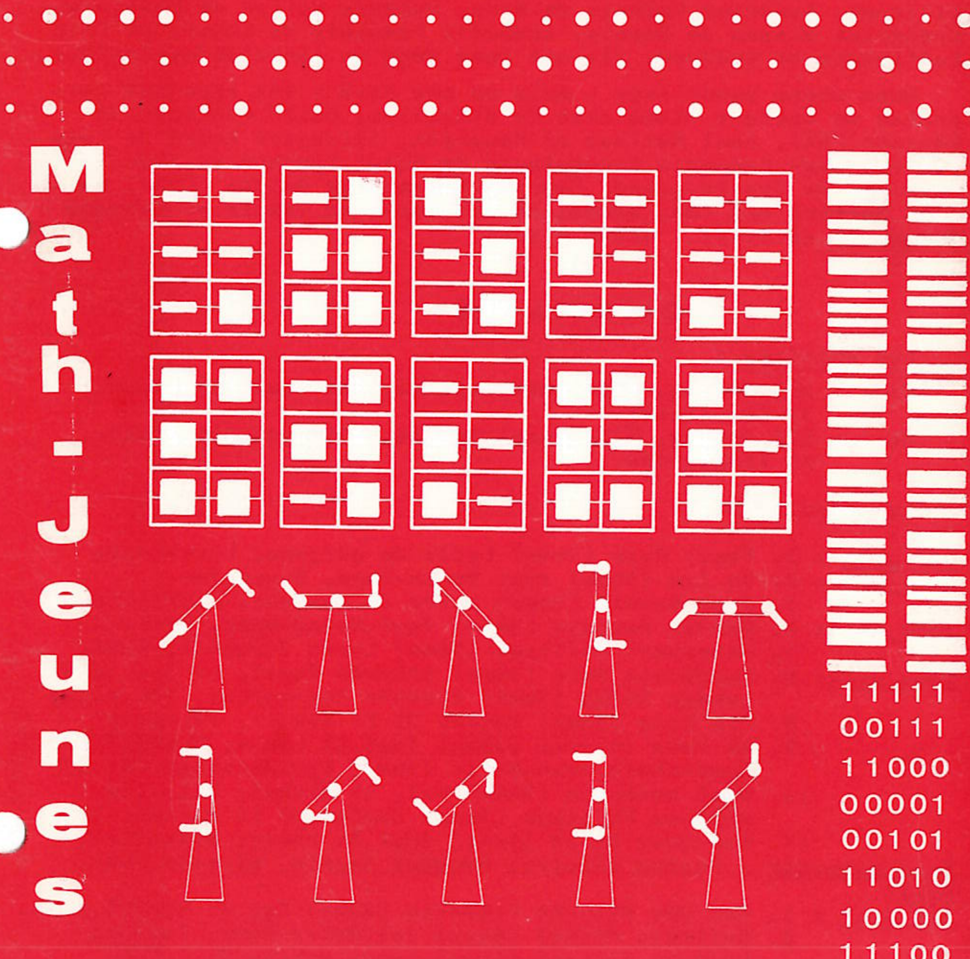
Math-Jeunes



Publication trimestrielle de la
Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française. (ASBL)

8ème année Numéro 32 Eté 1986

CONCOURS

Les sept premiers lauréats à nous avoir communiqué le nom de Marcel Pagnol sont : Ann Sange de Havré, Isabelle Dupont de Villerot, Sandrine Mulkers de Mons, Valérie Goffin de Frameries, Frédérick Gielen de Esneux, Isabelle Francois de Eugies et Eric Laffineuse de Godinne. Ils ont tous reçu un livre de cet auteur.

Nous avons aussi reçu - mais un peu tard - les réponses correctes de Georges Stamatakis de Bruxelles, David Fontaine de Rösrath(FBA), Paul Malisse de Mouscron, Silvestre André de Ferrières, Jean-François Bourguignon de Saint Symphonien, Luc Morciaux de Orp-le-grand, Fabrice Massaux de Weiden (FBA), Laurent Dormont des FBA, Bénédicte Froidmont de Tubize et Georges Podgorski de Tilff. Bravo à tous.

OLYMPIADES

Les chiffres :

Mini : 201 écoles, 6229 participants, 981 demi-finalistes, 51 finalistes.
Maxi : 226 écoles, 5146 participants, 871 demi-finalistes, 51 finalistes.

Les résultats :

Mini:

1er prix : 1. Pauly Marc (3ème) Lycée de garçons, Luxembourg
2ème prix: 2. Vu Tru (3ème) Inst Notre-Dame, Bruxelles
3. Pier Benoît (3ème) Lycée de garçons, Esch/Alzette
3ème prix: 4. Bandin Pascale (3ème) Inst.Notre-Dame, Bertrix
5. Hennebert Philippe (3ème) Lycée Jacqmain, Brux.
4ème prix: 6. Lardinois Marc (3ème) Athénée Royal, La louvière
Lehman Serge (3ème) Athénée Max-Carter, Bruxelles
8. Fis Eric (3ème) Centre St Fr Xavier, Verviers
9. De Pauw Thierry (3ème) Inst.St Louis, Bruxelles
Sparenberg Jean-Marie (3ème) Lyc.Jacqmain, Brux.
11. Hoet Nathalie (3ème) Col. St Michel, Gosselies
Nullens Philippe (3ème) Centre St Fr Xavier, Ver.
13. Boucquey David (3ème) Inst.St Louis, Bruxelles.

Prix spéciaux : Paulus Olivier, Bocquet Sophie, Wickens Emma.

Maxi:

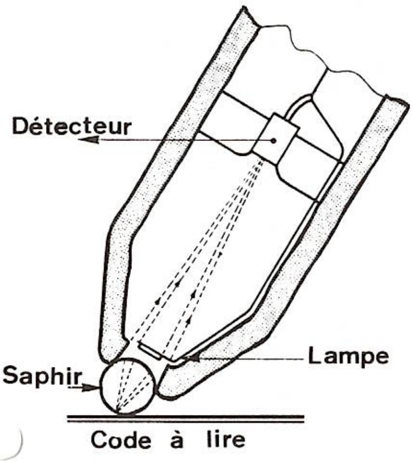
1er prix : 1. Van der Plancke Frédéric (6ème) Col.St Michel,Brux.
2. Bultreys Michel (6ème) Col.Notre-Dame, Tournai
Lombart Vincent (5ème),Lycée Martin V, L-L-N.
4. Bartholome Emmanuel (6ème) Athénée Royal, Athus
5. Gailly Benoît (6ème), Collège Don Bosco, Brux.
2ème prix: 6. Eekman Jérôme (6ème) Athénée Royal, Nivelles
Pauly Christian (4ème) Lycée de garçons, Luxemb.
8. Hemmer Jean-Claude (4ème) Lycée Schuman, Luxemb.
9. Billot Pierre (6ème) Col.St Marie, St Ghislain
Dieschbourg Claude (5ème) Athénée de Luxembourg
11. Daxhelet Olivier (6ème) Col.St Marie, Mouscron
Schiltz André (6ème) Athénée de Luxembourg.

suite page 3 de couverture.

Les Codes à barres

S'il est un domaine où l'informatique a su se rendre indispensable, c'est bien dans la mécanisation apportée à la facturation et à la gestion des réserves, innovation principalement adoptée par les chaînes de grands magasins. En effet, on a imaginé une saisie rapide et efficace, non seulement de la valeur marchande du produit (pour établir la souche), mais surtout d'une référence permettant de retrouver le produit vendu (pour gérer la réserve).

Mais si des entreprises différentes ont recours à des méthodes de codification différentes pour identifier les mêmes articles, il ne pourra en résulter que confusion et ambiguité. Aussi, en ce domaine, une vision mondiale du problème s'est-elle imposée au monde économique dès que la technologie eut résolu le problème de la mise en forme de la communication entre la machine et la donnée à traiter.



Techniquement, le principe consiste en une lecture optique par rayon laser d'une série de barres et d'espaces de tailles variables contenant l'information. Le signal détecté est amplifié, numérisé (= rendu rectangulaire), décodé, testé et transmis à l'ordinateur.

Pour l'établissement d'une souche de caisse, le système est sous le tapis roulant près de la caissière et le passage du code du produit près d'une lucarne prévue à cet effet permet la saisie. Cette dernière peut aussi s'effectuer grâce à des crayons lecteurs branchés sur de petits terminaux portatifs. On réserve plutôt ce système à la saisie des

0 71928 00007 6

UPC

2001 6456

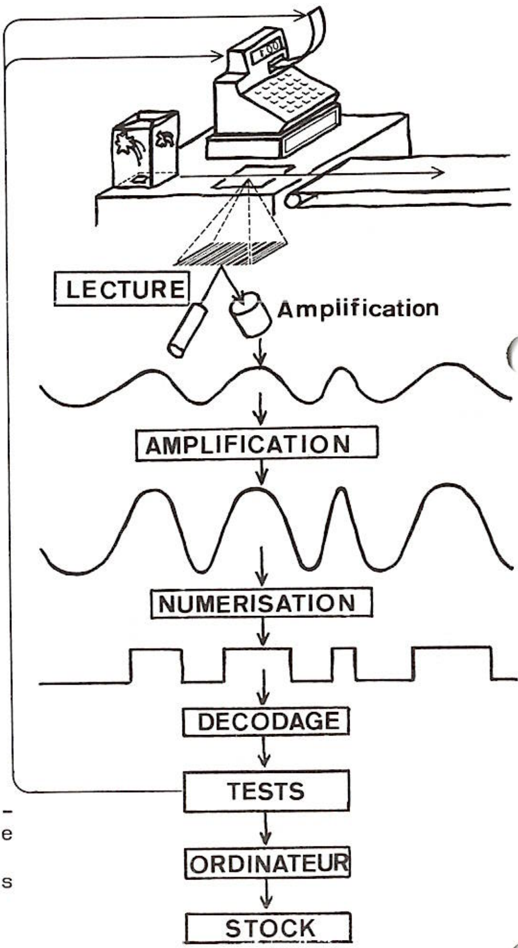
EAN8

5 410326 501023

EAN13

données dans le magasin même (état du stock en rayon, nombre de pièces à commander...)

