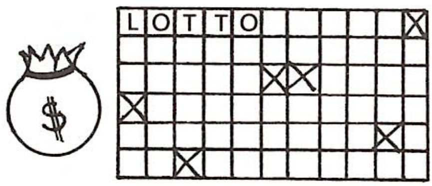
Ci-dessous, MM. UDERZO et GOSCINNY nous entrainent dans les méandres de la probabilité. Il s'agit du jet de deux dés et le devin va répondre 7 (alors qu'il essaye justement de démontrer au soldat qu'il n'est pas devin!) Qu'en pensez-vous ?

Pourriez vous nous communiquer d'autres extraits de B.D.où l'on aborde les thèmes mathématiques. Il y en a surement des tas d'autres!

Le coin des problèmes

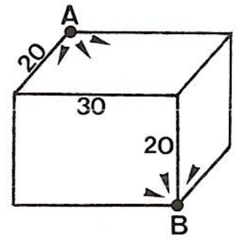
115 Les gagnants du Lotto.

Les Dupont sont fous de joie : ils viennent de gagner la super cagnotte du Lotto. En quelques mois, ils dépensent sans compter en voyages, toilettes, cabarets, etc, les 2/3 de ce qu'ils ont gagné, moins 4.000.000 F , puis 1/4 de ce qu'il leur reste plus 3.000.000 F , puis les 2/3 du nouveau reste plus 1.200.000 F Quand ils font enfin leurs comptes, désireux de s'acheter une villa de 8.750.000 F , ils s'aperçoivent qu'il leur manque pour réaliser cette opération 2.450.000 F . Quel était le montant de la super cagnotte du Lotto ?

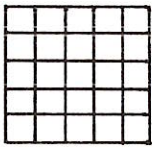


116 Venez à mon secours!

Sur le bord de la route se trouve une pierre de taille de 30 cm de long, 20 cm de haut et autant de large (voir dessin ci-contre). Une coccinelle se trouvant au point A désire rejoindre le point B par le trajet le plus court. Aidez-la en lui traçant la route à suivre ; quelle est la longueur de ce trajet



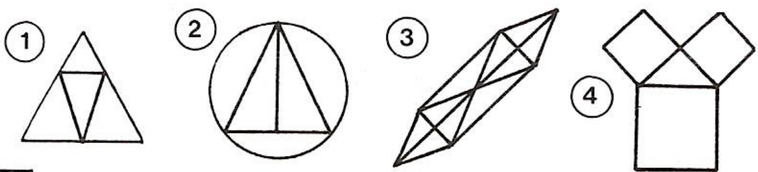
117 Combien de rectangles...



Combien de rectangles pouvez-vous distinguer sur ce dessin? (N'allez pas trop vite, il ne s'agit pas seulement de carrés, mais de rectangles)

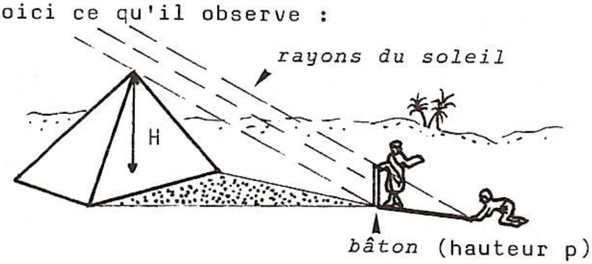
118 Un seul trait.

Essayez de dessiner d'un trait continu les figures suivantes. (c'est à dire : tracer toutes les lignes de la figure donnée sans lever le crayon du papier, en ne faisant aucun trait supplémentaire et sans passer deux fois par le même trajet)



119 Pourriez-vous aider Thalès? **

Voici ce qu'il observe :



A partir de ces observations, comment va-t-il pouvoir déterminer la hauteur H de la pyramide?

Remarquer au passage la différence d'écriture entre:

```
LDA #$0   (le # indique que le nombre qui suit est une valeur)
          = mettre la valeur $0 dans l'Accumulateur,      et
LDA $0    (il s'agit ici d'une adresse)
          = mettre la valeur contenue dans la mémoire $0 dans
          l'Accumulateur.
```

Voici l'autre méthode, qui consiste à recopier le Carry dans l'Accumulateur. L'instruction

ROL ROtate Left

décale à gauche d'un Bit l'Accumulateur. L'ancienne valeur du Bit de retenue entre par la droite tandis que le Bit qui sort par la gauche devient le nouveau Carry (Il s'agit donc d'une rotation vers la gauche de 9 bits). Nous verrons que cette fonction permet de multiplier! Décaler un nombre binaire vers la gauche, c'est en effet le multiplier par 2.

