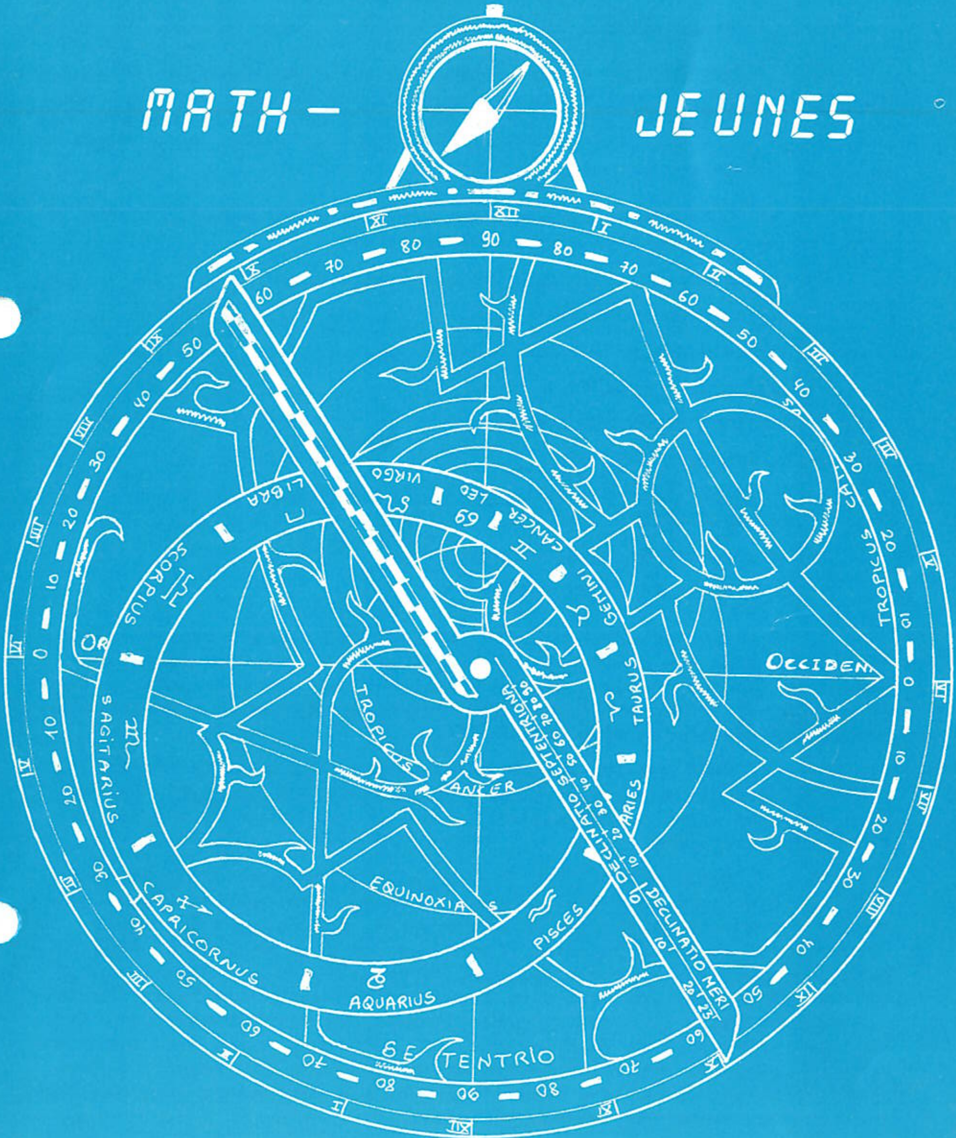
7e Année | Numéro 28 | Eté 1985



Publication trimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. A.S.B.L.

Chers amis,

MATH-JEUNES a aujourd'hui six ans d'existence et le nombre d'abonnés oscille depuis trois ans aux environs de 4000. Ce n'est pas mal, ... ce pourrait être mieux. Si le journal vous plaît n'oubliez pas d'être nos propagandistes à la rentrée prochaine, auprès de vos camarades et de vos professeurs.

Quels furent pendant ces six années des moments "forts" de notre revue. Nous pensons qu'il faut épingler

- Le poster et le lexique des mathématiciens
- Les numéros spéciaux
- Gérald Gèbre et ses bandes dessinées
- Les rallyes problèmes
- Les challenges programmation
- La rubrique CAR-MATH
- Quelques (trop peu nombreux) articles rédigés par vous, élèves de nos écoles
- Le concours de dessins d'en-têtes
- Le mini-cours d'ASSEMBLEUR

Pour très peu d'entre vous l'ensemble des moments cités est connu; pour les avoir tous connus il a fallu que vous figuriez parmi nos fidèles lecteurs depuis votre première année secondaire (sauf si vous aimez tellement l'école que vous vous complaisez à rester plusieurs années dans la même classe !!).

Mais que les autres se rassurent, des moments "forts" il y en aura encore, surtout si vous nous exprimez vos souhaits, si vous nous apportez votre collaboration active, si vous nous faîtes des critiques constructives.

Parmi nos projets de l'an prochain figure celui de vous offrir, en plus du coin des problèmes où nous continuerons à vous présenter des questions simples et attrayantes, des énoncés de niveau "Olympiades" auxquels pourront s'attaquer les plus motivés d'entre vous. Nous demanderons à Monsieur WILMET, responsable de la sélection des élèves qui suivent les stages de formation pour les olympiades internationales de faire intervenir comme éléments positifs de son choix les réponses individuelles valables que nous recevrons, mais nous aimerions beaucoup recevoir également le travail réalisé par un groupe d'entre vous, voire par une classe sous l'égide de son professeur. Les meilleures réponses seront évidemment publiées.

Nous vous souhaitons d'excellentes vacances, enrichissantes pour vous tous

La Redaction

René-François de SLUSE, un homme de chez nous

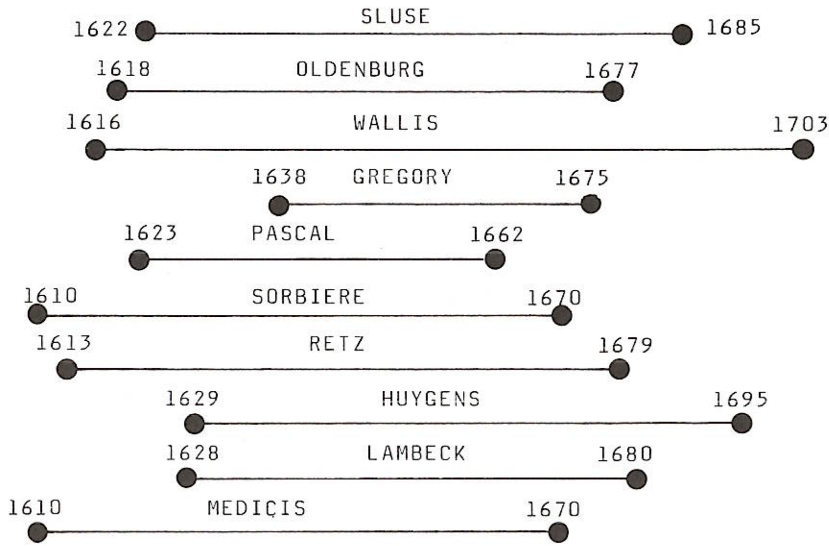
René-François de SLUSE est né à Visé le 2 juillet 1622. A 9 ans, il reçoit la "tonsure", puis étudie le droit à l'Université de Louvain. Il s'établit ensuite à Rome où il étudie le grec, les langues orientales, la philosophie, la mathématique, la physique et l'astronomie... Le 8 octobre 1650, le pape le dote du canonicat au chapitre de la cathédrale de Liège. Il sera directeur du chapitre, administrateur, conseiller privé du prince-évèque (= ministre de la Principauté), conseiller ordinaire au tribunal d'appel. Il sera abbé de la Collégiale d'Amay. A ces fonctions officielles s'ajoute celle de commissaire apostolique du Nonce (on dirait de nos jours agent secret...).

Malgré ses nombreuses tâches qui lui imposaient bien des contraintes, il trouva le temps de se consacrer à la science. Il entretint durant 25 ans une correspondance régulière avec les plus grands esprits de l'Europe. En 1674, il fut élu membre de la Société Royale de Londres. A la fin de sa vie, il publia plusieurs ouvrages d'histoire religieuse. Il s'éteignit le 19 mars 1685 (il y a juste 4 siècles!). On raconte que le savant chanoine se fit transporter dans sa bibliothèque pour revoir une dernière fois ses livres avant de mourir. Le frère de René-François, Jean-Gauthier de Sluse né en 1628 obtint la pourpre cardinalice et mourut à Rome en 1687 où il exerçait les fonctions de secrétaire du pape Innocent XI.

