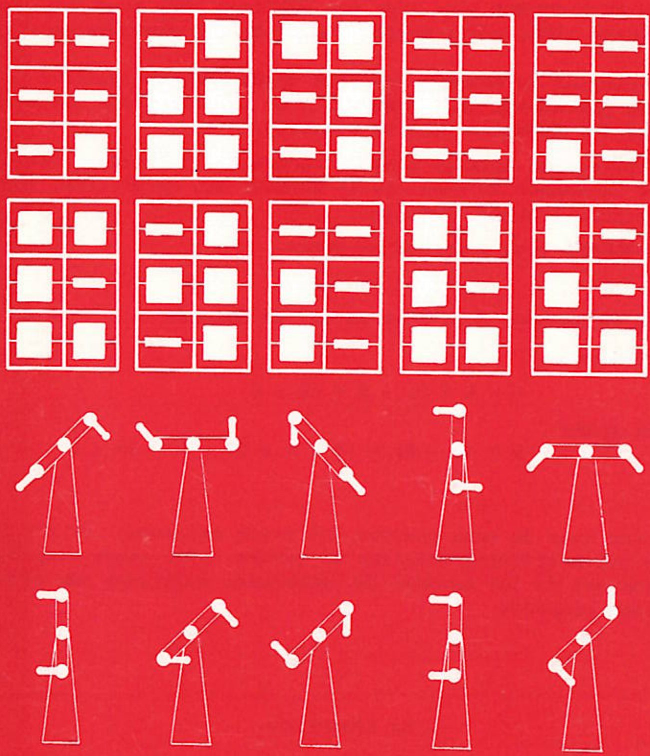
Math-Jeunes



11111
00111
11000
00001
00101
11010
10000
11100
00110
10000
10100
00010

Publication trimestrielle de la
Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française. (ASBL)

7ème année Numéro 30 Hiver 1985-86

Chers amis,

Quand MATH-JEUNES joue avec mes chiffres pour vous souhaiter une bonne année 1986, voici quelques-unes de ses élucubrations !

- En employant au maximum une fois chacun de mes chiffres et les quatre opérations fondamentales j'ai construit une suite ininterrompue des premiers nombres naturels.

  Multipliez par deux le premier nombre que je n'ai pu construire c'est le nombre de semaines de bonheur que MATH-JEUNES vous souhaite pour l'année nouvelle.

- MATH-JEUNES vous souhaite au moins

  $$9 \times 8 \times (6 - 1)$$

  jours de bonheur dans l'année qui va débuter

- Bonne année

  $$6 \times 6 \times 66 - 6 \times 66 + 6$$

- Bonne année

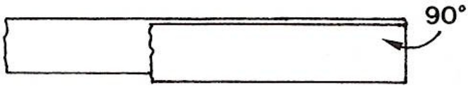
  $$9 \times (8 - 6) \times (9 - 8 + 6) + 6 \times (9 - 1)$$

A votre tour de nous envoyer des voeux originaux. Et n'oubliez pas qu'une des meilleures manières de rendre cette année heureuse pour la rédaction est de lui envoyer de nombreuses solutions aux problèmes qui vous sont proposés.

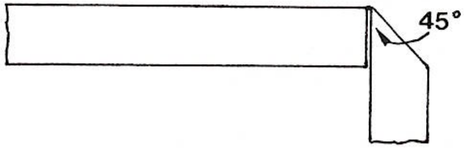
La rédaction

L'angle de 60°

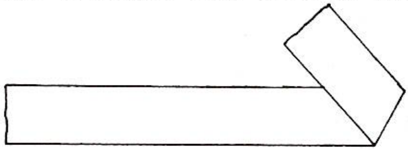
A partir d'une bande de papier de 4 cm sur 30 cm, comment illustrer un angle de 90 ° ? Facile direz-vous, il suffit de replier la bande de papier sur elle-même.



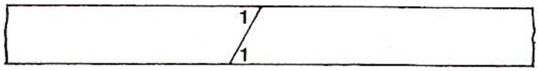
L'angle de 45° est lui aussi facile à trouver: on plie le long de la première pliure qui a servi à fabriquer l'angle de 90°.



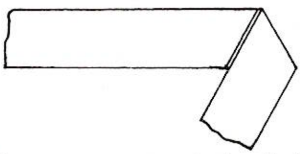
Comment trouver l'angle de 60° ? Simple, répond le Professeur Jean Pedersen de l'Université de Santa Clara en Californie. Pliez la bande une première fois avec un angle assez grand.



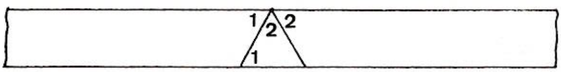
Dépliez. La marque reste visible.



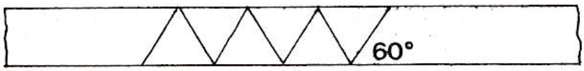
Pliez une seconde fois; le bord de la bande longeant la première marque.



Dépliez. Deux marques sont visibles.

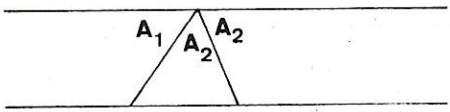


Continuez les pliures, alternativement vers le haut et vers le bas, toujours en longeant la pliure précédente. Après 7 pliures, on obtient un angle, qui mesuré au rapporteur vaut ... 60°.



Vous pouvez recommencer avec un autre angle initial; la septième pliure s'obstine à montrer un angle de 60°. Comment est-ce possible?

Si le premier angle choisi vaut A_1 et le second A_2, la méthode de construction permet de voir que la seconde pliure crée la bissectrice de l'angle entre la première pliure et le bord de la bande de papier. Nous avons la situation :



L'angle A_1 s'écrit $60° + \varepsilon$ (ε pouvant être négatif!)

Puisque $A_1 + 2\,A_2 = 180°$,

$$A_2 = \frac{1}{2}\,(180° - A_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,(180° - 60° - \varepsilon)$$

$$A_2 = 60° - \frac{\varepsilon}{2}$$

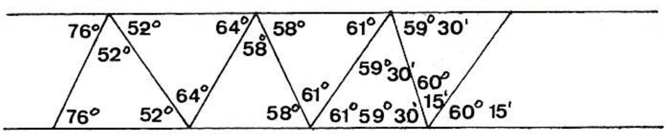
Ainsi $(A_2 - 60°) = -\frac{1}{2}\,(A_1 - 60°)$.

Généralement, on a : $(A_n - 60°) = -\frac{1}{2}\,(A_{n-1} - 60°)$

et aussi : $(A_n - 60°) = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2^{n-1}}\,\varepsilon$

A chaque nouvelle pliure, l'erreur commise se trouve divisée par 2 ! (au signe près bien sûr). Et après 7 divisions, c'est le rapporteur qui abandonne , l'erreur étant trop petite pour qu'il puisse la détecter !

Prenons un exemple précis : Avec $A_1 = 76°$, on trouve : $A_2 = 52°$, $A_3 = 64°$, $A_4 = 58°$, $A_5 = 61°$, $A_6 = 59°30'$, $A_7 = 60°15'$.



Les fonctions monotones et la régression linéaire

Nous allons étudier 4 grands types de fonctions monotones.

- les fonctions affines : $f(x) = a + bx$
- les fonctions exponentielles : $f(x) = a\ e^{bx}$
- les fonctions logarithmiques : $f(x) = a + b \ln x$
- les fonctions puissances : $f(x) = a\ x^{b}$.