Comme souvent lors d'une évolution technologique, on a vu apparaître des dizaines de manières de coder, c'est-à-dire de transformer une information (lettre et/ou chiffre) en une succession de barres et d'espaces. Petit à petit, trois systèmes se dégagent au niveau mondial: UPC-EAN, 2/5 entrelacés et Code39 sont leurs jolis (?) noms ...



• UPC-EAN

Le code UPC (Universal Product Code) nous vient des Etats-Unis : il permet de coder 12 chiffres: 5 attribués univoquement à un fabricant; 5 laissés à l'appréciation de ce fabricant, un onzième chiffre indique le type de produit et un douzième sert de caractère de contrôle de la bonne lecture des barres à code.

En 1977, EAN (devenue Association Internationale de Numérotation des Articles en 1981) fut fondée en Europe. Cette société, qui a son siège à Bruxelles, a en quelque sorte généralisé le système UPC de façon à ce qu'il soit applicable au monde entier. Depuis UPC apparaît comme un cas particulier du système EAN. Aussi allons nous envisager en détail ce système européen , devenu par son succès et sa généralisation un système international.

Le système permet une identification non-ambigüë des produits, quels que soient leur origine et leur lieu de destination final, et facilite ainsi la libre-circulation des marchandises. Le symbole est imprimé sur l'emballage d'origine en cours de fabrication, mais il existe un système permettant la symbolisation en magasin, pour les produits à poids variable vendus au détail.

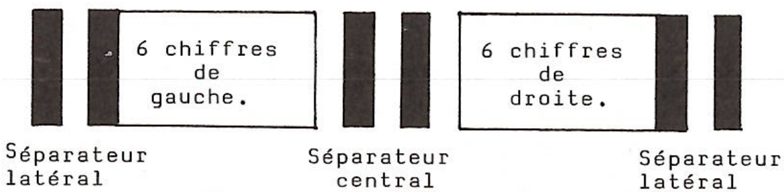
Le code complet se compose de 13 chiffres (EAN13), mais il existe une version courte à 8 positions EAN8) utilisée lorsque l'espace disponible est trop petit pour contenir le symbole complet EAN13. On l'utilise aussi souvent pour les articles particuliers à un magasin qui ne participent pas à un échange commercial habituel (produits blancs et autres adjectifs...)

Dans les codes à 13 chiffres, les 2 (p_{13} et p_{12}) ou 3 (p_{13} à p_{11}) positions à gauche forment le préfixe EAN désignant l'organisation de codification dont émane le numéro. Ainsi un code débutant par 54 indique que le produit a reçu un numéro du bureau belge de EAN et nullement que le produit est fabriqué ou vendu en Belgique. Un chocolat suisse fabriqué à Hong-Kong peut très bien être répertorié 54 : la seule chose sûre est que ce code est mondialement unique! De même, faire jouer un rôle d'espion au code pour détecter des produits en provenance d'un pays que vous désireriez boycotter serait tout à fait inefficace...

Les 10 (p_{11} à p_2) ou 9 (p_{10} à p_2) positions suivantes constituent la zone d'identification de l'article. Chaque organisation nationale affiliée au système EAN décide de l'utilisation de cette zone. Le numéro unique qu'elle a attribué à chacun de ses fabricants est habituellement représenté par les 4 (p_{10} à p_7) ou 5 (p_{11} à p_7) premières positions de cette zone.

Les positions restantes (p_6 à p_2) sont gérées par le fabricant et identifient le produit. La treizième position (p_1) est un chiffre de contrôle.

Examinons à présent comment coder ces 13 chiffres. Le symbole complet se compose de 95 modules, c'est-à-dire de 95 zones de même épaisseur, zones dites "barres" si elles sont sombres (généralement en noir) et dites "espaces" si elles sont claires (généralement blanc ou la couleur de fond de l'emballage si cette dernière couleur permet un contraste suffisant entre les zones sombres et les zones claires).On peut trouver 2, 3 ou 4 modules de même type qui se suivent. Aux extrémités du code se trouve deux fois le même séparateur composé d'un module espace compris entre deux modules barre. Seuls les 12 chiffres de droite (p_{12} à p_1) sont codés, chaque fois par une suite de 7 modules, en deux séries de 6 chiffres séparées par un séparateur central composé d'un module espace encadrant de chaque côté les 3 modules des séparateurs latéraux, donc composé de 5 modules.



indicatif 2 ou 3 p.	référence fabricant 5 ou 4 positions	référence produit 5 positions	cont 1p.

p_{13}	p_{12}	p_{11}	p_{10}	p_{9}	p_{8}	p_{7}	p_{6}	p_{5}	p_{4}	p_{3}	p_{2}	p_{1}

si p_{13} = alors p_{12} à p_7 sont codés par les jeux :

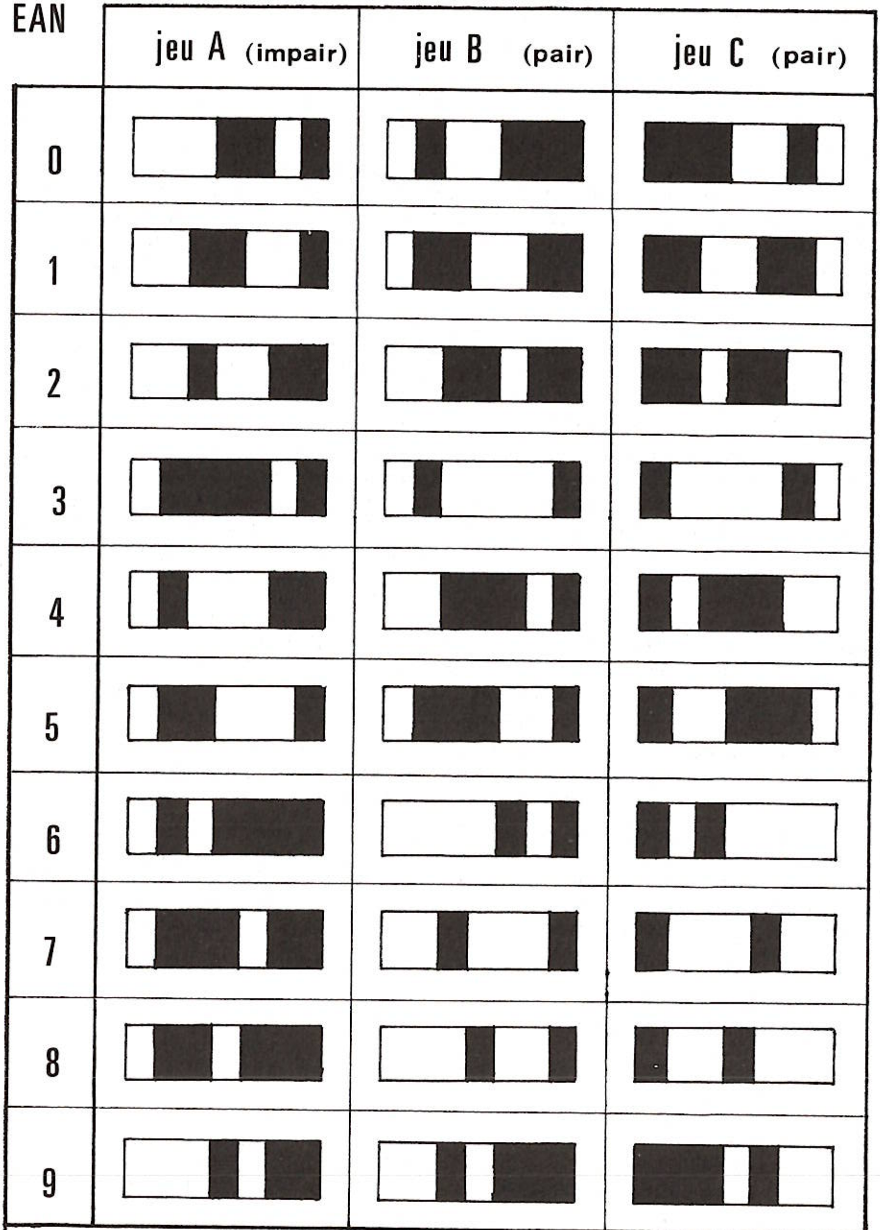
0	A	A	A	A	A	A
1	A	A	B	A	B	B
2	A	A	B	B	A	B
3	A	A	B	B	B	A
4	A	B	A	A	B	B
5	A	B	B	A	A	B
6	A	B	B	B	A	A
7	A	B	A	B	A	B
8	A	B	A	B	B	A
9	A	B	B	A	B	A

Les caractères p_6 à p_1 sont symbolisés par le jeu C.