On sait qu'en juin 1658, Pascal - sous le nom de A. Dettonville - adressa aux géomètres une invitation à résoudre certains problèmes sur la cycloïde. De Sluse envoya la solution de quelques-uns des problèmes posés.

De nombreuses courbes sont en effet étudiées à cette époque: on en cherche les tangentes, les normales, les aires des surfaces qu'elles délimitent. Ces problèmes, souvent triviaux de nos jours parce que nous avons maitrisé les notions de dérivée et d'intégrale, étaient à cette époque résolus au coup par coup.

De Sluse entretiendra avec Pascal une correspondance suivie à ce sujet, d'où vont naître des techniques plus générales.



Principaux correspondants de Sluse

JAMES GREGORY : Professeur de mathématique, optique et astronomie à Edimburg. Membre de la Royal Society.

CHRISTIAAN HUYGENS : hollandais, a découvert les anneaux de Saturne, l'horloge à pendule et la théorie ondulatoire de la lumière. Membre de la Royal Society et de l'Académie des Sciences de Paris.

PIERRE LAMBECK : Professeur d'histoire, puis recteur du collège de Hambourg.

FERDINAND II de MEDICIS : grand-duc de Toscane, protecteur des lettrés et savants.

HENRY OLDENBURG : Premier secrétaire de la Royal Society dès sa fondation. Erudit, il eut un rôle de "diffuseur" du savoir.

BLAISE PASCAL : Nombreuses recherches sur les coniques, la statique des fluides, les problèmes infinitésimaux et les jeux de hasard. Il se retire ensuite à Port-Royal pour se consacrer à la religion.

PAUL de GONDI, cardinal de RETZ : homme de lettres français, mémorialiste de la Fronde.

SAMUEL SORBIERE : médecin, philosophe et grand voyageur.

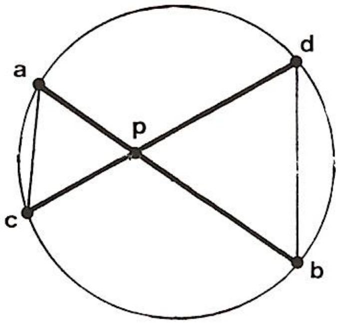
JOHN WALLIS : Professeur de géométrie à Oxford. Pionnier de la Royal Society, il s'est aussi distingué par une activité théologique, des grammaires et phonétiques anglaises et des éditions de manuscrits anciens de mathématique.

Outre la cycloïde, de Sluse s'est beaucoup occupé de la cissoïde de Dioclès. Cette courbe donne une solution simple au problème de la duplication du cube ou problème de Délos: dans cette île, se trouvait un socle d'une statue de dieu qui était un cube parfait. Le dieu avait demandé que l'on construise un nouveau socle ayant exactement un volume double. Pour répondre à cette question, il faut pouvoir résoudre l'équation:

$$A^3 = 2\ B^3$$

au sens des grecs, c'est-à-dire "avec la règle et le compas". Malheureusement, si la connaissance d'une cissoïde permet de résoudre l'équation, on ne peut construire une cissoïde avec une règle et un compas. A l'époque de Sluse, on ne le savait pas, d'où l'intérêt porté à cette courbe.

Revoyons d'abord deux résultats élémentaires de géométrie.



Soient 2 sécantes ab et cd qui se coupent en un point p.

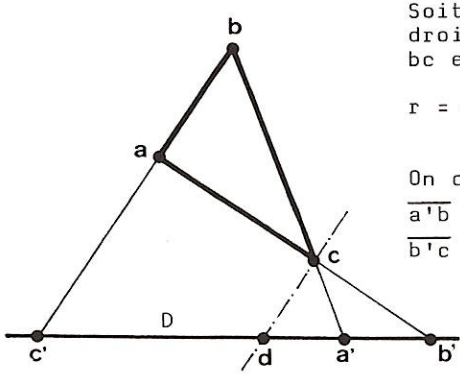
L'angle $(c\hat{a}b)$ = l'angle $(c\hat{d}b)$ car ils interceptent des arcs égaux.
Les angles $(a\hat{p}c)$ et $(b\hat{p}d)$ sont opposés par le sommet.
Les triangles pac et pbd sont semblables et l'on peut écrire:

$$\frac{\overline{pa}}{\overline{pd}} = \frac{\overline{pc}}{\overline{pb}} \quad \text{ou encore :}$$

$$\boxed{\overline{pa}\ .\ \overline{pb} = \overline{pc}\ .\ \overline{pd}}$$

$\overline{pa}$ est la longueur de [pa]

Voyons à présent un résultat de Menelaüs d'Alexandrie:



Soit un triangle abc et une droite D qui rencontre ab en c', bc en a', ca en b'. On pose:

$$r = \frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}}\ ,\ s = \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}}\ ,\ t = \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$$

On construit cd // ba.

$\overline{a'b} = r\ \overline{a'c} \Rightarrow \overline{bc'} = r\ \overline{cd}$ (Thales)

$\overline{b'c} = s\ \overline{b'a} \Rightarrow \overline{cd} = s\ \overline{ac'}$ (Thales)

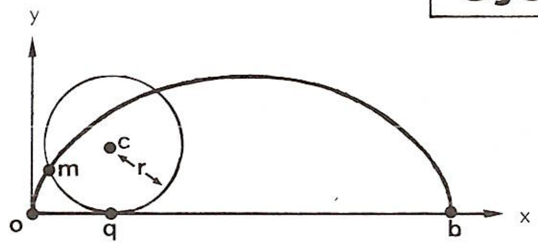
donc $\overline{bc'} = r\ s\ \overline{ac'}$

or $\overline{c'a} = t\ \overline{bc'}$ donc

$\overline{bc'} = r\ s\ t\ \overline{bc'}$ et

$$\boxed{r\ s\ t = 1}$$

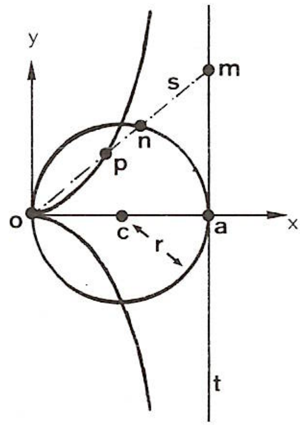
Cycloïde



La Cycloïde est le lieu des points m *tels que l'arc* qm *est égal au segment* oq *lorsque le cercle de centre* c *et de rayon* r *roule sans glisser sur la droite fixe* ox. *Le point de contact initial est* o, *origine des axes.*

Les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases}$

La longueur de l'arc omb *vaut* $8r$, *son centre de gravité est situé au point* $(\pi r\ ,\ \frac{4}{3}\ r)$. *L'aire de la surface comprise entre l'arc* omb *et le segment* ob *vaut* $3\pi r^2$, *son centre de gravité est situé au point* $(\pi r\ ,\ \frac{5}{6}\ r\ )$. *Quant au volume obtenu par la révolution de l'arc* omb *autour de* ox, *il vaut* $5\ \pi^2\ r^3$.



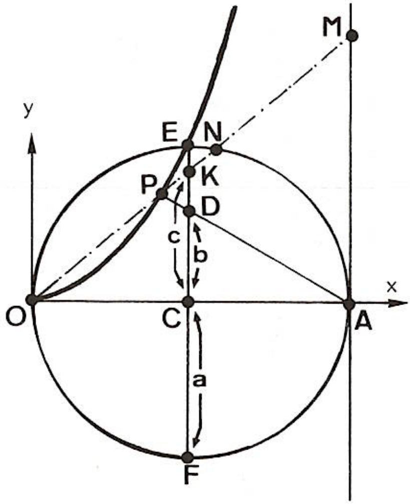
Prenons un cercle de centre c *fixe et de rayon* r *et une tangente* t *fixe. On construit une sécante* s *issue de* o *diamétralement opposé au point de contact* a *de* t *avec le cercle. On porte le segment* op *égal au segment* nm. *Le lieu de* p *est la cissoïde.*

L'équation polaire est $\rho = \dfrac{2\ r\ \sin^2\vartheta}{\cos\ \vartheta}$

L'équation cartésienne est $y^2 = \dfrac{x^3}{2r-x}$

*La surface comprise entre une cissoïde et son asymptote (*t*) vaut* $3\ \pi\ r^2$*: c'est le premier exemple connu d'une surface infinie admettant une aire finie. De Sluse a calculé le volume obtenu par la révolution de la courbe autour de son asymptote :* $2\ \pi^2\ r^3$*; c'est*

Cissoïde



A partir d'un cercle de rayon a, nous construisons la cissoïde. OA et EF sont deux diamètres perpendiculaires. On trace AD de telle façon que le segment CD soit égal à b. Du point P, intersection de AD avec la cissoïde, on trace OP qui rencontre EF en K. Soit c la longueur du segment CK.