Les analogies de ces quatre fonctions sont assez évidentes: leur expression fait intervenir chaque fois deux coefficients. Le premier (a) détermine la position du graphique par rapport à l'axe horizontal : plus a est grand, plus la courbe est " globalement haute ". Le second (b) fixe le degré de croissance ; le graphique est d'autant plus vertical que $|b|$ est élevé; si b est positif, il monte; si b est nul, il est horizontal; si b est négatif, il descend. Quand $b \neq 0$, la fonction est injective.

A présent, nous allons examiner les différences entre ces quatre types de fonctions. La mise en évidence de ces différences nous permettra de mettre au point des techniques de moindres carrés, adaptées à chaque cas, et ne faisant intervenir que la fonction somme ($\sum$) des machines à calculer.

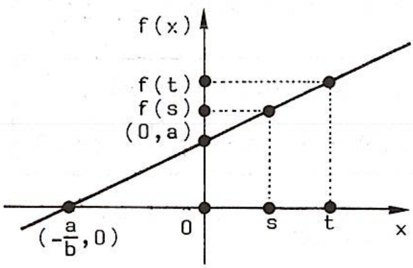
1

Les AFFINES
$f : R \to R \quad x \to a + bx$

La fonction affine conserve l'égalité des différences !
En clair, cela signifie que si s et t sont deux points quelconques d'un graphique d'une fonction affine f ,

<u>$f(t) - f(s)$ est une constante si $t - s$ est une constante,</u>

ce qui est évident puisque $f(t) - f(s) = a + bt - a - bs = b\ (t - s)$.



Voici un exemple numérique :

x = température en degré Celcius	10	20	30	40	50
f(x) = température en degré Fahrenheit	50	68	86	104	122

On constate que si t-s = 10, f(t) - f(s) = 18

Nous allons voir comment, à partir de ce tableau de données, nous pouvons donner une évaluation de a et de b, trouver une estimation d'un f(x) pour un x non dans le tableau, trouver le x auquel correspondrait un f(x) donné.

Introduction des données :
(T.I.57)

[INV] [2nd] [C.t]
10 [x⇌t] 50 [2nd] [Σ+]
...
50 [x⇌t] 122 [2nd] [Σ+]

Voici la valeur théorique des coefficients, donnée par la méthode des moindres carrés ($y_i = f(x_i)$)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

(voir 5)

On trouve b = 1,8 et a = 32 d'où

$$f(x) = 1{,}8\ x + 32$$

est une bonne approximation d'une fonction affine représentant les passages de températures donnés en exemple.

L'estimation d'un nouvel y (ou f(x)) se fait par la séquence de touches :

x [x] [RCL] [6] [+] [RCL] [7] [=]

Par exemple, si x = 70, on trouve f(x) = y = 158

L'estimation d'un nouvel x se fait par la séquence : (y=f(x))

y [-] [RCL] [7] [=] [÷] [RCL] [6] [=]

Par exemple, si y = 22, on trouve x = -5,56

2 Les EXPONENTIELLES

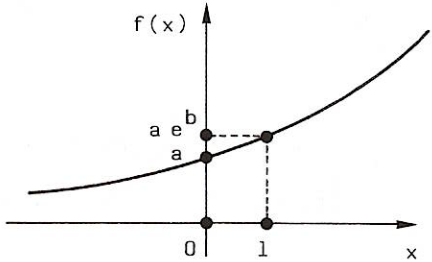
$f : R \to R_0^+ \quad x \to a\,e^{bx} \quad (a > 0)$

La fonction exponentielle transforme une égalité de différences en une égalité de rapports!

En clair cela signifie que si s et t sont deux points quelconques d'un graphique d'une fonction exponentielle f

$\frac{f(t)}{f(s)}$ est constant si t - s est une constante,

ce qui est évident puisque $\frac{f(t)}{f(s)} = \frac{a\, e^{bt}}{a\, e^{bs}} = e^{b(\ t-s\ )}$.



Voici un exemple numérique : (Constitution d'une assurance-vie)

x = âge de l'assuré	26	28	30	32	34
f(x) = prime annuelle pour 1000 Fr	21,8	23,7	25,9	28,5	31,4

On vérifie que t-s = 2 et $\frac{f(t)}{f(s)} \simeq 1,1$

Introduction des données :
(T.I.57)

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{C.t}}$

26 $\boxed{x \rightleftarrows t}$ 21,8 $\boxed{\ln x}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\Sigma+}$

...

34 $\boxed{x \rightleftarrows t}$ 31,4 $\boxed{\ln x}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\Sigma+}$

Voici la valeur théorique des coefficients :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

$$a = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n} - b\, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)$$

On trouve b = 0,0457 et a = 6,6083 , d'où

$$\underline{f(x) = 6,6083\ e^{0,0457\ x}}$$

est une bonne approximation.

L'estimation d'un nouvel y (ou f(x)) se fait par la séquence de touches :

x $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{INV}$ $\boxed{lnx}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

Par exemple, si x = 29, on trouve y = 24,88

L'estimation d'un nouvel x se fait par la séquence : (y=f(x))

y $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{lnx}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$

Par exemple, si y = 44, on trouve x = 41,475

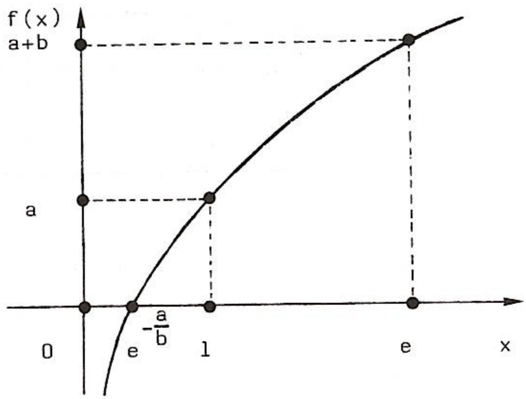
3 Les LOGARITHMIQUES

$f : R_o^+ \rightarrow R \quad x \rightarrow a + b \ln x$

La fonction logarithme transforme une égalité de rapports une égalité de différences.

$f(t) - f(s)$ est constant si $\frac{t}{s}$ est constant puisque

$f(t) - f(s) = a + b \ln t - a - b \ln s = b \ln (\frac{t}{s})$



Dans cet exemple numérique, x représente l'intensité lumineuse apparente d'une étoile ,exprimée en bougies/cm^2, et y la magnitude.

x	10^{-7}	$3,98\ 10^{-8}$	$1,58\ 10^{-8}$	$6,31\ 10^{-9}$	$2,51\ 10^{-9}$	10^{-9}
y	1	2	3	4	5	6

On vérifie : $\frac{t}{s} \simeq 0,398$ et $f(t) - f(s) = 1$

Introduction des données : (T.I.57)

INV 2nd C.t
1 EE 7 +/- lnx x⇌t 1 2nd Σ+
...
1 EE 9 +/- lnx x⇌t 6 2nd Σ+

Valeur théorique des coefficients :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2}{n}} \qquad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$$

On trouve b = - 1,0858 et a = - 16,5 et

$$f(x) = -16,5 - 1,0858 \ln x$$

Estimation d'un nouvel y :

x lnx x RCL 6 + RCL 7 =

Par exemple si $x = 3\ 10^{-11}$, $y = 9,8$

Estimation d'un nouvel x :

y - RCL 7 = ÷ RCL 6 = INV lnx

Exemple si $y = 12$, $x = 3,98\ 10^{-12}$

4

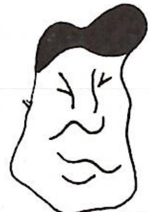
Les PUISSANCES

$f : R_o^+ \rightarrow R_o^+ \quad x \rightarrow a\, x^b \quad (a>0)$

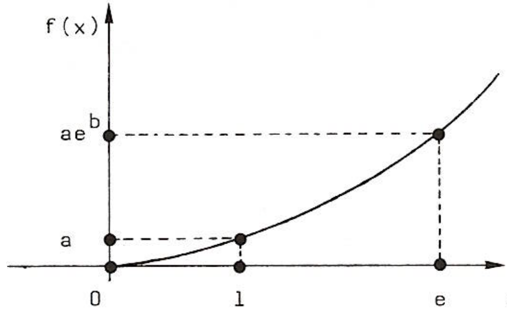
La fonction puissance conserve l'égalité des rapports. En d'autres termes,

$\frac{f(t)}{f(s)}$ est constant si $\frac{t}{s}$ est constant, puisque

puisque $$\frac{f(t)}{f(s)} = \frac{a\ t^b}{a\ s^b} = (\frac{t}{s})^b$$



Dans notre exemple x représente le nombre d'occurences d'un mot dans un texte et y le nombre de mots utilisés x fois.



