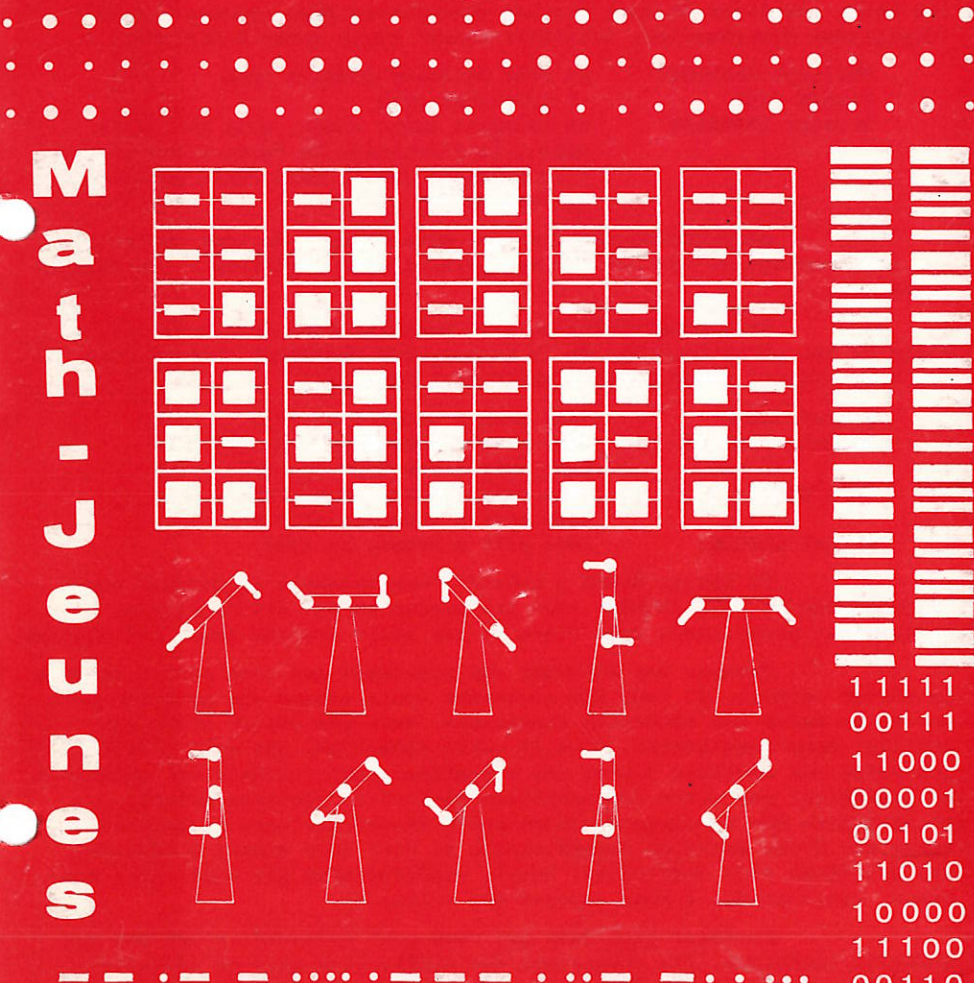
Math-Jeunes



Publication trimestrielle de la
Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française. (ASBL)

7ème année Numéro 29 Automne 1985

Chers amis,

Vous avez certainement tous eu l'occasion de connaître les beaux résultats obtenus par nos concurrents francophones aux OMI (Olympiades Mathématiques Internationales) cette année à Helsinki.

Philippe ALPHONSE	un très brillant premier prix
Claude LION	un troisième prix
Olivier DAXHELET	un accessit cette année, mais peut-être aura-t-il l'occasion de faire mieux encore l'an prochain car il sera cette année en sixième année.

MATH-JEUNES est d'autant plus heureux de leur rendre à son tour hommage qu'ils ont été des participants réguliers à nos rallyes problèmes.

Mais nous voudrions leur associer tous ceux qui, sans avoir eu les mêmes honneurs de la presse, ont également obtenus lors des compétitions précédentes d'excellents résultats.

Xavier GONZE	3ème prix à Londres en 1979
Bernard STEENIS	3ème prix à Luxembourg en 1980
	2ème prix à New-York en 1981
Yvan DEMAN	2ème prix à New-York en 1981
	3ème prix à Budapest en 1982
Michel LESOINE	3ème prix à Prague en 1984

Si Xavier GONZE a quitté l'enseignement secondaire avant la naissance de MATH-JEUNES, tous les autres en ont été de fidèles lecteurs et nous sommes très fiers de les avoir comptés parmi nos abonnés.

Envoyer des réponses aux problèmes que nous posons demande un effort certain. Il faut non seulement avoir trouvé une solution mais encore en faire une rédaction convenable. Mais cet effort n'est pas stérile. Vous constaterez, lors de cette rédaction, que vous n'aviez peut-être pas envisagé toutes les situations particulières qui pouvaient se présenter, que votre démonstration pêchait en certains points,... c'est-à-dire que vous approfondirez votre étude, que vous ne vous contenterez pas d'une solution superficielle et ceci vous aidera à résoudre des problèmes plus difficiles. Aussi, espérons-nous que vous serez nombreux, cette année, à nous envoyer des solutions.

Certains problèmes qui vous sont présentés n'ont pas une solution immédiate, ils comportent des difficultés mais ne demandent généralement pas de connaissances spécifiques très étendues. De l'imagination, cela oui, il en faut. Nous avons signalé ceux qui nous semblaient les plus provoquants au moyen d'un astérisque.

A bientôt le plaisir de vous lire.

LA REGRESSION LINÉAIRE (1)

Il arrive fréquemment qu'un objet présente deux caractères dont l'un détermine l'autre. Ainsi en est-il théoriquement, à une température donnée, de la masse d'un gaz caractérisé par le volume qu'il occupe et la pression qui règne dans cette masse. Mais si, théoriquement, la pression détermine le volume, pratiquement ce n'est pas si exact. Si l'on effectue plusieurs mesures du volume pour une pression fixée, on obtiendra des nombres voisins, mais non égaux, car les mesures seront toujours entachées d'erreur. Et il nous faudra choisir ...

Il est aussi possible de trouver des phénomènes où, même théoriquement, une grandeur n'est pas absolument déterminée par une autre: c'est le cas, pour une population donnée, des caractères poids et taille. On sait bien, en première approximation, que la taille détermine le poids, mais beaucoup d'autres facteurs peuvent intervenir qui vont modifier le poids. Beaucoup de phénomènes économiques sont de ce type où jamais une grandeur n'est entièrement déterminée par une autre.

A partir d'un tel phénomène, voyons comment nous allons évoluer vers un modèle mathématique. Nous considérons une population de 66 personnes où nous notons les tailles et poids. (taille en cm, poid en Kg) La manière la plus directe de livrer les résultats est le tableau:

95							1
90							
85					1	1	1
80						1	2
75				1	2	3	1
70			1	2	5	3	
65				4	4	1	1
60		2	4	5	3		
55	1	2	3	2			
50	2	1	2	1			
45	1	1					
40	1						
poids / taille	150	155	160	165	170	175	180

Pour familiariser avec l'écriture Σ

Lorsque l'on se donne un ensemble fini de nombres, on peut attribuer à chacun d'eux un numéro d'ordre (de 1 à n, s'il y a n éléments dans l'ensemble). Lorsque plusieurs ensembles interviennent, on convient de représenter chaque élément d'un ensemble par une même lettre affectée d'un indice rappellant le numéro d'ordre de l'élément. On écrira par exemple:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\qquad$ $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$

n et p étant deux naturels non nuls.

Si ces a_i $(1<i<n)$ représentent des résultats d'une expérience, tout calcul de probabilité nécessitera des manipulations de ces nombres, comme par exemple, leur somme, la somme de leur carré,... Pour représenter la

somme $\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$

on écrit $\qquad \sum_{i=1}^{n} a_i$

Le sigma majuscule grec rappelle le mot "somme", i est un indice muet qui sert à compter les éléments de la somme, les écritures en-dessous et au-dessus du Σ indiquent que le i doit varier entre 1 et n.

