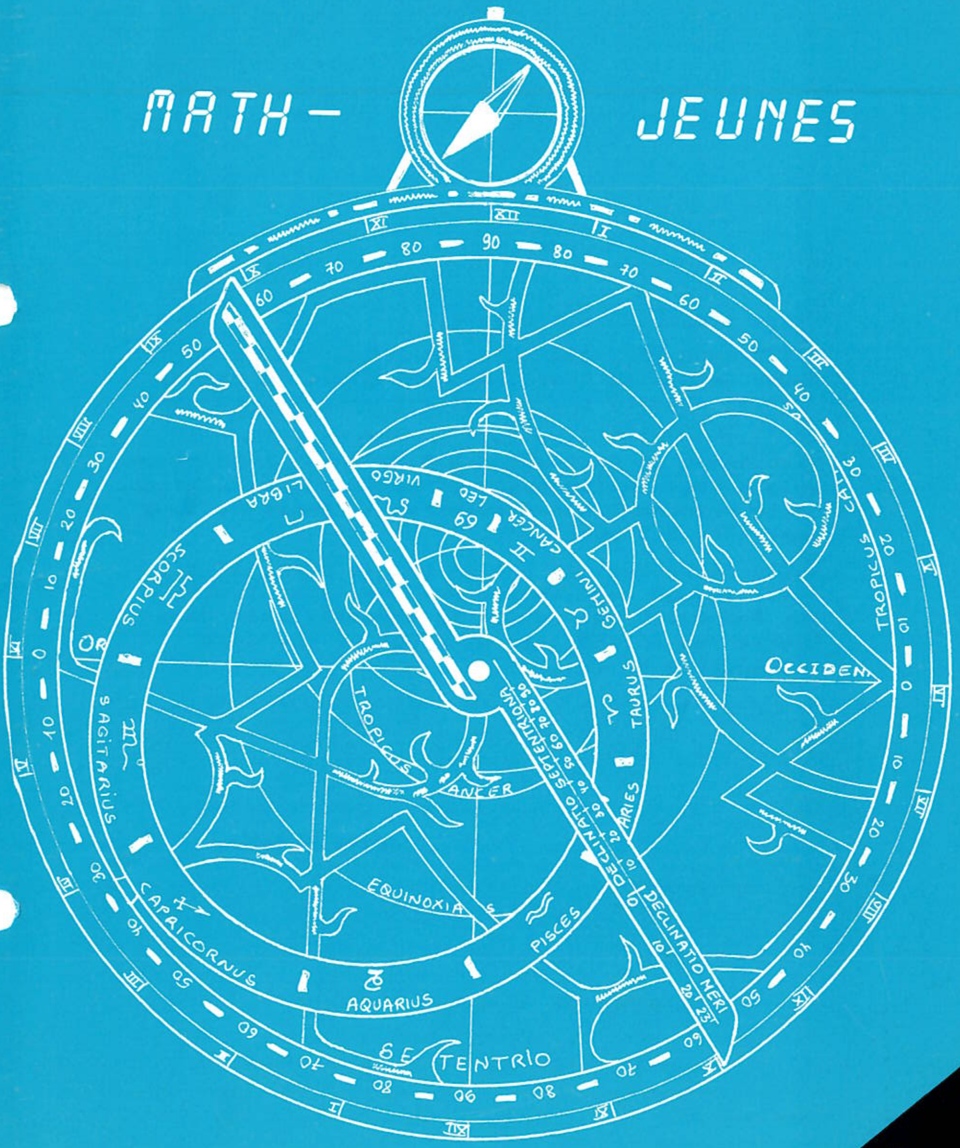
7e Année | Numéro 27 | Printemps 1985

# MATH-JEUNES




SPECIAL EULER

Publication trimestrielle de l
Société Belge des Professeurs
Mathématique d'expression fr se.
A.S.B.L.

Notre rédaction est triste...

Willy Vanhamme, qui assurait l'édition de notre revue depuis sa création n'est plus. Il nous a quitté, emporté par la maladie cruelle, au seuil de sa retraite.

Professeur de mathématique à Marchin, à Lovanium, puis à Louvain-la-Neuve, il avait su faire aimer cette branche à ses étudiants, il avait su leur apprendre à l'enseigner.

Cette revue dont il est un peu le père, il s'y était engagé avec toute son âme, avec toutes ses forces. C'est ce qui le caractérisait dans toutes ses entreprises et c'est ce que nous retiendrons de lui.

Jules Miéwis.

# • EULER : sa vie.

Léonard Euler, fils de Paul Euler et de sa femme Marguerite Brucker, est probablement le plus grand homme de science que la Suisse ait jamais produit. Il est né à Bâle le 15 avril 1707, mais dès l'année suivante, il quitte cette ville pour s'installer avec ses parents dans un petit village proche de Riehen, où son père devient le pasteur calviniste du lieu.Il destine Léonard à marcher sur ses traces, et à lui succéder à l'église du village mais, ayant étudié les mathématiques avec Jacques Bernoulli il commet "l'erreur" de les enseigner à son enfant; il devient son premier maître.

Léonard entre à treize ans à la faculté de philosophi et en sort bachelier en 1722. En 1724, il obtient la maîtrise mais il abandonne les sciences religieuses pour se consacrer uniquement à la physique et aux mathématiques. Elève de Jean Bernoulli, un frère de Jacques, il se lie d'amitié avec ses fils, Nicolas et Daniel.A vingt ans, il quitte sa ville na-


tale pour rejoindre les Bernoulli à l'Académie de Saint-Pétersbourg où ces derniers, établis depuis 1725, lui trouvent un poste de professeur. Chemin faisant il apprend la mort prématurée de Nicolas, et au moment de son arrivée en Russie, l'impératrice Catherine I meurt. L'existence même de l'Académie est mise en péril par les nouveaux dirigeants qui n'ont pas les mêmes vues libérales que leurs prédécesseurs sur cette institution. Rattaché à la section mathématique, les premières années sont difficiles et Euler est tenté d'accepter un poste de lieutenant dans la marine russe, mais le départ de Daniel Bernoulli pour la Suisse en 1733, lui permet de reprendre le titre de professeur et d'améliorer ainsi sa situation financière. La même année, il épouse une compatriote, fille du peintre Gsell, dont la famille est établie en Russie depuis de nombreuses années. Les naissances se succédant à un rythme rapide, une détérioration des conditions politiques de l'époque augmentant sa dépendance vis-à-vis des siens, il se réfugie dans un travail incessant et, malgré la perte de son oeil droit, à trente-trois ans, il avait déjà rédigé près de quatre-vingt mémoires et livres sur les sciences.

A la mort de l'impératrice Anna en 1740, le gouvernement Russe devient plus libéral, mais Euler décide quand même d'accepter de se rendre à l'Académie de Berlin en 1741 sur l'invitation du roi de Prusse. Pendant vingt-cinq ans, Euler demeurera au service de l'Académie soumettant de nombreux mémoires tant à l'Académie de Prusse qu'à celle de Saint-Pétersbourg. Son séjour à Berlin n'est pas très heureux : en effet, Frédéric s'y connaissant peu en mathématiques, apprécie suffisamment les talents d'Euler pour les utiliser à la solution de problèmes pratiques tels que la frappe de la monnaie, les conduites d'eau, les canaux de navigation, le régime d'assurance pour un système de pension,...

En 1766, Euler retourne à l'Académie de Saint-Pétersbourg; Catherine II de Russie met à la disposition de sa famille qui compte treize enfants une maison bien meublée. Peu de temps après son retour, sa vue baisse à un point tel qu'il doit avoir recours à une ardoise sur laquelle il écrit et fait ses calculs à la craie. Ses fils ou ses élèves les recopient et écrivent sous sa dictée le reste de ses mémoires. Mais ces années de cécité ne sont pas moins fécondes que les précédentes grâce à l'aide de son entourage et surtout à sa prodigieuse mémoire; Condorcet, mathématicien et philosophe français, dira "*si on en juge par leur nombre et souvent par le génie qu'on y retrouve, on pourrait croire que l'absence de toute distraction et la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donnait à toutes ses facultés, lui ont fait plus gagner que l'affaiblissement de sa vue n'a pu lui faire perdre de facilité et de moyens pour le travail*".

