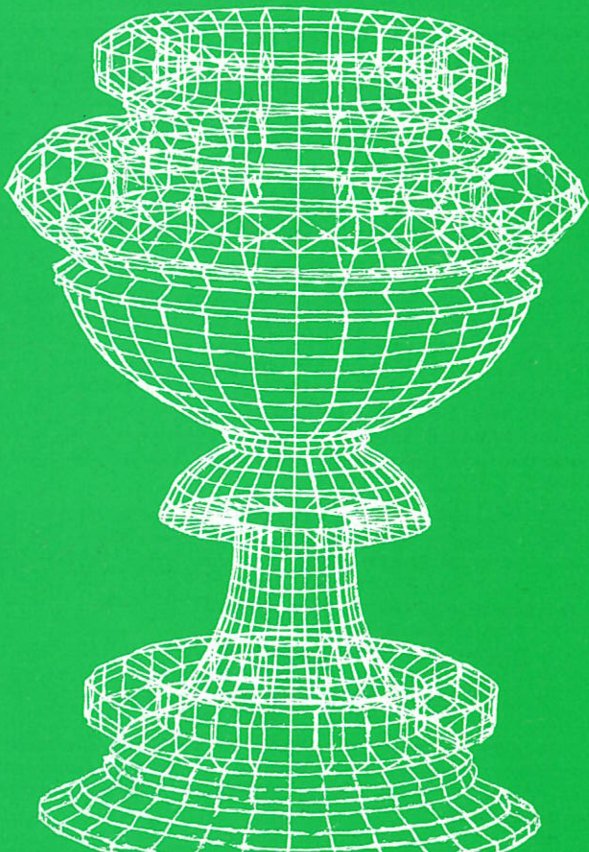
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression francaise - Association Sans But Lucratif

MATH-



JEUNES

Journal Trimestriel

8ème année Numéro 33 Automne 1986

Chers amis,

On entend souvent dire par vos professeurs : "Nos élèves ont de grosses difficultés à "voir" dans l'espace". Lorsqu'ils prononcent cette phrase, ils le font évidemment par référence à vos cours de géométrie.

MATH-JEUNES voudrait vous faire réaliser que vousêtes constamment confrontés avec des représentations planes de solides de l'espace et que vous n'éprouvez pas, lors de ces expériences, de difficulté à imaginer le relief bien que l'image soit plane.

C'est pour cette raison que nous avons choisi comme thème de l'année :

"REPRESENTATIONS PLANES D'OBJETS DE L'ESPACE"

et que notre concours, doté de prix, comprendra trois épreuves en liaison avec ce thème.

Nous ne nous contenterons évidemment pas de regarder des images d'objets de l'espace mais nous essayerons de découvrir un certain nombre de propriétés qui ont permis, ou qui permettraient, de réaliser un dessin analogue. Ainsi, en décortiquant une photo, vous aurez l'occasion de découvrir des règles de la "PERSPECTIVE LINEAIRE (NATURELLE)". C'est à ce travail sur photo que nous vous convions lors de la première épreuve dont vous trouverez l'énoncé en page 3 de la couverture, dans un encadré. Vous serez évidemment aidé dans votre travail en lisant l'article sur la perspective.

Les réponses aux différentes épreuves du concours peuvent, à votre choix, être envoyées séparément ou regroupées mais, de toute manière, nous devons avoir reçu les trois réponses avant la fin des vacances de Pâques.

Vous mentionnerez sur vos envois

1. Vos nom et prénom.
2. Votre adresse personnelle.
3. La classe que vous fréquentez.
4. Le nom et l'adresse de votre école.

Mais, ce n'est pas seulement au concours que nous espérons recevoir de nombreuses réponses. Nous sommes toujours heureux quand vous nous envoyez des solutions à nos petits problèmes. Les meilleures solutions seront évidemment publiées.

Et puis, ... si vous avez rencontré un sujet qui vous a intéressé, pourquoi ne pas en faire profiter vos camarades en rédigeant - seul ou en groupe - un petit article à publier dans MATH-JEUNES. Peut-être pourriez-vous proposer à votre professeur de le faire avec votre classe !

La rédaction

La perspective linéaire

La perspective permet de représenter graphiquement des objets à trois dimensions et leurs relatives positions spaciales sur une surface plane.

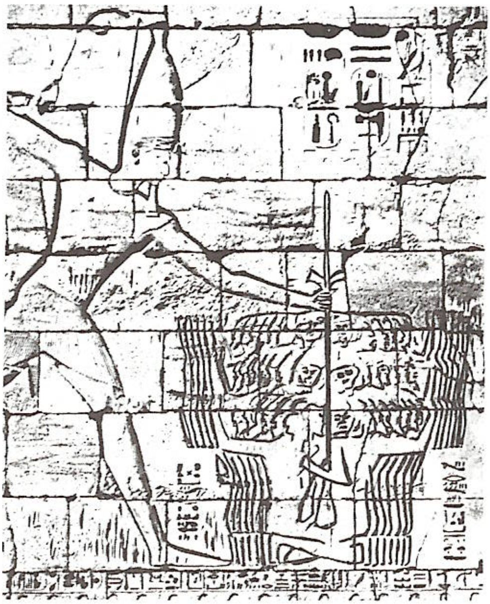
Les dessins de jeunes enfants ainsi que la plupart des peintures des civilisations de l'ancienne Egypte, de la Crète, de L'Inde et les cultures islamiques et pré-Renaissance européenne - comme parfois aussi la peinture de nombreux artistes modernes - dépeignent les objets et leurs environnements indépendamment les uns des autres, comme l'artiste veut les voir et non comme les objets se présentent vraiment à ses yeux.

La découverte des règles de la perspective se place à la Renaissance. Ou pour mieux dire, la redécouverte de celle-ci, car on admet généralement que les Romains connaissaient la technique, mais que celle-ci s'était perdue durant le Moyen Age.