Lorsque tous les ensembles intervenant dans un problème possèdent le même nombre d'éléments, on abrège l'écriture de la somme en

$$\Sigma\, a_i$$

Lorsque n est fini, ce Σ jouit des propriétés de la somme de deux réels: on peut écrire :

$$\Sigma\, m\, a_i = m\, \Sigma\, a_i \qquad (m \text{ réel})$$

$$\Sigma\, (a_i \pm b_i) = \Sigma\, a_i \pm \Sigma\, b_i$$

$$\Sigma\, (a_i \pm b_i)^2 = \Sigma\, a_i^2 \pm 2\, \Sigma\, a_i b_i + \Sigma\, b_i^2$$

Dans les théories de probabilitéset statistiques, certaines sommes sont d'un emploi fréquent: aussi ont-elles reçu des noms et notations particulières: pour les ensembles $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, on parle de:

<u>MOYENNE DES a</u> , notée μ_a, définie par $\frac{1}{n}\, \Sigma\, a_i$

<u>VARIANCE DES a</u> , notée Var(a) ou σ_a^2 , définie par

$$\frac{1}{n} \Sigma a_i^2 - \left(\frac{1}{n} \Sigma a_i \right)^2$$

<u>COVARIANCE DES (a,b)</u> , notée Cov (a,b), définie par

$$\frac{1}{n} \Sigma a_i b_i - \left(\frac{1}{n} \Sigma a_i \right)\left(\frac{1}{n} \Sigma b_i \right)$$

Les calculatrices munies de touches de statistique permettent d'introduire les couples (a_i, b_i) et de récupérer dans certaines mémoires :

n, Σa_i, Σb_i, Σa_i^2, Σb_i^2, $\Sigma a_i b_i$

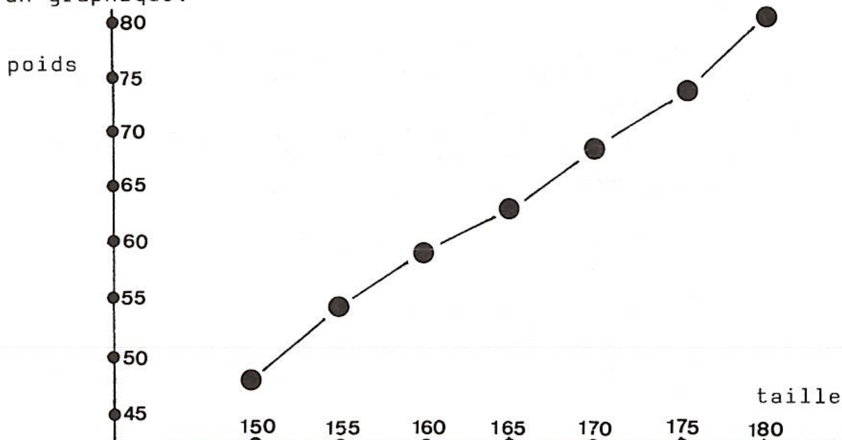
qui permettent d'établir les 2 moyennes, les 2 variances et la covariance.

On peut lire dans le tableau que 3 personnes ont une taille de 160 cm et un poids de 55 kg.

Pour chaque taille, on peut calculer la moyenne des poids (voir encadré). On trouve ce nouveau tableau, à la fois *moins complet* et *plus clair* !

taille :	150	155	160	165	170	175	180
poids :	48	54,1	57,5	62,3	68,3	73,9	80

Moins complet car tous les individus n'apparaissent plus (et des individus nouveaux apparaissent!); plus clair car ce tableau permet une idée plus nette de la chose. Ce dernier tableau est encore éclairci lorsqu'il est reporté sur un graphique.

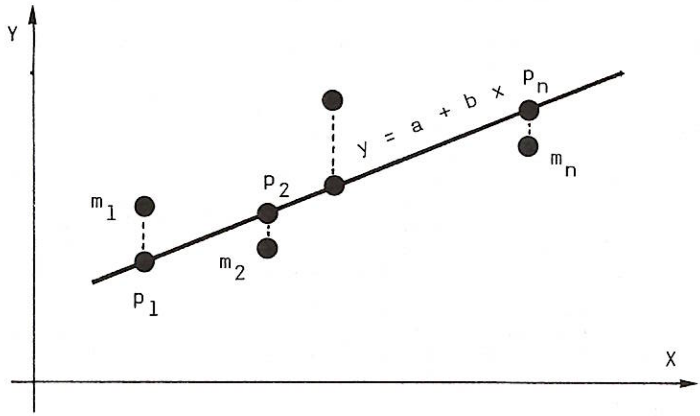


Si l'on admet que le graphe précédent est presque rectiligne, on peut essayer de le remplacer par une droite qui l'approcherait convenablement. Ainsi, l'équation d'une droite (2 paramètres) remplacerait le tableau de la page 1. A priori bien des droites peuvent convenir: l'idée est de chercher celle qui minimalise les distances des points à la droite. Pour des raisons de commodité de calcul, on cherche la droite telle que la somme des carrés des distances comptées parallèlement à l'axe des ordonnées soit minimale.

Si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont les points qui doivent être remplacés par la droite $y = a + b\,x$, on la cherchera pour que la quantité

$$\overline{m_1p_1}^2 + \overline{m_2p_2}^2 + \ldots + \overline{m_np_n}^2$$

soit minimale. (p_i et m_i ont même abscisse, $p_i \in$ droite)



Abandonnons notre exemple et examinons le problème qui se pose mathématiquement à nous. Les points m_i ont pour coordonnée (x_i, y_i).

Puisque les points p_i appartiennent à la droite d'équation $y = a + bx$, ils admettent la coordonnée $(x_i, a+bx_i)$.

La distance $\overline{m_ip_i}$ s'exprime donc par : $y_i - a - bx_i$.

Il nous faut donc découvrir les valeurs a et b qui rendent minimale l'expression:

$$\Sigma\ (\ y_i - a - bx_i\ )^2$$

La recherche de ces deux valeurs est explicitée dans ce second encadré.

Calcul de a et b

L'expression $\Sigma(y_i-a-bx_i)$ sera écrite sous la forme d'une somme de quatre carrés. Deux de ces carrés ne contiennent, ni a , ni b. Les valeurs de a et b qui annulent les deux autres carrés rendent forcément l'expression minimale.

Nous introduisons quelques notations nouvelles:

$$\mu_x = \frac{1}{n} \Sigma x_i \qquad \text{(moyenne des x)}$$

$$\mu_y = \frac{1}{n} \Sigma y_i \qquad \text{(moyenne des y)}$$

$$m = a + b\,\mu_x$$

$$y_i' = y_i - \mu_y$$

$$x_i' = x_i - \mu_x$$

L'expression s'écrit successivement:

$$\Sigma(y_i-a-bx_i)^2$$

$$= \Sigma(y_i-\mu_y+\mu_y-a-b\mu_x-bx_i+b\mu_x)^2$$

$$= \Sigma(y_i' + (\mu_y-m) - bx_i')^2$$

$$= \Sigma(y_i'^2 + (\mu_y-m)^2 + b^2x_i'^2 + 2y_i'(\mu_y-m) - 2bx_i'y_i' - 2(\mu_y-m)bx_i')$$

$$= \Sigma y_i'^2 + n(\mu_y-m)^2 + b^2\Sigma x_i'^2 + 2(\mu_y-m)\Sigma y_i' - 2b\Sigma x_i'y_i' - 2(\mu_y-m)b\Sigma x_i'$$

Or $\Sigma x_i' = \Sigma(x_i-\mu_x) = \Sigma x_i - \Sigma\mu_x = n\mu_x - n\mu_x = 0$ et $\Sigma y_i' = 0$

Ainsi l'expression se simplifie en :

$$\Sigma y_i'^2 + n(\mu_y-m)^2 + b^2\Sigma x_i'^2 - 2b\Sigma x_i'y_i'$$

$$= T_1 + T_2 + \Sigma x_i'^2 \left(b^2 - 2b \frac{\Sigma x_i'y_i'}{\Sigma x_i'^2} \right)$$

$$= T_1 + T_2 + \Sigma x_i'^2 \left(b^2 - 2b \frac{\Sigma x_i'y_i'}{\Sigma x_i'^2} + \left(\frac{\Sigma x_i'y_i'}{\Sigma x_i'^2} \right)^2 \right) - \frac{(\Sigma x_i'y_i')^2}{\Sigma x_i'^2}$$

$$= T_1 + T_2 + \Sigma x_i'^2 \left(b - \frac{\Sigma x_i'y_i'}{\Sigma x_i'^2} \right)^2 - T_4$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 - T_4$$

T_1 et T_4 ne contiennent ni a, ni b; les valeurs de ces deux termes sont donc constantes dans l'expression. Pour minimiser cette dernière, nous annulons T_2 et T_3.

De $T_2 = 0$, on tire

$$\mu_y - m = 0$$

$$\mu_y - a - b\mu_x = 0$$

$$\boxed{a = \mu_y - b\mu_x}$$

De $T_3 = 0$, on tire

$$b = \frac{\Sigma x_i' y_i'}{\Sigma x_i'^2}$$

Nous examinons en détail, ces deux sommes.

$$\Sigma x_i'^2 = \Sigma(x_i - \mu_x)^2 = \Sigma x_i^2 - 2\mu_x \Sigma x_i + n\mu_x^2 = \Sigma x_i^2 - 2\mu_x n\mu_x$$
$$+ n\mu_x^2 = \Sigma x_i^2 - n\mu_x^2 = n\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)^2\right) = n.\ \mathrm{Var}(x)$$

$$\Sigma x_i' y_i' = \Sigma(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) = \Sigma x_i y_i - \mu_x \Sigma y_i - \mu_y \Sigma x_i + n\mu_x\mu_y$$
$$= \Sigma x_i y_i - n\mu_x\mu_y - n\mu_x\mu_y + n\mu_x\mu_y = \Sigma x_i y_i - n\mu_x\mu_y \quad (\mathbf{1})$$
$$= n\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)\left(\frac{1}{n}\Sigma y_i\right)\right) = n\ \mathrm{Cov}\ (x,y)$$

Ainsi, la valeur de b est :

$$b = \frac{n\ \mathrm{Cov}\ (x,y)}{n\ \mathrm{Var}\ (x)}$$

$$\boxed{b = \frac{\mathrm{Cov}\ (x,y)}{\mathrm{Var}\ (x)}}$$

Il s'agit là des valeurs de a et b sous leur expression la plus simple. Mais comme peu de calculatrices possèdent la fonction COV (x,y), et que par ailleurs, la plupart possèdent la fonction VAR(x) (touche souvent notée σ^2), on se servira le plus souvent pour le calcul de b d'une expression tirée de (**1**) ci-dessus : c'est celle que nous emploierons dans la deuxième partie de cet article.