En 1771, cinq ans après son retour en Russie, un autre malheur le frappe : le feu détruit complètement sa maison et n'écoutant que son courage, son serviteur transporte sur ses épaules son maître aveugle pour le mettre à l'abri des flammes. Heureusement, tous les manuscrits sont sauvés; la maison, qui était un des bienfaits de l'impératrice, est rétablie à ses frais.

Alors âgé de soixante-neuf ans, sa femme meurt et il se remarie l'année suivante avec la demi-soeur de sa femme. Le 7 septembre 1783, il s'éteint subitement; il avait alors 76 ans et 26 petits-enfants.Voici comment Condorcet raconte les derniers moments d'Euler.

"*Il avait conservé toute sa facilité et en apparence toute sa force. Aucun changement n'annonçait que les sciences fussent menacées de le perdre,Le 7 septembre 1783, après s'être amusé à calculer sur une ardoise les lois du mouvement ascentionnel des machines aérostatiques, dont la découverte récente occupait alors toute l'Europe, il dîna avec M. Lexell et sa famille, parla de la planète d'Herschell et des calculs qui en déterminent l'orbite; peu de temps après il fit venir son petit-fils, avec lequel il badinait en prenant quelques tasses de thé, lorsque tout-à-coup la pipe qu'il tenait â la* *main lui échappa et il cessa de calculer et de vivre. Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands et les plus extraordinaires que la nature ait jamais connus, dont le génie fut également capable des plus grands efforts et du travail le plus continu."*

Entouré du respect de ses proches et du monde scientifique, il peut, à la fin de sa vie, considérer comme ses élèves tous les mathématiciens d'Europe.

## EULER et l'Analyse.

Euler a donné l'initiale de son nom à l'une des constantes mathématiques les plus importantes : le nombre e. A l'origine, Daniel Bernoulli avait étudié la limite de la suite :

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Euler va démontrer que la limite de cette suite est la même que la limite de la série

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

démonstration dont l'un des corollaires est l'irrationnalité de ce nombre e. Liouville et Hermite démontreront plus tard que e est transcendant.

Pour démontrer l'existence d'une limite d'une suite, on se sert aujourd'hui d'un critère de l'inévitable Cauchy :

| *Une suite monotonément croissante et bornée est convergente.* |
|---|

Analysons les mots de cet énoncé :

Une *suite* est une application de N dans R $n \to u_n$

Une suite *converge* vers un réel a lorsque pour tout réel r, aussi petit soit-il, on peut trouver un indice $n_0$, généralement très grand, tel que pour tout les $n > n_0$, on a

$$| u_n - a | < r$$

Etre *monotonément croissant* signifie que pour tout indice n

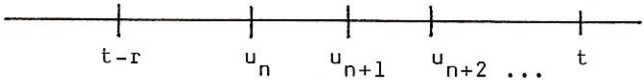
$$u_n < u_{n+1}$$

Etre *borné* suppose l'existence d'un réel s tel que pour tout indice n $u_n < s$

La démonstration du critère de Cauchy est très simple :

puisque la suite est bornée, il existe un "meilleur majorant" (le "meilleur" des s), c'est l'infinum t des s.

Si l'on considère à présent l'intervalle $|t-r,t|$, on peut affirmer que s'il ne contient aucun $u_n$, c'est que t-r est toujours un majorant de la suite des $u_n$ et donc que t ne peut être le meilleur;
aussi cet intervalle contient au moins un $u_n$, mais alors il contient tout ceux d'indice plus grand, par l'hypothèse de croissance monotone.




Le r étant un réel positif quelconque, on trouvera toujours le $u_n$ prouvant la convergence.

Montrons que la suite de Bernoulli est <u>monotonément croissante</u>.
Pour n > 1, on peut écrire le développement de Newton de

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}\,\frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= t_o + t_1 + t_2 + \quad + t_p + \quad + t_n \end{aligned}$$

Observons que $t_p$ peut se transformer comme suit:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!\; n^p} \\ &= \frac{1}{p!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(p-1)}{n} \\ &= \frac{1}{p!} \cdot 1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{2}{n}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{p-1}{n}) \end{aligned}$$

Si on remplace n par n+1, les différences de type $(1-\frac{i}{n})$ augmenteront toutes, donc chaque terme augmente; de plus $u_{n+1}$ compte un terme positif de plus que $u_n$, par conséquent

$$\underline{u_n < u_{n+1}}$$

Voyons à présent si elle est <u>bornée</u>. Si, dans la dernière expression de $t_p$, on supprime les soustractions, celle-ci augmentera et $t_p < \frac{1}{p!}$ .

Or $p! = 1.2.3.4. \dots .p > 1.\ 2.2. \dots 2 = 2^{p-1}$

et donc $t_p < \frac{1}{2^{p-1}}$

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Nous retrouvons, à partir du deuxième terme, la suite géométrique de raison 1/2, dont nous connaissons la somme partielle

$$u_n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\underline{u_n} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = \underline{3}$$

La suite est monotonément croissante et bornée, elle converge donc vers un réel strictement inférieur à 3.

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$
$$qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$$
$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$
$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Une calculette permet de voir que $\underline{e = 2{,}718281828459}\ldots$

Venons-en à présent au résultat d'Euler: nous avons écrit:

$$u_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n \quad \text{où}$$

$$t_p = \frac{1}{p!} \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{2}{n}) \cdot \ldots (1-\frac{p-1}{n})$$

Nous prenons $k<n$ et négligeons dans le calcul de $u_n$ les termes $t_p$ pour $p>k$ : on a ainsi

$$u_n > t_0 + t_1 + \ldots + t_k$$

et par passage à la limite

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \qquad (I)$$

Par ailleurs, nous savons que $t_p < \frac{1}{p!}$ et nous pouvons donc écrire, à partir d'un rang k :

$$u_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} + t_k + t_{k+1} + \ldots + t_n$$
$$< t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$
$$= t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} + \frac{1}{k!} (1 + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots n})$$

Examinons en détail cette dernière parenthèse :

$$A = 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots n}$$

Dans cette expression, nous remplaçons tous les facteurs des dénominateurs par k+1,

$$k+2 > k+1 \quad \text{implique} \quad \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k+2}$$

ce qui nous permet de majorer A

$$A < 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^{n-k}}$$

On retrouve à nouveau la somme partielle d'une suite géométrique de raison 1/k+1

$$A < \frac{1 - \frac{1}{(k+1)^{n-k+1}}}{1 - \frac{1}{k+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+1-1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$$

$$u_n < t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} + \frac{1}{k!}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$u_n < t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!k}$$

et, par passage à la limite :

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!k} \qquad \textit{(II)}$$

Si l'on note $S_k = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}$ , on a

*(I) et (II)* $\quad S_k < e < S_k + \frac{1}{k!k} \qquad$ *(III)*

$$0 < e - S_k < \frac{1}{k!k}$$

et par passage à la limite:

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} (e - S_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!k} = 0$$

et donc $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = e$

aussi $\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots}$

Reprenons la relation *(III)* valable pour tout k, et postulons que $e = \frac{a}{b}$ fraction irréductible avec a et b entiers. Pour cette valeur b, on peut écrire:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{b!} < \frac{a}{b} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{b!b}$$

Par réduction au même dénominateur b!, il vient :

$$b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \ldots + 1 < a\,(b-1)!$$

$$< \quad b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \ldots + 1 + \frac{1}{b}$$

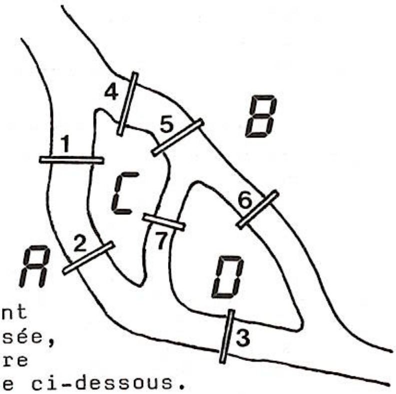
Le terme de gauche de cette double inégalité est un entier B, et par conséquent il est tout à fait impossible qu'il existe un entier b tel que

$$B < a(b-1)! < B + \frac{1}{b} < B + 1$$

car $b > 1$.

Ce qui démontre par l'absurde que <u>e est irrationnel</u>.