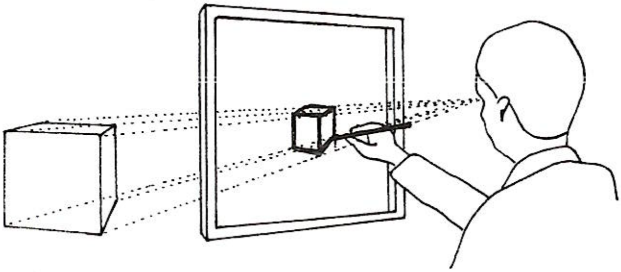
A notre époque, où la photographie nous permet de voir chaque jour des images construites en perspective, nous pouvons difficilement nous rendre compte du travail de recherche que durent effectuer les artistes de la Renaissance.

Ce que l'on avait remarqué à l'époque, était que sans notions théoriques de perspective , on pouvait représenter un objet en perspective par un procédé simple. Il suffit de regarder cet objet au travers d'une vitre ou d'une quelconque surface transparente et dessiner l'objet sur celle-ci, à condition de regarder avec un oeil et de laisser celui-ci à la même place.

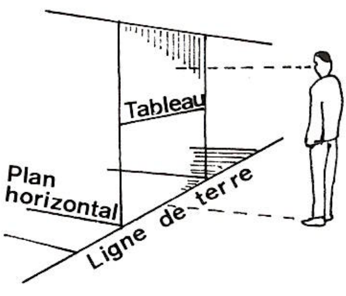
L'idée est généreuse, mais le procédé manque de précision à cause de la mobilité de l'oeil de l'observateur.



← Le pharaon Thoutmes mettant en déroute une troupe d'envahisseurs. (Absence de perspective pour symboliser la troupe: on accole plusieurs fois le même trait.)



Albert Dürer, célèbre peintre et graveur de la Renaissance Allemande suggérait d'améliorer la technique en remplaçant la vitre par un quadrillage de ficelles qui permettait de repérer la position de la perspective et de reporter celle-ci sur une feuille quadrillée posée devant l'artiste. Un style posé verticalement assurait une meilleure stabilisation de la position de l'oeil.



Examinons à présent les éléments définissant la perspective.

LE TABLEAU est une partie du paysage ou du sujet à représenter que l'on isole comme si on le voyait par une fenêtre, le regard étant horizontal.

LE PLAN HORIZONTAL ou LE GEOMETRAL est le plan horizontal sur lequel se trouvent le sujet et l'observateur.

LA LIGNE DE TERRE est l'intersection des plans du tableau et du géométral.

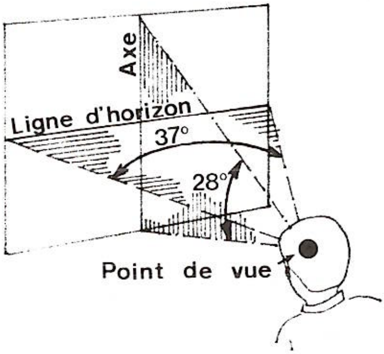
L'avis d'un critique d'art ...

La Renaissance italienne jouit d'un prestige auquel nulle autre époque, dans l'histoire de l'art, ne peut prétendre, car, tout au long de ces années où ils bénéficièrent de la faveur des muses, les artistes italiens ne furent pas seulement grands en tant que tels, mais encore, ils constituèrent le fer de lance de la culture de leur temps. Car l'évènement le plus important de la Renaissance fut l'émergence des idées qui devaient conduire à la rationalisation de la vision. *Ce n'est ni la chute de Constantinople, ni la découverte de l'Amérique, pas plus que la Réforme ou la Contre-Réforme qui constitua le fait majeur de la Renaissance, mais la rationalisation de la vision. Or celle-ci fut, avant tout, l'oeuvre des artistes florentins, avec l'invention de la perspective.*

Une longue tradition académique nous a habitués à considérer la perspective comme un ensemble de règles dont l'application permet la représentation conventionnelle sur une surface plane des proportions correctes d'une forme et de la profondeur de l'espace. Il ne faut voir là qu'un sédiment fossilisé de ce qu'elle était à l'origine. Les artistes florentins, rejetant les interminables gloses sur l'optique de la scolastique médiévale, ne gardèrent que la donnée fondamentale de l'angle visuel. Toute ligne déterminée par 2 points, et à une certaine distance de l'oeil est la base d'un triangle dont l'oeil est le sommet, et dont les 2 côtés sont constitués par les rayons visuels. Il n'y avait donc plus qu'à appliquer le principe euclidien des triangles semblables pour obtenir, selon une règle constante, une image mesurable dont la grandeur est proportionnelle à sa distance au sommet, représenté par l'oeil.

La méthode, perfectionnée par les florentins Alberti et Brunelleschi fut d'abord appliquée à la peinture par Uccello. Cette méthode permettait une composition dont les proportions et les mesures étaient calculées en termes constants et qui ne s'embarassait plus de l'empirisme traditionnel; c'était là, précisément, la rationalisation de la vision. De plus, les peintres créaient avec la perspective un instrument qui allait trouver son application dans le domaine scientifique, en rendant possible la télémétrie. Ils forgèrent ainsi le premier maillon d'une chaîne qui, par Képler et Desargues, devait mener à la géométrie descriptive de Monge et à la géométrie projective de Poncelet. C'est ainsi qu'à la Renaissance l'art ouvrit la voie au progrès scientifique.

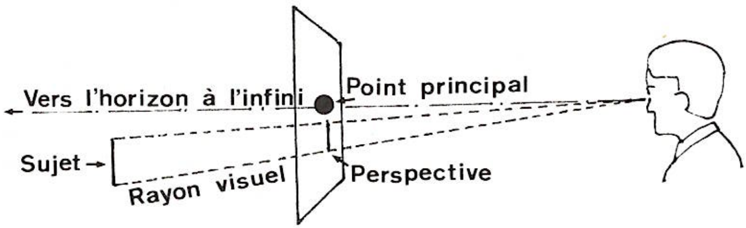
(W.IVINS, On the rationnalization of sight, Metropolitan Musum of Art, New York, 1938)



LA LIGNE D'HORIZON est la droite horizontale se trouvant à hauteur de l'oeil regardant vers l'infini.