Revenons à notre exemple:

$$\Sigma x_i = 1155$$
$$\Sigma x_i^2 = 191275$$

d'où l'on tire $\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{7}\,191275 - \left(\frac{1}{7}\,1155\right)^2 = 100$

$$\Sigma y_i = 444{,}1$$
$$\Sigma x_i y_i = 74008{,}5$$

d'où l'on tire $\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{7}\,74008{,}5 - \left(\frac{1}{7}\,1155\right)\left(\frac{1}{7}\,444{,}1\right)$
$= 104{,}57$

et $b = \dfrac{104{,}57}{100} = 1{,}05$

Par ailleurs: $\mu_x = \frac{1}{7}\,1155 = 165$ et $\mu_y = \frac{1}{7}\,444{,}1 = 63{,}44$

d'où l'on tire $a = 63{,}44 - 1{,}05.165 = -109{,}81$

La droite admet l'équation :

$$\boxed{y = -\,109{,}81 + 1{,}05\,x}$$

On l'appelle la droite de REGRESSION.

Trois remarques :
****

1. On vérifie facilement que le point (μ_x,μ_y) appartient à la droite de régression. (Conséquence immédiate de la définition de a reporté dans l'équation de la droite).

2. On pourrait définir une droite de régression en se servant de points p_i qui auraient la même ordonnée que les points m_i. On trouverait une droite $x = c + dy$ avec

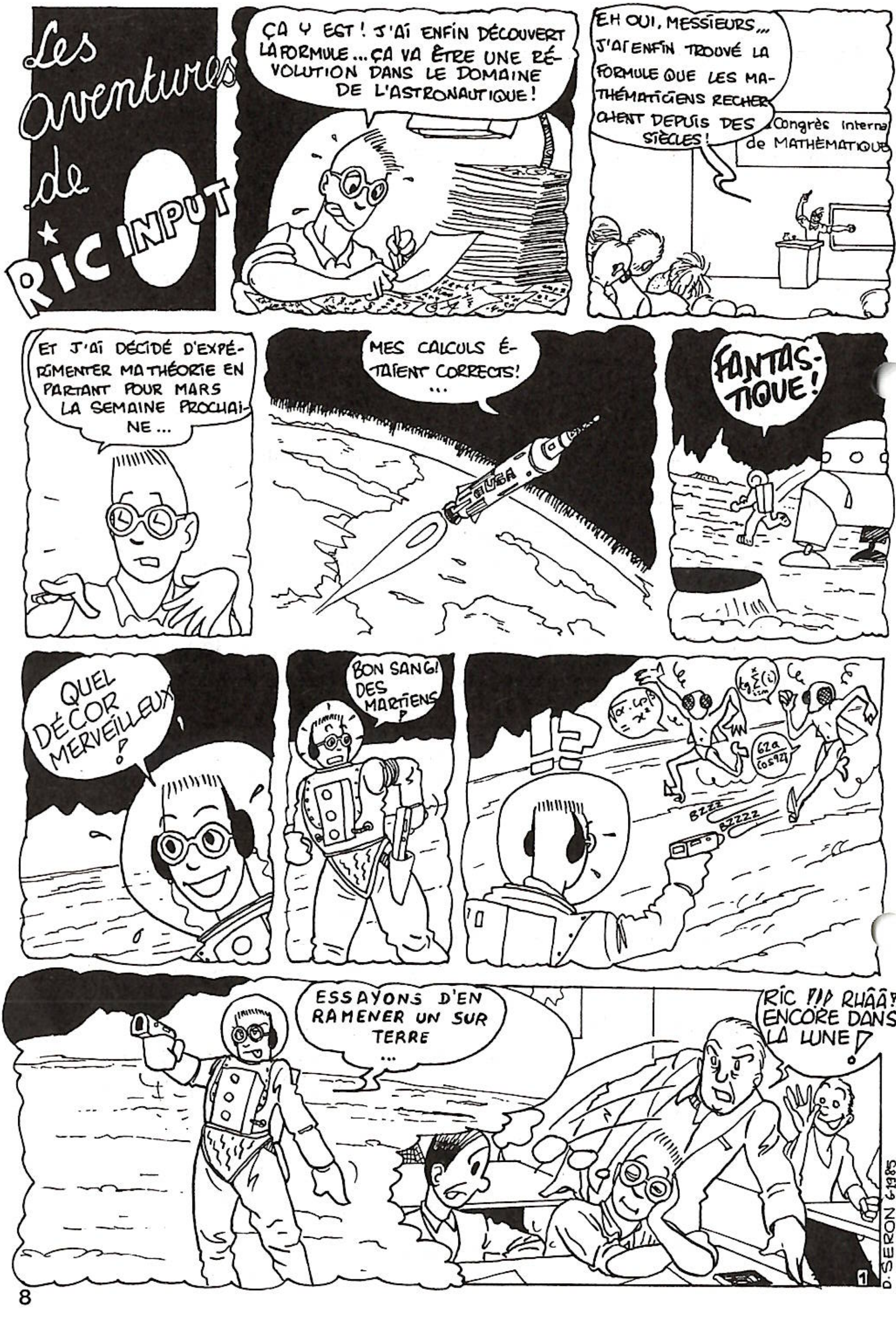
$$c = \mu_x - d\mu_y \quad \text{et} \quad d = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(y)}$$

Cette seconde droite de régression contiendrait le point moyen (remarque 1). Elle serait confondue avec l'autre si toutes deux avaient la même pente, donc si $b = 1/d$ ou encore $\dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} = \dfrac{\mathrm{Var}(y)}{\mathrm{Cov}(x,y)}$ ou $\dfrac{(\mathrm{Cov}(x,y))^2}{\mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(y)} = 1$

3. Cette valeur $\dfrac{(\mathrm{Cov}(x,y))^2}{\mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(y)}$ est le carré de ce que l'on appelle le coefficient de corrélation. Lorsqu'il donne une valeur proche de 1, cela indique une bonne qualité de l'approximation. Dans notre exemple,

$$\Sigma y_i^2 = 28944{,}45$$
$$\mathrm{Var}(y) = \frac{1}{7}\,28944{,}45 - \left(\frac{1}{7}\,444{,}1\right)^2 = 109{,}93$$
$$\text{Coef.Corrél.}^2 = \frac{(104{,}57)^2}{100\ 109{,}93} = 0{,}99476$$
$$\underline{\text{Coef.Corrél.} = 0{,}99737}$$

A suivre...


Les aventures de RIC INPUT
ÇA Y EST ! J'AÏ ENFIN DÉCOUVERT LA FORMULE ... ÇA VA ÊTRE UNE RÉVOLUTION DANS LE DOMAINE DE L'ASTRONAUTIQUE !
EH OUI, MESSIEURS... J'AI ENFIN TROUVÉ LA FORMULE QUE LES MATHÉMATICIENS RECHERCHENT DEPUIS DES SIÈCLES !
Congrès interna de MATHÉMATIQUE
ET J'AI DÉCIDÉ D'EXPÉRIMENTER MA THÉORIE EN PARTANT POUR MARS LA SEMAINE PROCHAINE ...
MES CALCULS ÉTAIENT CORRECTS ! ...
USA
FANTASTIQUE !
QUEL DÉCOR MERVEILLEUX !
BON SANG ! DES MARTIENS ?
!?
BZZZ
BZZZZ
ESSAYONS D'EN RAMENER UN SUR TERRE ...
RIC !!! RHÂÂ !!! ENCORE DANS LA LUNE !
D. SERON 6-1985
1

MATHÉMATIQUE et LITTÉRATURE

Charles BABBAGE passa aux yeux de ses contemporains pour un être un peu excentrique. Il possédait en tout cas un sens étonnant de l'humour. Un jour, il écrivit au grand poète Alfred TENNYSON au sujet de l'un de ses poèmes:

Très cher Monsieur,
Dans votre magnifique poème intitulé "La vision de Sin", il y a un verset qui affirme :

Chaque minute un homme meurt,
Chaque minute un homme naît.

Je tiens à vous signaler qu'un tel calcul tendrait à maintenir la population du monde à son état actuel, alors qu'il est bien connu que la population est en hausse. Je prends ainsi la liberté de vous suggérer que dans la prochaine édition de votre excellent poème, le calcul erroné que je souligne soit corrigé de la manière suivante :

Chaque fois qu'un homme meurt,
Il y en a un et un seizième qui naît.

A parler strictement, cela n'est pas très exact; le nombre réel des naissances admettant tant de décimales que l'on ne peut l'énoncer en une ligne, ne pourrait qu'affaiblir la rime. Mais cette approximation peut, je crois, être laissée à la licence poétique.
Recevez, Monsieur, mes meilleurs sentiments.

LE COIN DES PROBLÈMES

122 1985.

Evaluer la somme $S = \{\sqrt{1}\}+\{\sqrt{2}\}+ \ldots +\{\sqrt{1985}\}$ où $\{\sqrt{n}\}$ désigne la partie entière de $\sqrt{n}$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

+ + +

123 Les autoroutes.

Dans une vaste plaine se trouvent 4 villes A,B,C,D aux sommets du rectangle ABCD (longueur AB = 360 Km, largeur BC = 270 Km). Ces villes devraient être reliées par une autoroute qui, pour des raisons d'économie, devrait avoir la longueur minimale. Quel est le tracé optimal ?