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	341	85	38	22	14	9	7	6	4	3

$\frac{t}{s} \simeq \frac{2}{3}$ et $\frac{f(t)}{f(s)} \simeq \frac{9}{4}$

Introduction des données : (T.I.57)

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{C.t}}$

1 $\boxed{\text{lnx}}$ $\boxed{x \rightleftharpoons t}$ 341 $\boxed{\text{lnx}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\Sigma+}$

...

10 $\boxed{\text{lnx}}$ $\boxed{x \rightleftharpoons t}$ 3 $\boxed{\text{lnx}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\Sigma+}$

Valeur théorique des coefficients:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ \ln y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2}{n}}$$

$$a = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n} - b \, \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n} \right)$$

On trouve b = -2,02 et a = 348,06, ainsi,

$$f(x) = 348{,}06 \ x^{-2{,}02}$$

Estimation d'un nouvel y :

x $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

Exemple: si x = 12, y = 2,32

Estimation d'un nouvel x :

y $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$

Exemple: si y = 1, x = 18,2

(5) Ce que contiennent les mémoires!

0	: nombre de valeurs n
1	: Σ y
3	: Σ x
5	: Σ xy
$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$	: moyenne des valeurs de x
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$	: moyenne des valeurs de y
$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sigma^2}$	: variance des valeurs de x
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sigma^2}$	: variance des valeurs de y

Calcul de b *(valable dans les quatre cas) :*

$\boxed{(}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{)}$

$\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sigma^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{6}$

Calcul de a *(fonctions affines ou logarithmiques) :*

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{7}$

Calcul de a *(fonctions exponentielles ou puissances) :*

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{lnx}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{7}$

La séquence de touches

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sigma^2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sigma^2}$ $\boxed{=}$

permet dans les quatre cas le calcul du *coefficient de corrélation*. Ce nombre positif, compris entre 0 et 1 indique le degré de confiance que l'on peut donner aux valeurs calculées de a et de b.
Un coefficient proche de 1 indique une bonne approximation (= la fonction calculée " passe " très près des couples (x,y) de données) , par contre, un coefficient proche de 0 indique une approximation peu fiable.

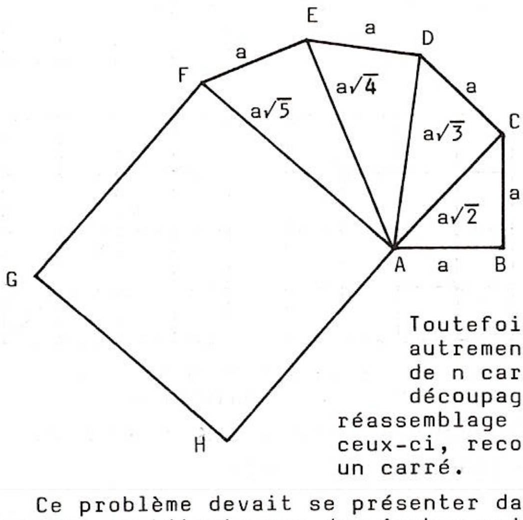
Le programme suivant, écrit en Basic, calcule, pour un échantillon de données les quatre régressions avec leur coefficient de corrélation. A vous de décider quelle régression vous choisirez : en principe celle qui donne le meilleur coefficient.

```
1 SX = O:SY = O:TX = O:TY = O:UX = O:UY = O:VX = O:VY = O:
    W1 = O:W2 = O:W3 = O:W4 = O
5 N = O
10  HOME
20  PRINT "INTRODUISEZ LES DONNEES DANS L'ORDRE X,Y"
30  PRINT "C POUR CONFIRMER,"
40  PRINT "A POUR ANNULER,"
50  PRINT "T POUR TERMINER"
60  PRINT
70  INPUT "X = ? ";X
80  INPUT "Y = ? ";Y
90  INPUT " ? ";A$
100  IF A$ = "C" THEN SS = O: GOTO 1000
110  IF A$ = "A" THEN  GOTO 10
120 SS = 1: GOTO 1000
200  REM  AFFINE
210 B1 = (W1 - SX * SY / N) / (UX - SX * SX / N)
220 A1 = SY / N - B1 * SX / N
230 C1 =  SQR (B1 * B1 * (UX / N - SX * SX / N / N) / (UY /
    N - SY * SY / N / N))
240  HOME
250  PRINT "AFFINE:"
260  PRINT "F(X) = ";A1;" + ";B1;" X"
270  PRINT "CORRELATION : ";C1
280  PRINT
300  REM EXPONENTIELLE
310 B2 = (W2 - SX * TY / N) / (UX - SX * SX / N)
320 A2 =  EXP (TY / N - B2 * SX / N)
330 C2 =  SQR (B2 * B2 * (UX / N - SX * SX / N / N) / (VY /
    N - TY * TY / N / N))
350  PRINT "EXPONENTIELLE:"
360  PRINT "F(X) = ";A2;" . EXP ( ";B2;" X )"
370  PRINT "CORRELATION : ";C2
380  PRINT
400  REM LOGARITHMIQUE
410 B3 = (W3 - TX * SY / N) / (VX - TX * TX / N)
420 A3 = SY / N - B3 * TX / N
430 C3 =  SQR (B3 * B3 * (VX / N - TX * TX / N / N) / (UY /
    N - SY * SY / N / N))
450  PRINT "LOGARITHMIQUE:"
460  PRINT "F(X) = ";A3;" + ";B3;" LN X "
470  PRINT "CORRELATION : ";C3
480  PRINT
500  REM PUISSANCE
510 B4 = (W4 - TX * TY / N) / (VX - TX * TX / N)
520 A4 =  EXP (TY / N - B4 * TX / N)
530 C4 =  SQR (B4 * B4 * (VX / N - TX * TX / N / N) / (VY /
    N - TY * TY / N / N))
550  PRINT "PUISSANCE:"
560  PRINT "F(X)= ";A4;" .X ^ ";B4
570  PRINT "CORRELATION : ";C4
580  PRINT
999  END
```

```
1000 N = N + 1
1010 LX =  LOG (X)
1020 LY =  LOG (Y)
1030 SX = SX + X: REM SOMME DES X
1040 TX = TX + LX: REM SOMME DES LN (X)
1050 UX = UX + X * X: REM SOMME DES X CARRE
1060 VX = VX + LX * LX: REM SOMME DES LN (X) CARRE
1070 SY = SY + Y: REM SOMME DES Y
1080 TY = TY + LY: REM SOMME DES LN (Y)
1090 UY = UY + Y * Y: REM SOMME DES Y CARRE
1100 VY = VY + LY * LY: REM SOMME DES LN (Y) CARRE
1110 W1 = W1 + X * Y: REM  SOMME DES X.Y
1120 W2 = W2 + X * LY: REM  SOMME DES X.LN (Y)
1130 W3 = W3 + LX * Y: REM  SOMME DES LN (X).Y
1140 W4 = W4 + LX * LY: REM  SOMME DES LN (X).LN (Y)
1150  IF SS = 0 THEN  GOTO 10
1160  GOTO 200
```

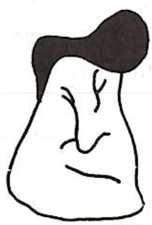
Composition d'un carré au moyen de n carrés égaux

Soit a le côté d'un carré. On veut construire un carré dont l'aire vaut n a^2. La recherche du côté de ce carré est un problème facile à résoudre en utilisant le théorème de Pythagore. Supposons par exemple n = 5 , on a



Le carré AFGH a une aire qui vaut 5 a^2.