Séparateur latéral	Caractères p_{12} à p_7 (gauche)	Séparateur central	Caractères p_6 à p_1 (droite)	Séparateur latéral
3 modules	$6 \times 7 = 42$ mod.	5 modules	$6 \times 7 = 42$ mod.	3 modules
95 modules				

Soit $s = 3 \times (p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12}) + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 + p_{11} + p_{13}$;
le caractère de contrôle p_1 est le plus petit nombre qui, ajouté à s, donne un résultat multiple de 10.

STRUCTURE LOGIQUE DU SYMBOLE EAN-13



SYMBOLISATION des CARACTERES NUMERIQUES

On trouve bien un total de 95 modules :

$$3 + 6 \times 7 + 5 + 6 \times 7 + 3$$

Trois jeux de symbolisation des chiffres existent : les jeux A, B et C. Les positions p_6 à p_1 sont codées par le jeu C. Les positions p_{12} à p_7 sont codées avec le jeu A si $p_{13} = 0$ (c'est le cas du code UPC qui est en fait un code EAN13 avec $p_{13} = 0$), elles sont codées 3 fois avec le jeu A et trois fois avec le jeu B dans les autres cas. C'est le choix des 3 chiffres codés avec le jeu B qui induit la connaissance de p_{13} parmi la codification des 12 autres chiffres, qui seuls sont traduits en barres et espaces.

Le préfixe belge étant 54, p_{13} vaut 5 et le tableau de la structure logique de EAN13 montre que les positions p_{11},p_{10} et p_7 seront codées avec le jeu B tandis que les positions p_{12},p_9 et p_8 seront codées avec le jeu A. (Voir le modèle entièrement décodé page suivante).

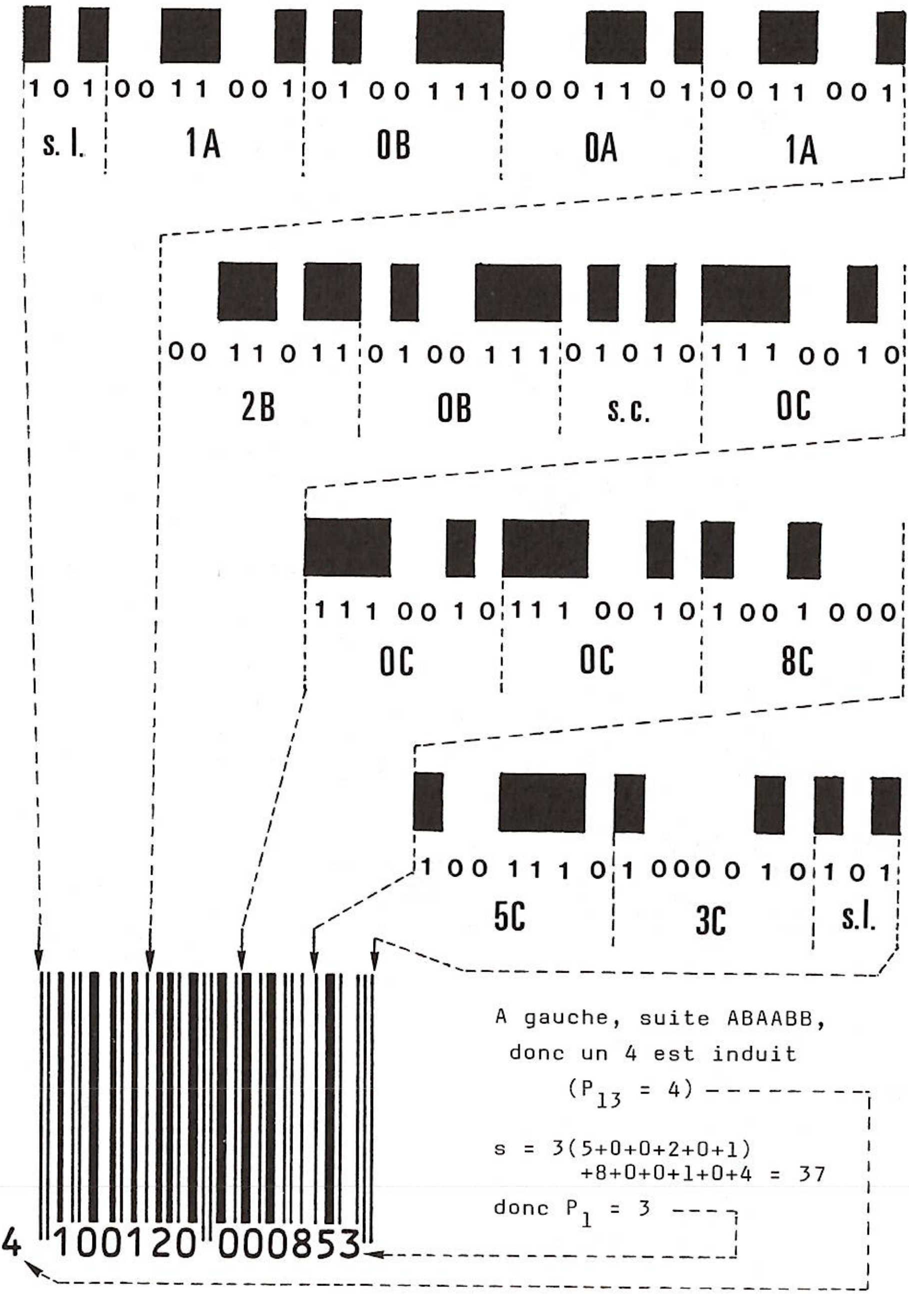
On remarque que le jeu C est le complémentaire logique du jeu A, que le jeu B est le symétrique orthogonal du jeu C, que les jeux A et B commencent toujours par un module espace et se terminent par un module barre, que le jeu C commence toujours par un module barre et se termine par un module espace, que le jeu A contient 3 ou 5 modules barres (on dit que le jeu est impair) et que les jeux B et C contiennent 2 ou 4 modules barres (on dit que ces jeux sont pairs). La présence dans la partie gauche du code d'au moins 3 chiffres codés en jeu impair et l'absence dans la partie droite du code de chiffres codés en jeu impair permet au décodeur de se rendre compte du sens dans lequel lui a été présenté le code à barres à lire.

Quant au caractère de contrôle (p_1), il permet de vérifier que la lecture du code à barres ne fut pas trop mauvaise. (Voir l'encadré pour son mode de calcul).

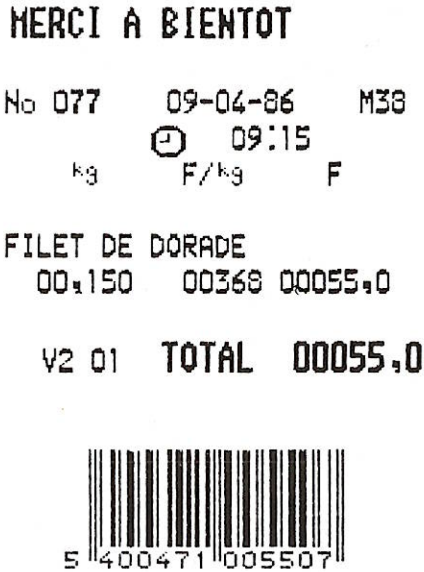
Le symbole EAN8 est plus simple à comprendre que EAN 13 du fait que les 8 chiffres sont réellement codés en employant le jeu A à gauche pour les positions 5 à 8 et le jeu C à droite pour les positions 1 à 4. Avec les trois séparateurs, on obtient un total de 67 modules (3 + 4x7 + 5 + 4x7 + 3).

Voici les principaux préfixes qui existent à ce jour :

0	:USA/CANADA
20 à 29	:numéro interne
30 à 37	:FRANCE
40 à 43	:ALLEMAGNE
49	:JAPON
50	:ROYAUME-UNIS/IRLANDE
520	:GRECE
529	:CHYPRE
54	:BELGIQUE/LUXEMBOURG
569	:ISLANDE
57	:DANEMARK
599	:HONGRIE
64	:FINLANDE
70	:NORVEGE
729	:ISRAEL
73	:SUEDE
76	:SUISSE
779	:ARGENTINE
789	:BRESIL
80 à 83	:ITALIE
84	:ESPAGNE
859	:TCHECOSLOVAQUIE
860	:YOUGOSLAVIE
87	:HOLLANDE
90 et 91	:AUTRICHE
93	:AUSTRALIE



1 0 1 00 1 1 00 1 0 1 00 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1
s. l.
1A
0B
0A
1A
00 1 1 0 1 1 0 1 00 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 00 1 0
2B
0B
s. c.
0C
1 1 1 00 1 0 1 1 1 00 1 0 1 00 1 000
0C
0C
8C
1 00 1 1 1 0 1 000 0 1 0 1 0 1
5C
3C
s.l.
4 100120 000853
A gauche, suite ABAABB,
donc un 4 est induit
(P_{13} = 4)
s = 3(5+0+0+2+0+1)
+8+0+0+1+0+4 = 37
donc P_1 = 3



9 782265 032774

ISBN 2-265-03277-8

94 :NOUVELLE ZELANDE
959 :PAPOUASIE
98 et 99 :numéro de coupon.