124 L'octogone.

On considère un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon r. Montrer que le produit des longueurs de tous les côtés et diagonales issues d'un sommet vaut

$8r^7$

+ + +

125 La ligne polygonale.

On se choisit 5 nombres naturels a,b,c,d,e et on trace une ligne polygonale $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{20}$ de façon à avoir

$|a_0a_1| = a$, $|a_1a_2| = b$, $|a_2a_3| = c$,
$|a_3a_4| = d$, $|a_4a_5| = e$, $|a_5a_6| = a$,
$|a_6a_7| = b$, etc...

$a_ia_{i+1} \perp a_{i+1}a_{i+2}$ pour tout i

$a_ia_{i+1}a_{i+2}$ sont des triples ayant tous même orientation.

Démontrer que $a_{20} = a_0$

+ + +

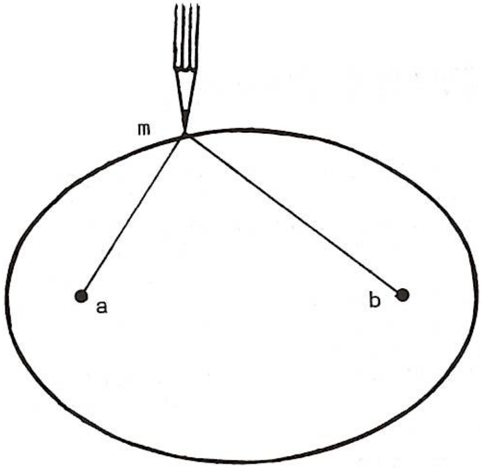
126 A l'hôpital.

Dans un hôpital britannique, on peut lire le faire-part suivant: "The surgeon X and the nurse Y are pleased to announce their forthcoming wedding." Sachant que, lorsque l'établissement fut ouvert, la fiancée avait l'âge actuel du fiancé: et que le produit des trois âges (celui des deux fiancés et celui de l'hôpital), diminué de celui du chirurgien, est 1539, à quelle époque l'hôpital a-t-il été ouvert ?

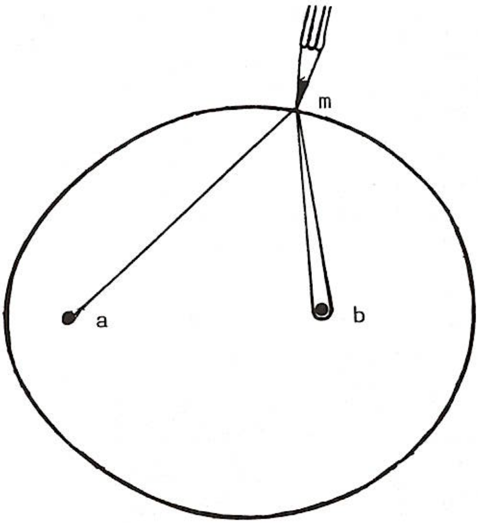
127 Problème Hindou (Bhaskara, XIIe s.)

Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante
Un huitième au carré gambadaient dans les bois;
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante ?

COMMENT DESSINER DES OVALES



La première figure vous montre comment l'on peut tracer une ellipse par la méthode dite du jardinier: à l'aide d'un crayon qui tracera la courbe, on maintient le fil tendu, ce dernier attaché en deux points a et b. Comme la somme des distances ma et mb ne peut varier, cette méthode nous assure que la courbe est bien le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers a et b est constante.

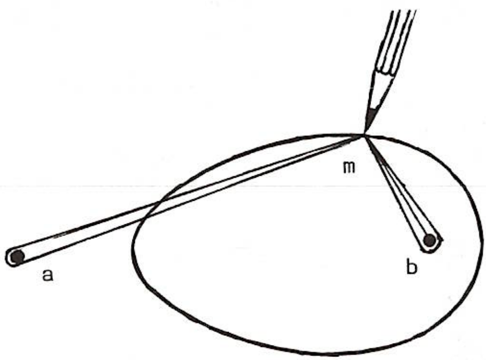


La seconde figure indique comment tracer un ovale de Descartes par une méthode analogue. Dans ce cas, le fil est attaché d'une part au crayon et d'autre part à la punaise a. On trace la moitié inférieure en inversant le sens d'enroulement du fil autour de b. Cette méthode engendre la courbe

$$am + 2\ mb = \text{Const.}$$

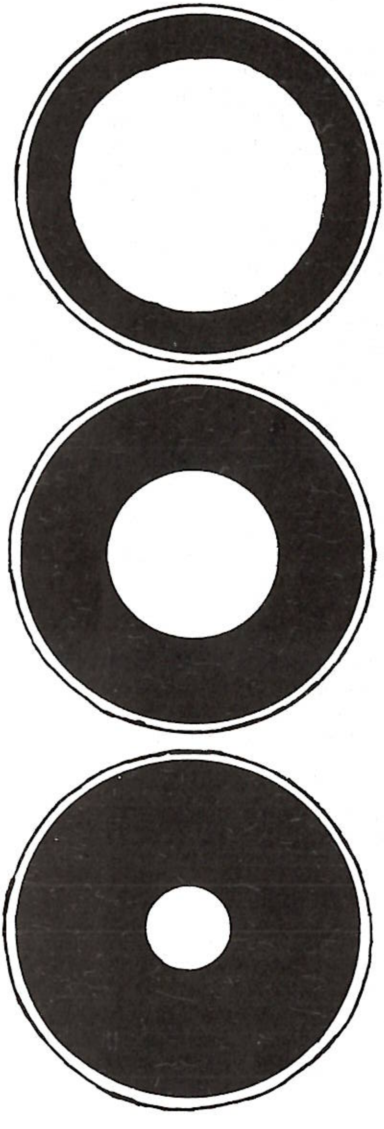
La troisième figure montre la courbe

$$2\ am + 3\ mb = \text{Const.}.$$



Ces courbes en forme d'oeuf furent découvertes au XVIIe s. par le philosophe et mathématicien Descartes. Elles furent également étudiées par Huygens et Newton qui y découvrirent d'étonnantes propriétés optiques.

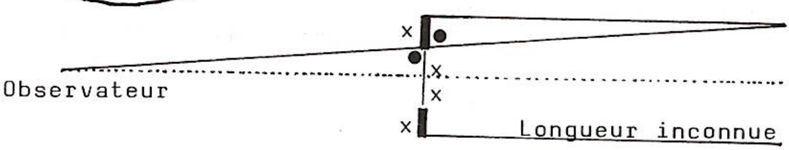
LONGUEUR D'UN TUYAU



Un problème amusant peut se poser si vous voulez connaître la longueur d'un tuyau en respectant certaines règles de jeu : on suppose que le bout du tuyau le plus éloigné de vous est inaccessible; la seule chose que vous pouvez vous permettre, c'est de vous placer dans l'alignement du tuyau à différentes distances de celui-ci.

Si vous êtes bien dans l'axe et que vous vous approchez du tuyau, la perspective va passer successivement par les trois figures ci-contre: l'intérieur du tuyau va apparaitre sous la forme d'un anneau sombre dont la taille dépend de votre position et de la taille du tuyau. Une conclusion peut néanmoins être dégagée: lorsque la perspective se présente

comme sur la figure centrale, on peut visualiser des triangles égaux et en conclure que la distance qui vous sépare du bout du tuyau est égale à la taille du tuyau.



LA MÉTHODE DU POINT FIXE

Comment calculer une approximation de la racine réelle de l'équation du troisième degré :

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad (1)$$

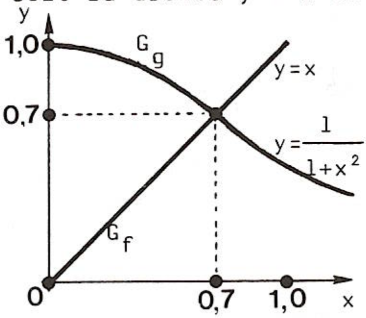
Une méthode traditionnelle comme la factorisation est ici inadéquate. Un tout autre cheminement est le suivant :

$$x^3 + x = 1$$

$$x (x^2 + 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (2)$$

La question peut à présent se poser en d'autres termes: soit la droite $y = x$ et la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ représentée sur une même figure; rechercher la coordonnée de leur point d'intersection avec la meilleure approximation possible.



L'emploi de papier millimètré permet de vérifier que l'intersection est proche de (0,7;0,7) et qu'une approximation de la racine est 0,7.

Pour une meilleure approximation, revenons à l'équation (2). Que signifie "être racine de cette équation" ? Dans ce contexte, c'est une valeur de x, qui, après remplacement dans l'équation (2), donne une égalité. En particulier, c'est une valeur de x, qui, substituée dans le membre de droite, donne une valeur à ce membre égale à x. 0,7 est-il la racine ?