## EULER et la Topologie.

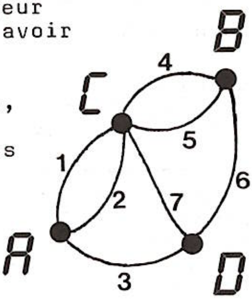



Autrefois, les habitants de Koenigsberg avaient coutume de poser aux visiteurs étrangers le problème suivant:

*Voici la carte de notre ville. Quel itinéraire faut-il suivre pour franchir successivement les 7 ponts sans passer deux fois sur le même pont?*

Le réseau des 7 ponts est équivalent en ce qui concerne la question posée, au réseau obtenu en joignant quatre points A,B,C,D comme sur la figure ci-dessous.

On peut ainsi supposer que les points A,B,C,D sont des carrefours où le visiteur doit faire contrôler son passage après avoir franchi un pont.




Euler, qui s'est penché sur ce problème, a étudié les propriétés de ces réseaux constitués par des droites et des points et a montré sous quelles conditions leur parcours est possible en un ou plusieurs voyages continus.

En appelant *carrefour* ou *noeud* du réseau un point tel que A,B,C,D, et en comptant les chemins qui y aboutissent, on constate que les noeuds où aboutissent un nombre PAIR de chemin n'offrent pas d'équivoque, car il y a autant de chemins pour arriver que pour partir. Les noeuds d'où partent un nombre IMPAIR de chemins constituent un début ou une fin d'itinéraire puisque, nécessairement, on en part sans pouvoir y revenir, ou bien on y arrive sans pouvoir en repartir.

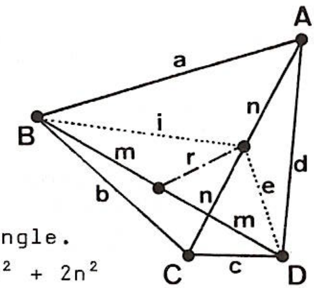
La figure schématique ainsi obtenue s'appelle un *graphe* et l'on constate que la *chaîne* du graphe n'est pas *eulérienne*. Pour satisfaire à la question posée, le réseau ne peut contenir plus de deux noeuds impairs, or dans le cas des ponts de Koenigsberg, ils sont tous les quatre impairs.

Les problèmes du même genre qu'Euler a étudiés sont groupés sous le nom de "problèmes de géométrie de position". Il ne s'agit plus d'effectuer des calculs ou des figures exactes, mais de déterminer la possibilité ou l'impossibilité du tracé.

La géométrie de position a donné naissance à une science plus vaste : la topologie qui s'occupe aussi des rubans à une face (Moebius), des bouteilles sans intérieur (Klein), du coloriage des cartes et de l'espace entre le bord extérieur de la pulpe d'une orange et le bord intérieur de sa pelure...

## EULER et la Géométrie plane.

*Dans un quadrilatère* ABCD, *la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré du segment* EF *qui joint les milieux des diagonales.*




C'est une application immédiate du théorème de la médiane dans un triangle.

$a^2 + b^2 = 2i^2 + 2n^2$ et $c^2 + d^2 = 2e^2 + 2n^2$

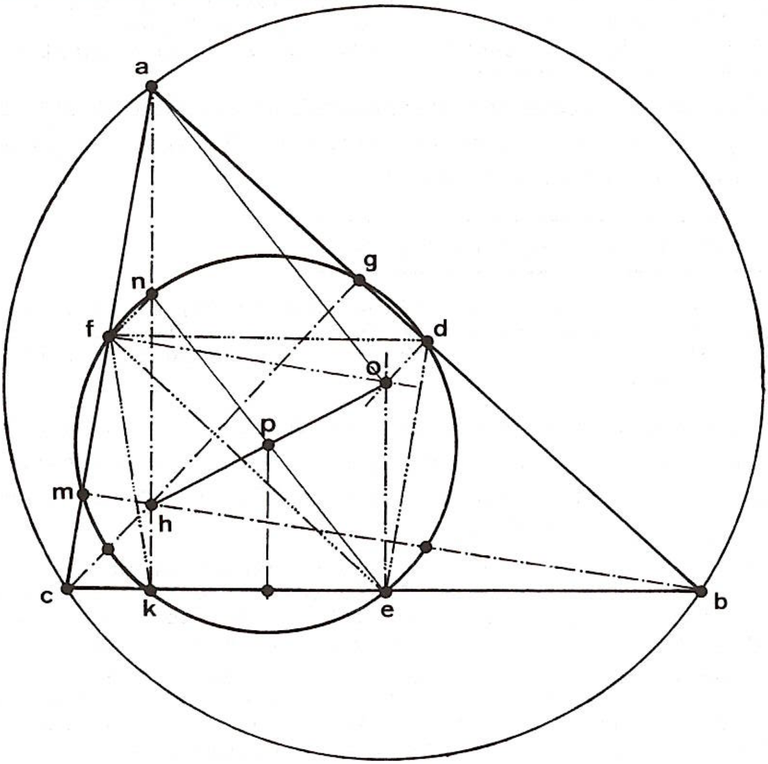
En additionnant et en remarquant que $i^2 + e^2 = 2r^2 + 2m^2$,

on a bien $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = BD^2 + AC^2 + 4r^2$

Voici à présent trois démonstrations de l'existence des "Cercle et Droite d'Euler", par trois méthodes rencontrées actuellement dans l'enseignement secondaire.

*Dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs abaissées des sommets et les points milieux des segments qui joignent l'orthocentre aux sommets sont sur un même Cercle. Son centre est le point milieu du segment qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. Son rayon vaut la moitié du rayon du cercle circonscrit.*

GEOMETRIE SYNTHETIQUE :




Soient d,e,f les points milieux des côtés, ak, bm, cg les hauteurs, h l'orthocentre, n le milieu de [ah]. On circonscrit un cercle au triangle def. Montrons que ce cercle contient k, pied de la hauteur issue de a et n, milieu de [ah].

1°. La droite fk, qui joint le sommet k de l'angle droit au point milieu f de l'hypothénuse [ac] du triangle rectangle ack, vaut la moitié de cette hypothénuse. Donc $|fk| = |fc| = |ed|$ car de est parallèle à ac et $2|de| = |ac|$. Ainsi, le trapèze edfk est isocèle; par suite, le cercle qui passe par e, d, f, passe aussi par le quatrième sommet k.

2°. La droite fn, qui joint les points milieux f et n des côtés du triangle ach est parallèle à la base ch. D'ailleurs, fe est aussi parallèle à ab. Donc les angles à côtés perpendiculaires efn et agc sont égaux et valent 90°. Le quadrilatère ekfn est inscriptible à cause des angles droits ekn et efn : donc le cercle qui passe par les trois sommets f,k,e, passe aussi par le quatrième sommet n.

3° En raisonnant de même pour les autres hauteurs, on obtient le "Cercle des 9 points". Son centre se trouve sur les médiatrices de [fm] et [ke] et ces médiatrices se coupent en p, milieu de [oh] .(Thales)

4°. Les triangles aoh et nph sont semblables et puisque $|nh| = \frac{1}{2}|ah|$, on a $|np|$ (rayon du cercle des 9 points) $= \frac{1}{2}|ao|$ (rayon du cercle circonscrit)

| GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS : |
|---|

triangle abc, a',b',c' milieux des côtés, $a_1, b_1, c_1$ pieds des hauteurs, h orthocentre, o centre du cercle circonscrit C, g centre de gravité de abc et o' centre du cercle C' circonscrit à a',b',c'.

1°. L'homothétie de centre g et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme a en a', b en b' et c en c', donc h en l'orthocentre de a',b',c' c'est-à-dire o. Par suite $\vec{oa'} = -\frac{1}{2}\vec{ha}$ ce qui s'écrit $\vec{ha} = -2\,\vec{oa'}$.

2°. Puisque $\vec{ah} = \vec{oa'}$, h', point diamétralement opposé à a sur C est le centre de l'homothétie de rapport 2 qui transforme o en a et a' en h. Par conséquent, h,a',h' sont alignés et a'h et oa se coupent sur le cercle C.