Voici le programme:

```
800: AD 00 10   LDA $1000   Transfert de $1000 dans A
803: 18         CLC         Forcer le Carry à 0
804: 6D 10 10   ADC $1010   Addition de A avec $1010
807: 8D 20 10   STA $1020   Ranger la partie basse de la somme
80A: A9 00      LDA #$0     Mettre $0 dans l'Accumulateur
80C: 2A         ROL         Le carry entre à droite dans A
80D: 8D 21 10   STA $1021   et se recopie dans $1021
810: 60         RTS         Fin.
```

qui, comportant moins d'instructions, s'exécutera plus rapidement.

LECON TROIS

Plus subtil : la multiplication.

Pour multiplier deux nombres en mode binaire, on décompose l'un de ceux-ci en ses puissances de 2 : 147 * 133 devient 147 * (128 + 4 + 1). Ecrivons 147 en binaire; on obtient (1001 0011).
Le multiplier par 2 donne (1 0010 0110),
par 4 : (10 0100 1100) et ainsi de suite...

voyons cela dans un tableau:

décalage	calcul	résultat intermédiaire	somme partielle	indice
0	147	1001 0011	1001 0011	1
1	147*2	1 0010 0110		0
2	147*4	10 0100 1100	10 0100 1100	1
3	147*8	100 1001 1000		0
4	147*16	1001 0011 0000		0
5	147*32	1 0010 0110 0000		0
6	147*64	10 0100 1100 0000		0
7	147*128	100 1001 1000 0000	100 1001 1000 0000	1
		total:	100 1100 0101 1111	

et (100 1100 0101 1111) = 19551 ce qui est bien 147 * 133.

Dans la colonne indice se trouve, en lisant de bas en haut, la valeur binaire de 133.

Analysons notre problème à la lumière de ce procédé.
Les deux nombres à multiplier seront rangés en $1000 (A) (147) et en $1010 (B) (133); c'est dans ce dernier que nous analyserons la valeur des Bits. Les résultats intermédiaires (C) (puissances successives de A) seront écrits en $1020 et $1021 (sur 16 Bits donc). Quant à $1030, $1031 (D), elles contiendront les sommes partielles.
Notre première opération sera d'initialiser les mémoires $1020 (y recopier A),
$1021, $1030, $1031 (à zéro au départ).
Ensuite, nous devrons exécuter 8 fois de suite la suite des opérations:

1. Extraire un Bit de B (en débutant par la droite)
2. Si ce Bit vaut 1, ajouter le résultat intermédiaire à la somme partielle (C+D).
3. Dans tous les cas, multiplier par 2 le résultat intermédiaire.

Voyons à présent les nouvelles instructions dont nous aurons besoin. Les initialisations de mémoires se font par des LDA et des STA: rien de neuf!
Pour exécuter 8 fois une suite d'opérations, nous initialisons un registre (nommé X) à la valeur 8 par l'instruction:

LDX LoaD X register

Après chaque exécution de la suite d'opérations, nous enlèverons une unité à ce registre par l'instruction

DEX DEcrement X register

Après un passage dans la suite des opérations, X vaudra donc 7. Après le huitième passage, X vaudra zéro. On fera donc appel à un test qui provoquera un branchement relatif vers le haut tant que la valeur de X ne sera pas nulle: il s'agit de l'instruction:

BNE Branch if Non Equal to zero

Analyser les différents Bits de B en débutant par la droite peut se faire par une rotation sur 9 Bits vers la droite (le Bit de droite tombe dans le Carry, les autres Bits se déplace d'un rang vers la droite et l'ancien Carry entre par la gauche); c'est l'instruction

ROR ROtate Right

mais cette instruction doit être précédée d'un CLC. On emploira de préférence ici, une rotation sur 8 Bits qui fait entrer d'office un zéro et sortir le Bit extérieur dans le Carry. Ici nous emploierons

LSR Logical Shift Right

suivi d'un

BCC Branch if Carry Clear

branchement relatif qui permet de ne pas exécuter l'étape numéro deux lorsque le Carry est "clair" (=vaut zéro).

Pour l'étape deux, on ajoutera $1020 (partie basse du résultat intermédiaire) à $1030 (partie basse de la somme partielle) en ayant soin d'effacer préalablement le rep ort; puis on ajoutera les parties hautes ($1021 à $1031) en ayant soin cette fois de ne pas effacer le Carry.