$\frac{1}{1+(0,7)^2} = 0,6711409$. Il manque $0,7 - 0,6711409 \approx 0,03$

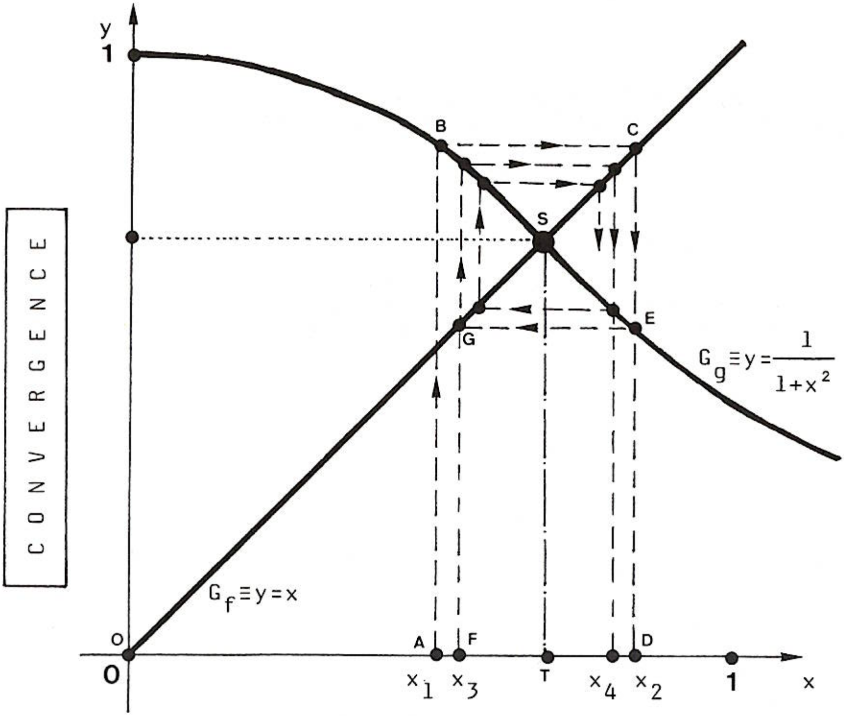
0,6711409 est-il la racine ? $\frac{1}{1+(0,6711409)^2} = 0,6894506$

La différence entre la valeur originelle et la valeur calculée est maintenant de 0,02 et donc inférieure à la différence calculée précédement. Si l'on continue :

0,6894506	→ 0,6778088	différence : 0,012
0,6778088	→ 0,6852015	différence : 0,007

et ainsi de suite...

Par cette méthode, l'approximation de la racine semble être meilleure après chaque étape. La figure de la page suivante montre la représentation graphique de cette méthode. Soit S le point où se coupent les deux graphes et T l'abscisse du point



d'intersection (c'est ce que l'on cherche). On choisit une valeur x_1 comme "départ" du processus. On peut considérer x_1 comme une première approximation de notre racine (pt A sur le graphique)

$$AB = g(x_1)$$

$$AB = CD = OD \quad \text{(puisque } C \in \text{graphe de } y=x)$$

$$x_2 = OD = g(x_1) = f(x_1)$$

$$DE = g(x_2)$$

$$DE = FG = OF$$

$$x_3 = OF = g(x_2) = f(x_2)$$

Sur la figure, on voit que F est plus près de T que ne l'était A et ainsi que x_3 est une meilleure approximation que x_1.

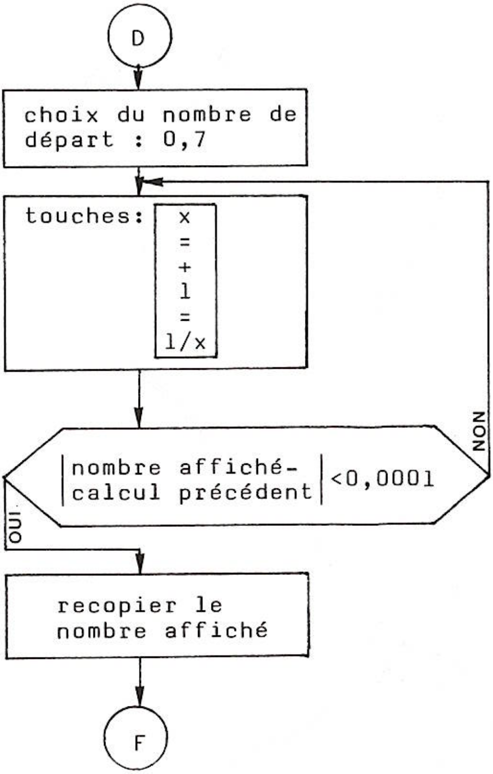
Pourtant, T peut ne jamais être atteint et la question se pose de savoir quand arrêter le processus. Une telle question peut être formulée en ces termes :

$$\text{arrêt lorsque} \quad |x_{n+1} - x_n| < 0{,}0001$$

Sur la figure, cette condition d'arrêt signifie que la distance entre les deux dernières approximations de T est inférieure à 0,0001.

Le moment est venu de prendre votre machine à calculer. On chosit par exemple le point de départ = 0,7 et on fait le calcul en essayant de limiter au maximum le nombre de touches à presser.

	écran
introduire 0,7	0,7
$\boxed{\times}$	
introduire 0,7	0,7
$\boxed{=}$	0,49
$\boxed{+}$	
introduire 1	1
$\boxed{=}$	1,49
touche d'inversion $\boxed{\frac{1}{x}}$	0,6711409



La valeur x_2 affichée à la fin de l'étape est celle nécessaire pour poursuivre un second tour. Elle doit néanmoins être notée pour pouvoir effectuer la comparaison après ce second tour.

Avec la machine à calculer employée pour rédiger cet article, on trouve:

$x_{13} = 0,6824040$

$x_{14} = 0,6822794$

$x_{15} = 0,6823585$

$|x_{14}-x_{13}| > 0,0001$

$|x_{15}-x_{14}| < 0,0001$

On s'arrète donc à x_{15}.

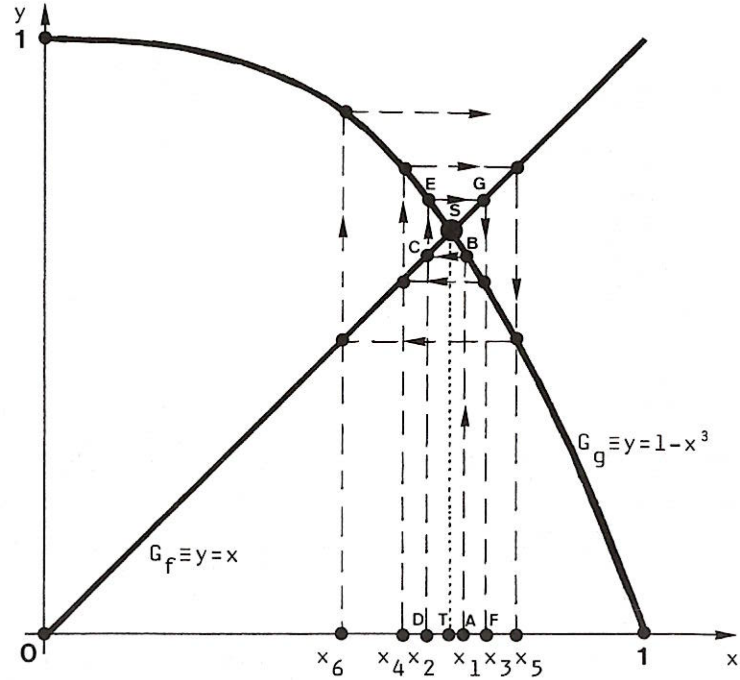
(Ce résultat peut dépendre du nombre de décimales que votre machine à calculer peut traiter.)

A ce point, vous pensez que cet algorithme est un bel outil mathématique. Voyons à vous mettre en garde contre quelques pièges qu'il contient. Pourquoi ne pas avoir transformé l'équation (1) en

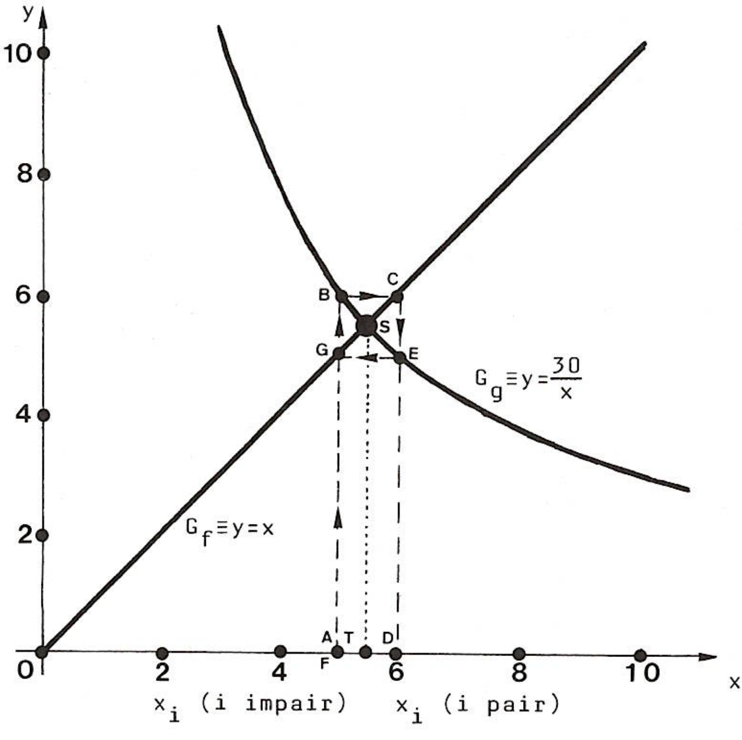
$$x = 1 - x^3$$

On voit de suite sur le graphique que la méthode va diverger, c'est-à-dire que la suite des x_i calculés sera de plus en plus éloignée du point cherché.
Un autre cas troublant est donné pour la recherche de $x = \sqrt{30}$, en écrivant $x^2 = 30$, puis $x = \frac{30}{x}$ et en choisissant $x_1 = 5$.