On considère théoriquement que le champ visuel est la partie de l'espace que le dessinateur peut voir d'un seul coup d'oeil: on admet que l'espace est limité en largeur par un angle de 37°, et en hauteur par un angle de 28°, ce qui donne un tableau de 4x3 comme proportion. Ces données peuvent être légèrement modifiées, mais sans exagérer pour éviter des déformations dans la perspective

LE POINT DE VUE est l'oeil du dessinateur, placé à une distance convenable du tableau: c'est le sommet du CONE VISUEL. Le tableau est une partie du cône visuel.

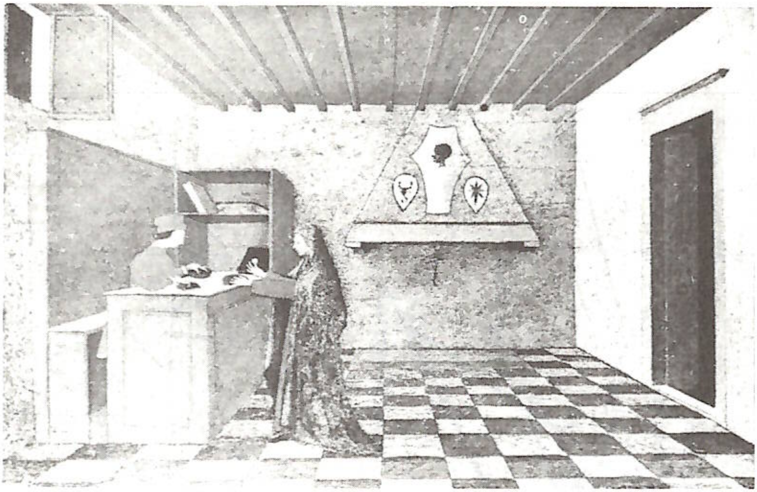


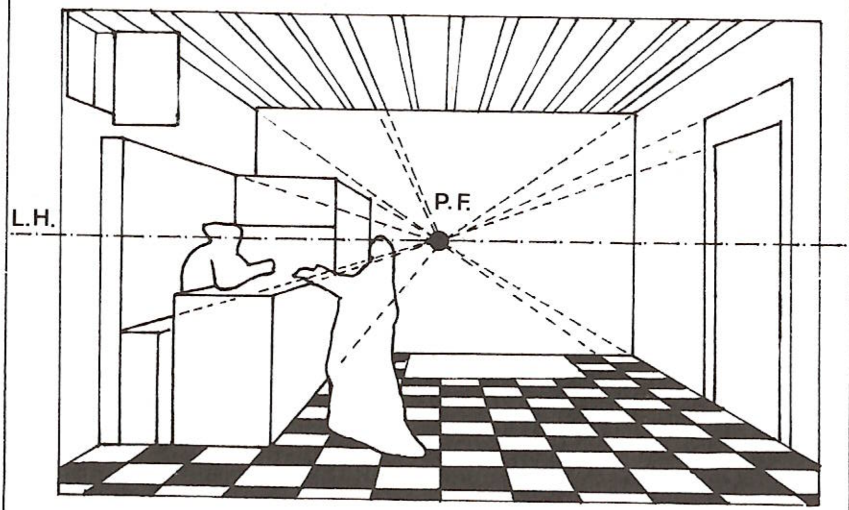
LE RAYON VISUEL est une ligne droite qui va de l'oeil du spectateur (le point de vue) à l'objet (le sujet) regardé en traversant le tableau.

LE POINT PRINCIPAL est situé sur la ligne d'horizon, face au spectateur. Il est souvent situé au milieu du tableau: c'est le point de fuite des lignes perpendiculaires au tableau parce que la projection d'un rayon visuel sur le tableau est une droite qui réunit le point principal au point du plan horizontal projeté sur la ligne de terre.

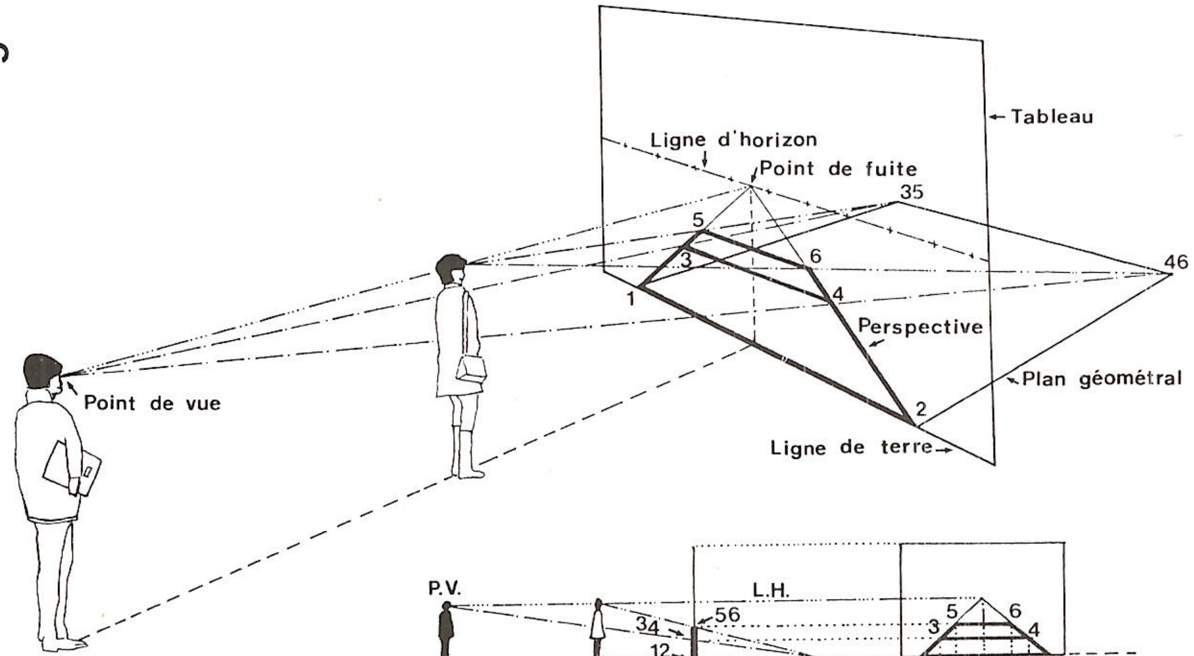
Cette perspective dite à UN point de fuite est bien visible dans l'oeuvre détaillée d'Uccello. Les représentations des pages 6 et 7 permettent de comprendre le comportement et la représentation de ces divers éléments lorsque l'on modifie légèrement la position du point de vue.