Toutefois, le problème se pose autrement si on veut, à partir de n carré matériels, par découpage et réassemblage de ceux-ci, reconstituer un carré.



Ce problème devait se présenter dans les travaux architecturaux des Arabes qui employaient fréquemment des assemblages de carrés de céramiques car ABOUL WAFA (940 - 998) dans son recueil Constructions géométriques déclare à propos de la résolution de ce problème que le but de l'auteur est de remplacer les procédés défectueux des praticiens par une méthode basée sur des principes scientifiques.

Dans sa résolution du problème, Aboul Wafa distingue deux situations :

1) n est un carré ou une somme de deux carrés.

2) n ne répond pas à ce critère.

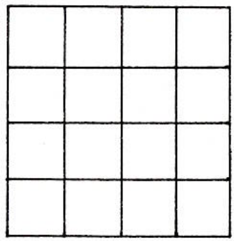
Ainsi, 4; 5 = 4 + 1 ; 8 = 4 + 4 ; 625 ; ... seraient des nombres de la première situation tandis que 3 ; 6 ; 15 ; ... appartiendraient à la seconde.

Voici les méthodes proposées par Aboul Wafa.

1) <u>Premier cas</u> :

le nombre n est un carré parfait : $n = k^2$. La solution du problème est alors immédiate. Si a est la longueur des côtés des n carrés, celle du nouveau carré sera k a et ce nouveau carré se construit facilement sans devoir recourir à aucun découpage.

Exemple : k = 16

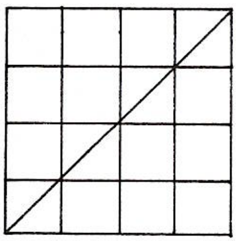


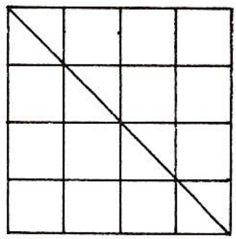
<u>Deuxième cas</u> :

composer un carré avec $2\,k^2$ carrés de côté a.

On construit 2 carrés d'aire $k^2\,a^2$.

(Dans notre dessin nous avons choisi k = 4)





Coupons chacun d'eux suivant une diagonale et assemblons les morceaux suivant le schéma de la page suivante.

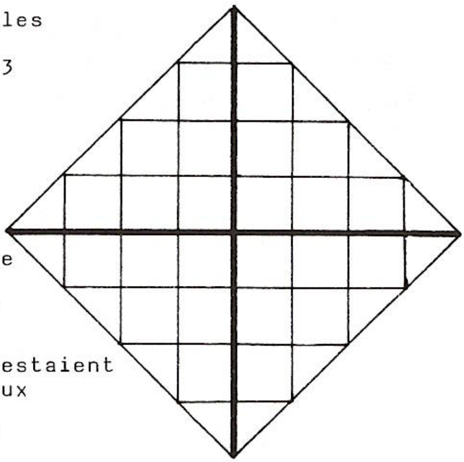
Le carré obtenu est la somme des deux carrés précédents. Son aire vaut $2\,k^2$ et le problème est résolu.

<u>Troisième cas</u> :

composer un carré formé de $k^2 + m^2$ carrés de côtés a.

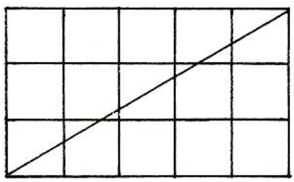
Construisons deux rectangles dont les côtés mesurent k a et m a (dans l'exemple k = 3 et m = 5)

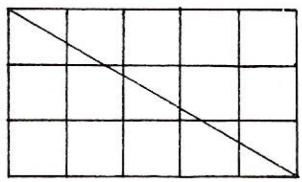
Coupons-les suivant une diagonale et assemblons les morceaux suivant le schéma ci-dessous.

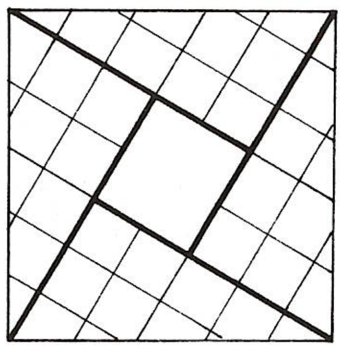


La longueur du côté du carré resté vide au centre centre est (m - k) a. Il nous reste donc au centre juste de quoi insérer les $(m - k)^2$ carrés qui nous restaient après avoir construit les deux rectangles. En effet :

$$k^2 + m^2 = 2\,k\,m + (m - k)^2$$







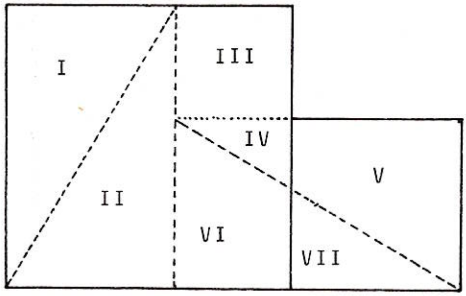
La première situation est donc entièrement traitée.

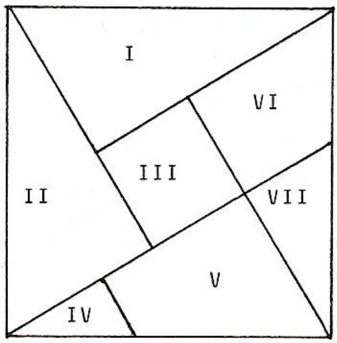
2) n ne se décompose pas en une somme de deux carrés et n'est pas carré parfait.

Nous allons pour résoudre notre problème envisager d'abord une autre situation.

Avec deux carrés d'aires respectives a^2 et b^2, construire par découpage et assemblages un carré d'aire $a^2 + b^2$.

Plaçons les deux carrés côte à côte comme ci-dessous. Reportons DG en AH et découpons suivant les pointillés.





Nous pouvons replacer les pièces I,II,III,IV,V,VI,VII comme indiqué ci-contre et nous obtenons le carré cherché.

Le problème général peut dès lors être résolu facilement.

En effet, tout nombre n est décomposable en une somme de carrés. Ceci est évident puisque, par exemple, on a

$n = 1 + 1 + \ldots + 1$

Mais en fait il ne faudra jamais recourir à une décomposition de plus de quatre termes. Il existe un théorème (le théorème de Lagrange) qui démontre que tout naturel se décompose en une somme de quatre carrés (certains pouvant être nuls).