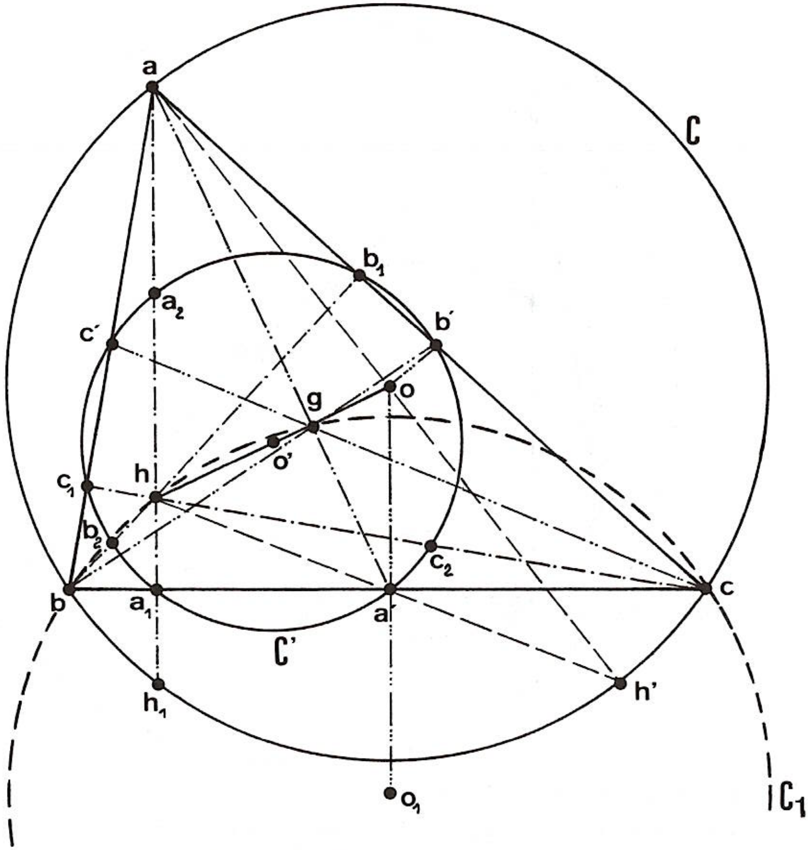
3° $\vec{ah} = 2\,\vec{oa'}$ montre également que h est l'image de a par la translation de vecteur $2\,\vec{oa'}$. Si on fixe b et c ainsi que C, on en déduit que l'ensemble des points h lorsque a décrit C est le cercle $C_1$ centré en $o_1$ symétrique de o par rapport à bc et passant par b et c.

4°. L'image $C_1$ du cercle C par la translation de vecteur $\vec{ah}$ peut aussi être considérée comme le symétrique de C par rapport à bc. Comme h appartient à $C_1$, son symétrique $h_1$ appartient à C. D'où les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit au triangle.

5°. On peut enfin considérer $C_1$ comme le symétrique de C par rapport à a' puisque a' est milieu de $[oo_1]$. Un raisonnement analogue à celui effectué en 4° permet d'affirmer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit au triangle.

6°. L'homothétie de centre g et de rapport $-\frac{1}{2}$ considérée au point 1 transforme C en C' cercle circonscrit au triangle a'b'c'. Le centre o' de C' est l'image de o par cette homothétie, donc : $\vec{go'} = -\frac{1}{2}\,\vec{go}$ et comme $\vec{go} = -\frac{1}{2}\,\vec{gh}$, on en déduit $\vec{oo'} = \frac{1}{2}\,\vec{oh}$ donc: o' est le milieu de [oh].

7°. Considérons l'autre homothétie de centre o", qui trans-



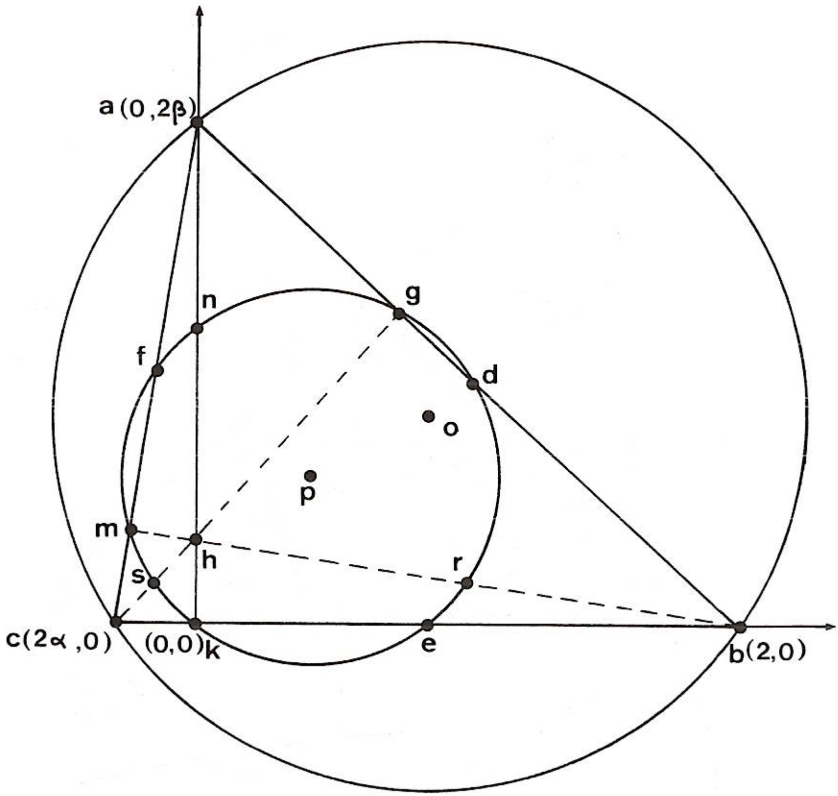

forme C en C' : $\overrightarrow{o''o'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{o''o}$ donc o'' = h et C' se déduit de C par l'homothétie de centre h et de rapport $\frac{1}{2}$. Les images $a_2$, $b_2$ et $c_2$ de a,b, et c par cette homothétie, c'est-à-dire les milieux de [ha], [hb] et [hc] appartiennent donc à C'.

8°. De la relation du 1°, on déduit $\overrightarrow{ha_2} = \overrightarrow{a'o}$, ce qui prouve que le quadrilatère $ha_2oa'$ est un parallélogramme. Le point o', milieu de oh est aussi le milieu de $a_2a'$ et $a_2$ est diamétralement opposé à a' sur C'.

9°. $[a_2a']$ est par suite un diamètre de C' et $a_2a_1a'$ est un triangle rectangle, donc $a_1$ appartient à C'. En conclusion, les pieds des hauteurs du triangle abc sont sur C'.

## GEOMETRIE ANALYTIQUE :

On choisit l'origine en k, et on paramétrise les sommets:




a : $(0,2\beta)$ b : $(2,0)$ c : $(2\alpha,0)$

Nous allons construire le cercle contenant k,e et d

e : $(1+\alpha,0)$ d : $(1,\beta)$ k : $(0,0)$
Cercle : $x^2 + y^2 + \phi x + \psi y + \delta = 0$

e $\in$ Cercle, donc $(1+\alpha)^2 + \phi(1+\alpha) + \delta = 0$
d $\in$ Cercle, donc $1 + \beta^2 + \phi + \psi\beta + \delta = 0$
k $\in$ Cercle, donc $\delta = 0$

En résolvant le système, on trouve $\phi = -(1+\alpha)$ et $\psi = \dfrac{\alpha - \beta^2}{\beta}$

et l'équation du Cercle est : $\underline{\beta x^2 + \beta y^2 - \beta(1+\alpha)x + (\alpha - \beta^2)y = 0}$

On vérifie que les 6 autres points appartiennent bien au cercle.

La coordonnée de f est facile à trouver : f : $(\alpha,\beta)$ et l'on vérifie sans problème que ce point appartient au cercle.

Pour trouver la coordonnée de g, on calcule successivement:
Coef.ang. ab : $-\beta$ Coef.ang. gc : $1/\beta$
Eq. ab : $\beta x + y - 2\beta = 0$ Eq. gc : $x - \beta y - 2\alpha = 0$

et g : $\left( \dfrac{2\ (\alpha + \beta^2)}{\beta^2 + 1} , \dfrac{2\ \beta(1 - \alpha)}{\beta^2 + 1} \right)$ appartient bien au cercle.

Pour trouver la coordonnée de m, on calcule successivement:

Coef.ang. ac : $-\beta/\alpha$ Coef. ang. mb : $\alpha/\beta$

Eq. ac : $\beta x + \alpha y + 2\alpha\beta = 0$ Eq. mb : $\alpha x - \beta y - 2\alpha = 0$

et m : $\left( \dfrac{2\alpha\ (\alpha + \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2} , \dfrac{2\alpha\beta\ (\alpha - 1)}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$ appartient au cercle.