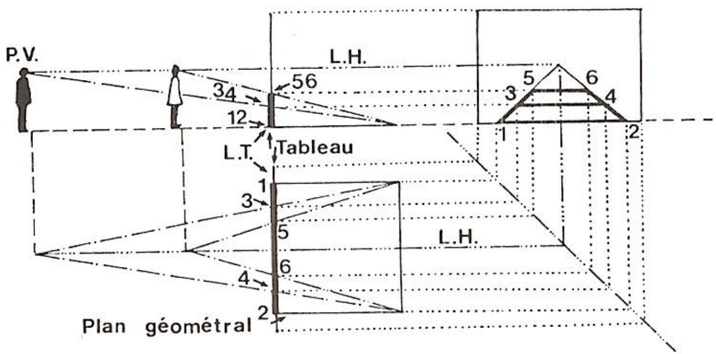
Lorsque le sujet comporte des droites non parallèles ou non perpendiculaires au tableau, on découvre la perspective à DEUX points de fuite. Ces deux points doivent obligatoirement être situés sur la ligne d'horizon. Toutes les droites parallèles entre elles ont le même point de fuite.





Analyse de la perspective à un seul point de fuite d'une oeuvre de Paolo Di Dono Uccello peinte entre 1465 et 1468. (Légende de l'Hostie profanée . 0,42 x 0,60 peinture sur bois, Urbino, Galerie Nationale des Marches)