DIVERGENCE



PIETINEMENT



La question qui se pose est bien sûr de savoir pourquoi cet algorithme converge, diverge ou piétine. Sans plus de démonstration, nous affirmons que l'algorithme converge lorsque, dans le voisinage de la racine cherchée, on peut vérifier que :

$$\boxed{|f'(x)| < 1}$$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$f'(x)=\frac{-2x}{1+x^2}$	$\|f'(0,7)\| \simeq 0,93$	Convergence.
$f(x)=1-x^3$	$f'(x)=-3x^2$	$\|f'(0,7)\| \simeq 1,47$	Divergence.
$f(x)=\frac{30}{x}$	$f'(x)=\frac{-30}{x^2}$	$\|f'(\sqrt{30})\| = 1$	Divergence.

Remarquons pour terminer que, dans le cas de la fonction $f(x) = \frac{30}{x}$, on peut écrire

$$x = \frac{30}{x}$$
$$2x = x + \frac{30}{x}$$
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{30}{x}\right)$$

et pour cette fonction $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{30}{x^2}\right)$ et $|f'(\sqrt{30})|=0$,

et il y a convergence.

INFORMATIONS - TRANSMISSIONS - CODES

Nous commençons dans ce numéro une série d'articles consacrés aux différents moyens utilisés par l'homme pour transmettre des messages à distance.

Le premier de ces moyens fut, bien sûr, la voix humaine. Un passage de la Guerre des Gaules nous raconte comment le massacre de citoyens romains par des Gaulois à Cenabum (Orléans) fut connu le soir même à la frontière du territoire arverne (actuelle Auvergne), à 235 km de là.

> *"Lorsqu'un évènement important et remarquable a lieu, (les Gaulois) le font connaître à travers les campagnes dans les différentes directions par un cri, qu'on recueille et transmet de proche en proche. En effet, ce qui s'était passé à Cenabum au lever du soleil fut connu avant la fin de la première veille aux frontières du territoire arverne, soit à une distance d'environ 160 000 pas."*

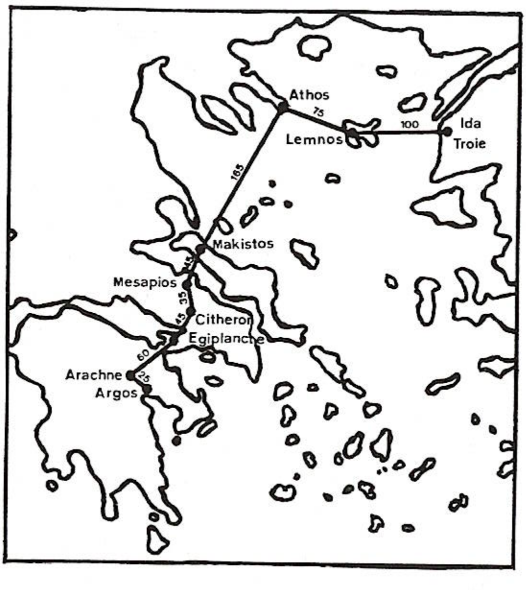
Le pas romain valait environ 1,47 m (n'en déduisez pas que les Romains étaient beaucoup plus grands que nous: pour eux en effet, le pas était ce que nous appellerions un double pas ou deux pas, la distance étant mesurée entre le point où le même pied quittait le sol et celui où il le retrouvait): on déduit aisément que la nouvelle franchit une distance de 235 km. Les veilles divisaient la nuit en quatre parties égales, mais dont la durée, en principe trois heures, variait en fonction des saisons: plus longues en hiver, plus courtes en été. Les évènements d'Orléans se passent au printemps 52 aCn: si l'on admet à cette saison douze heures de jour + deux heures ("avant la fin de la première veille"), la nouvelle voyagea à l'honorable vitesse d'environ 17km/h. (Par comparaison, la moyenne horaire actuelle d'un marathonien olympique est environ de 18,750 km/h.)

Ces cris transmis de proche en proche sont évidemment un moyen assez sommaire, et peu fiable sur longues distances; de plus, on n'est pas assuré qu'un "proche" est à l'écoute pour la retransmission.

Un millénaire plus tôt, la prise de la ville de Troie (Asie Mineure) fut annoncée à Argos (Grèce), capitale du royaume d'Agamemnon, par un relais de signaux lumineux qui couvrait, si l'on en croit la légende, une distance de 550 km en moins d'une nuit (voir carte). Le plus surprenant est que, selon Eschyle, le signal lumineux franchit de relais en relais des distances de 100 et même 150 km, qui paraissent fort élevées pour qu'on puisse, à un bout, voir un feu si grand soit-il allumé à l'autre...

On connaît bien sûr les messages sonores non vocaux (tambours, etc...); mais ces techniques ne peuvent guère servir que pour confirmer l'arrivée d'un évènement attendu, moins facilement pour transmettre un message détaillé, à contenu précis.

Pour cela, les Anciens utilisaient des messagers porteurs d'instructions orales ou écrites. Le plus célèbre de tous est bien sûr le coureur de Marathon, un soldat grec qui parcourut en courant les 42 km séparant Marathon d'Athènes pour y annoncer à ses concitoyens la victoire de leur armée sur celles des Perses. D'autres anecdotes illustrent en grand nombre ce recours aux messagers humains, la plus loufoque étant celle d'un esclave que l'on envoya porter le message suivant: "Rasez-moi la tête." Son maître, souhaitant transmettre discrètement un



ordre important, avait préalablement rasé le crâne du malheureux, puis avait tatoué son message à même le cuir chevelu; puis, après avoir attendu le temps nécessaire à la repousse des cheveux, il l'avait envoyé au destinataire. Celui-ci obéit à l'ordre transmis par l'esclave, et put alors découvrir le véritable message.

On disposait donc alors :

- de moyens rapides pour des messages simples et urgents,
- de moyens lents (parfois très lents...) pour des messages précis.

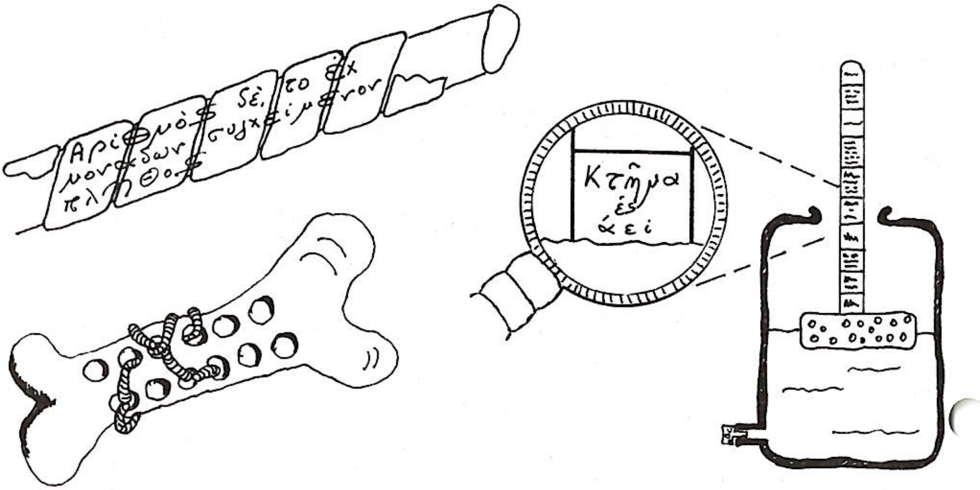
Les Grecs développèrent alors divers systèmes et engins plus complexes, qui permettraient aussi, comme dans le cas de l'esclave rasé et tatoué, la transmission de messages secrets ou codés. Nous avons conservé sur ces systèmes des renseignements peu nombreux mais assez précis.

Aulu-Gelle (2e pCn), auteur latin, décrit dans les Nuits Attiques un système utilisé chez les Spartiates. Sur un bâton d'une longueur et d'un diamètre précis, on enroulait en spirale une bande de cuir en la tendant fortement. Le message était écrit en longueur et en lignes droites sur le cuir, après quoi on détendait la bande, rendant ainsi le message illisible par la coupure et la transformation de la forme des lettres. Ainsi, si le messager portant la bande de cuir au destinataire était intercepté, le message restait illisible pour tout autre que le récepteur, qui, pour le déchiffrer, disposait d'un bâton identique à celui de l'émetteur.

Un système plus complexe, rapporté par Enée le Tacticien (4e aCn), consistait à percer six trous sur chacune des 4 faces d'un osselet, le premier trou de la première face correspondant à α, et ainsi de suite. Le message était alors "écrit" au moyen d'un fil entrant successivement dans les trous correspondant aux lettres des mots du texte. L'osselet finissait par ressembler à une pelote de fil, que le déchiffreur débobinait, lisant donc le message à rebours. "Le fait que les lettres soient transcrites à rebours sur la tablette n'a aucune importance, on n'en comprendra pas moins le message," disait sans rire Enée, "mais son déchiffrage donne plus de mal que le travail même de préparation"...

La technique suivante marque un progrès, car elle fait l'économie du porteur de message, indispensable dans les systèmes cités jusqu'ici. Elle combine également précision du message et rapidité de transmission: mais quelle complication...

On fabrique deux vases identiques, puis on divise deux bâtons en sections identiques; dans chacune des sections, on inscrit un message: "Cavaliers en vue"; "Fantassins lourds", etc...