Signalons également que certains utilisateurs définissent des codes internes qui modifient l'interprétation du code lu : ainsi le code ci-contre ne parle pas d'un article référencié 55, mais d'un produit vendu au poids de référence 471 dont le prix à facturer est 55.

Il existe également deux préfixes 978 et 979 réservés à l'ISBN (International Standard Book Number). Après ce préfixe, l'éditeur peut écrire son propre numéro d'ISBN. Ainsi le code ISBN 2-265-03277-8 devient le code EAN13: 9782265032774. La différence du dernier chiffre vient de ce que les caractères de contrôle ne sont pas calculés par les mêmes algorithmes.

Puisque l'on en parle, signalons que l'algorithme classique de l'ISBN se trouve en multipliant à partir de la gauche les chiffres successifs par 1,2,3,4,..., puis en sommant ces résultats et en prenant le reste de la division par 11. Ainsi :

2x1 + 2x2 + 6x3 + 5x4 + 0x5 + 3x6 + 2x7 + 7x8 + 7x9 = 195
et 195 mod 11 = 8

Sur d'anciens livres, vous pouvez aussi trouver un caractère de contrôle sous forme de lettre : après avoir calculé de même manière 195 on prenait le reste de la division par 26, ce qui ici nous donne 13 et puisque M est la 13ème lettre, on écrivait : ISBN : 2-265-03277-M

2/5 ENTRELACES

0	00110	14 modules
1	10001	
2	01001	
3	11000	
4	00101	
5	10100	
6	01100	
7	00011	
8	10010	
9	01010	
Séparateur gauche	00	4mod.
Séparateur droit	10	6mod.

CODE 2/5 ENTRELACES

Barres

S.g. 0 4 2 4 6 8 0 S.d.

5 1 3 5 7 9 8

Espaces

NOMBRE CODÉ : 05412345678908

Caractère	Symbolisation	Barres	Espaces	Valeur
1		10001	0100	1
2		01001	0100	2
3		11000	0100	3
4		00101	0100	4
5		10100	0100	5
6		01100	0100	6
7		00011	0100	7
8		10010	0100	8
9		01010	0100	9
0		00110	0100	0
A		10001	0010	10
B		01001	0010	11
C		11000	0010	12
D		00101	0010	13
E		10100	0010	14
F		01100	0010	15
G		00011	0010	16
H		10010	0010	17
I		01010	0010	18
J		00110	0010	19
K		10001	0001	20
L		01001	0001	21
M		11000	0001	22
N		00101	0001	23
O		10100	0001	24
P		01100	0001	25
Q		00011	0001	26
R		10010	0001	27
S		01010	0001	28
T		00110	0001	29
U		10001	1000	30
V		01001	1000	31
W		11000	1000	32
X		00101	1000	33
Y		10100	1000	34
Z		01100	1000	35
-		00011	1000	36
.		10010	1000	37
SPACE		01010	1000	38
*		00110	1000	—
$		00000	1110	39
/		00000	1101	40
+		00000	1011	41
%		00000	0111	42

CODE 39

Il s'agit ici encore d'un code numérique : il est employé pour introduire des nombres qui ne sont ni des références, ni des numéros d'article, mais par exemple des quantités à acheter pour renouveler le stock.

Il doit son nom au fait que chaque chiffre est codé par deux larges barres parmi un total de cinq barres. Par convention les barres larges sont triples des barres étroites. Avec les 5 intervalles, ce code consomme 14 modules.

Le séparateur gauche est différent du séparateur droit, ce qui permet de détecter le sens de la lecture.

Il doit son nom d'entrelacé au fait que le premier chiffre est codé par les cinq premières barres pendant que le second chiffre se code par les 5 espaces qui suivent immédiatement ces 5 barres.

Le dernier chiffre est un chiffre de contrôle calculé comme dans le système EAN.

CODE 39

Le code 39 ci-contre doit son nom du choix de 3 larges zones parmi 9 zones. Ce code est alphanumérique et c'est là son utilité.

En principe, la longueur des données codées ne dépend que des capacités du matériel qui lit les codes. Chaque donnée commence et se termine par le code de *, spécialement réservé à cet usage.

On utilise parfois comme caractère de contrôle, le reste de la division par 43 de la somme des valeurs des signes intervenant dans le message.

Voici un exemple de ce code, un autre se trouve sur la couverture de votre Math-Jeunes.

CODE 39

Pour le texte *CODE 39*, le caractère de contrôle aurait pu être :

$12 + 24 + 13 + 14 + 38 + 3 + 9 = 113$

$113 \bmod 43 = 27$ → caractère de contrôle = R.

Rectangles et Carrés de même aire

Dans le numéro 30 de votre revue, nous avions vu comment construire un carré en découpant puis rassemblant les morceaux de n carrés égaux. Nous terminions en vous faisant remarquer qu'une autre façon de résoudre le problème consistait en la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné.

La recherche de la longueur du côté du carré de même aire qu'un rectangle donné se ramène au calcul ou à la construction de la moyenne géométrique des nombres a et b qui mesurent les longueurs des côtés du rectangle. On a en effet, si ℓ est la longueur du côté du carré :

$$\ell^2 = a\,b$$

$$\ell = \sqrt{a\,b}$$

La construction d'un segment dont la longueur est la moyenne géométrique des longueurs de deux segments donnés est un problème classique. Si vous ne l'avez pas encore rencontré, vous pouvez proposer à votre professeur de le résoudre dès que vous savez ce que sont deux triangles semblables.

Cette connaissance ne suffit pas à résoudre le problème de la décomposition du rectangle en morceaux qui, assemblés autrement, permettent de construire un carré, mais on peut tenir compte de cette possibilité pour aborder le problème. C'est ce qui a été fait en 1778 par un mathématicien appelé MONTUELA. Voici comment il procède.

Partons d'un rectangle ABCD dont les côtés ont pour longueur a et b et supposons $a < b$.

$$|AB| = a \qquad \text{et} \qquad |BC| = b$$

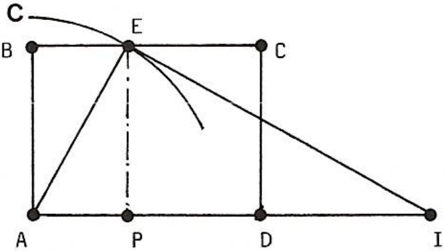
Considérons le cercle **C** de centre A et de rayon $\sqrt{ab}$. Comme

$$a < \sqrt{ab} < b$$

ce cercle rencontre $[BC]$ en un point E . Menons en E la tangente au cercle (c'est-à-dire la perpendiculaire à AE) et désignons par I le point d'intersection de cette tangente avec AD. Trois cas peuvent se présenter :

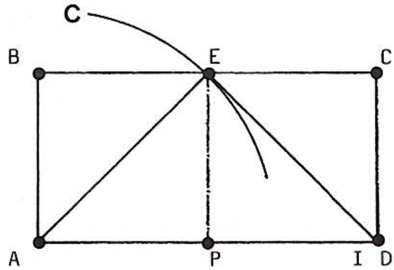
Premier cas : →

$$|AD| < |AI|$$



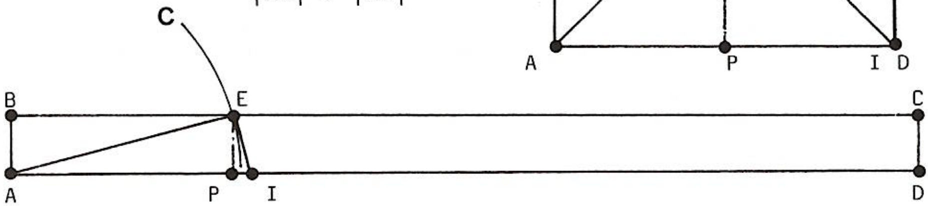
Second cas : →

$$|AD| = |AI|$$



Troisième cas : ↓

$$|AD| > |AI|$$



Comment caractériser chacun de ces cas ?