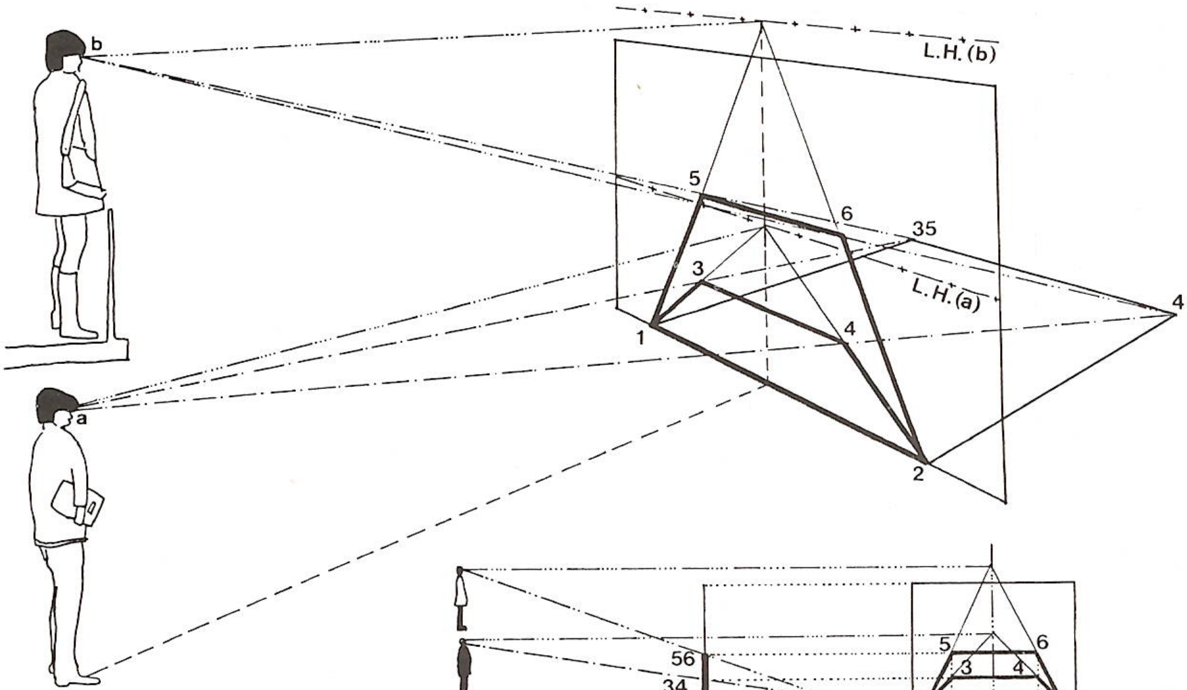


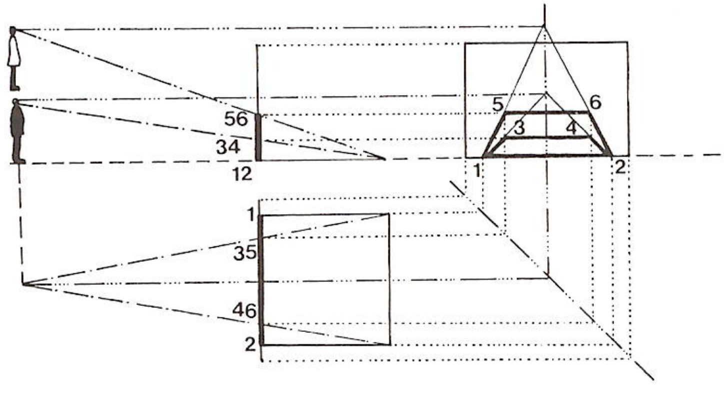


PERSPECTIVE D'UN CARRE

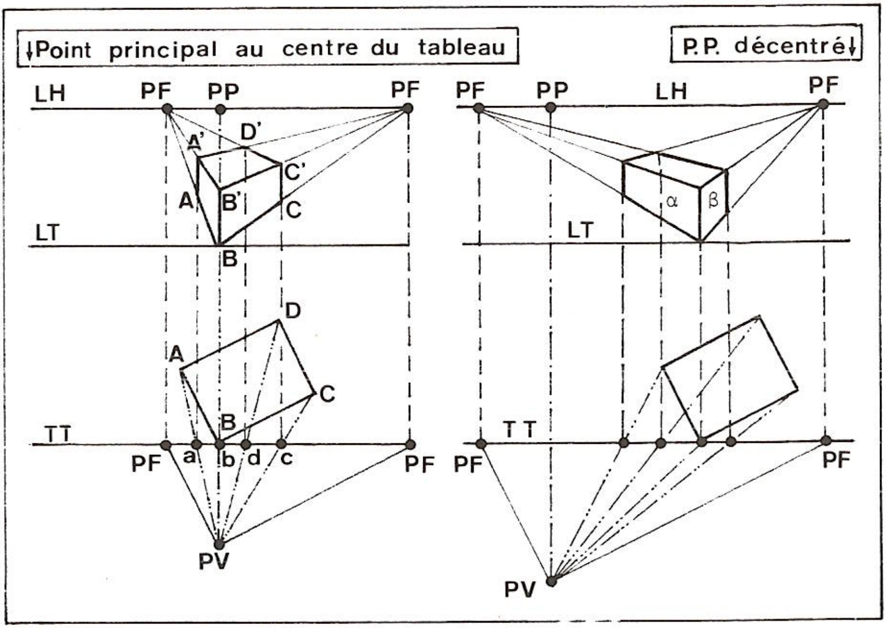
Modification du point de vue

Le carré est dans le
plan GEOMETRAL.





Modification de la ligne d'horizon



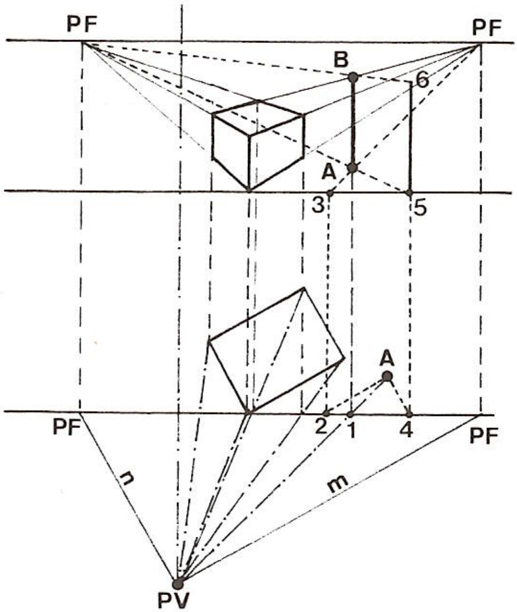
Examinons comment construire la perspective d'un parallélépipède rectangle dont on connait la base (rectangle ABCD représenté en vraie grandeur dans le plan géométral) et la hauteur (BB' représenté en vraie grandeur dans la perspective car cette arête appartient au plan du tableau où la perspective ne crée pas de déformation).

On se donne la position du point de vue (PV) dans le plan géométral à une certaine distance de la trace du tableau (TT) (C'est le tableau vu d'en haut !). On se donne également la distance entre la ligne de terre (LT) et la ligne d'horizon (LH).

Dans un premier temps, on recherche les POINTS DE PERCEE a,b,c et des rayons visuels issus des sommets A,B,C et D en joignant PV à ces sommets (A' est dans la vue géométrale confondu avec A, B'...). Des points de percée, on mène des perpendiculaires à LT.

Le point de fuite des parallèles AB et A'B' se trouve par la construction dans le géométral d'une parallèle à AB. issue du point de vue. On relève ensuite le PF trouvé sur la ligne d'horizon (LH).On trace PF,B qui donne A, PF,B' qui donne A',... Remarquer que D' est à l'intersection de 3 droites!

Remarquer aussi dans la perspective décentrée de droite que la face α paraît plus grande que la face β alors que l'examen du plan géométral prouve que la réalité est tout autre.



On souhaite en un point A du plan géométral élever une verticale d'une hauteur double de celle du parallélépipède.. Comment s'y prendre ?

Du point A du géométral, on trace le rayon visuel ce qui nous donne le point 1. Le point A en perspective sera située sur une perpendiculaire à LT issue de 1.