A l'étape trois, on commencera par décaler $1020 vers la gauche (un zéro entre et le chiffre de gauche sort dans le Carry) par la rotation à gauche sur 8 Bits:

ASL Arithmetic Shift Left

puis on décalera $1021, la partie haute, en tenant compte cette fois du Carry récupéré lors du mouvement de $1020 par la fonction ROL que nous avons déja signalée.

Voici le programme:

```
800: A9 00     LDA #$0       Mettre $0 dans l'Accumulateur.
802: 8D 31 10  STA $1031     Partie haute de la somme partielle.
805: 8D 30 10  STA $1030     Partie basse de la somme partielle.
808: 8D 21 10  STA $1021     Partie haute du résultat interm.
80B: AD 00 10  LDA $1000     Prendre le nombre A et le recopier
80E: 8D 20 10  STA $1020     dans la partie basse du résul. interm.
811: A2 08     LDX #$8       Préparer 8 passages (début de boucle).
813: 4E 10 10  LSR $1010     Rotation à droite sur 8 Bits.
816: 90 13     BCC (19)      Sauter l'étape 2 si le Bit était 0.
818: AD 20 10  LDA $1020     Prendre la partie basse du résultat
81B: 18        CLC           intermédiaire, l'ajouter sans Carry à la
81C: 6D 30 10  ADC $1030     partie basse de la somme partielle et
81F: 8D 30 10  STA $1030     recopier la nouvelle somme partielle.
822: AD 21 10  LDA $1021     Additionner les deux parties hautes
825: 6D 31 10  ADC $1031     avec l'éventuel Carry des parties basses
828: 8D 31 10  STA $1031     et recopier.
82B: 0E 20 10  ASL $1020     Par.bas.rés.int.à gauche (un 0 entre)
82E: 2E 21 10  ROL $1021     Par.haut.rés.int.à gauche (le Car. ent.)
831: CA        DEX           Une étape est faite (X=X-1)
832: D0 DF     BNE (-33)     (DF=223) et 223+33=256
834: 60        RTS           Fin
```

On remarquera que les déplacements relatifs vers le haut se font en codant le complémentaire à 255 ($FF) du nombre de mémoires que l'on désire remonter. Ici, le code est en $833 et l'on veut reprendre l'exécution en $813. Il y a une différence de $21 = 33 mémoires et 256 - 33 = 233 = $DF devra être codé.

LECON QUATRE.

Les autres opérations mathématiques.

Vous voici capable d'additionner et de multiplier. Pour diviser, il faut procéder par soustractions successives. Quant à la soustraction, elle est réalisée par l'instruction

SBC SuBstract with Carry

qui remplace la valeur de l'accumulateur par cette valeur diminuée de la valeur d'une mémoire et du complémentaire du Carry. Il faut donc forcer le Carry à 1 pour effectuer une soustraction où il n'intervient pas. On force le Carry à 1 par

SEC SEt Carry

Signalons que le 6502 peut aussi effectuer des additions et des soustractions en mode décimal codé binaire qui consiste à coder sur quatre chiffres binaires les chiffres de 0 à 9; avec autant de groupe de quatre chiffres que de chiffres dans le nombre exprimé en base 10. A titre d'exemple, 27 s'écrit en décimal codé binaire 0010 0111 (1 et 7). On peut forcer le microprocesseur à travailler avec de tel nombre par:

SED SEt Decimal Mode

et le faire revenir à l'état normal par

CLD CLear Decimal mode

Ainsi, si $1000 contient 23 et $1010 contient 69, le programme suivant calculera leur somme en $1020.

```
800: F8         SED        Mise en mode décimal
801: AD 00 10   LDA $1000  Transfert de $1000 dans A
804: 18         CLC        Forcer le Carry à 0
805: 6D 10 10   ADC $1010  Ajouter $1010 à A
808: 8D 20 10   STA $1020  Ranger la somme en $1020
80C: D8         CLD        Annulation du mode décimal.
```

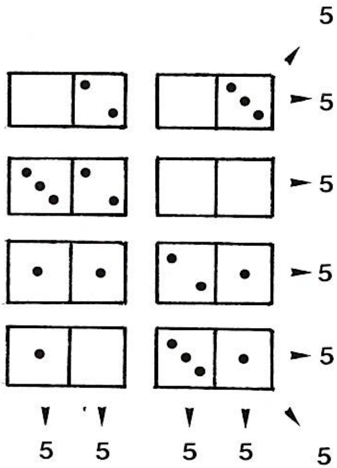
Cette facilité de programmation en mode décimal est indéniable: signalons toutefois qu'elle a l'inconvénient de consommer plus de places en mémoire puisque le plus grand nombre que peut contenir un Byte est maintenant 99.