Le système : $\begin{cases} \alpha x - \beta y - 2\alpha = 0 & (mb) \\ x = 0 & (ak) \end{cases}$ permet de trouver

la coordonnée de l'orthocentre H : $\left(0 , \dfrac{-2\alpha}{\beta}\right)$ , puis les

coordonnées des points n,r,s qui appartiennent tous trois au cercle qui peut donc être qualifié de CERCLE DES 9 POINTS.

n : $\left( 0 , \dfrac{\beta^2 - \alpha}{\beta} \right)$ r : $\left( 1 , \dfrac{-\alpha}{\beta} \right)$ s : $\left( \alpha , \dfrac{-\alpha}{\beta} \right)$

La forme canonique de l'équation du Cercle des 9 points :

$$\left( x - \frac{1 + \alpha}{2} \right)^2 + \left( y + \frac{\alpha - \beta^2}{2\beta} \right)^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 + 1)}{4\ \beta^2}$$

permet de trouver la coordonnée de p : $\left( \dfrac{1+\alpha}{2} , \dfrac{\beta^2 - \alpha}{2\beta} \right)$

et le rayon $r = \dfrac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+1)}}{2\beta}$

Nous construisons à présent le cercle circonscrit :

Cercle : $x^2 + y^2 + \phi x + \psi y + \delta = 0$

a $\in$ Cercle, donc $4\beta^2 + 2\psi\beta + \delta = 0$

b $\in$ Cercle, donc $4 + 2\phi + \delta = 0$

c $\in$ Cercle, donc $4\alpha^2 + 2\phi\alpha + \delta = 0$

On trouve le Cercle

$$\underline{\beta x^2 + \beta y^2 - 2(\alpha + 1)x - 2\ (\alpha + \beta^2)y + 4\alpha = 0}$$

et o : $\left( \alpha+1, \dfrac{\alpha+\beta^2}{\beta} \right)$ et le rayon $R = \dfrac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+1)}}{\beta}$

Les points h,p et o appartiennent tous trois à la droite d'Euler d'équation :

$$\underline{\beta(\alpha + 1)y - (3\alpha + \beta^2)x + 2\alpha(\alpha + 1) = 0}$$

Feuerbach a démontré que le Cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits. Hamilton a démontré que si H est l'orthocentre d'un triangle ABC, les quatre triangles ayant pour sommets ABCH pris 3 à 3 ont même cercle d'Euler qui est donc tangent aux 16 cercles inscrits ou exinscrits aux 4 triangles.

Enfin, le cercle des neufs points est le lieu du centre des hyperboles équilatères qui passent par les sommets du triangle.

## EULER et la Géométrie de l'espace.

*Si dans un polyèdre convexe, S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces, alors*

$$S - A + F = 2$$

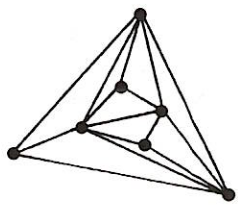


fig 1

Nous allons montrer cette formule d'Euler en 5 étapes.

1°. Si les faces du polyèdre ne sont pas toutes triangulaires, il existe au moins une face non triangle. Si je trace une diagonale dans cette face, j'ai une arête de plus et une face de plus; le nombre de sommets est constant, donc
S - A + F ne change pas.
Comme tout polygone peut être décomposé en un nombre fini de triangle, on peut se ramener au cas ou toutes les faces sont des triangles.

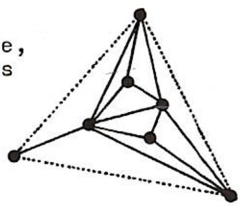


fig 2

2°.Si l'on enlève une face, on ne modifie ni S, ni A. Il nous faut alors démontrer que S-A+F=1.
On étire le reste de façon à l'aplatir sur un plan. On obtient une "représentation" du polyèdre où chaque face est un triangle. (fig 1).

3°. Si on enlève une arête du bord, on supprime un triangle (une face et une arête en moins): le nombre S-A+F ne change pas (fig 2)

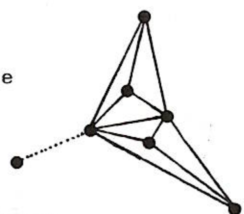
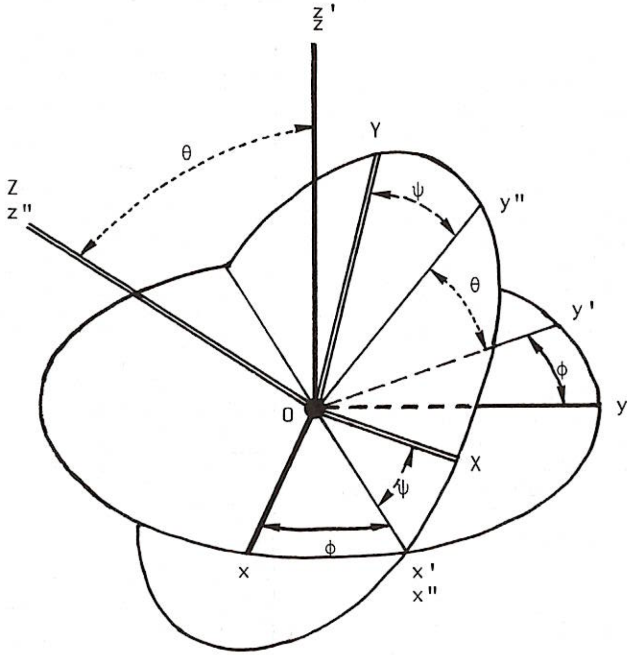


fig 3

4°. Si l'on enlève une arête ne limitant plus un triangle, on supprime en même temps un sommet: S-A+F n'a toujours pas changé (fig 3)

5°. En répétant le processus, on obtient nécessairement un triangle pour lequel S = 3, A = 3 et F = 1, donc S-A+F = 1 ce qui était notre thèse après le 2°.

## Angles d'Euler




Supposons que nous voulions définir la position du trièdre trirectangle OXYZ par rapport au trièdre trirectangle Oxyz. On peut y parvenir en considérant 3 rotations successives:

la première autour de l'axe Oz et d'amplitude φ : Oxyz devient Ox'y'z':premier angle d'Euler ou PRECESSION,

la seconde autour de l'axe Ox' et d'amplitude θ : Ox'y'z' devient Ox"y"z": second angle d'Euler ou NUTATION,

la troisième autour de l'axe Oz" et d'amplitude ψ : Ox"y"z" devient OXYZ : troisième angle d'Euler ou ROTATION PROPRE.

A partir des matrices de rotation, on peut calculer la matrice qui permet de calculer les nouvelles coordonnées de points connus dans l'un des systèmes dans l'autre. Ces transformations sont d'un emploi courant en astronomie où elles permettent le passage d'un système de coordonnées local (lié à un observateur) à un système plus général (lié l'équinoxe et à l'axe du monde).

## EULER et les carrés de nombres.

Il existe au jeu des échecs un problème curieux qui a occupé nombre de mathématiciens : en partant d'une case d'angle et en suivant les règles du mouvement du cheval, comment après 64 mouvements, être passé exactement une fois sur chaque case. Une solution de ce problème se trouve en haut à droite.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 59 | 44 | 9 | 40 | 21 | 46 | 7 |
| 61 | 10 | 41 | 58 | 45 | 8 | 39 | 20 |
| 12 | 43 | 60 | 55 | 22 | 57 | 6 | 47 |
| 53 | 62 | 11 | 30 | 25 | 28 | 19 | 38 |
| 32 | 13 | 54 | 27 | 56 | 23 | 48 | 5 |
| 63 | 52 | 31 | 24 | 29 | 26 | 37 | 18 |
| 14 | 33 | 2 | 51 | 16 | 35 | 4 | 49 |
| 1 | 64 | 15 | 34 | 3 | 50 | 17 | 36 |

Euler a vérifié qu'il existait des solutions de ce problème où le cheval pouvait sauter de la case 64 à la case de départ, formant ce qu'Euler appella une *route rentrante*. (Ci-contre)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 57 | 44 | 9 | 40 | 21 | 46 | 7 |
| 55 | 10 | 41 | 58 | 45 | 8 | 39 | 20 |
| 12 | 43 | 56 | 61 | 22 | 59 | 6 | 47 |
| 63 | 54 | 11 | 30 | 25 | 28 | 19 | 38 |
| 32 | 13 | 62 | 27 | 60 | 23 | 48 | 5 |
| 53 | 64 | 31 | 24 | 29 | 26 | 37 | 18 |
| 14 | 33 | 2 | 51 | 16 | 35 | 4 | 49 |
| 1 | 52 | 15 | 34 | 3 | 50 | 17 | 36 |