$\overline{FK} = a + c$ et $\overline{KE} = a - c$

permettent de calculer le produit $\overline{EK}\ \overline{FK}$: $a^2 - c^2$

Notre premier rappel nous permet d'écrire :

$$\overline{KO}\ \overline{KN} = a^2 - c^2 \qquad (1)$$

Considérons à présent le triangle OCK et la droite PDA.

Le théorème de Menelaüs donne :

$$\frac{\overline{PK}\ \overline{DC}\ \overline{AO}}{\overline{OP}\ \overline{DK}\ \overline{AC}} = 1$$

Puisque $\overline{AO} = 2\ a$, $\overline{AC} = a$, $\overline{DC} = b$, on obtient :

$$\frac{2\ b\ \overline{PK}}{\overline{OP}\ \ \overline{DK}} = 1 \qquad (2)$$

Comme $\overline{OK} = \overline{KM}$ (triangles OKC et KMQ isométriques) et comme $\overline{OP} = \overline{NM}$ par définition de la cissoïde, on a : $\overline{PK} = \overline{KN}$.

D'autre part $\overline{OP} = \overline{OK} - \overline{KP} = \overline{OK} - \overline{KN}$.

Quant à $\overline{DK}$, il vaut c - b.

Le quotient (2) se simplifie donc en :

$$\frac{2\ b\ \overline{KN}}{(\overline{OK}-\overline{KN})(c-b)} = 1 \qquad (3)$$

Comme il est facile de connaître $\overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CK}^2 = a^2 + c^2$, (4) on transforme à nouveau le quotient (3)

$$\frac{2\ b\ \overline{KO}\ \overline{KN}}{(\overline{OK}^2-\overline{KO}\ \ \overline{KN})(c-b)} = 1$$

et en tenant compte des résultats (1) et (4), on obtient

$$\frac{2\ b\ (a^2 - c^2)}{(a^2 + c^2 - (a^2 - c^2))(c-b)} = 1$$

Conchoïde de Sluse

Soit un point o *situé à une distance* a *d'une droite* t. *Sur chacune des droites* oc, *on prend les points* d *et* d' *des segments* cd *et* cd' *tels que l'on ait :*

$$|oc|\ |cd| = k^2$$
$$|oc|\ |cd'| = k^2$$

où k^2 *est une quantité donnée. Le lieu des points* d *et* d' *forme les 2 branches de la Conchoïde de Sluse.*

L'équation polaire est :

$$\rho = \frac{a}{\cos \vartheta} + \frac{k^2 \cos \vartheta}{a}$$

L'équation cartésienne est :

$$a\ (x-a)\ (x^2+y^2) = k^2x^2$$

Sluse a calculé les coordonnées des sommets et des points d'inflexion : il a montré que le lieu de ceux-ci lorsque k varie (a constant) est une cissoïde.

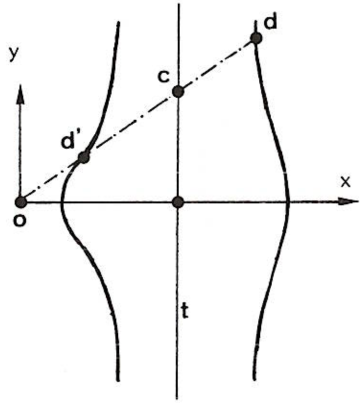
Trois types de dessin sont possibles:

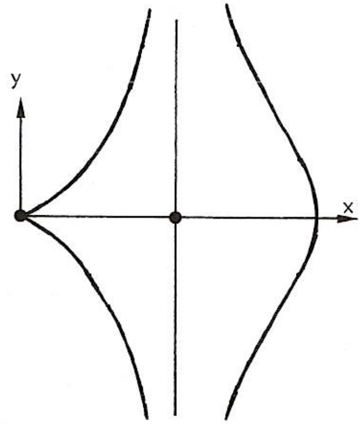
en haut : $k^2 < a^2$ *: la courbe est acnodale.*
au centre : $k^2 = a^2$ *: la courbe est cuspidale.*
en bas : $k^2 > a^2$ *: la courbe est crunodale.*

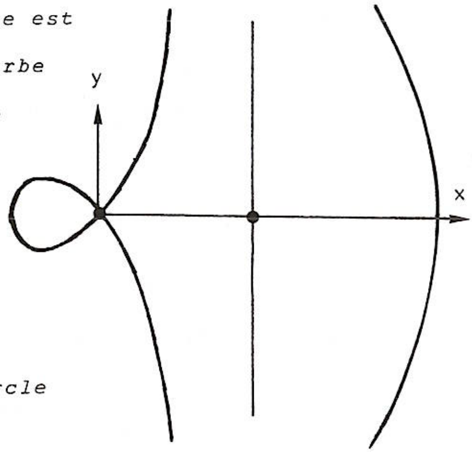
Ces conchoïdes de Sluse ne doivent pas être confondues avec les conchoïdes de Nicomède construites sur le même principe, mais avec la définition plus simple :

$$|cd| = |cd'| = b$$

Si t *est remplacé par un cercle contenant* o, *on obtient les conchoïdes de Pascal.*







$$\frac{2\ b\ (a^2 - c^2)}{2\ c^2\ (c - b)} = 1$$

$$b\ (a^2 - c^2) = c^2\ (c - b)$$

$$ba^2 - bc^2 = c^3 - bc^2$$

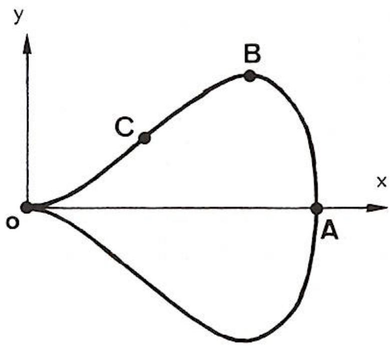
$$ba^2 = c^3$$

Dans le cas particulier où $b = 2a$, on a : $c^3 = 2\ a^3$. La connaissance du point K résoud donc le problème de Délos.

De Sluse étudia également une nouvelle forme de conchoïde auquel il laissa son nom. Il s'intéressa aussi à des courbes en forme de perle: les perles de Sluse qui vérifient l'équation :

$$y^n = k\ (a - x)^p\ x^m$$

où m,n et p sont des naturels.



De Sluse et Huygens ont surtout étudié dans cette famille de courbe, la courbe définie par

$$y^2 = \frac{1}{b^2}\ (a - x)\ x^3$$

Le point A est $(a,0)$

Le point B est $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}\right)$

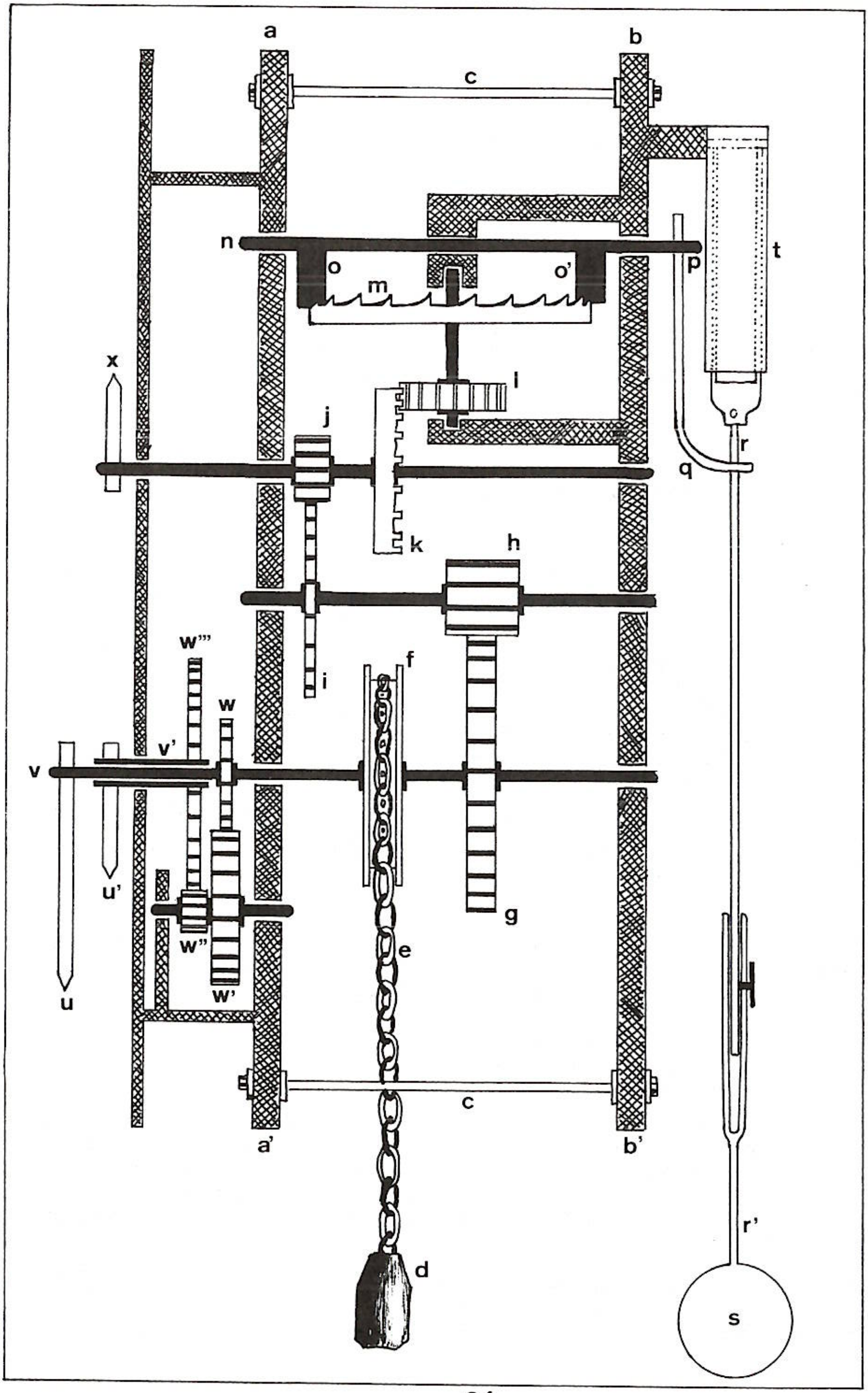
Quant au point d'inflexion C, l'abscisse est donnée par $\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