Dans chacune des situations , $|AE|$ est moyenne géométrique de $|AI|$ et de $|AP|$ et l'on a donc $|AE|^2 = |AP|\ |AI|$

Pour réétablir cette formule, vous pouvez utiliser la similitude des triangles AEP et AIE

$|AE|$ est connu , il vaut $\sqrt{ab}$,

$|AP|$ peut être calculé par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle PAE . On obtient :

$$|AP| = \sqrt{ab - a^2} \quad , \text{ par suite } \quad |AI| = \frac{ab}{\sqrt{ab - a^2}}$$

On aura donc :

Premier cas : $|AD| < |AI|$

$$b < \frac{ab}{\sqrt{ab - a^2}}$$

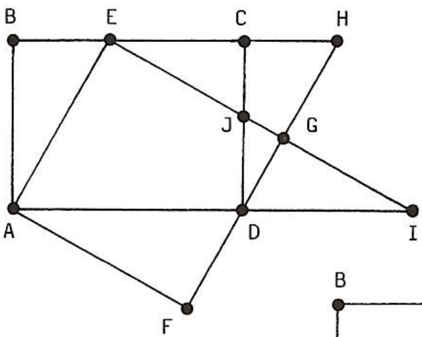
et en simplifiant et transformant : $b < 2a$

On montre de même que :

Second cas : $|AD| = |AI|$ $\qquad b = 2a$

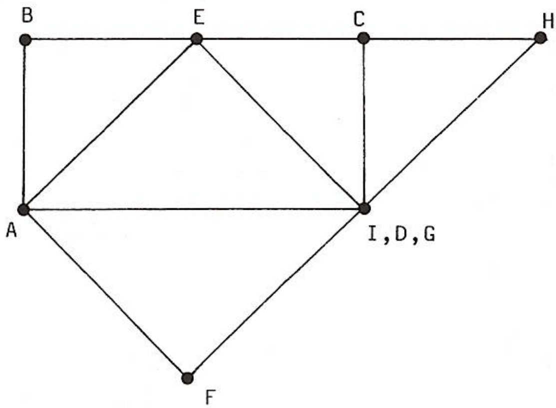
Troisième cas : $|AD| > |AI|$ $\qquad b > 2a$

Complétons notre construction en menant par D la parallèle à AE, H est son point d'intersection avec BC, et par A la perpendiculaire à AE qui rencontre DH en F. Désignons par G le point commun à EI et DH.



← Premier cas

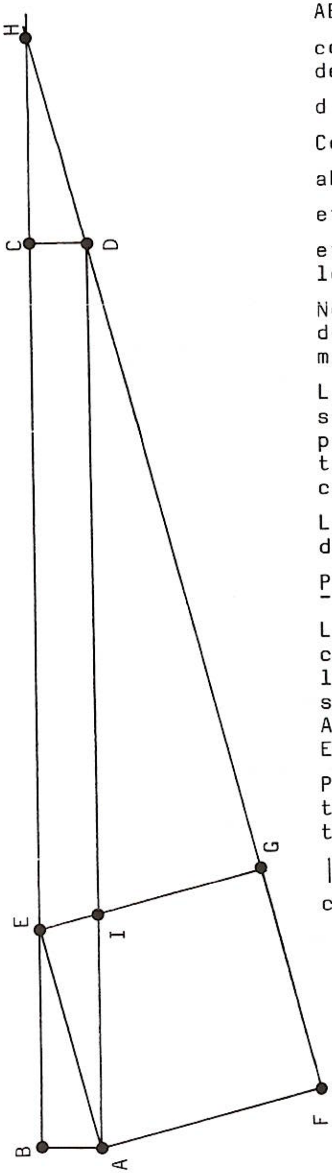
Second cas ↓



Troisième cas
(page suivante)

Pour simplifier nos écritures, utilisons pour représenter la relation "avoir même aire que" une notation, par exemple: Ω

On a : $ABCD \ \Omega \ AEHD$



AEGF Ω AEHD

comme parallélogrammes de même base et de même hauteur .

d'où ABCD Ω AEGF

Ceci entraîne que:

$ab = (\sqrt{ab})^2 = |AE|\ |EG| = \sqrt{ab}\ |EG|$

et donc : $|EG| = \sqrt{ab}$

et AGEF est un carré de même aire que le le rectangle ABCD.

Nous allons maintenant essayer de décomposer le rectangle et le carré en morceaux respectivement égaux.

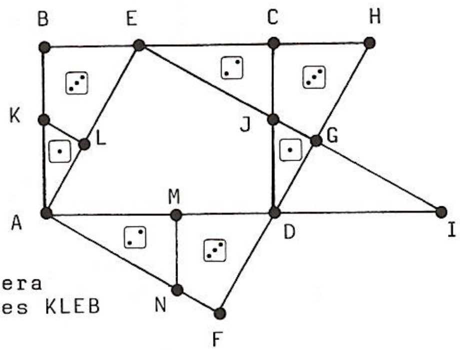
Le second cas b = 2a se résoud très simplement. On retrouve la figure décrite page 36 du n° 30 de votre revue. Le rectangle est en fait la somme de deux carrés égaux de côté a .

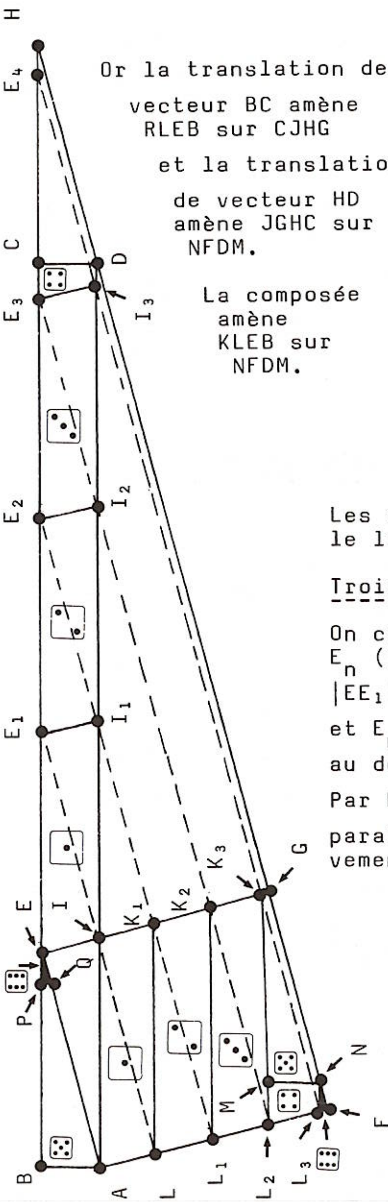
L'approche sera différente dans chacun des deux autres cas.

Premier cas :

Le rectangle et le carré ont une partie commune, le quadrilatère AEJD où J est le point d'intersection de EI et CD. Il suffit donc de construire les triangles AFD et DGJ avec des morceaux de ABE et ECJ.

Pour cela construisons dans ABE un triangle égal à GDJ et dans AFD un triangle égal à ECJ en prenant sur AE $|AL| = |DG|$ et sur AD $|AM| = |EC|$ et en construisant les triangles rectangles AMK et ALN. Le problème sera résolu si les quadrilatères KLEB et NFDM sont égaux.





Or la translation de vecteur BC amène RLEB sur CJHG et la translation de vecteur HD amène JGHC sur NFDM.

La composée amène KLEB sur NFDM.

Les découpes du rectangle se feront donc le long des droites AE, KL et EJ.

Troisième cas :

On construit sur BC les points $E_1, E_2, \dots, E_n$ (ici n=4) tels que
$|EE_1| = |E_1E_2| = \dots = |E_{n-1}E_n| = |BE|$
et E_n est le premier de ces points situé au delà de C.

Par $E_1, \dots, E_n$ menons les droites parallèles à AE. Elles passent respectivement par les points :

$I, I_1, \dots, I_{n-1}$ sur AD
$I, K_1, \dots, K_{n-1}$ sur EG
$L, L_1, \dots, L_{n-1}$ sur AF

Par des translations, on amène

EE_1I_1I sur AIK_1L (⚀)
$E_1E_2I_2I_1$ sur $LK_1K_2L_1$ (⚁)
... (⚂)
$E_{n-1}CDI_{n-1}$ sur $L_{n-2}MNL_{n-1}$ (⚃)

Il reste à recouvrir le quadrilatère $NMK_{n-1}G$ (⚄) et le triangle $FL_{n-1}N$ (⚅) au moyen du triangle BAE.

Pour cela, nous construisons le triangle EPQ égal à NFL_{n-1}.
Le quadrilatère restant ABQP est égal au quadrilatère $NMK_{n-1}G$.

La solution que nous venons de vous proposer n'est certainement pas la plus simple, du moins dans certains cas, mais elle a un petit goût historique intéressant.

Le problème se généralise au passage d'un polygone plan quelconque à un autre polygone de même aire. BOLYAJ en 1832 a démontré que cette transposition était toujours possible sans donner de stratégie pour la réaliser. Des méthodes de construction ont été proposées par différents auteurs au cours de la seconde moitié du 19ème siècle. L'étude commence généralement par le passage d'un parallélogramme à un parallélogramme de même aire. De quoi occuper vos grandes vacances...