Il se paya le luxe d'écrire une route telle que la somme de tous les nombres d'une colonne ou d'une ligne vaut 260 et la somme de chaque demi-ligne 130. (3ème tableau ci-contre)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 27 | 42 | 7 | 58 | 23 | 38 | 11 |
| 43 | 6 | 55 | 26 | 39 | 10 | 59 | 22 |
| 28 | 53 | 8 | 41 | 24 | 57 | 12 | 37 |
| 5 | 44 | 25 | 56 | 9 | 40 | 21 | 60 |
| 52 | 29 | 4 | 45 | 20 | 61 | 36 | 13 |
| 47 | 2 | 49 | 32 | 15 | 34 | 17 | 64 |
| 30 | 51 | 46 | 3 | 62 | 19 | 14 | 35 |
| 1 | 48 | 31 | 50 | 33 | 16 | 63 | 18 |

A partir du *PROBLEME DES 36 OFFICIERS*, qui est de placer dans un tableau carré 36 officiers représentant 6 grades dans 6 régiments de manière que chaque rangée contienne tous les grades et tout les régiments, Euler créa les CARRES GRECO-LATINS : leur nom vient de l'usage simultané de lettres grecques et latines, qui permet de ne pas confondre les deux termes de chaque couple.

Euler ne trouva pas de solution et émit la conjecture de la non-existence de carré gréco-latin d'ordre 2n avec n entier impair. Tarry démontra en 1900 qu'Euler avait raison pour les carrés où n = 3, mais en 1959, Bose, Parker et Shrikhande ont renversé la conjecture d'Euler et montré qu'il existe des carrés gréco-latins de tout ordre excepté pour n=1 et 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| αa | βb | γc | δd |
| γb | δa | αd | βc |
| δc | γd | βa | αb |
| βd | αc | δb | γa |

*PS.: Ils employèrent un ordinateur (seule méthode connue pour donner tort à Euler...)*

## NOS EXTRAITS DE **BD**

On nous propose une heureuse illustration d'un diagramme en arbre au niveau du cycle d'observation tirée de Gaston Lagaffe,des gaffes et des dégats de Franquin et l'inévitable solution de l'équation du second degré dans Truc en Vrac de Gotlib.



# Le Coin des Problèmes

**120** Le nombre mystérieux.

$\overline{abcdef}$ est l'écriture d'un nombre de 6 chiffres;
a est celui des centaines de mille,
b celui des dizaines de mille,

etc.

$\overline{abcdef}$ multiplié par 2 donne cdefab comme produit
multiplié par 3 donne bcdefa comme produit
multiplié par 4 donne efabcd comme produit
multiplié par 5 donne fabcde comme produit
multiplié par 6 donne defabc comme produit.

Quel est ce nombre mystérieux ?
Multipliez-le par 7 et voyez le résultat obtenu !!
*(problème proposé par André PARENT de Mouscron)*

**121** Un match de tennis

Lendl remporte sur Mac Enroe un set de tennis par six à trois. Cinq points ont été gagnés par le joueur qui n'avait pas le service. Qui avait le service au début du set ?

**R112** Histoire de fractions. *(Dricot Isabelle)*

Si $\frac{x}{y}$ est la fraction à découvrir, nous pouvons écrire :

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{222}{333} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-1}{y-1} = \frac{333}{666} = \frac{1}{2}$$

De ces deux égalités, nous tirons le système :

$$\begin{cases} 3x + 3 = 2y + 2 \\ 2x - 2 = y - 1 \end{cases}$$

qui admet la solution : $x = 3$ et $y = 5$.
En conclusion, la fraction demandée est la fraction $\frac{3}{5}$.

**R113** A chacun sa profession. *(Langhendries Olivier)*

Mr. Blanc est jardinier et chauffeur.
Mr. Nègre est peintre et coiffeur.
Mr. Lenoir est violoniste et cordonnier.

**R114** Prédiction d'un calcul sur les doigts.

Nous vous proposons ici deux solutions différentes.
1° solution : *(6° Communauté Educative Jean XXIII Pesche.)*

Quand on compte, on sait donc qu'après chaque série de huit doigts, on sera sur l'index. C'est-à-dire que l'on sera sur l'index à chaque multiple de huit ... ce qui est le cas pour 1984. A 1984, la petite fille sera donc sur son index. Si le nombre n'avait pas été multiple de 8, le reste de la division entière du nombre par 8 nous aurait fourni la réponse sous forme du numéro du dernier doigt.

2° solution : *(Langhendries Olivier)*

Pour simplifier le problème, nous allons mettre l'aller et le retour ensemble, les considérer comme un seul. Nous arrivons à :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 17 | pouce | |
| 2 | 10 | 18 | index | |
| 3 | 11 | | majeur | ALLER |
| 4 | 12 | | annulaire | |
| 5 | 13 | . | auriculaire | |
| 6 | 14 | . | annulaire | |
| 7 | 15 | . | majeur | RETOUR |
| 8 | 16 | | index | |

Nous constatons une période de 8 doigts. Un tel problème se résout grâce aux congrus-modulos. Ici, pour compter jusqu'au naturel n :

doigt : $n \equiv_8 i \quad i \in \{1,2,3,4, \ldots ,8\}$

Donc pour la question de 1984 : $1984 \equiv_8 0 \equiv_8 8$ ➤ index

# L'Assembleur (suite)

L'inélégance de ces suites de quatre instructions semblables est certaine. Nous pouvons y remédier par l'emploi de boucles dont les pas seront comptés par le registre X. On obtient :

```
800: AD 00 10 LDA $1000  Transfert de $1000 dans A
803: A2 04    LDX #$4    Préparer 4 passages
805: 0A       ASL        Décaler à gauche
806: CA       DEX        Une étape est réalisée
807: D0 FC    BNE (-4)   (DF = 252) et 252 + 4 = 256
809: A2 04    LDX #$4    Boucle du décalage à droite
80B: 4A       LSR
80C: CA       DEX
80D: D0 FC    BNE (-4)   A contient les unités
80F: 8D 10 10 STA $1010  Ecriture des unités
812: AD 00 10 LDA $1000  On reprend $1000
815: A2 04    LDX #$4    Décaler 4 fois à droite pour
817: 4A       LSR        obtenir le nombre des dizaines.
818: CA       DEX
819: D0 FC    BNE (-4)
81B: 8D 11 10 STA $1011  Mémoriser le nombre
81E: 0A       ASL
81F: 0A       ASL        (x 4)
820: 18       CLC
821: 6D 11 10 ADC $1011  (x 5)
824: 0A       ASL        (x 10)
825: 18       CLC
826: 6D 10 10 ADC $1010  Dizaines + Unités
829: 8D 00 10 STA $1000  Résultat en $1000
82C: 60       RTS
```

Cette version comporte le même nombre d'instructions (25) et pourtant elle consomme 6 mémoires de plus. Doit-on en déduire que cette version est moins "bonne" que la première ? Et bien pas forcément, car c'est souvent sur un troisième critère que l'on juge de la valeur d'un programme en assembleur. Chaque instruction s'exécute en un certain temps (mesuré en CYCLES) qui est généralement signalé dans les manuels fournis par les fabriquants. On y découvre que les instructions ASL, LSR, LDX $4, DEX et BNE () consomment toutes 2 cycles. Les différentes boucles consomment donc toutes 8 cycles, ce qui est aussi le temps d'exécution de 4 ASL ou de 4 LSR.