Mais de Sluse est avant tout un savant, aussi toutes les branches de la science le rendent curieux. Avec lui, abandonnons un moment la mathématique.

SLUSE ET LA MESURE DU TEMPS.

Lorsque Huygens eut réalisé son horloge à balancier, il en envoya un exemplaire à de Sluse. Ce dernier vulgarisera son emploi dans la région et la fera connaître à ses correspondants étrangers. La description de l'horloge nous semble tellement simple que nous avons pensé vous la présenter.

L'horloge est vue de profil. aa' et bb' sont 2 platines assemblées par 4 piliers (c) placés aux angles. Deux poids (d) sont attachés à une chaîne (e) qui passe dans la gorge de la poulie (f), gorge munie de pointes qui empèchent la


a
b
c
t
n
p
o
o'
m
x
l
j
r
q
k
h
w'''
f
i
w
v'
v
u'
g
w''
e
u
w'
c
a'
b'
r'
d
s

chaîne de glisser. L'axe de la poulie (f) est aussi celui de la roue (g). Celle-ci reçoit son mouvement du poids (d) et le communique au pignon (h) et donc à la roue (i) qui le conduit au pignon (j) et à la roue (k) qui l'amène au pignon (l) et à la roue de rencontre (m) de même axe vertical.

L'axe horizontal (n) porte 2 palettes (o et o') qui sont levées alternativement et en sens contraire par les dents de (m). La partie (p) sortant de la cage porte la fourchette (q) (vue ici de profil) dans laquelle passe la verge (rr') du pendule (rs) suspendu par deux fils entre des lames de forme cycloïdale (vues ici de profil).

Ebranlé, le pendule effectue grâce aux lames des oscillations de même durée et donc ne permet aux dents de la roue (m) que de passer dans des temps égaux. L'uniformité se transmet ainsi à toutes les parties du rouage dont les vitesses angulaires sont proportionnelles.

Quant aux aiguilles des minutes (u) et des heures (u'), elles sont fixées respectivement sur l'axe solidaire de (f) et (g) (axe intérieur (v)) et sur le canon extérieur (v'). La rotation de v' est assurée par le système de réduction (w,w',w",w"') (12 rotations de (u) pour une rotation de (u')). ((w) est solidaire de (v), (w"') solidaire de (v'), (w') solidaire de (w")).

Pour les secondes, l'axe de la roue (j) porte une aiguille (x). Le pendule effectue une oscillation par seconde. Le nombre de dents des roues est calculé de manière que la roue (g) fasse un tour en une heure.

SLUSE ET L'ASTRONOMIE.

Lors de sa formation à Rome, de Sluse a bien sûr étudié le système de Ptolémée, mais il comprend vite que le système de Copernic est plus simple dans certains calculs. Aussi emploie-t-il indifféremment l'un ou l'autre système. Il lit les livres interdits, observe des éclipses, des taches solaires, les positions du Soleil et de Mars, les comètes de 1665 et 1668. Dans la Principauté, on affirme que "les interdictions ne passent pas les montagnes" et on est tranquillement copernicien lorsque le besoin s'en fait sentir...

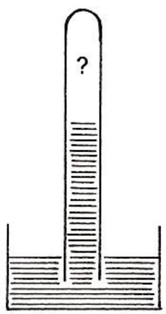
SLUSE ET LA BIOLOGIE.

De Sluse s'est intéressé aux problèmes liés aux transfusions sanguines (entre homme et animal à cette époque) : il ne croit pas que c'est une panacée universelle. En 1677, Antoon van Leeuwenhoek observe les spermatozoïdes ce qui provoque une petite révolution dans le monde scientifique où l'on est resté le plus souvent aux conceptions d'Hippocrate et de Gallien. De Sluse va faire un certain nombre d'expériences sur le développement des oeufs en notant scrupuleusement les résultats.

SLUSE ET LA PHYSIQUE.

De Sluse est l'un des premiers au monde à avoir inventé un thermomètre : il s'agit d'un tube de près d'un mètre rempli d'eau salée dans lequel flotte une bille de cire mélangée à du sable. Cette bille flotte dans le tube. Lorsqu'il fait plus froid, la bille descend et elle remonte lorsqu'il fait plus chaud. De Sluse l'améliorera en y plaçant un couvercle de papier pour limiter les effets de la pression et en incluant plusieurs billes de poids différents. Huygens a écrit que le thermomètre de Sluse était le plus fiable de tous ceux existant à l'époque.

De Sluse a connu en Italie les premières expériences avec le baromètre. Rentré à Liège, il fera de nombreuses expériences,notamment pour découvrir la nature du "vide" au dessus de la colonne de liquide.



On place de petits animaux dans le "vide" et on s'aperçoit qu'ils meurent: mais on n'ose pas conclure à l'absence d'air.
On place une petite cloche en cuivre dont le battant est actionné de l'extérieur par un aimant, mais l'expérience est délicate, on entend la cloche (ce qui ne devrait pas arriver si l'expérience était parfaite).
Un certain Boyle (celui du P.V = constante) réussit l'expérience, mais Sluse n'est pas convaincu. Il faut dire à sa décharge que Boyle était un expérimentateur hors pair.
L'invention de la pompe à vide d'Otto von Guericks(bourguemestre de Magdebourg) permettra de mieux comprendre le problème du "vide".

SLUSE ET LA CHIMIE.

La chimie de cette époque est l'alchimie (recherche chimérique de la fabrication de l'or) et la pharmacie (on essaie des breuvages étranges aux vertus encore plus étonnantes!). De Sluse expérimentera des formules de sels fébrifuges (contre les fièvres), d'eau hémostatique (coagulant). Il étudie la composition du talc, de la calamine (Silicate de Zinc), de l'alun (Sulfate de Potassium et Aluminium). Il s'intéresse à la dinanderie et au fer étamé. Il tire un sel des eaux de Spa et trouve celle-ci enivrante...

P.S. La rédaction de M.J. ne boit jamais d'eau ...

L'Assembleur (suite)

LECON SIX

Les modes d'adressage.

Un problème fréquent est le transfert d'une zône de mémoires d'un endroit à un autre à l'intérieur de la machine : transfert de pages graphiques, transfert d'un zône vers un buffet en vue d'enregistrement, transfert d'une zône de l'écran dans une variable basic ... Imaginons que notre zône de départ est située à partir de l'adresse $1000 et notre zône d'arrivée à partir de $2000.

Voyons comment nos connaissances actuelles nous permettent de transférer un petit nombre de mémoires: $A mémoires par exemple. On peut bien sur battre tout record de stupidité en écrivant:

```
800: AD 00 10   LDA $1000   Lecture de $1000
803: 8D 00 20   STA $2000   Transfert de $1000
839: 8D 0A 20   STA $200A   Transfert de $100A
83C: 60         RTS         (Ouf !)
```

L'idéal serait de pouvoir se servir des 2 premières instructions ci-dessus en modifiant les mémoires $801 et $804 en les incrémentant. En ajoutant un indispensable compteur (le régistre X), on obtiendra le programme suivant, tout-à-fait correct mais très délicat : en général un programme qui se modifie lui-même est à déconseiller aux débutants...