On aura donc

$$\begin{aligned} n\,a^2 &= (k^2 + m^2 + p^2 + q^2)\,a^2 \\ &= \underbrace{k^2a^2 + m^2a^2} + \underbrace{p^2a^2 + q^2a^2} \\ &= \qquad b^2 \qquad + \qquad c^2 \end{aligned}$$

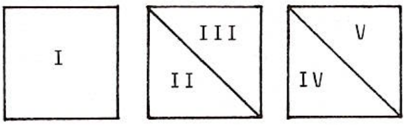
et si q est nul

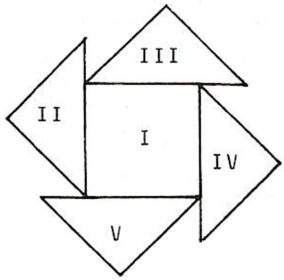
$$\begin{aligned} n\,a^2 &= \underbrace{k^2a^2 + m^2a^2} + p^2a^2 \\ &= \qquad b^2 \qquad + \; c^2 \end{aligned}$$

On est ramené à des constructions de la première situation suivies de la somme de deux carrés.

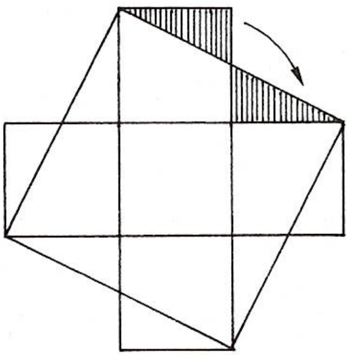
Le problème est théoriquement résolu. Toutefois, la construction et donc les découpages étant assez complexes, Aboul Wafa donne des solutions particulières pour n = 3 et n = 5.

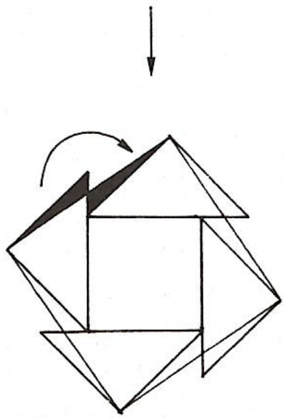
(n=3)





(n=5)





Pouvez-vous justifier les deux constructions ?

Le problème peut être abordé autrement. On peut toujours construire un rectangle qui est un assemblage, sans découpage, de n carrés. Une solution toujours possible est de les aligner tous les n.

Nous ramenons ainsi le problème au suivant :

Construire, par découpages et assemblages, un carré de même aire qu'un rectangle donné.

Ou encore, algébriquement, au problème:

m et n donné, trouver p tel que $p^2 = m\,n$

Qui nous fera des propositions ?

KEXEXETIXLA

L'opinion selon laquelle "*La Mathématique est la branche de la pensée humaine qui se caractérise par l'emploi de la lettre* X" met en évidence un problème lourd de conséquence: l'utilisation et l'abus d'un symbole mathématique pour représenter des concepts différents peut provoquer la non-compréhension de ces concepts.

Dans un article intitulé Pourquoi Johnny hait les maths, l'économiste Karl MENGER (1840-1921) soulignait déjà que le mauvais usage de la lettre X en mathématique était un des motifs pour lesquels beaucoup d'étudiants ne parviennent pas à comprendre correctement cette discipline. Je voudrais relever, à la suite de Menger, ce qu'un étudiant aura à supporter, ici et là, au cours de ses études:

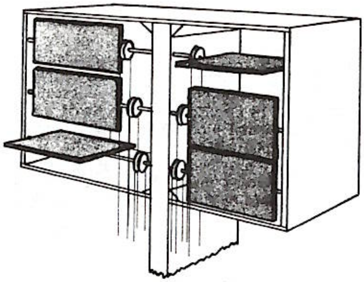
1. Le symbole X indique la multiplication : 2X3 = 6
2. Le symbole X joue un rôle important dans la formulation des règles de trois.
3. X, en chiffres romains, représente 10.
4. Beaucoup d'ensembles sont notés X et leurs éléments x.
5. Dans les équations comme 2X + 3 = 7, X se nomme l'inconnue. Et quand apparaissent les inconnues, on a coutume de supprimer le symbole X multiplicatif et de le remplacer par un point ou simplement par la juxtaposition des éléments: 2.X ou 2X pour 2XX.
6. Dans les polynomes du type X^2+X+2, X se nomme indéterminée.
7. Dans les égalités comme $X^2+X = X(X+1)$, X se nomme variable.
8. En géométrie, on parle de l'axe des X ou abscisse et X représente la première coordonnée.
9. Dans les fonctions comme $Y=X^2$, on dit que X est la variable indépendante. Et si le carré de l'égalité Y=X est, algébriquement, $Y^2=X^2$, du point de vue des fonctions, il est $Y=X^2$.
10. Les fonctions qui, verbalement, ont des noms particuliers comme sinus, logarithme, etc..., sont notées sinX, logX, etc...
11. Dans les primitives $\int X^2 dX$, X est une variable muette.
12. Dans les représentations de courbe, X est parfois un paramètre.
13. Ajoutons au niveau de la vie extra-scolaire l'emploi du X comme symbole d'interdiction (de fumer,...), d'obligation (priorité de droite), de bon choix (enquêtes, formulaires) ou de mauvais choix (erreur à supprimer, lettre à éliminer)

Si après ce festival des sens du X, les étudiants se demandent "kèxèxètixlà", on ne peut leur donner tort. Ce ne serait pas trop grave, si ces sens multiples correspondaient à des notions marginales, mais précisément cette multiplication de sens touche quelques-uns de nos concepts fondamentaux: variable, fonction, coordonnée,...

Ex: l'Escaire, octobre 81, Université Technique de Barcelone. traduit du Catalan par F. Carlier et A. Dardenne.

INFORMATIONS - TRANSMISSIONS CODES (2)