Les vases sont alors percés de façon à ce que le débit de chacun soit exactement identique. Le bas des bâtons est muni de flotteurs de liège, et l'on fait flotter les bâtons verticalement dans les vases remplis d'eau. Ceux-ci sont portés aux postes de signalisation; on indique alors d'un poste à l'autre, en élevant puis abaissant une torche, combien de temps on doit laisser couler l'eau: le niveau de celle-ci baissant, le bâton s'enfonce dans le vase; il reste à lire le message inscrit dans la section qui se trouve au-dessus du goulot... puis, bien entendu, à remplir à nouveau les vases à leur plus haut niveau en attendant le message suivant...

C'est encore Enée le Tacticien, esprit décidément compliqué, qui imagina ce système: mais ses inconvénients nombreux, vérification des débits, réglages divers, transport, nombre limité des messages inscrits sur les bâtons et impossibilité de communiquer un message non inscrit à l'avance, amenèrent Polybe (2e aCn), grand historien grec, à proposer un système beaucoup plus moderne, combinant originalement rapidité, précision et éventuellement codes secrets. Voici lequel:

"On divise d'abord l'alphabet en cinq parties de cinq lettres chacune (il n'y a que quatre lettres dans la cinquième partie, mais cela ne gêne pas)(*). On prend cinq tablettes, sur chacune desquelles on écrit cinq lettres. Deux jeux de cinq torches sont ensuite préparés par poste d'observation, placés à distance suffisante l'un de l'autre pour qu'on ne puisse les confondre. On indique alors, en élevant et en abaissant derrière un écran à hauteur d'homme, à gauche le nombre de torches indiquant quelle est la tablette, à droite ensuite le nombre de torches indiquant quelle est la lettre de cette tablette."

Il s'agit bel et bien d'un système de signalisation alphabétique, basé sur des couples de coordonnées en chiffres.

(*) L'alphabet grec comporte 24 lettres.

Polybe recommande *"avant tout de choisir pour exprimer le message des mots contenant le plus petit nombre possible de lettres"*, première apparition d'un souçi de brieveté dans les messages envoyés lettre par lettre; mais on oubliera ce souçi jusqu'à l'apparition des systèmes télégraphiques modernes, à la fin du 18ème siècle... On peut pourtant dire que c'est un Grec qui inventa le "style télégraphique"!!!

Les Romains installèrent sous l'Empire un véritable réseau de télégraphie optique en (Grande-)Bretagne, en Gaule, en Espagne et sans doute en Egypte. Le procédé de signalisation, différent de celui de Polybe, ne nous est connu que par une brève allusion de Végèce : *"On place sur le sommet des tours de camp ou de ville des solives (poutres) que tantôt on élève, tantôt on abaisse pour indiquer ce qui se passe."* Nous n'en savons pas plus, mais il est peu probable qu'il se soit agi d'un système permettant des transmissions de messages détaillés, les mouvements d'une poutre étant trop peu variés pour cela.

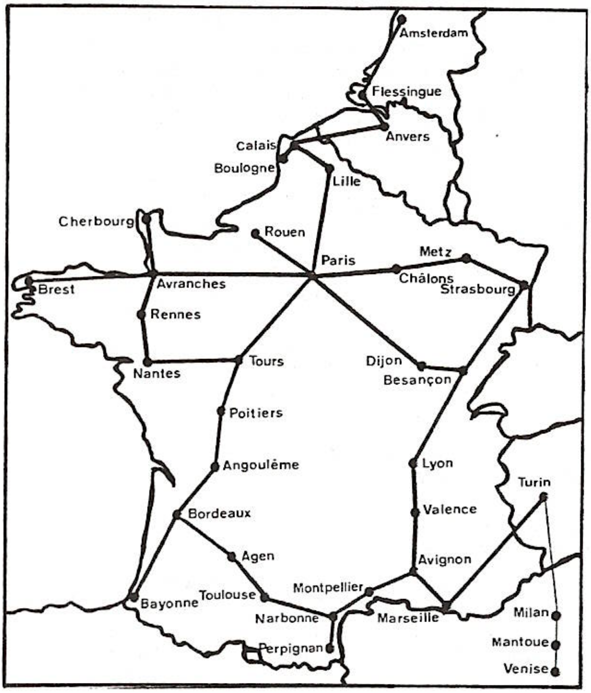
Ainsi, dès l'Antiquité, on connaissait :

- une signalisation alphabétique lumineuse par couples de coordonnées numériques,
- certains systèmes élémentaires de codages,
- des réseaux de télégraphie optique.

Mais il faudra attendre, pour que l'évolution reprenne, l'an 1792, où apparaît le télégraphe optique de Chappe. Dans l'intervalle, fort peu de nouveautés étaient apparues. Les prisonniers du Moyen Age, qui n'étaient pas nécessairement des délinquants et étaient parfois très cultivés, avaient adapté à leur situation le système de Polybe pour communiquer d'une cellule à l'autre par signaux sonores : des coups donnés dans les murs. Ceci est intéressant dans la mesure où pour la première fois, on combinait un système de codage des lettres du message avec un système de signalisation sonore. La matrice utilisée était toujours cinq sur cinq, bien que l'alphabet "latin" (celui que nous utilisons) comportât vingt-six lettres : le I et le J étant confondus. L'invention du télescope au 17eme siècle relança l'intérêt pour la signalisation optique: en 1684, le physicien et astronome anglais Robert Hooke fit devant la Royal Society un exposé clair et cohérent des diverses méthodes de signalisation visuelle, et proposa son système. Celui-ci ne fut jamais mis en application.

En 1791, un français, Claude Chappe, proposa un système nouveau, qu'il appela "tachygraphe" (du grec ταχύς, rapide, et γράφειν, écrire: qui écrit vite). Un bureaucrate frotté de grec, dont l'histoire n'a, hélas pour lui, pas conservé le nom, lui fit remarquer que l'appellation "télégraphe" (de τῆλε, au loin: qui écrit au loin) serait mieux adaptée à son appareil. L'inventeur du mot promis à un si bel avenir est donc resté inconnu...

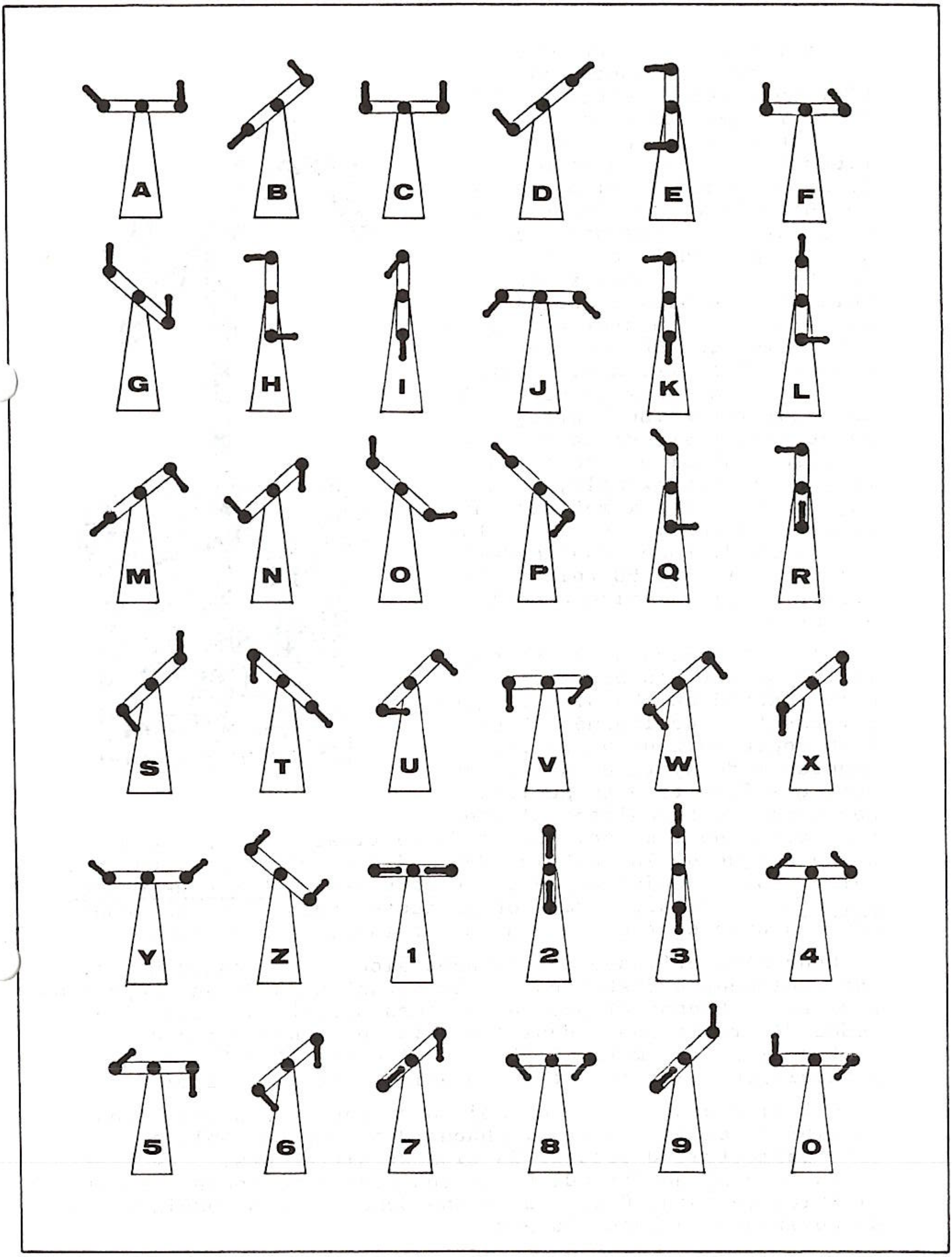
Le système de Chappe fut mis au point en pleine Révolution française, à une époque où il était indispensable pour un gouvernement central fort mal établi de recevoir des renseignements