Nous utiliserons la fonction:
CPX ComPare X register
pour pouvoir arrêter notre boucle après $A passage.

```
800: A2 00      LDX #$0     Compteur à zéro.
802: AD 00 10   LDA $1000   Lecture d'une mémoire.
805: 8D 00 20   STA $2000   Et son transfert.
808: EE 03 08   INC $803    On modifie l'ad.bas. de lecture
80B: EE 06 08   INC $806    On modifie l'ad.bas. d'écriture
80E: E8         INX         Et un transfert, un!
80F: E0 0A      CPX #$A     Déja $A ?
811: D0 EF      BNE (-17)   (EF=239) et 239+17 = 256
814: 60         RTS
```

Nous venons d'employer ce que l'on appelle l'adressage absolu : LDA $1000 signifie: charger la mémoire $1000. Nous avions déja rencontré l'instruction LDA #$A (charger la valeur $A dans l'accumulateur) : c'est l'adressage immédiat. L'adressage absolu peut se comparer au facteur qui distribue le courrier: sur l'enveloppe le numéro 150; il met la lettre au 150. Imaginons que son chef invente un jeu qui consiste à distribuer le courrier systématiquement 5 numéros de maisons plus loin que celui indiqué sur la lettre: notre lettre aboutit au 155. C'est l'adressage absolu indexé (l'index vaut 5).Il existe deux telles instructions pour chacun des deux index: elles se notent: LDA ADRESSE,X et LDA ADRESSE,Y. On obtient:

```
800: A2 00      LDX #$0
802: BD 00 10   LDA $1000,X  Lecture indexée par X
805: 9D 00 20   STA $2000,X  Transfert
808: E8         INX
809: E0 0A      CPX #$A
80B: D0 F5      BNE (-11)    (F5=245) et 245+11 = 256
80D: 60         RTS
```

Revenons à notre facteur; dans la boîte aux lettres du 30, on a écrit "ce courrier doit aller au 150". Avec une lettre où il est écrit 30, notre facteur s'y rend, découvre l'instruction et se rend finalement au 150 : c'est l'adressage indirect. Mais on peut encore compliquer le jeu: le facteur a toujours son index qui vaut 5. Avec une lettre où il est écrit 30, il va au 155: c'est de l'adressage indirect PUIS indexé. Il est possible avec l'index Y seulement et il s'écrit LDA (ADRESSE DE PAGE ZERO),Y. Il n'existe pas d'instruction d'adressage indirect; on se sert d'un adressage indirect indexé avec un index à zéro. Cette nouvelle instruction nous permet de réécrire notre programme pour qu'il puisse transférer une suite de $A mémoires de n'importe où à n'importe où et non plus uniquement de $1000 à $2000. Pour que ce programme général fonctionne, il faudra l'initialiser en écrivant l'adresse de départ dans les mémoires $6 et $7 par exemple ($6 = partie basse, $7 = partie haute) et l'adresse d'arrivée dans les mémoires $8 et $9 ($8 = partie basse, $9 = partie haute). Pour que l'adressage indirect indexé fonctionne, ces adresses doivent être écrites en page zéro et à l'"envers" comme d'habitude. Nous définissons:

LDY LoaD Y register

qui initialise le régistre Y,

INY INcrement Y register

qui l'incrémente d'une unité et

CPY ComPare Y register

qui permet de préparer des tests sur le régistre Y. On obtient le programme:

```
800: A0 00      LDY #$0
802: B1 06      LDA ($6),Y   Lecture indirecte indexée
804: 91 08      STA ($8),Y   Ecriture
806: C8         INY
807: C0 0A      CPY #$A
809: D0 F7      BNE (-9)     (F7=247) et 247+9 = 256
80B: 60         RTS
```

On peut imaginer notre facteur avec une lettre pour le 25, qui indexe d'abord, donc se rend au 30 où il lit l'ordre de se rendre au 150: c'est l'adressage indexé indirect. Il est possible avec l'index X et s'écrit LDA (ADRESSE EN PAGE ZERO,X). Son emploi permet de "copier" l'instruction basic ON ... GOTO, c'est-à-dire une liste d'adresses tandis que l'adressage indirect indexé est plutôt réservé au traitement des listes de données. L'emploi de l'adressage indexé indirect est rare car la page zéro qui devrait contenir ces listes d'adresses est généralement super-encombrée par les adresses du système que le fabriquant -qui emploie le même assembleur que vous, ne l'oublions pas- y a placé.

Il nous reste à voir comment transférer plus de 256 mémoires. En effet, un seul index ne peut servir car après $FF, il revient à zéro en négligeant le report. En employant les deux index, nous pourrons par exemple transférer $A fois $100 mémoires. L'adresse de départ est en $6 et celle d'arrivée en $8. Nous aurons besoin de l'instruction

DEY DEcrement Y register

qui permet d'enlever une unité au régistre Y.

```
800: A2 0A      LDX #$A     $A pages
802: A0 00      LDY #$0     256 mémoires par page
804: B1 06      LDA ($6),Y  Lecture indirecte indexée
806: 91 08      STA ($8),Y  Ecriture
808: 88         DEY         Boucle sur les mémoires
809: C0 00      CPY #$0
80B: D0 F7      BNE (-9)    (F7=247) et 247 + 9 = 256
80D: E6 07      INC $7      Boucle pour une autre page
80F: E6 09      INC $9
811: CA         DEX
812: E0 00      CPX #$0
814: D0 EC      BNE (-20)   (EC=236) et 236 + 20 = 256
816: 60         RTS
```

Nous avons déja eu l'occasion de rencontrer l'adressage relatif: c'est le mode d'adressage des fonctions de test : BCS, BNE, BCC, BMI, BPL, BEQ. Lorsqu'un saut relatif de + de 128 mémoires doit être programmé, deux possibilités s'offrent à vous:

- soit on emploie des relais formés par le couple d'instruction CLC BCC; ce qui se présente sous la forme:

```
800:   BEQ $80     souhait d'un saut de $180 mémoires
880:   CLC
881:   BCC $80
901:   CLC
902:   BCC $7E
```

- soit on emploie un relais contenant l'instruction JMP; ce qui se présente sous la forme:

```
800:   BEQ a
800+a: JMP adresse
```

LECON SEPT

Les fonctions logiques.

Nous avons déja abordé à la leçon 4, la fonction AND. Il existe deux autres fonctions qui travaillent également bit par bit:

ORA OR Accumulator

suivant la règle :

```
0 et 0 donnent 0
0 et 1 donnent 1
1 et 0 donnent 1
```

1 et 1 donnent 1

et

EOR Exclusive OR

suivant la règle :

0 et 0 donnent 0
0 et 1 donnent 1
1 et 0 donnent 1
1 et 1 donnent 0

AND et ORA peuvent servir au "mélange" de pages graphiques: imaginons que l'on ait une copie d'un graphique dans les adresses $1000 à $1A00 et un autre graphique aux adresses $2000 à $2A00 et que vous vouliez créer un nouveau graphique mélangeant ces deux constituantes aux adresses $3000 à $3A00. Nous écrirons les adresses $1000 en $6,$7, $2000 en $8,$9, $3000 en $A,$B.

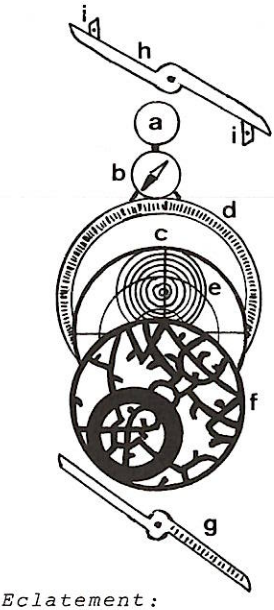
```
800: A2 0A      LDX #$A      longueur du transfert
802: A0 00      LDY #$0
804: B1 06      LDA ($6),Y   lecture
806: 11 08      ORA ($8),Y   ou logique
808: 91 0A      STA ($A),Y   et écriture
80A: 88         DEY
80B: C0 00      CPY #$0
80D: D0 F5      BNE (-11)    (F5=245) et 245 + 11 = 256
80F: E6 07      INC $7
811: E6 09      INC $9
813: E6 0B      INC $B
815: CA         DEX
816: E0 00      CPX #$0
818: D0 E8      BNE (-24)    (E8=232)  et 232 + 24 = 256
81A: 60         RTS
```

Un AND peut servir à forcer à zéro un bit précis, ainsi pour obliger le sixième bit d'un nombre à valoir 0, il suffit d'effectuer avec ce nombre l'opération AND 1101 1111, c'est-à-dire AND #$DF.