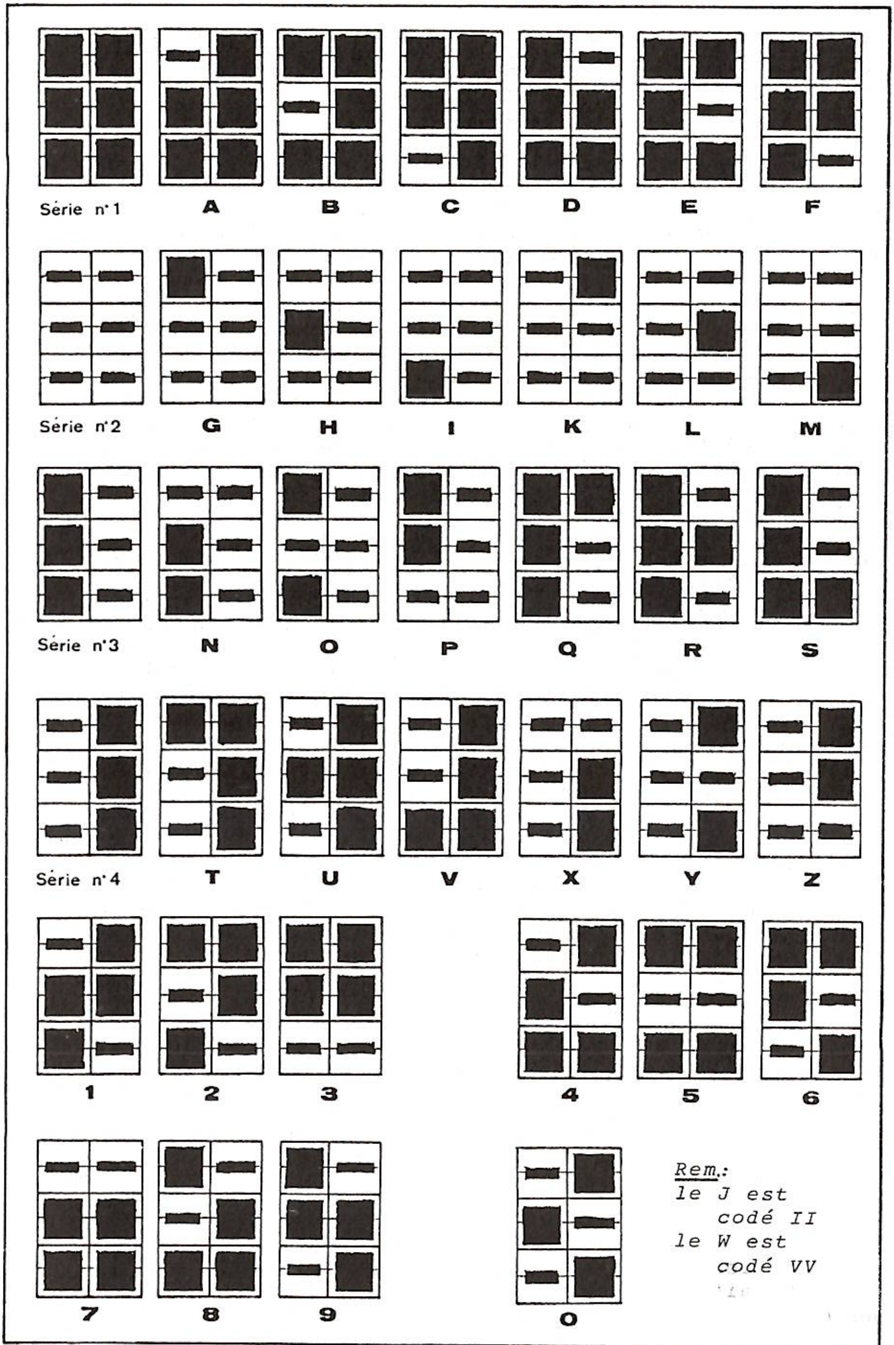
A la même époque que Chappe, vers 1795, un évêque anglais, George MURRAY, met au point un autre système de télégraphie optique. Il est constitué d'une sorte de caissons à six volets groupés par deux ; ces volets, pivotant de 90°, permettent des combinaisons ouvert-fermé (en somme du binaire dans une matrice 3x2 !). L'alphabet est divisé en 4 séries de six lettres : chaque série est basée sur une position de départ non-significative, à partir de laquelle on ouvre ou on ferme un ou plusieurs volets pour composer le code de la lettre voulue. Hasard à nouveau, l'ensemble des combinaisons possibles est de 64 ... Le système Murray sera utilisé essentiellement par l'Amirauté anglaise, et un peu aux Etats-Unis, jusqu'en 1850 environ.



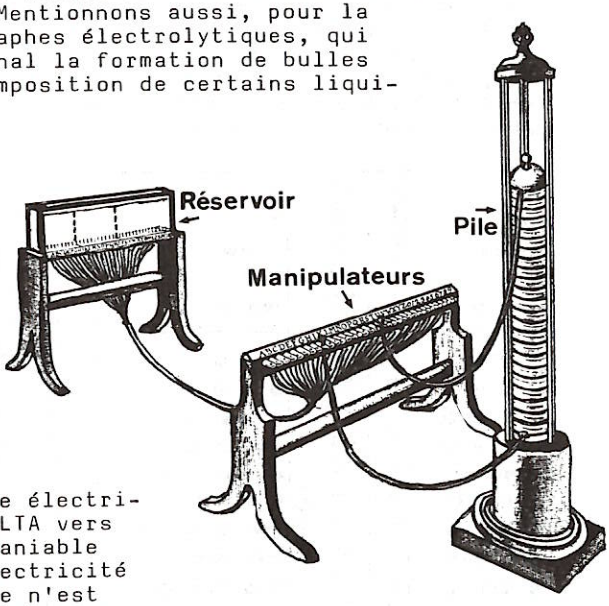
Les inconvénients des systèmes Chappe et Murray sont nombreux. Ils sont inutilisables par temps couvert ; ils nécessitent de nombreux postes-relais, un par 5 à 10 km, souvent à construire, donc coûteux ; ils nécessitent également un personnel nombreux, enfin, leur esthétique est discutable... De plus, un seul message à la fois parcourt la ligne : on a vu dans l'article précédent qu'il fallait une heure pour transmettre un message de 50 signaux de Toulon à Paris. La vitesse de transmission est également ralentie par l'oubli d'un élément essentiel dans la constitution des codes : la fréquence relative des lettres utilisées dans les messages. Les codes Chappe et Murray sont alphabétiques et "rationnels": E est codé par un même type de symboles que Z; on perd donc beaucoup de temps à transmettre par des signaux compliqués des lettres très fréquentes. Aussi en viendra-t-on rapidement à des codes plus synthétiques, où un seul signal transmet un ou même plusieurs mots.

La relative rapidité des systèmes de télégraphie optique constituait pourtant un progrès essentiel sur les procédés de transmission précédents ; l'expansion internationale qu'ils connurent et les conséquences commerciales, politiques et militaires qui en résultèrent marquent le début de l'ère de la communication qui est la nôtre.

C'est l'électricité qui permettra au télégraphe un prodigieux bond en avant. Connue sous plusieurs formes depuis l'Antiquité, elle servait essentiellement, jusqu'à la fin du XVIII° siècle, à des distractions de salon basées sur les phénomènes électrostatiques.


Série n°1
A
B
C
D
E
F
Série n°2
G
H
I
K
L
M
Série n°3
N
O
P
Q
R
S
Série n°4
T
U
V
X
Y
Z
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
Rem.:
le J est codé II
le W est codé VV

Divers systèmes de transmission de messages sont connus; ils reposent sur le principe d'attraction par l'électricité statique de bouts de papier portant des lettres. Sans utilité pratique, ces systèmes comprennent toutefois les éléments essentiels de la télégraphie électrique: une source d'électricité, les fils conducteurs, un mécanisme d'émission traitant l'information, un mécanisme de réception en permettant la lecture. Aucun code n'existe encore, et la caractéristique commune à tous ces systèmes est une incroyable complication: 26 fils conducteurs (un par lettre de l'alphabet...); une source d'énergie peu sûre et peu régulière (l'électricité statique obtenue par friction); une extrême lenteur de transmission et surtout la quasi-impossibilité de transmissions à longue distance (vu le nombre de fils nécessaires et leur qualité à l'époque). Mentionnons aussi, pour la curiosité, les télégraphes électrolytiques, qui utilisaient comme signal la formation de bulles d'air lors de la décomposition de certains liquides par électrolyse : ici aussi autant de fils que de lettres de l'alphabet; et vous imaginez la patience du lecteur, qui devait attendre la formation de bulles dans le récipient.

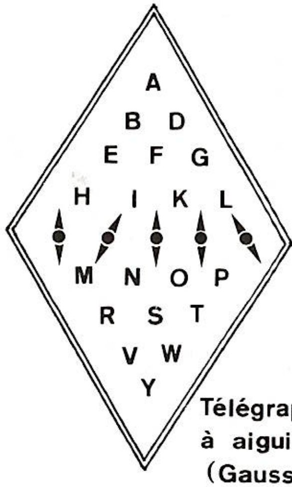


Mais ce procédé, si loufoque qu'il nous paraisse, avait été rendu possible par un nouveau type d'énergie électrique, découvert par VOLTA vers 1770, beaucoup plus maniable et constante que l'électricité statique : la pile. Ce n'est pourtant qu'après l'expérience d'OëRSTED, un savant danois, en 1819, constatant la déviation d'une aiguille aimantée à proximité d'un courant électrique que le télégraphe va réellement progresser.