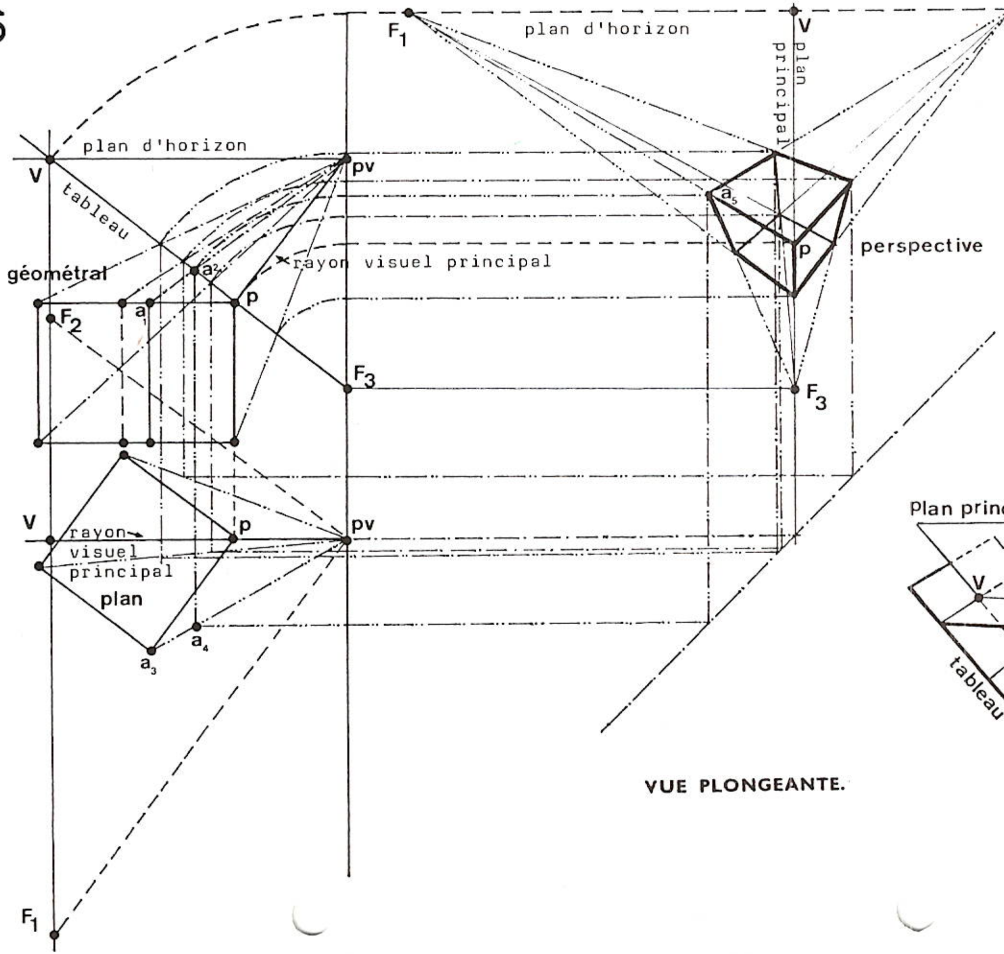
D'autre part, on peut mener une parallèle à la droite m qui détermine le point de fuite, trouver 2 que l'on relève en 3 dans la perspective. Le point A appartiendra à la droite joignant 3 au point de fuite dans la perspective.

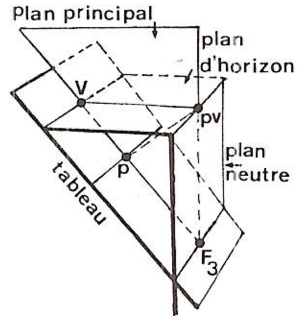
On peut aussi construire 4 par une parallèle à n, puis 5. Pour connaître la position du point B, on construit le segment 56 appelé ECHELLE DES HAUTEURS. On obtient 5 en joignant un point de fuite à A. 5 appartenant au tableau, on peut y porter 56 en vraie grandeur. Il reste à tracer la droite qui joint 6 au point de fuite pour découvrir la position de B.

VARIANTES DE LA PERSPECTIVE

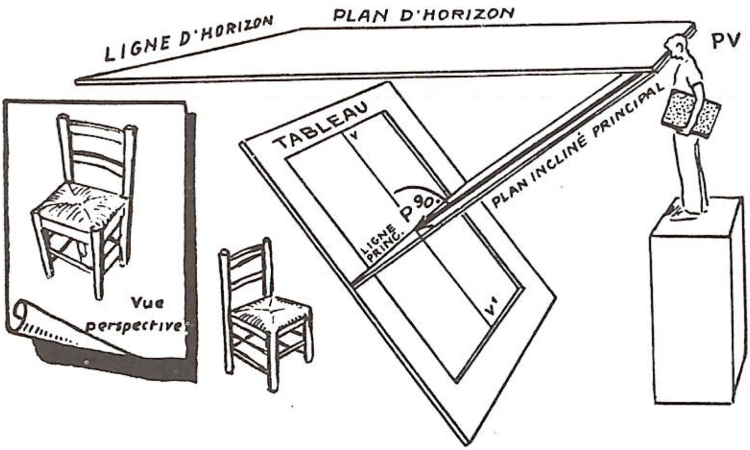
Lorsqu'un objet est situé nettement plus bas que le plan formé par la ligne d'horizon et le point de vue, on peut comme dans le cas de l'observateur b page 7 maintenir le tableau vertical ; mais dans certains cas particuliers destinés à mettre en évidence, soit la hauteur des objets, soit la hauteur du spectateur (vue d'avion), on utilise un tableau oblique. Ce genre de déformation se visualise en photographie lorsqu'un adulte photographie un enfant en restant debout par exemple. Cette technique est discutable dans l'art figuratif, mais donne des résultats très originaux dans certaines recherches publicitaires par exemple.

On peut mettre en évidence l'effet contraire lorsque le spectateur se trouve nettement plus bas que le sujet, par exemple lorsque vous photographiez une tour en vous trouvant très près de celle-ci.





VUE PLONGEANTE.



Après avoir établi le géométral et le plan du cube, on déterminera l'emplacement du point de vue (PV). On trace ensuite le RAYON VISUEL PRINCIPAL en plan et de profil (PV-P). Le tableau est bien sûr perpendiculaire à ce rayon. Il rencontre le plan principal en V et le PLAN NEUTRE en F3. Ce dernier point sera le point de fuite des arêtes verticales.

Sur le plan du cube, construire en PV un angle parallèle aux faces du cube dont on prolongera les côtés jusqu'à leur intersection avec la verticale VV. On trouve les points de fuite F1 et F2 des arêtes horizontales.

Débuter l'épure par le plan principal V-P-F3 et reporter sur le plan d'horizon de la perspective les points de fuite F1-V-F2 en respectant les distances.