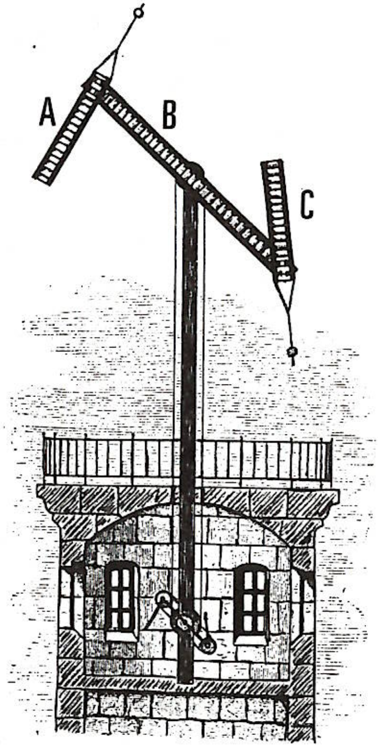
et de transmettre des ordres dans les délais les plus brefs. D'abord mal accueilli par la population parisienne, qui voyait là un moyen de communiquer avec le Roi Louis XVI emprisonné, son appareil fut détruit à deux reprises avant d'être officiellement adopté. Chappe obtint le titre d'ingénieur-télégraphe et put installer une chaîne de stations télégraphiques entre Paris et Lille, sur une distance de 230 km. Le premier message transmis par cette ligne annonça, le 15 août 1794, que les armées de la Révolution avaient pris une bourgade nommée Le Quesnoy (et non, comme on le croit généralement, la victoire française sur les troupes autrichiennes à Condé-sur-Escaut, qui fut annoncée par la même voie quinze jours plus tard).

Le télégraphe s'étendit alors rapidement à toute la France, non sans de nombreuses difficultés, surtout financières, qui découragèrent Chappe au point qu'il se suicida le 23 janvier 1805. Outre en France, son système fut utilisé pendant la première moitié du 19ème siècle en Russie, en Suède, en Hollande, au Danemark, en Prusse, en Inde, en Egypte et dans les possesions françaises d'Afrique, notamment en Algérie.

Le télégraphe de Chappe était constitué d'un mât de bois au sommet duquel pivotait un bras principal., dont on modifiait la position au moyen de cordes; à chaque extrémité du bras principal était fixé un bras secondaire plus court,également mobile. L'ensemble était placé sur une tour, souvent construite à cet effet (d'où les difficultés financières mentionnées plus haut), mais aussi sur des bâtiments existants: clochers, tours de châteaux, etc... La distance standard entre ces tours était de 10 km environ. Un télescope (qui voit au loin) permettait aux opérateurs de distinguer clairement le signal émis par la station précédente. Chose amusante et généralement ignorée, ces opérateurs, appelés "stationnaires", ne connaissaient pas la signification des signaux qu'ils recevaient et émettaient! Leur rôle se bornait


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0

à répéter sans les comprendre les figures dessinées par la station voisine. C'est un "directeur" qui avait codé le message au départ; certaines stations plus importantes de la ligne possédaient elles aussi un "directeur" qui décodait le message envoyé par son collègue, le purgeait des éventuelles fautes de transmission, puis le recodait, si possible mieux, pour l'envoyer à la station suivante. On peut rêver procédé plus efficace... Cette organisation donna naissance à une administration lourde, chère et très fière de sa spécialisation, ainsi que de ses performances: par exemple, un message de 50 signaux mettait une heure à parcourir, via 120 stations, la distance Toulon-Paris, soit une vitesse 90 fois supérieure au plus rapide courrier à cheval.



Il faut encore préciser que le télégraphe d'abord exclusivement réservé aux besoins du gouvernement et de l'armée (Napoléon appréciait beaucoup les avantages du système) ne fut ouvert que fort tard au public, non sans des formalités d'identification de l'expéditeur et du destinataire fort complexes à une époque où la carte d'identité n'existait pas. On peut relire sur ce sujet une édition complète du Comte de Monte-Christo d'Alexandre Dumas où le comte soudoie un stationnaire pour envoyer un faux message qui ruinera un banquier...

Pour être efficace, la transmission des messages n'était pas seulement alphabétique: elle aurait demandé un temps considérable. Chappe et ses successeurs mirent au point divers codes d'abréviations, dans lesquels un signal donné correspondait à plusieurs mots. C'était d'autant plus facile que le vocabulaire militaire et diplomatique est assez limité.

Détail amusant: la combinaison de toutes les positions possibles des bras A et C, chacun des bras se déplaçant de 45°, permettait d'obtenir 64 signaux différents... Le bras B, en tournant de 45° autour de son centre présente 4 positions visibles de loin. Cela nous donne donc ... 256 combinaisons de positions de bras! Hasard?

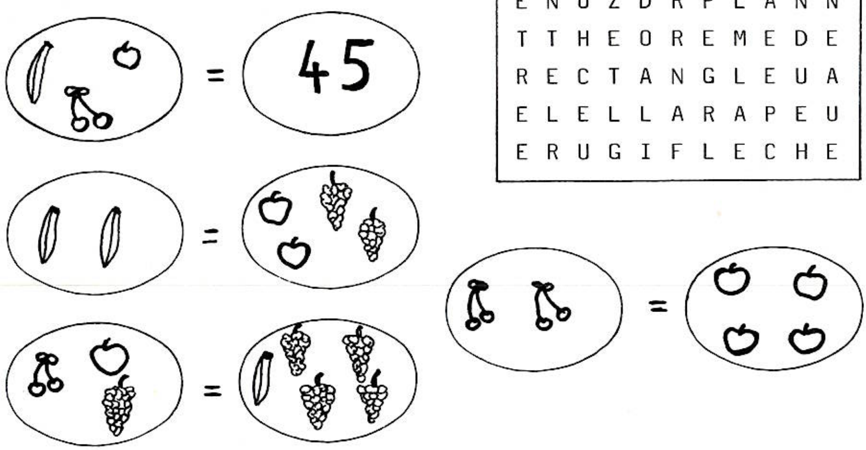
A suivre...

1. *Chercher cette énigme essentielle pour résoudre un problème.*

aire
anneau
arete
axiome
base
brisee
carre
centre
cercle
cone
corde
coupe
courbe
diagramme
diametre
diedre
droite
ellipse
espace
etendue
figure
fleche
hyperbole
isocele
lemme
ligne
losange
lunule
mediane
mediatrice
milieu
obtus
ovale
parallele
perimetre
plan
point
poser
prisme
rayon
rectangle
rhombe
scolie
segment
sinus
sphere
spirale
surface
tangente
tetraedre
theoreme
tracer
trapeze
triangle
volume
zone

E	S	L	I	S	O	C	E	L	E	T
B	G	U	I	R	E	C	A	R	T	R
R	S	N	T	D	I	E	D	R	E	A
I	U	U	A	B	E	N	R	C	R	P
S	E	L	R	S	O	G	O	E	H	E
E	N	E	P	F	O	I	I	N	O	Z
E	U	A	L	V	A	L	T	T	M	E
T	C	E	A	L	O	C	E	R	B	T
E	R	L	I	C	I	C	E	E	E	E
C	E	I	S	L	E	P	O	I	N	T
I	E	L	A	R	I	P	S	E	E	R
R	M	E	C	N	R	M	M	E	R	A
T	M	L	S	E	G	M	E	N	T	E
A	E	E	S	A	A	L	T	E	E	D
I	L	O	D	R	B	O	E	T	M	R
D	P	E	G	I	A	N	R	N	I	E
E	R	A	B	C	A	Y	A	E	R	M
M	I	A	I	R	E	N	O	G	E	O
D	S	V	O	L	U	M	E	N	P	I
I	M	P	E	P	U	O	C	A	E	X
A	E	E	H	E	N	O	C	T	T	A
M	H	Y	P	E	R	B	O	L	E	N
E	N	O	Z	D	R	P	L	A	N	N
T	T	H	E	O	R	E	M	E	D	E
R	E	C	T	A	N	G	L	E	U	A
E	L	E	L	L	A	R	A	P	E	U
E	R	U	G	I	F	L	E	C	H	E

2. *Rendre à chaque fruit sa valeur.*



SOMMAIRE

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. *A.S.B.L.*

Comité de rédaction:
F. Carlier, Gh. Marin, N. Miéwis, J. Vanhamme

Graphisme:
D. Seron

Edition:
J. Miéwis, Avenue de Péville, 150,
4030 - Liège-Grivegnée.

Abonnement:

Belgique: groupés(5 au moins) 60 FB par abonnement
isolés 100 FB
Etranger: par paquet de 5 600 FB le paquet
isolé 200 FB
Poster historique: Belg. 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etr. 60 FB (240 FB par 5 unités)
Compte n° 000-0728014-29, SBPM,
Chemin des fontaines, 14bis, 7460 CASTEAU

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur. Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme due de 100FB pour frais d'encaissement.