Le coin des problèmes

R122 $\{\sqrt{n}\} = \sqrt{n}$ lorsque n est un carré parfait.
Puisque $\sqrt{1985} = 44,55...$, le plus grand carré intervenant dans la somme est $44^2 = 1936$. Entre 1985 et 1936, on trouve (49+1) termes.
Entre deux carrés consécutifs k^2 et $(k+1)^2$, il y a $2k+1$ termes dont la valeur entière $\{\sqrt{n}\}$ vaut k.

$$
\begin{aligned}
\text{D'où } S &= (2.1+1)1 + (2.2+1)2 + (2.3+1)3 + \ldots + (2.43+1)43 \\
&\quad + 50.44 \\
&= 2\,(1^2+2^2+3^2+\ldots+43^2) + (1+2+3+\ldots+43) + 50.44 \\
&= 2\,\frac{1}{6}\,43(43+1)(2.43+1) + \frac{1}{2}\,43(43+1) + 50.44 \\
&= 54868 + 946 + 2200 \\
&= 58014
\end{aligned}
$$

On peut trouver la somme $1+2+3+\ldots+n$ par l'addition classique:

$$
\begin{array}{rcl}
s &=& 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\
s &=& n + n-1 + n-2 + \ldots + 1 \\
\hline
2s &=& n+1 + n+1 + n+1 + \ldots + n+1 \\
2s &=& n(n+1) \\
\text{et } s &=& \frac{1}{2}\, n\,(n+1)
\end{array}
$$

ou par une méthode plus générale, en remarquant que

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

et en sommant de telles relations pour $x = 1,2,3,\ldots,n$.

$$
\begin{array}{rcl}
2^2 - 1^2 &=& 2.1 + 1 \\
3^2 - 2^2 &=& 2.2 + 1 \\
\ldots && \\
(n+1)^2 - n^2 &=& 2.n + 1 \\
\hline
(n+1)^2 - 1 &=& 2.s + n
\end{array}
$$

d'où s.

On peut chercher avec cette technique :

$$t = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

par l'application de la relation $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ pour $x = 1, 2, \ldots, n$. On trouve :

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
&\ldots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3.n^2 + 3.n + 1 \\
\hline
(n+1)^3 - 1^3 &= 3.t + 3.s + n
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $t = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$

On peut remarquer que l'expression $n (n+1) (2n+1)$ est bien un multiple de 6 pour tout n. En effet n et n+1 n'ont jamais la même parité, donc l'expression est multiple de 2. Par ailleurs,

si n est multiple de 3, l'expression est multiple de 3,
si n est multiple de 3 moins un, n+1 est multiple de 3 et l'expression est multiple de 3,
si n est multiple de 3 plus un, 2n+1 est multiple de 3 et l'expression est multiple de 3.

On peut aussi appliquer la relation :

$$(x+1)^4 - x^4 = 4 x^3 + 6 x^2 + 4 x + 1$$

pour chercher

$$u = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

et trouver

$$u = s^2.$$

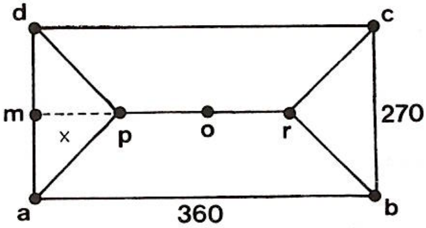
Le problème initial pouvait aussi être résolu pour n quelconque. En voici le programme :

```
10  INPUT N
20 RA =  SQR (N)
30 RI =  INT (RA)
40 R = RI - 1
50 DI = N - RI * RI + 1
60 S = (R * RI * (2 * R + 1)) / 3 + (R * RI / 2) + (DI * RI)
70  PRINT S
```

R123

Le tracé extrémal doit respecter les symétries de rectangle: le tronçon pr sur une médiane et les échangeurs p et r symétriques par rapport au centre o du rectangle. La longueur L des autoroutes vaut

$$L = ap + dp + pr + rb + rc = 4\ ap + 2\ po$$



On pose mp = x

$$ap^2 = x^2 + 135^2$$

$$po = 180 - x$$

$$L(x) = 2(2\sqrt{x^2 + 18225} + 180 - x)$$

On va chercher à annuler la dérivée.

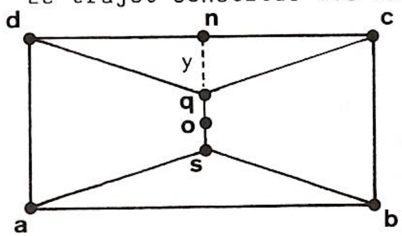
$$L'(x) = 2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 18225}} - 1\right)$$

$L'(x) = 0$ est obtenu pour $2x = \sqrt{x^2 + 18225}$

ce qui donne $x = 45\sqrt{3}$ et finalement $L(x) = 90(3\sqrt{3}+4) \simeq \underline{827,6}$

Le trajet comportant 2 petits côtés et un grand vaut $\underline{900}$

Le trajet constitué des deux diagonales vaut aussi $\underline{900}$



Si le trajet qs avait été placé parallèlement aux petits côtés, on aurait trouvé :

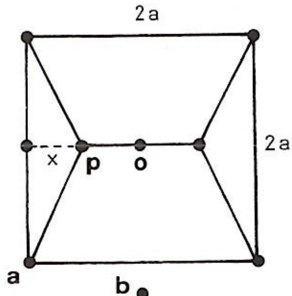
$$qn = y$$

$$dq^2 = y^2 + 180^2$$

$$qo = 135 - y$$

$$L(y) = 2(2\sqrt{y^2 + 32400} + 135 - y)$$

$L'(y) = 0$ lorsque $y = 60\sqrt{3}$: dans ce cas $L(y) = 90(4\sqrt{3}+3) \simeq \underline{893,5}$

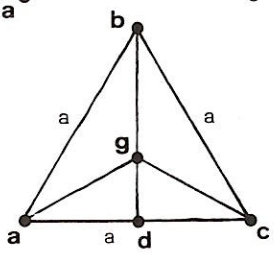


Si la situation se présente dans un carré, en posant po = a-x, on trouve

$$L(x) = 2(2\sqrt{a^2 + x^2} + a - x$$

$$L'(x) = 0 \text{ donne } x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

ce qui correspond à $L(x) = 2(\sqrt{3}+1)\,a$ inférieur à 3 côtés (6a) ou deux diagonales ($2\sqrt{2}\,a$)

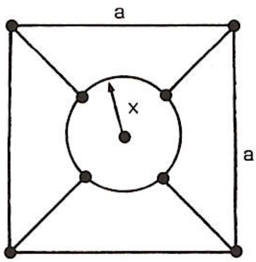


Si la situation se présente dans un triangle équilatéral, on peut vérifier :

$$ga + gb + gc = \sqrt{3}\,a \simeq 1,73\,a$$

$$bd + ac = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)a \simeq 1,86\,a$$

$$ac + bc = 2\,a$$



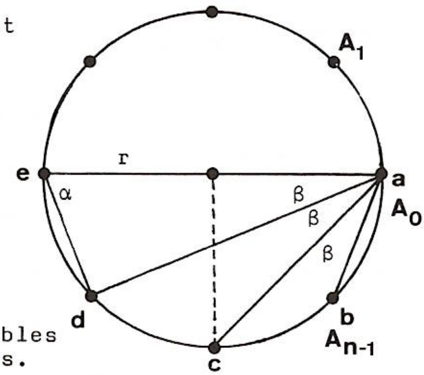
Si les 4 villes sont sommets d'un carré et que l'on construit une autoroute circulaire centrée au centre du carré, reliée aux 4 sommets par des portions de diagonale,

en posant x le rayon du cercle, on trouve
$L(x) = (2\pi - 4)x + 4\sqrt{2}\,a$.

Cette fonction du premier degré à coefficient positif, définie pour $x > 0$, est minimale lorsque x ... est nul !
Ce type de construction est donc une idée particulièrement mauvaise ...

R124 L'angle de l'octogone vaut

$$\frac{(8-2)}{8}\,180° = 135° \quad (1)$$



Ainsi $\alpha = 67°30'$ et $\beta = 22°30'$

$ae = 2r$
$ad = 2r \cos 22°30'$
$ac^2 = r^2 + r^2$
$ab = de = 2r \sin 22°30'$

En employant la formule

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ,$$

on peut éviter le recours aux tables goniométriques ou aux calculettes.

On trouve $P = (ab)^2(ac)^2(ad)^2(ae) = 8r^7$.

Il est tentant de vérifier si le produit P vaut $n\,r^{n-1}$ pour un polygone à n côtés : nous passons au plan complexe.

$A_0 = r.1$ et $A_k = r.\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{n}$ pour $k = 1,2,\ldots,n-1$

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} |A_0A_k| = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{n}\right| = r^{n-1}\,(1+ \ldots +1)$$

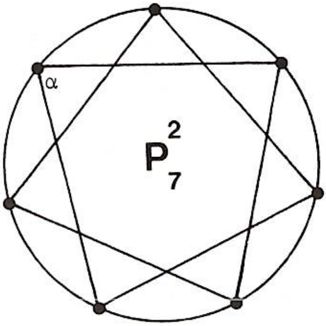
car si z est complexe, $(z^n-1) = (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{n}\right)$
(règle de d'Alembert)

et aussi $(z^n-1) = (z-1)(z^{n-1} + \ldots + z + 1)$
(règle de Horner)

Ainsi $P = n\,r^{n-1}$ dans tout les cas.

$\boxed{\mathrm{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta}$

La formule utilisée en (1) est celle valable pour les polygones convexes : on peut chercher l'équivalente pour les polygones étoilés. Un polygone étoilé a m sommets (m premier) reliés n à n . On le note P_m^n . Le polygone convexe se note dans ce cas P_m^1 .



L'angle α est un angle inscrit qui intercepte un arc sous-tendu par

$$m - 2.n \text{ côtés de } P_m^1$$

L'angle au centre qui sous-tend le même arc vaut :

$$(m - 2.n)\ \frac{360}{m}$$

donc $\alpha = (m - 2.n)\ \dfrac{180}{m}$

En appliquant la formule à P_8^1, on retrouve (1)

R125 Il faut penser à vérifier que a_0, a_5, a_{10}, a_{15} sont les sommets d'un carré : $||a_0a_5|| = ||a_5a_{10}|| = ||a_{10}a_{15}|| = ||a_{15}a_{20}||$. Par ailleurs, il existe une rotation de 90° qui applique a_0 sur a_5.