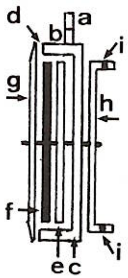
Un ORA peut servir à forcer à un un bit précis, ainsi pour obliger le sixième bit d'un nombre à valoir 1, il suffit d'effectuer avec ce nombre l'opération ORA 0010 0000, c'est-à-dire ORA #$20.

Quant au ou exclusif, EOR, il peut servir à complémenter (à 1) des bits isolés, ainsi, si l'on veut le complémentaire du nombre $9C (= le décimal 156) qui est $64 (le décimal 100), on peut faire:

```
800: A9 9C      LDA #$9C     Ecrire 1001 1100
802: 49 FF      EOR #$FF     EOR    1111 1111,
   ce qui donne :                   0110 0011  = $63
804: 18         CLC          Et on ajoute #$1
805: 69 01      ADC #$1
807: 60         RTS
```



Eclatement:



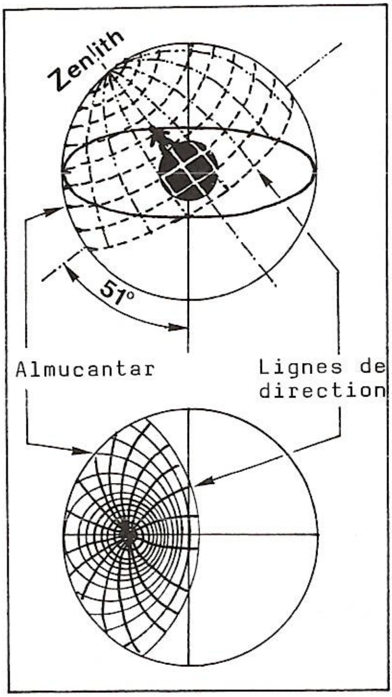
Vue de profil:

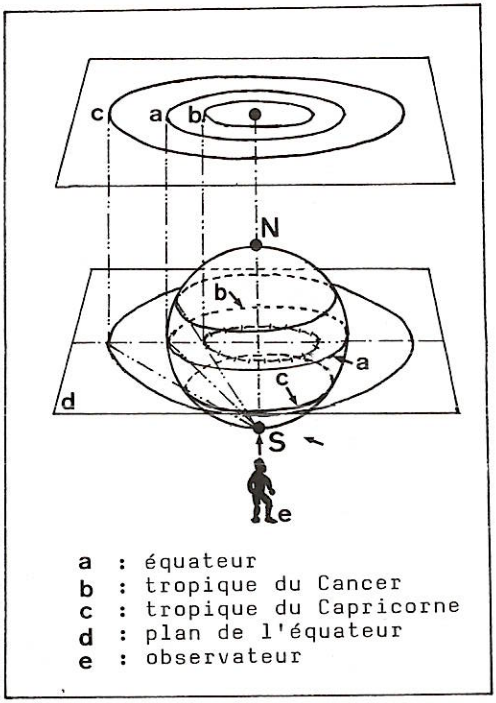
a: *anneau*
b: *boussole*
c: *matrice*
d: *limbe*
e: *plateau*
f: *reticule*
g: *règle*
h: *alidade*
i: *pinnule*

L'astrolabe

L'astrolabe (du grec αστηρ : astre et λαμζανω : je prends) est probablement le plus ancien instrument scientifique. Il était employé par les anciens pour observer la position de certains astres et notamment le soleil et la lune; le plus souvent dans un but astrologique. On date les premiers, construits en bois, du troisième siècle a.J.C.. Au moyen âge, on lui adjoint des tables de déclinaison du soleil (angle entre l'équateur céleste et le Soleil ce qui permet aux marins de connaître leur latitude. Il fut par la suite remplacé dans cette fonction par le sextant.

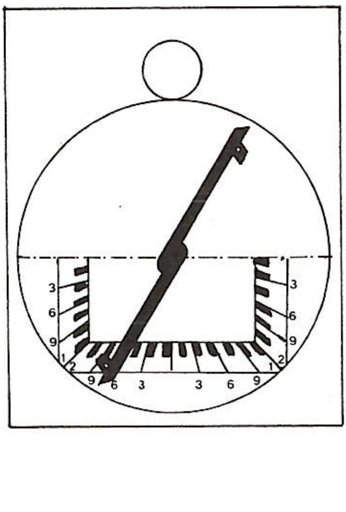
La face avant de l'astrolabe qui a servi cette année de couverture à notre Math-Jeunes, représente une copie d'un ciel local et peut être réglé pour une date relativement précise (de l'ordre de 4 minutes). L'éclatement ci-contre permet de voir les différentes parties. En haut, un anneau permet de soutenir l'astrolabe à bout de bras. En dessous, une boussole existe sur les modèles plus tardifs. La matrice ou fond contient un plateau sur lequel on a représenté les coordonnées locales pour différentes latitudes (un astrolabe est généralement "fourni" avec plusieurs plateaux et l'utilisateur place dans son appareil celui qui s'approche le plus de l'endroit de son observation). L'encadré de la page suivante montre comment on obtient une projection plane des lignes de même coordonnée pour une latitude de 51°. Les cercles d'égales altitudes locales s'appellent les *ALMUCANTARS* et les azimuths (demi-cercle passant par le zénith du point d'observation) sont les *lignes de direction*. Les coordonnées célestes sont représentées par un système de projection polaire stéréographique.





Au dessus du plateau, le réticule montre par rapport à la projection stéréographique la position des principales étoiles, une quarantaine en général. La règle permet de faire correspondre les indications du bord du réticule avec celles du limbe de la matrice. On en déduit une observation d'un ciel local.

A l'arrière, l'alidade qui supporte deux pinnules (sortes d'oeilletons) permet d'évaluer des hauteurs par un procédé de lecture directe sur l'échelle reproduite sur un demi-carré.



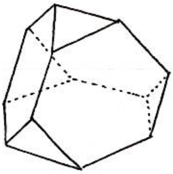
Ci-contre, on voit que l'alignement de l'alidade passe par le point 7 sur l'échelle horizontale. Comme l'échelle verticale est de 12 unités, on en déduit que, tenu à bout de bras, on vise ainsi à une distance x, un objet de taille y tel que

$$\frac{y}{x} = \frac{12}{7}$$

en négligeant la taille de l'observateur.

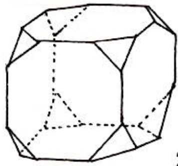
Devoir de vacances: polyèdres semi-réguliers

Les 13 polyèdres semi - réguliers.



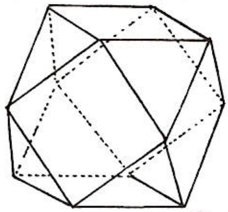
$3\ 6^2$

Tétraèdre tronqué
(1 triangle (3)
2 hexagones (6^2)
par sommet)
(ou tétraèdre adouci)



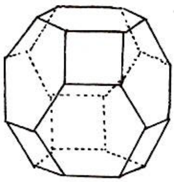
$3\ 8^2$

Cube tronqué (ou adouci)



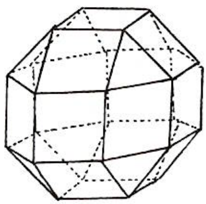
$3^2\ 4^2$

Cuboctaèdre (ou cube amputé)



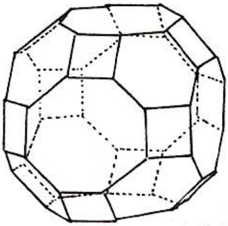
$4\ 6^2$

Octaèdre tronqué
(ou octaèdre adouci)



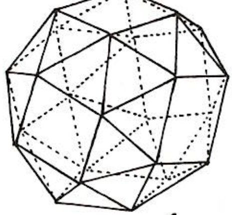
$3\ 4^3$

Petit rhombicuboctaèdre



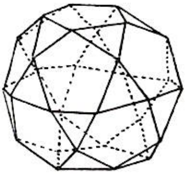
4 6 8

Grand rhombicuboctaèdre
(ou cuboctaèdre tronqué)



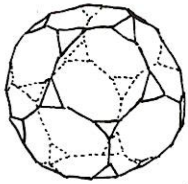
$3^4\ 4$

Snub-cube dextro
(il existe une version laevo)



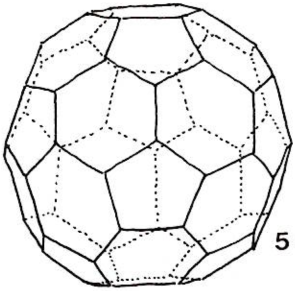
$3^2\,5^2$

Icosidodécaèdre



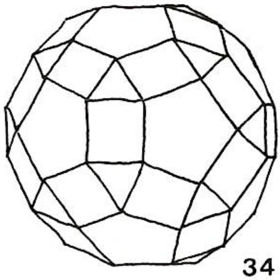
$3\ 10^2$

Dodécaèdre tronqué
(ou adouci)



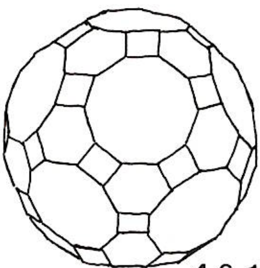
$5\ 6^2$

Icosaèdre tronqué
(ou adouci)
Remarque : = ballon !