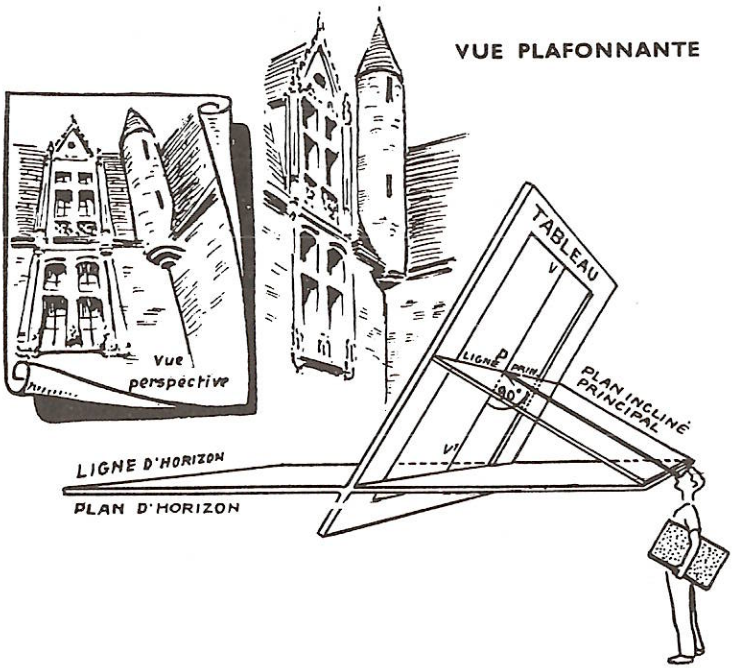
Pour trouver la perspective d'un point a1, tracer dans le géométral le rayon visuel pour trouver a2 le point de percée. a2 est reporté par une horizontale dans la perspective. On trace ensuite le rayon visuel dans le plan pour trouver a4 à partir de a3. On reporte a3 en une verticale de la perspective d'où a5.

Quant à la perspective plafonnante, elle représente, comme son nom l'indique les objets vus de dessous. Le tracé de cette perspective est très semblable à celui de la perspective plongeante.

Terminons en signalant qu'il ne faut pas confondre la perspective plongeante ou à vol d'oiseau ou vue d'avion avec ce que les peintres appellent la perspective aérienne qui n'a rien à voir avec la perspective: c'est là un effet de profondeur donné par des dégradés de couleurs au fur et à mesure de l'éloignement dans l'espace.

L'une des plus célèbres applications de la perspective plafonnante peut se voir sur un tableau de HOLBEIN LE JEUNE intitulé "les Ambassadeurs" et conservé à Londres à la Natinal Gallery.

Au pied de l'un des personnages, un dessin apparemment grotesque semble surgir du coin du tableau. Vu de face et à hauteur d'homme, ce dessin est indéchiffrable, mais il devient compréhensible pour qui se place en dessous de l'oeuvre et à droite. Le tableau était destiné à être être suspendu en haut d'une porte et l'objet devenait facile à identifier pour qui s'apprêtait à franchir cette porte: il s'agit d'un crâne...



Ce crâne apparait mieux sur cette photographie qui fut prise sous l'angle voulu. On pense que la présence de ce crâne symbolisait l'intérêt philosophique assez morbide de l'ambassadeur représenté. (Il s'agit de Jean de Dinteville, ambassadeur de France en Angleterre en 1536)

Ce dessin montre en tout cas la parfaite connaissance que le peintre avait de la perspective. Nous sommes ici 80 années après les découvertes d'Uccello et l'on peut voir que la technique a bien évolué.

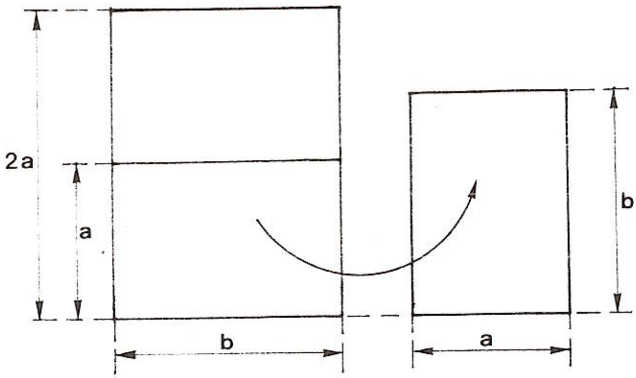
PAOLO DI DONO, connu sous le surnom d'UCCELLO (des oiseaux) est né près de Florence en 1397. A 10 ans il travaille dans l'atelier du sculpteur Lorenzo Ghiberti alors en train de réaliser les portes de bronze de la cathédrale de Florence, qui sont considérées aujourd'hui comme l'une des pièces maîtresses de l'histoire de l'art. Ucello rejoint à 17 ans une confrérie de peintre et travaille ensuite de 1425 à 1431 à Venise comme fabricant de mosaïques.

En 1436, il réalise pour la cathédrale de Florence une fresque représentant un cavalier vu avec un point de fuite: c'est le début historique de la perspective. Ses plus célèbres peintures sont une série consacrée à la bataille de San Romano (en 1432, opposant les Florentins à Sienne) actuellement dispersés dans les plus grands musées du monde.

On a aussi conservé de lui des gravures qui montrent la méticulosité de son analyse et son désir profond d'essayer de représenter la nature soumise à des lois rigoureuses de perspective. On pense qu'il y fut aidé par le mathématicien Paolo Toscanelli dont on sait peu de choses. Uccello eut une influence certaine sur les grands architectes de Florence de ce temps : Philippo Brunelleschi et Leon Alberti, ainsi que sur Leonard de Vinci et l'allemand Dürer. Uccello est mort en 1475.

Le format du papier

Dans la masse d'informations écrites qui nous envahit, vous êtes-vous déjà intéressé au format des différents papiers ? Il y maintenant près de 50 ans que le format du papier a été défini. Voici comment on s'y est pris.