R126 Soit x l'âge du chrurgien (fiancé ou fiancée...)
Soit y l'âge de l'infirmier ou infirmière.
Soit h l'âge de l'hôpital.
On a les deux équations :

$$|x - y| = h \quad (1)$$

$$x\,(yh - 1) = 1539 = 3^4\ 19$$

x	yh - 1	yh	y	h	Equation (1)
19	81	82	41	2	NON
27	57	58	29	2	OUI
57	27	28	28	1	NON
81	19	20	20	1	NON

Il s'agit donc du mariage d'un infirmier de 29 ans avec une femme-chirurgien de 27, travaillant dans un hôpital ouvert il y a 2 ans.

R127 Le problème se met sous l'équation :

$$\left(\frac{X}{8}\right)^2 + 12 = X$$

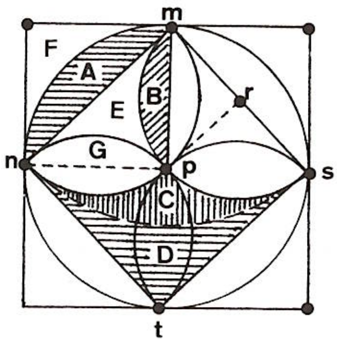
qui admet les solutions 16 et 48.

R128 Le rayon du grand cercle np étant $\sqrt{2}$ fois plus grand que le rayon de l'un des petits cercles (pr), l'aire de la région A est double de l'aire de la région B

Aire A = aire B + aire G = 2 aire B et aire E = aire F

Le rapport demandé est donc le même que le rapport des aires A et F. On pose ρ = np

$$\text{Aire A + aire triangle mnp} = \frac{\pi}{4}\,\rho^2$$



Aire triangle mnp $= \frac{\rho^2}{2}$

Aire A $= \frac{\rho^2}{4}(\pi - 2)$

Aire F $= \rho^2 - \frac{\pi}{4}\rho^2 = \frac{\rho^2}{4}(4 - \pi)$

rapport $= \frac{\text{aire A}}{\text{aire F}} = \frac{\pi - 2}{4 - \pi} \simeq 1{,}329$

On peut chercher les aires de D et C:

$rp = \rho\frac{\sqrt{2}}{2}$, $mn = \rho\sqrt{2}$

aire carré nmst $= 2\rho^2$

aire quart de cercle mns $= \frac{\pi}{2}\rho^2$

aire D $= \frac{\rho^2}{2}(4 - \pi) = 2$ aire F

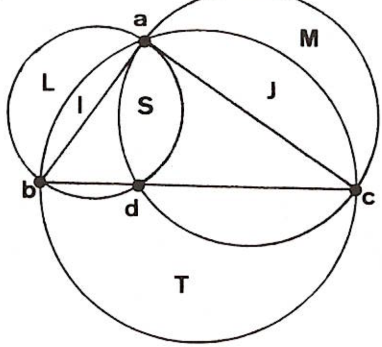
aire C = aire quart de cercle mns - demi aire carré nmst - 2 aire B

$= \frac{\pi}{2}\rho^2 - \rho^2 - \frac{\rho^2}{4}(\pi - 2) = \frac{\rho^2}{4}(\pi - 2) =$ aire A

-*<u>Hippocrate de Chios</u>, vers 460 avant notre ère s'était déja intéressé à la recherche d'aire limitée par des arcs de cercles:*

(1°) Sur les trois côtés d'un triangle rectangle abc, *pris comme diamètre, on trace 3 cercles: ils délimitent les* lunules *(2 arcs)* L,M et S *et l'*arbelos *(3 arcs)* T. *On a:*

<u>*aire* L *+ aire* M *= aire* abc</u>



Puisque $ab^2 + ac^2 = bc^2$, en multipliant chaque terme par $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

aire L + aire I + aire M + aire J = aire abc + aire I + aire J

donc aire L + aire M = aire abc.

De même, <u>*aire* T *- aire* S *= aire* abc</u>

On a : $\frac{\pi}{2}\left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{ac}{2}\right)^2$ + aire I + aire J + aire T

$= \pi\left(\frac{bc}{2}\right)^2$ + aire S

d'où aire I + aire J + aire T = aire S + $\frac{\pi}{2}\left(\frac{bc}{2}\right)^2$

aire I + aire J + aire T = aire S + aire I + aire J + aire abc

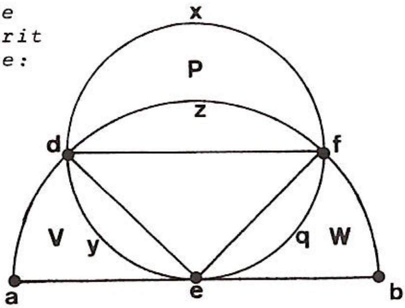
et aire T - aire S = aire abc.

(2°) Dans un demi-cercle de centre e, on inscrit un triangle rectangle isocèle def *et on décrit un cercle avec* df *comme diamètre: on crée les lunules* P,V *et* W.

aire P = *aire* def

aire V + *aire* W = *aire* def

La quadrature de la lunule P *est le premier exemple historiquement connu de quadrature d'une figure curviligne !*



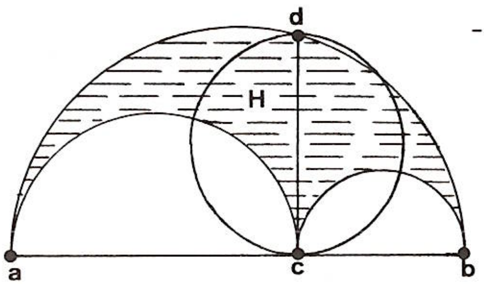
df est le côté du carré inscrit dans le cercle dont ab est diamètre.

$$df^2 = 2r^2 = \frac{1}{2}\,ab^2 \quad \text{et aire triangle def} = \frac{r^2}{2}$$

ainsi le demi-cercle dxf est d'aire moitié du demi-cercle adfb le segment de cercle edy est moitié du segment de cercle dzf.

Lunule P = aire demi-cercle dxf - aire segment dzf
= aire demi-cercle def - aire segment dye - aire segment eqf = aire triangle def.

Aire V + aire W = aire secteur aed + aire secteur efb - aire segment dye - aire segment efb
= aire secteur dzfe - aire segment dzf
= aire def.



- Archimède a également étudié ce type de problème.

(1) On donne un demi-cercle de diamètre ab. *D'un point* c *quelconque, on élève la perpendiculaire* cd *et on décrit les deux demi-cercles de diamètre* ac *et* cb.

aire H = *aire disque de diamètre* cd

$$\text{Aire H} + \frac{\pi}{2}\,ac^2 + \frac{\pi}{2}\,cb^2 = \frac{\pi}{2}\,ab^2$$

$$\text{Aire H} = \frac{\pi}{2}\,(\,ab^2 - ac^2 - cb^2\,) = \frac{\pi}{2}((ab-ac)(ab+ac)-cb^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}(cb(ab+ac)-cb^2) = \frac{\pi}{2}(cb(ab+ac-cb)) = \frac{\pi}{2}(cb(2ac))$$

$$= \pi cb.\ ac = \pi cd^2$$ par le théorème de la hauteur dans le triangle rectangle adb inscrit dans un demi-cercle.

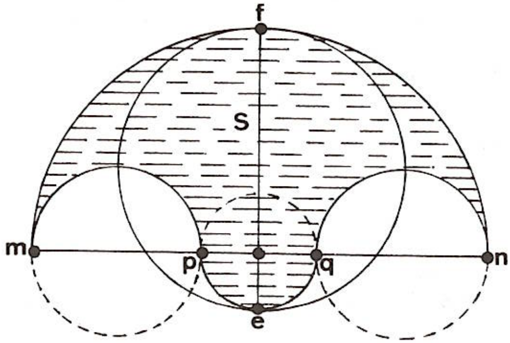
(2) On décrit deux cercles concentriques de diamètre mn *et* pq, *puis les cercles de diamètre* mp *et* qn. *On trace ensuite le cercle* C *de diamètre* ef. *La partie hachurée est un* salinon *(4 arcs)* S. *On a aire* S = *aire* C.

On appelle 2R le diamètre mn et 2r, le diamètre pq. On doit vérifier que :

$$\frac{\pi}{2}R^2+\frac{\pi}{2}r^2-2\frac{\pi}{2}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$$

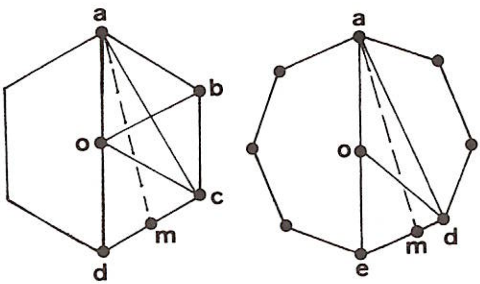
$$2R^2+2r^2-(R^2-2Rr+r^2) = (R^2+2Rr+r^2)$$

ce qui est évident.