Puisque la valeur de l'argument du LDX n'influence pas le temps d'exécution d'une telle boucle, on peut en déduire :

| | |
|---|---|
| 2 ou 3 instructions semblables | Répéter les instructions |
| 4 instructions semblables | Répéter ou boucler |
| A partir de 5 instructions semblables | Effectuer une boucle |

Mais il existe une méthode plus élégante pour obtenir les unités d'un nombre écrit en décimal codé binaire. Pour passer de 0110 1001 à 0000 1001 dans l'accumulateur, nous pouvons comparer 0110 1001 à 0000 1111 et garder de la comparaison les bits qui dans les deux nombres contiennent la valeur 1. Cette comparaison est effectuée par la fonction logique ET qui travaille bit par bit suivant la règle :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | et | 0 | donnent | 0 |
| 0 | et | 1 | donnent | 0 |
| 1 | et | 0 | donnent | 0 |
| 1 | et | 1 | donnent | 1 |

L'emploi de l'instruction

**AND (ET logique)**

permet d'obtenir les unités d'un décimal codé binaire par AND #$F et les dizaines par AND #$F0, d'où une troisième version de notre programme de conversion:

```
800: AD 00 10 LDA $1000  Transfert de $1000 dans A
803: 29 0F    AND #$F    Prendre les unités
805: 8D 10 10 STA $1010  et les ranger
808: AD 00 10 LDA $1000  Reprendre $1000
80B: 29 F0    AND #$F0   Prendre le chiffre des dizaines
80D: AD       LSR        (x 8)
80E: 8D 20 10 STA $1020  et le ranger
811: AD       LSR        (x 4)
812: AD       LSR        (x 2)
813: 18       CLC
814: 6D 20 10 ADC $1020  (x 2) + (x 8) = (x 10)
817: 6D 10 10 ADC $1010  Dizaines + Unités
820: 8D 00 10 STA $1000
823: 60       RTS
```

Dans la leçon un, nous avons signalé l'existence d'un POINTEUR DE PILE (Stock pointer) S qui est chargé de mémoriser les adresses de retour des sous-programmes. Ce registre S est en fait une série (on dit la PILE) de 256 mémoires gérées par une procédure LIFO (Last In, First Out). Lorsque l'on écrit dans ce registre, c'est toujours dans la première mémoire, le contenu éventuel de cette première mémoire passant en position 2, le 2 en 3 et ainsi de suite. La lecture ne peut se faire que dans l'ordre inverse: on lit la première mémoire, ce qui a pour effet de faire remonter la seconde en première place, la 3 en 2 et ainsi de suite. C'est donc la dernière "entrée" qui est la première "sortie". (C'est d'ailleurs le principe des PILES opérationnelles des calculatrices en mode polonais inversé.)

Il existe une fonction qui transfère l'Accumulateur A au dessus de la Pile S (on dit: "empiler A"), c'est

**PHA PusH Accumulator**

La fonction réciproque, qui transfère le dessus de la Pile S dans l'accumulateur A (On dit "dépiler A"), est

**PLA PulL Accumulateur**

Ce registre S devant à l'origine servir d'adresse de retour de sous-programmes, il faut bien veiller à dépiler complètement, sinon le programme "saute" un peu n'importe où après avoir exécuté votre RTS: en clair, il faut un nombre égal de PHA et de PLA. Voyons comment l'emploi de ces instructions permet d'éviter l'emploi de mémoires intermédiaires (comme $1020 dans le programme précédent) ou pour éviter un second transfert (le second LDA$1000 dans le programme précédent).

```
800: AD 00 10 LDA $1000  Transfert de $1000 dans A
803: 48       PHA        et le garder dans S
804: 29 OF    AND #$F    Prendre les unités
806: 8D 10 10 STA $1010  et les ranger
809: 68       PLA        On récupère $1000 en fait
80A: 29 F0    AND #$F0   Prendre le chiffre des dizaines
80C: AD       LSR        (x 8)
80D: 48       PHA        et le garder en S
80E: 18       CLC
80F: 6D 10 10 ADC $1010  Ajouter 8 x les dizaines
812: 8D 10 10 STA $1010  aux unités en $1010
815: 68       PLA        Reprendre (x 8)
816: AD       LSR        En faire un (x 4)
817: AD       LSR        En faire un (x 2)
818: 6D 10 10 ADC $1010  Ajouter 2 x les dizaines
81B: 8D 00 10 STA $1000  à 8 x les dizaines + unités
81E: 60       RTS
```

## LECON CINQ

### Toujours les opérations mathématiques.

Examinons à présent le problème de la conversion d'un nombre exprimé en hexadécimal (45) en décimal codé binaire (69). La valeur 4 doit être récupérée dans 45 et multipliée par 16 (car 45 = 4*16 + 5). Après avoir initialisé une mémoire à zéro, on peut y ajouter 4*16 par une boucle dont le nombre de pas (4) doit se transférer de l'accumulateur A (où le 4 est calculé) au registre X qui nous sert de compteur de boucle. A cet usage nous introduisons l'instruction

**TAX Transfer A to X**

dont l'usage est assez clair. Cette multiplication (4*16), qui se présentera en fait sous la forme d'une addition (16 + 16 + 16 + 16) devra s'effectuer en mode décimal codébinaire.

Dans le cas de 45, il reste à additionner, toujours en décimal codé binaire, le chiffre 5 et tout est dit. Mais pour convertir l'hexadécimal (3F) en sa valeur décimal codé binaire, il nous faut transformer le F en 15 avant de pouvoir l'additionner au 3*16 préalablement calculé. Aussi, nous testerons si notre chiffre de droite a, en hexadécimal, une valeur supérieure ou égale à A (10) tout simplement en soustrayant A de la valeur de notre chiffre de droite. Nous aurons besoin d'un test nous indiquant si notre résultat est négatif (cas de 45 : 5-A est négatif) ou positif (cas de 3F : F-A est positif). Ce test s'écrit

**BMI Branch if MInus**

qui provoque un branchement lorsque le dernier résultat dans l'accumulateur est strictement négatif. On peut aussi employer

**BPL Branch if PLus**

qui provoque un branchement lorsque le dernier résultat dans l'accumulateur est positif ou nul.

Voici un programme employant ces principes :

```
800: A9 00     LDA #$0    On met une mémoire de calcul
802: 8D 10 10 STA $1010  à zéro.
805: AD 00 10 LDA $1000  On prend le nombre hexadécimal
808: 29 F0     AND #$F0   Partie gauche, suivie de 4 zéros
80A: 4A        LSR        On supprime les 4 zéros par
80B: 4A        LSR        4 décalages vers la droite.
80C: 4A        LSR        Ce qui nous donne
80D: 4A        LSR        l'indice de la boucle
80E: AA        TAX        que l'on transfert dans le compteur.
80F: F8        SED        Décimal codé binaire
810: 18        CLC        Début de la boucle
811: A9 16     LDA #$16   On ajoute 16
813: 6D 10 10 ADC $1010  à notre mémoire de calcul
816: 8D 10 10 STA $1010
819: CA        DEX        Désincrémentation de la boucle
81A: D0 F4     BNE (-12)  (F4=244) et 244 + 12 = 256
81C: D8        CLD        On repasse à l'hexadécimal
81D: AD 00 10 LDA $1000  On reprend le nombre de départ
820: 29 0F     AND #$F    puis sa partie de droite
822: 48        PHA        On le garde (cas < 10)
823: 38        SEC        On prépare la soustraction
824: E9 0A     SBC #$A    moins 10
826: 18        CLC        Dans les deux cas, on ajoutera
827: 30 0C     BMI (+12)  On reporte le cas < 10
829: F8        SED        Décimal codé binaire
82A: 69 10     ADC #$10   On est dans le cas > 10
82C: 6D 10 10 ADC $1010  On ajoute 10 et le complément à 10
82F: 8D 00 10 STA $1000  et on range
832: D8        CLD        Fin de mode
833: 68        PLA        pour compenser le PHA
834: 60        RTS        Fin du cas > 10
835: 68        PLA        On récupère le nombre
836: 6D 10 10 ADC $1010  On l'ajoute
839: 8D 00 10 STA $1000  et on range
83C: D8        CLD        Fin de mode
83D: 60        RTS        Fin du cas < 10
```

Une autre méthode consiste à soustraire systématiquement $A (10 en hexadécimal) au contenu de la mémoire $1000 et à ajouter parallèlement $10 (=10 en DCB) au contenu de la mémoire $1010 (qui sera initialisée à zéro). Lorsque pour la première fois, la soustraction donnera un nombre négatif, on ajoutera $A et on trouvera le reste de la division du contenu de la mémoire $1000 par $A, qu'il suffira d'ajouter au contenu de la mèmoire $1010.