On voit apparaître alors divers modèles de <u>télégraphes à aiguilles</u> , comme celui de Carl Friedrich GAUSS et Wilhelm WEBER (1833), à une aiguille, d'autres à deux, trois, ou six aiguilles, dont les mouvements combinés indiquent la lettre à lire, par exemple celui représenté page suivante où les aiguilles indiquent la lettre D. Pour la plupart, ces télégraphes, nécessitant au moins deux fils, sont

adoptés dans les années 1840 par les compagnies de chemins de fer qui disposent du personnel voulu pour installer les lignes indispensables. En 1852, l'Angleterre comportait 6500 km de lignes télégraphiques.

Au même moment, un professeur d'histoire de l'art et de dessin à la New University de New York, Samuel Finley Breeze MORSE (1791-1872), et son associé Alfred VAIL, mettaient au point un nouveau système, original en beaucoup de points. Le courant passe dans un électro-aimant qui fait appuyer une plume sur un papier défilant au-dessous, y laissant une trace. Apparaît ainsi l'enregistrement

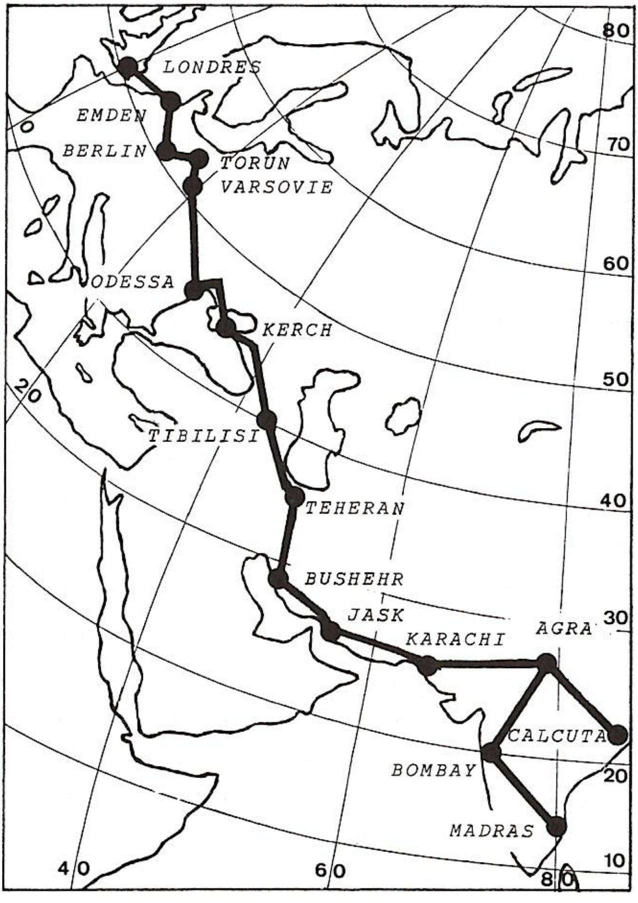


Télégraphe à aiguilles (Gauss,...)

Morse orig.		fréquen. (x 100)	Internation.
•	e	120	•
—	t	90	—
• —	a	80	• —
• •	i	80	• •
— •	n	80	— •
• •	o	80	— — —
• • •	s	80	• • •
• • • •	h	64	• • • •
• • •	r	62	• — •
— • •	d	44	— • •
———	l	40	• — • •
• • —	u	34	• • —
• • •	c	30	— • — •
— —	m	30	— —
• — •	f	25	• • — •
• — —	w	20	• — —
• • • •	y	20	— • — —
— — •	g	17	— — •
• • • • •	p	17	• — — •
— • • •	b	16	— • • •
• • • —	v	12	• • • —
— • —	k	8	— • —
• • — •	q	5	— — • —
• • • •	j	4	• — — —
• — • •	x	4	— • • —
• • • •	z	2	— — • •

mécanique du message. Les lettres sont codées par un système de traits et de points, basé sur la fréquence relative des lettres (obtenue par comptage d'un texte de 105.800 caractères (Sic!) permettant ainsi une transmission plus rapide. Les lettres se distinguant par les symboles qui les représentent, on n'a plus besoin de plusieurs fils conducteurs : un seul suffit. La première ligne construite entre Baltimore et Washington (60 km) coûta 30 000 dollars, et le premier message fut envoyé le 24 mai 1844; l'appareil de Morse était au point depuis 7 ans. Divers codes Morse furent utilisés, les alphabets de certaines langues demandant quelques adaptations. La vitesse normale de transmission était de 20 à 25 mots/minute; des virtuoses allaient jusqu'à cinquante-cinq. On assiste alors aux

Etats-Unis à la création de compagnies de télégraphe telles la Western Union Telegraphic Company, qui possédera en 1866, 2250 bureaux et 120.000 km de lignes. Après 1860, le télégraphe électrique est installé presque partout en Europe et aux Etats-Unis. En 1870, la ligne Londres - Madras (Sud de l'Inde) est inaugurée :



elle a été achevée en 3 ans par l'Allemand SIEMENS. Le télégraphe est essentiellement utilisé par quatre catégorie de personnes : les gouvernements, les compagnies de chemin de fer, les hommes d'affaires et la presse (des agences aussi célèbres que REUTER et ASSOCIATED PRESS naissent à cette époque. Il s'ouvrira plus lentement au grand public.

L'étape suivante voit apparaître l'impression mécanique en clair des messages télégraphiques. David E. HUGUES était comme Morse, professeur à la New University de New York, mais de musique. Il fit breveter en 1855 un appareil qui ne sera pas exploité aux E.-U., et à qui un Français, FROMENT, apportera beaucoup d'améliorations pratiques, au point qu'il sera utilisé sans modifications jusqu'en 1932. L'émission se fait par un clavier à piano et la réception par deux marguerites, une pour les lettres, une pour les chiffres et autres signes, animés d'un mouvement permanent de rotation. Les impulsions du clavier arrêtent le mouvement des marguerites, et activent un électro-aimant

qui actionne à son tour un bras d'impression. Les caractères sont imprimés sur une bande de papier par un ruban de soie. En gros, c'est le principe des modernes imprimantes à marguerites...