Si je sais que la mémoire $1000 contient 0110 1001 (nombre décimal codé binaire de 69), comment lui faire contenir 0100 0101 (nombre hexadécimal de 69)? Il nous faut en fait calculer 10* (0110) + (1001) (10* la partie gauche + la partie droite). Et puisque multiplier par 10, c'est multiplier par 2* (4+1), on aura la programme:

```
800: AD 00 10 LDA $1000  Transfert de $1000 dans A.
803: 0A       ASL        Décaler 4 fois à gauche et 4 fois
804: 0A       ASL        à droite pour que A contienne
805: 0A       ASL        0000 1001, soit les unités.
806: 0A       ASL
807: 4A       LSR
808: 4A       LSR
809: 4A       LSR
80A: 4A       LSR
80B: 8D 10 10 STA $1010  Ecriture des unités.
80E: AD 00 10 LDA $1000  On reprend $1000
811: 4A       LSR        Décaler 4 fois à droite pour
812: 4A       LSR        obtenir le nombre de dizaines.
813: 4A       LSR
814: 4A       LSR
815: 8D 11 10 STA $1011  Mémoriser le nombre.
818: 0A       ASL        Le multiplier par 2.
819: 0A       ASL        Le multiplier par 4.
81A: 18       CLC        Préparer l'addition (*1) et (*4)
81B: 6D 11 10 ADC $1011  On a (*5) dans A.
81E: 0A       ASL        (*2)    donc (*10)
81F: 18       CLC        Préparer l'addition des unités et
820: 6D 10 10 ADC $1010  des dizaines.
823: 8D 00 10 STA $1000  Et remettre le résultat en $1000
```

Les dominos magiques

Les dominos portent des nombres. Ils représentent donc un matériel propre à se prêter à des casse-tête numériques.



Voici un carré magique réalisé avec 8 dominos d'un même jeu.

Toutes les rangées et toutes les colonnes, ainsi que les deux diagonales totalisent 5 points.

Pourrez-vous construire des carrés magiques de 8 dominos d'un même jeu dont toutes les lignes totalisent 7, 7, 8, ... 19 points ?

Ce carré magique est réalisé avec 18 dominos.

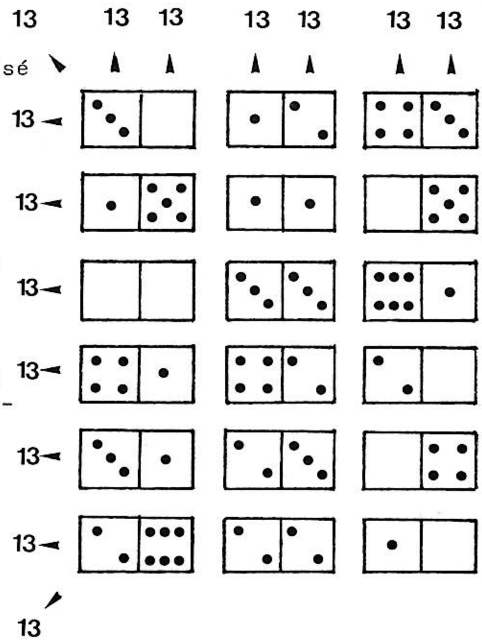
Chaque ligne totalise 13 points.

Pourrez-vous en construire un autre ?

Pourrez-vous en construire pour que les lignes totalisent 14, 15, 16, ... , 23 points ?

<u>*Envoyez-nous*</u>

<u>*vos solutions !*</u>



SOMMAIRE MATH-JEUNES 26

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
A.S.B.L.

Rédaction et Edition de Math-Jeunes

Gh. Marin, J. Miewis et W. Vanhamme

Courrier

Math-Jeunes, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège

Abonnement

Belgique : groupés (5 au moins) 60 FB par abonnement
isolés 100 FB
Etranger : par paquets de 5 600 FB le paquet
isolé 200 FB
Compte n° 000-0728014-29, SBPM
Chemin des Fontaines, 14 bis, 7460 - CASTEAU

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.

Poster historique : *Belgique : 30 FB*
par paquets de 5 : 120 FB
Etranger : 60 FB
par paquets de 5 : 240 FB

Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme due de 100 FB pour frais d'encaissement.