Nous allons écrire un programme qui utilise pour la première fois un "GOTO", c'est-à-dire un saut obligatoire à une adresse donnée:

## JMP JuMP

```
800: A9 00     LDA #$0    On met à zéro une mémoire
802: 8D 10 10 STA $1010  de calcul (contiendra le DCB)
805: AD 00 10 LDA $1000  On prend l'hexadécimal
808: 38        SEC        Préparer la soustraction
```

```
809: ED 0A     SBC #$A    de 10 unités en hexadécimal
80B: 30 0E     BMI (+14)  Branchement (reste par exès)
80D: 48        PHA        On garde la différence partielle
80E: AD 10 10 LDA $1010   Actuelle valeur DCB
811: 18        CLC        Préparer l'addition
812: 69 10     ADC #$10   de 10 unités en décimal codé binaire
814: 8D 10 10 STA $1010   et stocker
817: 68        PLA        Différence partielle récupérée
818: 4C 08 08 JMP $808    Boucler à l'adresse $808
81B: 69 10     ADC #$10   Récupérer le reste par défaut
81D: 18        CLC        et l'additionner
81E: 6D 10 10 ADC $1010   à ce que l'on avait déja converti
821: 8D 00 10 STA $1000   Et voilà...
824: 60        RTS
```

Si vous décidez d'introduire ce programme à l'adresse $900 et non plus $800, l'instruction $818 s'obstinera à renvoyer le programme à l'adresse $808. Bien entendu, il vous suffit de modifier en conséquence la ligne $818 pour en faire un JMP $908. Mais si votre programme contient de nombreux JMP, transposer un programme peut rapidement devenir fastidieux; aussi il existe une astuce capable de remplacer un JMP par un branchement relatif. Ainsi la suite d'instruction SEC BCS qui exige un branchement si le carry est mis, juste après l'avoir mis est équivalent à un JMP inconditionnel. Suivant votre humeur, vous pouvez aussi programmer un CLC BCC! Cette procédure implique bien sûr que l'on peut modifier le Carry et qu'il n'est pas important à cet instant précis du programme.

Nous allons à présent aborder la division: celle-ci peut se faire en effectuant des soustractions successives, un peu suivant l'idée du programme précédent qui n'était en fait qu'une division par 10. Nous en profiterons pour introduire une fonction importante qui permet de ne pas toujours effectuer les tests par rapport à zéro, mais de comparer l'accumulateur avec une autre valeur: BPL sera actif si l'accumulateur est supérieur ou égal au nombre ou contenu de mémoire inscrit dans la fonction de comparaison. BMI sera actif pour un accumulateur strictement inférieur, BNE lorsqu'ils sont différents et la quatrième fonction de comparaison mathématique que nous n'avons pas encore signalée:

**BEQ Branch if EQual**

sera active lorsque les deux termes de la comparaison sont égaux. Cette comparaison s'effectue par l'instruction:

**CMP CoMPare accumulator**

qui effectue la soustraction virtuelle (c'est-à-dire que le résultat n'est pas remis dans l'accumulateur, qui reste inchangé) accumulateur - mémoire. La caractéristique la plus importante est justement le fait que l'accumulateur reste inchangé, permettant des comparaisons en cascade (suite de CMP et BEQ).

Voici une première version: le dividente est en $1000, le diviseur en $1010, le quotient en $1015 et le reste en $1020.

```
800: A9 00     LDA #$0
802: 8D 15 10 STA $1015   Au départ, le quotient vaut zéro
```

```
805: AD 00 10 LDA $1000  Dividente
808: 38       SEC
809: ED 10 10 SBC $1010  - le diviseur
80C: 8D 05 10 STA $1005  on garde la différence
80F: AD 15 10 LDA $1015  Le quotient
812: 18       CLC        vaut
813: 69 01    ADC #$1    une unité
815: 8D 15 10 STA $1015  de plus
818: AD 05 10 LDA $1005  on récupère la différence
81B: CD 10 10 CMP $1010  on compare au diviseur
81E: 10 E8    BPL (-24)  (E8=232) et 232+24 = 256
820: 8D 20 10 STA $1020  c'est terminé
823: 60       RTS
```

Le bloc formé par les instructions $80F à $815, qui consiste à additionner une unité dans une mémoire donnée est d'un emploi courant, aussi il existe une fonction qui effectue cette opération; c'est

**INC INCrement memory**

On constate par ailleurs que l'emploi de la mémoire auxiliaire $1005 peut être évité par l'emploi des fonctions PHA et PLA, ce qui nous donne une seconde version:

```
800: A9 00    LDA #$0
802: 8D 15 10 STA $1015
805: AD 00 10 LDA $1000
808: 38       SEC
809: ED 10 10 SBC $1010
80C: 48       PHA        On garde le résultat
80D: EE 15 10 INC $1515  On augmente le quotient de 1
810: 68       PLA        On récupère le résultat
811: CD 10 10 CMP $1010
814: 10 F2    BPL (-14)  (F2=242) et 242 + 14 = 256
816: 8D 20 10 STA $1020
819: 60       RTS
```

On peut aussi employer comme compteur (=quotient) le régistre X que l'on peut ranger par :

**STX STore X register**

et incrémenter par:

**INX INcrement X register**

ce qui donne une troisième version:

```
800: A2 00    LDX #$0    Mettre à zéro le quotient
802: AD 00 10 LDA $1000  Dividende dans l'accumulateur
805: 38       SEC
806: ED 10 10 SBC $1010  Soustraire le diviseur
809: 30 04    BMI (+4)   Si A<=0, avancer de 4 mémoires
80B: E8       INX        Incrément du quotient
80C: 38       SEC        Simuler un JMP
80D: B0 F7    BCS (-9)   (F7=247)  et 247 + 9 = 256
80F: 8E 10 15 STX $1020  Range le quotient
812: 6D 10 10 ADC $1010  Additionne le diviseur à l'accumulateur
815: 8D 20 10 STA $1020  Range le reste
818: 60       RTS
```

# Mots Mêlés

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | A | D | I | A | N | M | N | E | L | G | N | A | M | U | S | G |
| A | E | O | M | G | E | O | S | E | I | E | L | E | A | T | C | A |
| Y | N | T | R | T | C | P | R | C | I | G | T | Y | A | I | E | R |
| O | I | A | R | E | A | E | T | S | E | R | O | T | O | N | R | I |
| N | D | E | L | C | S | E | O | B | I | N | I | L | A | E | C | T |
| E | N | N | E | Y | O | M | R | E | R | S | T | I | O | O | L | H |
| T | E | U | L | I | T | E | E | G | T | C | D | R | U | P | E | M |
| I | L | A | U | E | H | I | I | I | E | E | I | R | E | U | O | E |
| L | N | D | I | A | L | P | Q | I | M | D | B | M | E | D | S | T |
| A | C | A | R | R | E | U | A | U | O | E | L | I | E | N | I | I |
| G | E | R | T | U | E | N | D | R | E | L | L | I | M | D | O | Q |
| E | I | R | T | E | M | O | N | O | G | I | R | T | E | N | R | U |
| N | T | N | E | C | I | R | T | A | M | E | D | R | O | I | T | E |

AIRE
ALGEBRE
ANALYSE
ANALYTIQUE
ANGLE
ANNEAU
ARITHMETIQUE

CARRE
CENT
CENTRE
CERCLE
COURBE

DEGRE
DEMI
DROITE

EGALITE
ESPACE

GEOMETRIE
GRADE
GRAPHIE

LECON
LOI
LIEN

MATRICE
MEDIANE
METRE
METRIE
MILIEU
MILLE

MODE
MODULE
MOYENNE

NEUTRE
NOYAU

RADIAN
RAYON
RESTE
RIEN

STATISTIQUE

TOPOLOGIE
TORE
TRIGONOMETRIE
TROIS

L'ENIGME : Une très vieille branche de la mathématique !!

BON AMUSEMENT !!!

# SOMMAIRE MATH-JEUNES 27



Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
A.S.B.L.

Rédaction et Edition de Math-Jeunes

*Gh. Marin, J. Miewis et W. Vanhamme*

Courrier

*Math-Jeunes, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège*

Abonnement

*Belgique : groupés (5 au moins) 60 FB par abonnement*
*isolés 100 FB*
*Etranger : par paquets de 5 600 FB le paquet*
*isolé 200 FB*
*Compte n° 000-0728014-29, SBPM*
*Chemin des Fontaines, 14 bis, 7460 - CASTEAU*

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.

Poster historique : *Belgique : 30 FB*
*par paquets de 5 : 120 FB*
*Etranger : 60 FB*
*par paquets de 5 : 240 FB*

Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme due de 100 FB pour frais d'encaissement.