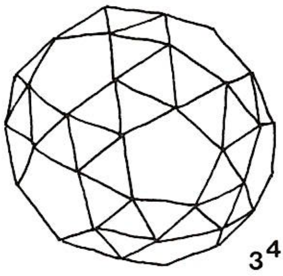
3454

Petit rhombicosidodécaèdre



4 6 10

Grand rhombicosidodécaèdre
(ou icosidodécaèdre tronqué)



$3^4\,5$

Snub-dodécaèdre
dextro
(il existe une version laevo)

Le coin des problèmes

R115 Les gagnants du lotto.

Si nous appelons X le montant de la super cagnotte, nous pouvons écrire la première dépense D_1:

$$D_1 = \frac{2X}{3} - 4000000 \;;$$

il restera alors

$$R_1 = X - \left(\frac{2X}{3} - 4000000\right)$$
$$= \frac{X}{3} + 4000000 \;.$$

Après la deuxième dépense D_2

$$D_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{X}{3} + 4000000\right)$$
$$= \frac{X}{12} + 1000000 \;,$$

il restera

$$R_2 = R_1 - D_2 = \frac{X}{4} \;.$$

La troisième dépense D_3

$$D_3 = \frac{X}{6} + 1200000$$

entrainera un reste

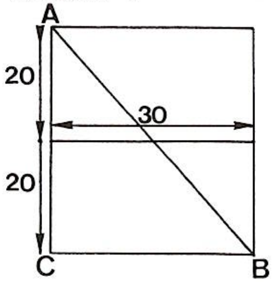
$$R_3 = R_2 - D_3 = \frac{X}{12} - 1200000 \;.$$

Pour acheter la villa, il lui faudrait 8750000 F; il lui manque 2450000 F. Cela signifie qu'il lui reste 6300000 F. Tout cela va nous permettre de trouver le montant de la cagnotte :

$$R_3 = 6300000$$
$$6300000 = \frac{X}{12} - 1200000$$
$$X = 90000000 \text{ F.}$$

R116 Venez à mon secours!

Si on relève la face supérieure de manière à la placer dans le même plan que la face avant, voici ce que l'on obtient :



Nous avons un triangle rectangle ABC où AC = 40 cm et CB = 30 cm. En appliquant le théorème de Pythagor gore, nous trouvons facilement la longueur du trajet AB parcouru par la coccinelle :

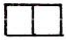
$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$
$$= 40^2 + 30^2$$
$$= 2500 \;;$$

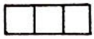
AB vaut donc 50 cm.

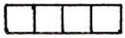
R117 Combien de rectangles...

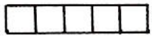
On peut distinguer 225 rectangles. En effet,

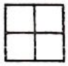
25 carrés de type 

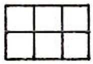
20 rectangles de type  et autant placés verticalement

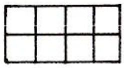
15 rectangles de type  et autant ...

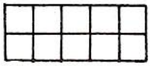
10 rectangles de type  et autant ...

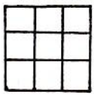
5 rectangles de type  et autant ...

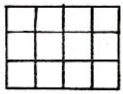
16 carrés de type 

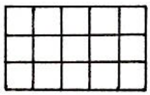
12 rectangles de type  et autant ...

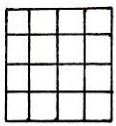
8 rectangles de type  et autant ...

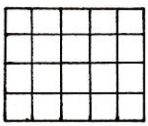
4 rectangles de type  et autant...

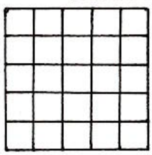
9 carrés de type 

6 rectangles de type  et autant ...

3 rectangles de type  et autant ...

4 carrés de type 

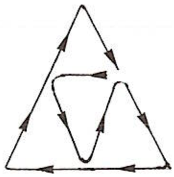
2 rectangles de type  et autant ...

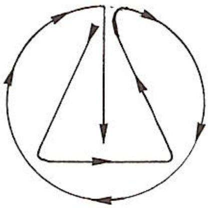
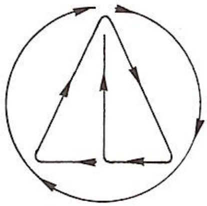
1 carré de type 

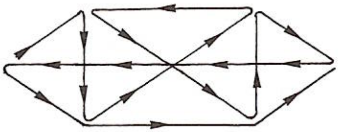
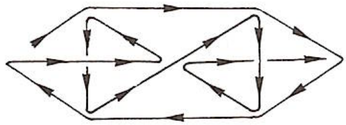
Si on somme et que l'on multiplie par deux, on retrouve les 225 rectangles.

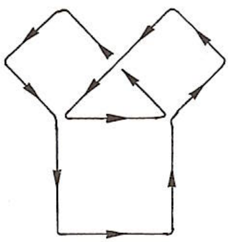
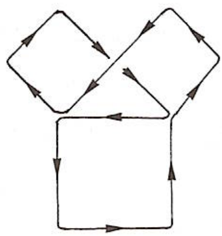
R118 Un seul trait .

Voici quelques solutions :



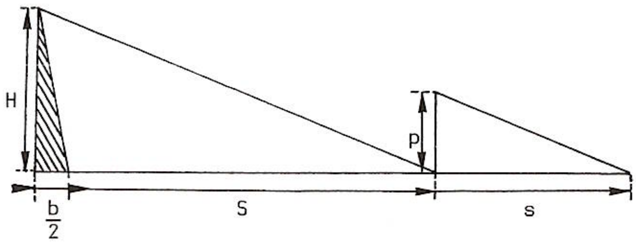



Dans le premier cas, tous les noeuds peuvent être départ.
Dans le second cas, les deux possibilités représentées sont les deux seules.
Dans le troisième cas, les deux possibilités représentées sont les deux seules.
Dans le dernier cas, tous les noeuds peuvent être départ.

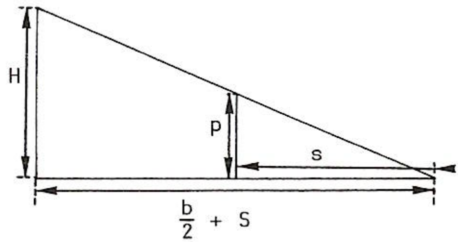
R119 Pourriez-vous aider Thalès?

Si on schématise la situation, nous pouvons dessiner ceci :



où b est la base de la pyramide
S est l'ombre de la pyramide
s est l'ombre du bâton.

De ce dessin, on passe facilement à



Ce deuxième dessin permet de reconnaître une "situation de Thalès" pour les triangles; cela va nous permettre de trouver , connaissant 3 des 4 longueurs, la 4ième :

$$\frac{H}{\frac{b}{2} + S} = \frac{p}{s} \quad \text{d'où} \quad H = \left(\frac{b}{2} + S\right) \frac{p}{s}$$

R120 Le nombre mystérieux.

a = 1 b = 4 c= 2 d== 8 e = 5 f = 7

R121 Un match de tennis.

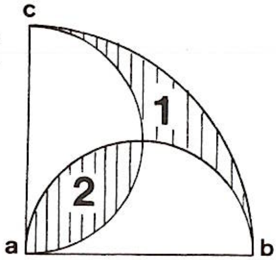
Il y a eu 9 services.
Celui qui a servi le premier a servi 5 fois et l'autre a servi 4 fois.
Supposons que celui qui avait servi le premier ait remporté x de ces 5 services et y des 4 autres. Le nombre total de jeux perdus par les joueurs sur leur service est donc (5-x)+y. Ce nombre est égal à 5 puisque l'énoncé précise que 5 jeux ont été perdus par le joueur qui avait le service: il en résulte que x = y et le joueur qui a commencé a donc remporté 2x jeux en tout. Or seul Lendl a gagné un nombre pair de jeux (6): donc Lendl a servi le premier.