R129

Si l'aire du triangle obc est 1, alors il en est de même de l'aire de abc et donc aussi de oac. L'aire adc vaut 2 et donc le point m milieu de cd crée le triangle amc d'aire aussi unité. Le quadrilatère abcm de 2 unités d'aire est donc le tiers de l'hexagone de 6 unités d'aire.



Le même problème appliqué à un octogone donne :

aire oed = $\frac{1}{8}$ aire octogone.

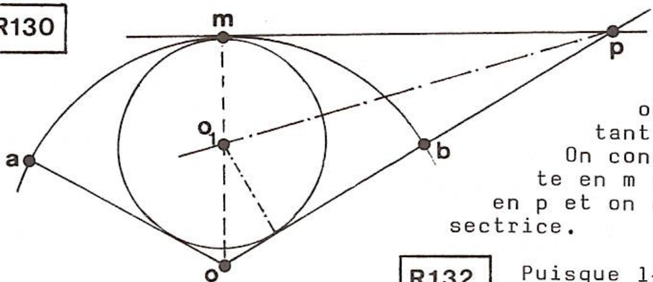
aire aed = 2 aire oed.

aire adfg=$\frac{1}{4}$aire octogone.

Puisque $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, il faut choisir m tel que aire amd =$\frac{1}{12}$ aire octogone

Le triangle ade est rectangle en d, donc, si ad est la base, le triangle d'aire tiers sera trouvé lorsque m est au premier tiers de ed à partir de d.

R130

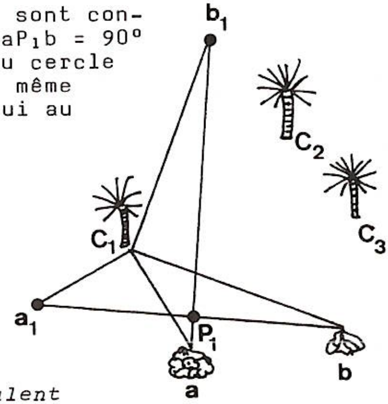


Il faut déterminer un point sur om également distant de m et de ob. On construit la tangente en m qui rencontre ob en p et on construit la bissectrice.

R132

Puisque 1+2+...+100 est un nombre pair (somme de 50 termes pairs et de 50 termes impairs); puisque chaque remplacement d'un signe + par un signe - diminue la somme de deux fois ce nombre, la somme algébrique s'obstine à donner une solution paire, et donc jamais 1985...

R131 Les triangles ab_1C_1 et a_1bC_1 sont congruents. Il en résulte que $aP_1b = 90°$ et le point P appartient au cercle de diamètre ab. Comme il en est de même pour P_2 et P_3, le trésor est enfoui au milieu du segment ab .



R133 MATH = 9376

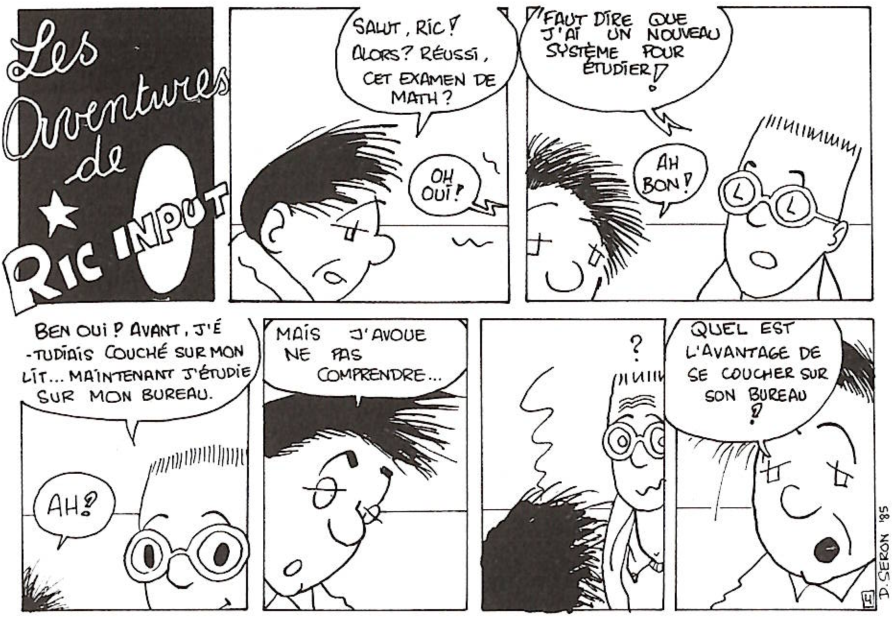
	D	O	R	E	M	I	F	A	S	L
	3	4	5	6	9	0	7	2	1	8
ou	2	3	6	7	9	0	4	8	1	5

R134 Le problème écrit en braille se lit comme suit: *"Un groupe de coureurs s'entraînent sur la route. Ils roulent tous à 35 km/h. L'un d'eux quitte le peloton à 45 km/h, parcourt 10 km, puis fait demi-tour à même allure et va retrouver les autres, qui ont continué pendant ce temps à leurs vitesses. Quelle est la durée entre le départ et le retour du coureur?"*

Soit x ce temps, l'équation du problème est :

$$45\,x + 35\,x = 2.\ 10$$

d'où l'on tire $x = 1/4$.



3ème prix:13. Bailly Thierry (4ème) Inst.St Boniface, Brux.
Harpes Carlo (5ème) Lycée classique, Diekirch
15. Noel Antoine (5ème) Athénée Thomas, Bruxelles
Pypaert Denis (4ème) Col.St Marie, Mouscron
17. Nasdrovisky Nicolas (4ème) Ath.Bervoets, Mons
Tylee Andrew (5ème) British School, Bruxelles
4ème prix:19. Polome Vincent (5ème) Col.St Vincent Soignies
Sart Frédéric (5ème) Col.St Louis, Liège
21. Berton Pascal (6ème) Athénér Royal, Virton.

Prix spéciaux: finalistes de 4ème ou 5ème déja cité + Collin Jean-François, Moreau Yves, Pecheur Renaud, Ducarne Olivier et Pierroux Didier.

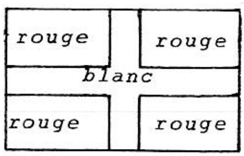
Le Prix WILLY VANHAMME qui récompense la démonstration la plus élégante est attribué à Pier Benoît en 3ème au Lycée de Garçons de Esch-sur-Alzette. Collaborateur durant les 10 premières années des Olympiades, Willy Vanhamme était également co-fondateur de votre revue Math-Jeunes.

Les questions des finales.

Mini:

1) Si a,b,c sont trois points non alignés du plan, quelles sont les droites du plan équidistantes de a,b,c ?
2) Anne, Brigitte, Christian et Daniel ont participé à l'Olympiade Mathématique. Brigitte a moins bien réussi que Daniel, mais n'a pas mieux réussi qu'Anne. La somme des scores des garçons est égal à celle des scores des filles. La somme des scores d'Anne, de Christian et de Daniel ne dépasse pas le triple du score de Brigitte. Dans quel ordre les 4 élèves ont-ils figuré dans le classement de l'épreuve ?
3) Un ensemble E_n formé de n points du plan est appelé ortho-ensemble si la condition suivante est vérifiée : quels que soient les points distincts $a,b \in E_n$, il existe deux points distincts $c,d \in E_n$ tels que la droite ab soit orthogonale (c'est-à-dire perpendiculaire) à la droite cd.
   a) il est clair que l'ensemble des sommets d'un carré est un ortho-ensemble de 4 points. Tout ortho-ensemble de 4 points est-il nécessairement l'ensemble des sommets d'un carré ?
   b) Pour quelles valeurs du nombre naturel $n \geqslant 4$ existe-t-il un ortho-ensemble de n points ?
4) Un nombre entier est de la forme 3^p5^q (p,q entiers strictement positifs). Si on le divise par 3, il perd 4 diviseurs. Si on le divise par 15, il en perd 8. Quel est ce nombre ?

Maxi:



1) Le drapeau danois comporte une croix blanche sur fond rouge. Les bras de la croix ont la même largeur, et l'aire de la croix est égale à celle de la partie colorée en rouge. Quelle est la largeur des bras, pour un drapeau de 75 cm de large et d'un mètre de long ?
2) Soient $u_1,u_2,...,u_n$ des nombres réels strictement positifs.

suite page 4 de couverture.

... suite de la page 3 de couverture.

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} \geqslant \frac{n^2}{u_1+u_2+\ldots+u_n}$$

3) Quel est le plus grand commun diviseur de n^2+2 et n^3+1 si $n = 1986^{1986}$?

4) Soit m le milieu du segment joignant le centre d'un cube à un des sommets. On considère tous les segments xy ayant pour milieu le point m et pour extrémités deux points x,y de la surface du cube. Quel est, sur la surface du cube, l'ensemble des extrémités de tous ces segments ?

SOMMAIRE

MATH-JEUNES est édité par :
J. MIEWIS, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège
pour la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

N'oubliez pas de vous abonner l'année prochaine... et d'abonner vos amis ....

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Les modalités pratiques seront communiquées aux professeurs en début d'année scolaire.