Enfin, Jean-Maurice-Emile BAUDOT, ingénieur des télégraphes français, proposa en 1874 deux améliorations essentielles. La première consistait à remplacer le code alphabétique du procédé Hugues, qui posait de gros problèmes de synchronisation, par un code binaire dont les signaux sont faits de cinq moments successifs. Chaque caractère correspond donc à une combinaison différentes de 5 impulsions électriques d'égale durée, qui actionnent, à la réception, un jeu de cinq électro-aimants. Ces combinaisons sont déchiffrées par une imprimante. C'est la réapparition d'un système de code; mais le déchiffrage de ce code étant fait électriquement, la vitesse obtenue est supérieure. Adopté dès 1877 par les Télégraphes français, il sera employé sur la plupart des lignes internationales de 1890 à 1930, et restera en exploitation en France jusqu'en 1954. Diverses améliorations, dont un clavier codificateur

○○○○○	BLANC	○●○○○	SAUT DE LIGNE	●○○○○	E 3	●●○○○	A —
○○○○●	T 5	○●○○●	L)	●○○○●	Z "	●●○○●	W 2
○○○●○	RETOUR CHARIOT	○●○●○	R 4	●○○●○	D $	●●○●○	J APPEL
○○○●●	O 9	○●○●●	G &	●○○●●	B ?	●●○●●	SYMBOLE
○○●○○	ESPACE	○●●○○	I 8	●○●○○	S '	●●●○○	U 7
○○●○●	H VIDE	○●●○●	P 0	●○●○●	Y 6	●●●○●	Q 1
○○●●○	N ,	○●●●○	C :	●○●●○	F !	●●●●○	K (
○○●●●	M .	○●●●●	V ;	●○●●●	X /	●●●●●	LETTRE

Alphabet de BAUDOT

type machine à écrire (où chaque touche correspondant à un caractère envoie à elle seule les cinq impulsions) permettent une transmission de 60 mots/minute, soit un mot de 6 lettres à la seconde. La limite ici n'est plus technique, mais humaine: c'est l'opérateur qui ne peut sans risque d'erreur aller plus vite. Enfin, la deuxième amélioration de Baudot permit d'envoyer sur la même ligne plusieurs messages indépendants en répartissant entre plusieurs opérateurs les délais entre les frappes.

Actuellement, le code Baudot a été remplacé par l'ASCII (American Standard Code for Information Interchange), code à huit positions qui permet l'envoi de signaux utilisés pour controler si le message a bien été transmis: les 7 premières positions binaires codent le message, la huitième position est choisie pour que le nombre total d'impulsions positives dans le message soit pair.

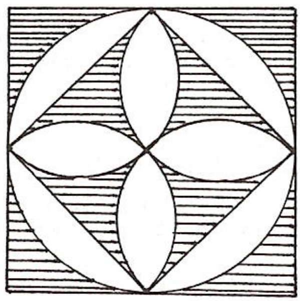
Pour la petite histoire, signalons que Thomas EDISON, célèbre par ailleurs, mit au point en 1874 un double duplex pour les lignes de type Morse, qui permettait à huit opérateurs d'envoyer simultanément 4 messages, deux dans chaque sens. Ce système fonctionna près de 35 ans.

En 1890, l'Administration belge des Télégraphes achemina 8,1 millions de télégrammes, dont 2,8 sans taxe, enregistrant ainsi un déficit (déjà...) de 1,1 million de francs...

Le coin des problèmes

128 Lunules. *

On inscrit un cercle dans un carré et on joint les points de contact de façon à former un second carré. En prenant chacun des côtés de celui-ci comme diamètre, on décrit quatre demi-cercles se coupant au centre des deux carrés. Prouver que les huits régions hachurées ont toutes la même aire, qu'il en est de même pour les huit régions non hachurées. La somme des aires des régions hachurées est-elle supérieure, égale ou inférieure à la somme des aires des régions non hachurées ?



129 Le tiers de l'hexagone.

Etant donné un hexagone régulier H et un sommet a de H, construire deux demi-droites d'origine a partageant l'intérieur de H en trois régions d'aires égales. (On précisera les positions des points d'intersection de ces demi-droites avec le bord de H.)

130 Les trois cercles. *

Etant donné un cercle, on demande de construire trois cercles de même rayon, tangents deux-à-deux et tangents intérieurement au cercle donné.

131 Le pirate. *

Un pirate débarque sur une île déserte avec l'intention d'y cacher un trésor. Il remarque immédiatement, sur la plage, deux gros rochers a et b et, un peu plus loin à l'intérieur de l'île, trois grands cocotiers isolés C_1, C_2 et C_3.

En partant du pied du cocotier C_1, le pirate trace un segment $[C_1a_1]$ perpendiculaire au segment $[C_1a]$ et de même longueur que celui-ci, en prenant soin de choisir le point a_1 dans le demi-plan d'axe C_1a ne contenant pas b. Il trace ensuite un segment $[C_1b_1]$ perpendiculairement au segment $[C_1b]$ et de même longueur que celui-ci, en choisissant le point b_1 dans le demi-plan d'axe C_1b ne contenant pas a. Il détermine alors le point P_1 intersection des droites ab_1 et a_1b.

En recommençant la même construction à partir des cocotiers C_2 et C_3, il détermine de manière analogue deux points P_2 et P_3.

Ce travail terminé, il enfouit son trésor au centre du cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

De retour sur l'île quelques années plus tard, le pirate constate avec stupeur qu'une tornade a fait disparaitre complètement les trois cocotiers, ne laissant en place que les deux gros rochers sur la plage. Après quelques instants de réflexion, il réussit toutefois à retrouver sans difficulté l'endroit où il avait enfoui le trésor. Comment s'y est-il pris ?

132 1985 (bis)

Est-il possible de choisir les signes + ou - devant chacun des termes du membre de gauche de façon à avoir l'égalité

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm 98 \pm 99 \pm 100 = 1985 \quad ?$$

133 Deux rébus.

Dans ces rébus, les opérations mathématiques sont chiffrées : les chiffres y sont remplacés par des lettres ou par des étoiles. Chaque lettre désigne un chiffre déterminé; le même chiffre ne pouvant cependant pas être représenté par deux lettres différentes, tandis que les étoiles tiennent lieu de n'importe lequel des chiffres.

```
         M A T H
       x M A T H
       ---------
       * * * * *
     * * * * *
   * * * * *
 * * * * *
 ---------------
 * * * * M A T H
```

$$\begin{cases} DO + RE = MI \\ FA + SI = LA \\ RE + SI + LA = SOL \end{cases}$$

Les Aventures de
Ric INPUT
QUEL ENNUI PENDANT CES COURS DE MATH‼ FAUDRA QUE JE TROUVE QUELQUE CHOSE POUR BRISER CETTE MONOTONIE !
et le lendemain ...
?
!
JE PRENDS LES BLANCS, OK? ...
VOILA ! À TOI DE JOUER !
...
JE PRENDS TA TOUR !
MAIS MOI JE ROQUE !
ET JE PRENDS TON FOU !
ECHEC DOUBLE !
HOU !
ECHEC À LA DAME
PETIT ROQUE
OK ! JE VAIS EN A.5.
ET JE PRENDS TON PION
C'EST ÇA, OUI ! ET UN ECHEC EN MATH POUR LES 2 ZIGUES DU DERNIER BANC ‼
D. SERON '85-6

SOMMAIRE

L'angle de 60°	25
La régression linéaire (2)	27
Fonctions affines	27
Fonctions exponentielles	28
Fonctions logarithmiques	30
Fonctions puissances	31
Composition d'un carré au moyen de n carrés égaux	35
Kexexetixla	40
Informations-transmissions-codes	41
Code Murray	42
Code Morse	44
Code Baudot	46
Le coin des problèmes	47
Les aventures de Ric Input	3 de couv.

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. A.S.B.L.

Comité de rédaction :
F. Carlier, Gh. Marin, N. Miéwis, J. Vanhamme

Graphisme :
D. Seron

Edition :
J. Miéwis, Avenue de Péville, 150,
4030 - Liège-Grivegnée.

Abonnement :

Belgique: groupés(5 au moins) 60 FB par abonnement
isolé 100 FB
Etranger: par paquet de 5 600 FB le paquet
isolé 200 FB

Poster historique: Belg. 30FB (120FB par 5 unités)
Etr. 60FB (240FB par 5 unités)

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur. Nous conseillons aux étrangers de payer par mandat postal international. En cas d'intervention bancaire, majorer la somme due de 100FB pour frais d'encaissement.

Compte n° 000-0728014-29 , SBPM,
Chemin des fontaines, 14bis, 7460 CASTEAU.