Olympiades Mathématiques Belges 1985

MINIOLYMPIADE

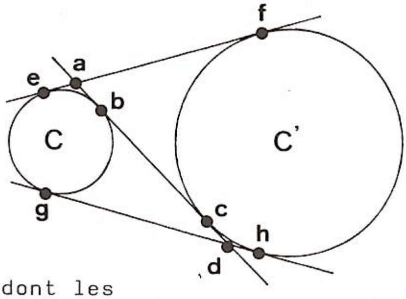
1. Dans la figure ci-contre, les segments [ab] et [ac] sont perpendiculaires et ont la même longueur 2r. Le quart de cercle de rayon 2r et les deux demi-cercles de rayon r déterminent les deux régions hachurées 1 et 2.
Que valent les rapports

$$\frac{\text{Aire}(1)}{\text{Aire}(2)} \quad \text{et} \quad \frac{\text{Périmètre}(1)}{\text{Périmètre}(2)}$$



2. Le produit de n nombres naturels consécutifs est égal à 9687600. Que vaut n et quels sont ces nombres, sachant qu'au moins un d'entre eux est un nombre premier ? Le problème admet-il plusieurs solutions ?

3. Etant donné deux cercles C et C' extérieurs l'un à l'autre, on trace les deux tangentes communes extérieures ef et gh, ainsi qu'une tangente commune intérieure bc (voir figure). Démontrer que les segments |ab| et |cd| ont même longueur.



4. Sachant qu'on peut paver un rectangle au moyen de 9 carrés dont les côtés mesurent respectivement 1,4,7,8,9,10,14,15 et 18 unités, quelles sont les dimensions de ce rectangle et quel est le pavage correspondant ?

MAXIOLYMPIADE

1. Dans le plan euclidien, on donne deux cercles C et C' extérieurs l'un à l'autre. On trace les deux tangentes communes extérieures aa' et bb' ainsi qu'une tangente commune intérieure cc' (a,b,c étant les points de contact de ces tangentes avec le cercle C, et a',b',c' les points de contact avec le cercle C'). Si $d = aa' \cap cc'$ et $d' = bb' \cap cc'$, que peut-on dire du rapport des longueurs des segments [cd] et [c'd'] ?

2. Quels sont tous les quadruples (x,y,z,t) de nombres réels non nuls qui vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad ?$$

3. Pour quelles valeurs de $n \geqslant 4$ existe-t-il, dans l'espace euclidien à trois dimensions, n points $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ tels que

$$p_1p_2 \perp p_2p_3 \perp \cdots \perp p_ip_{i+1} \perp \cdots \perp p_{n-1}p_n \perp p_np_1 \ ?$$

4. Si x est un nombre réel, on désigne par $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier k tel que $k \leqslant x < k+1$. Quels sont tous les nombres réels x tels que

$$[x^2] = [x]^2 \quad ?$$

Et voici les résultats :

Sur les 5563 élèves ayant participé aux MINI, le jury a décidé d'attribuer les prix suivants :

1er prix : (ex-aequo)
1. PAULY Marc (2ème), Lycée de garçons, Luxembourg.
   PYPAERT Denis (3ème), Collège St Marie, Mouscron.

2ème prix :
3. PHILIPPART Jean (3ème), Collège St Louis, Liège.
4. BAILLY Thierry (3ème), Col.St.Boniface-Parnasse, Brux.
   NASDROVISKY Nicolas (3ème), Ath. Marg.Bervoets, Mons

3ème prix :
6. LARDINOIS Marc (2ème), Athénée Royal, La Louvière
   MASSY Frédéric (3ème), Athénée Royal, Lessines
   SIZAIRE Renaud (3ème), Collège St Michel, Bruxelles
9. AXENSALVA Christophe (3ème), Col.St.Vincent, Soignies

4ème prix :
10. GERARD Alain (2ème), Collège du Sacré-Coeur, Charleroi
11. DAMME Eric (2ème), Institut St Remacle, Marche
    GRILLO Bruno (3ème), Athénée Royal, Woluwé St. Pierre
    MASKENS Nicolas (3ème), Col.St.Boniface-Parnasse,Brux.

Des PRIX SPECIAUX ont été attribués à des finalistes de 1ère et 2ème année : PAULY Marc, LARDINOIS Marc, GERARD Alain, DAMME Eric, CUISENAIRE Olivier (1ère), Institut Enfant-Jésus, Nivelles, PIRET Bernard (2ème), Institut St Marie, Arlon, ENGLEBERT Eric (2ème), Athénée Royal de Bomal-sur-Ourthe.

Sur les 4621 élèves ayant participé aux MAXI, le jury a décidé d'attribuer les prix suivants :

1er prix :
1. ALPHONSE Philippe (6ème), Athénée Royal, Thuin.

2ème prix :
2. LION Claude (6ème), Institut St Joseph, Charleroi.
3. BILLOT Pierre (5ème), Collège Ste Marie, St Ghislain.

3ème prix :
4. DAXHELET Olivier (5ème), Collège Ste Marie, Mouscron.
5. BOURGUET Jean-Marc (5ème), Ecole des Cadets, Bruxelles
6. VAN DER PLANCKE Frédéric (5ème), Col.St Michel,Brux.

7. BERLANGER Olivier (6ème), Collège Don Bosco, Bruxelles.
8. CLEMENT François (Spé), Institut St Aubain, Namur.
GERMAUX Guy (6ème), Lycée Michel, Rodange, Luxembourg.
10. BERNAS Alexandre (5ème), Athénée R.Catteau, Bruxelles.
CAPELLE Christian (6ème), Collège St Michel, Bruxelles.
ELFOULY Claire (6ème), Collège St Vincent, Soignies.
GIOT Renaux (6ème), Athénée Royal, Nivelles.

4ème prix :

14. MARECHAL Nicolas (6ème), Athénée M.Bervoets, Mons.
15. CLAESSENS Patrick (6ème), Col.Card.Mercier,Braine l'Alleud.
16. MARCHAL François (Spé), Institut St Aubain, Namur.
WAUTIER Serge (6ème), Athénée Royal, Braine l'Alleud.
18. PECHEUR Renaud (4ème),Ec.Tech.Force Aérienne,St Trond.
19. ENGLEBERT Jean-Claude (6ème), At.Royal,Bomal-sur-Ourthe
20. BULTREYS Michel (5ème), Collège Notre Dame, Tournai.
LIBERT Gérald (5ème), Collège St Roch, Ferrières.
22. CARPENTIER Jean-Michel (6ème), Collège Notre Dame, Kain.
23. DECHAMPS Pierre (6ème), Athénée Communal, Liège.
GAUTIER Jean-Louis (5ème), Athénée Royal, Waterloo.
VANDER MOSTEN Benoît (6ème), Lycée Martin V, Louvain-l-n.
VERSCHEURE Yves (5ème), Institut St Louis, Bruxelles.
27. BARTHOLOME EMMANUEL (5ème), Athénée Royal, Athus.
SCHMITZ Nathalie (5ème), Athénée Royal, Malmedy.

Des PRIX SPECIAUX ont été attribués à des finalistes de 4ème et 5ème année : BILLOT Pierre, DAXHELET Olivier, BOURGUET Jean-Marc, VAN DER PLANCKE Frédéric, BERNAS Alexandre, PECHEUR Renaud, BULTREYS Michel, LIBERT Gérald, GAUTIER Jean-Louis, VERSCHEURE Yves, BARTHOLOME Emmanuel, SCHMITZ Nathalie et GAILLY Benoît, 5ème, Collège Don Bosco, Bruxelles.

L'O.M.B. (Olympiade Mathématique Belge) et la S.B.P.M. ont eu la douleur de perdre en Willy Vanhamme un collaborateur dévoué et compétent, qui fut sur la brèche durant les 10 années d'existence de l'Olympiade.

Pour demeurer fidèle à sa mémoire, il a été décidé d'instituer un prix Willy Vanhamme destiné à récompenser la démonstration la plus élégante.

En MINI, le prix est attribué à Marc Pauly, en 2ème au Lycée de Garçons de Luxembourg.

En Maxi, il est attribué à Philippe Alphonse, en 6ème à l'Athénée Royal de Thuin.

SOMMAIRE MATH-JEUNES 28

Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française
A.S.B.L.

Rédaction et Edition de Math-Jeunes

Gh. Marin, J. Miewis et W. Vanhamme

Courrier

Math-Jeunes, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège

Abonnement

Belgique : groupés (5 au moins) 60 FB par abonnement
isolés 100 FB
Etranger : par paquets de 5 600 FB le paquet
isolé 200 FB
Compte n° 000-0728014-29, SBPM
Chemin des Fontaines, 14 bis, 7460 - CASTEAU

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.

Poster historique : *Belgique : 30 FB*
par paquets de 5 : 120 FB
Etranger : 60 FB
par paquets de 5 : 240 FB

Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme due de 100 FB pour frais d'encaissement.