Prenons une feuille rectangulaire de format quelconque : longueur : a et largeur b. Si nous plaçons deux telles feuilles côte à côte pour former un rectangle de longueur 2a et de largeur b, existe-t-il des valeurs de a et b pour que les deux rectangles soient semblables ? Mathématiquement, cela revient à :

$$\frac{2\,a}{b} = \frac{b}{a}$$

ou $b^2 = 2\,a^2$ ou $b = a\sqrt{2}$ ou encore : $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

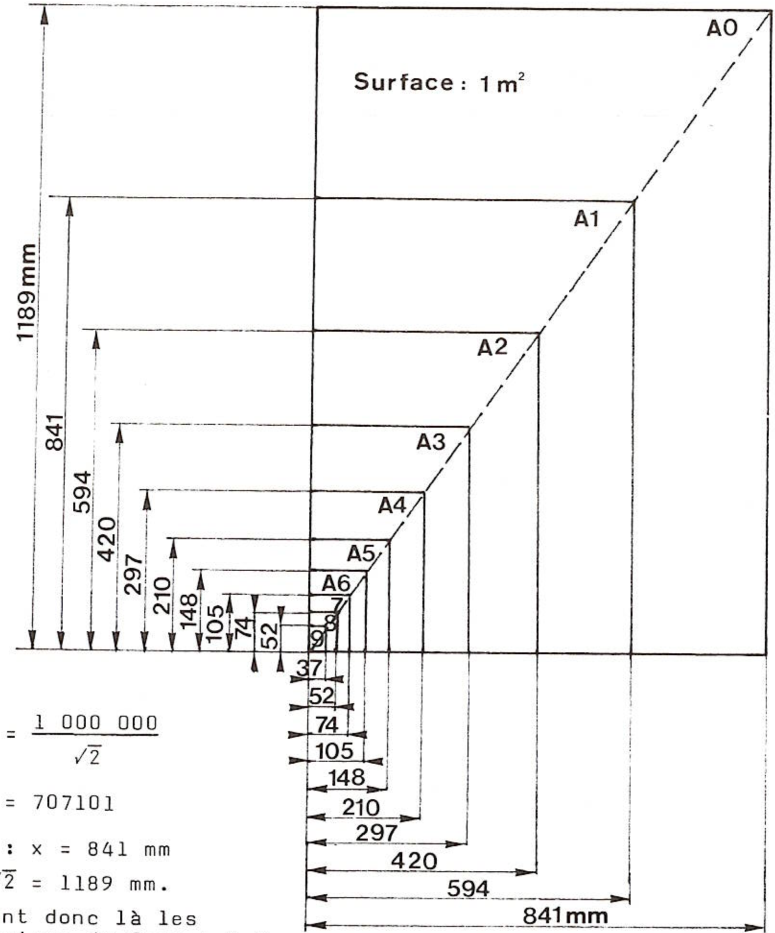
Ainsi, si l'on coupe en deux une feuille dont le rapport des dimensions est $\sqrt{2}$, on obtiendra, sans aucune perte de papier, deux feuilles d'un format semblable et forcément de surface 2 fois plus petite.

Mesurer la page de votre Math-Jeunes, vous trouvez ± 210 et ± 150 ce qui donne un rapport de ± $\sqrt{2}$. De même, si vous mesurez deux pages contigues de M-J, vous trouverez ± 300 et ± 210 ce qui donne à nouveau un rapport proche de $\sqrt{2}$. (Chacune des mesures est en mm.)

En fait, le format de M-J fermé est le format A-5 qui est moitié du format A-4, lui-même moitié du format A-3, lui-même moitié ... jusqu'au format A-0. Ce format de base étant par convention une surface d'une aire valant 1 m^2.

Si x est le petit côté du format A-0, $x\sqrt{2}$ sera la longueur et:

$$x^2\,\sqrt{2} = 1m^2 = 1\,000\,000\ mm^2$$



$$x^2 = \frac{1\ 000\ 000}{\sqrt{2}}$$

$$= 707101$$

d'où : $x = 841$ mm

et $x\sqrt{2} = 1189$ mm.

Ce sont donc là les dimensions du format A-0.

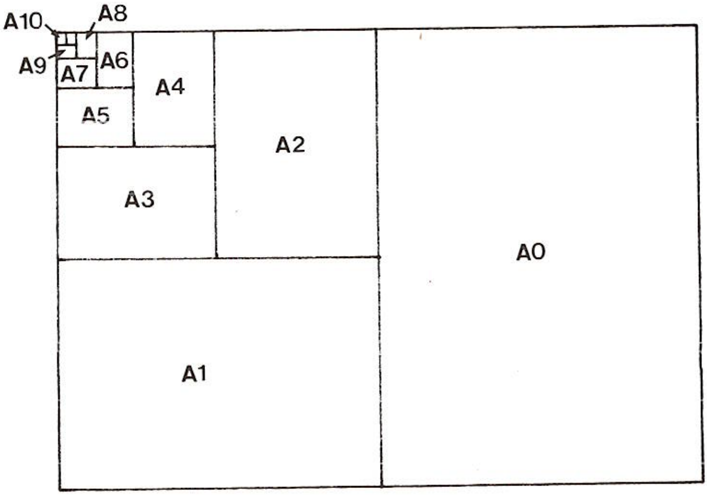
La longueur du format A-1 sera donc la largeur du format A-0, soit 841 mm. La largeur du format A-1 vaudra:

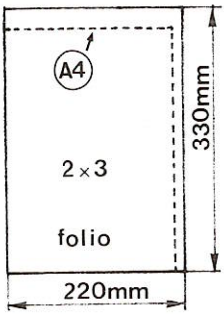
$$\frac{841 \text{ mm}}{\sqrt{2}} = 594 \text{ mm}$$

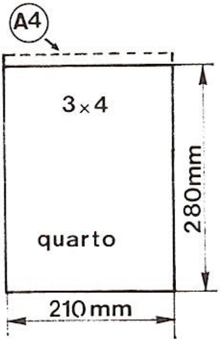
et ainsi de suite ...

Il existe aussi un format A-10 de 26 x 37 mm qui est celui de certains timbres postes.

Deux autres formats du papier coexistent : le *folio* et le *quarto*. Le folio est basé sur un rapport largeur-longueur de





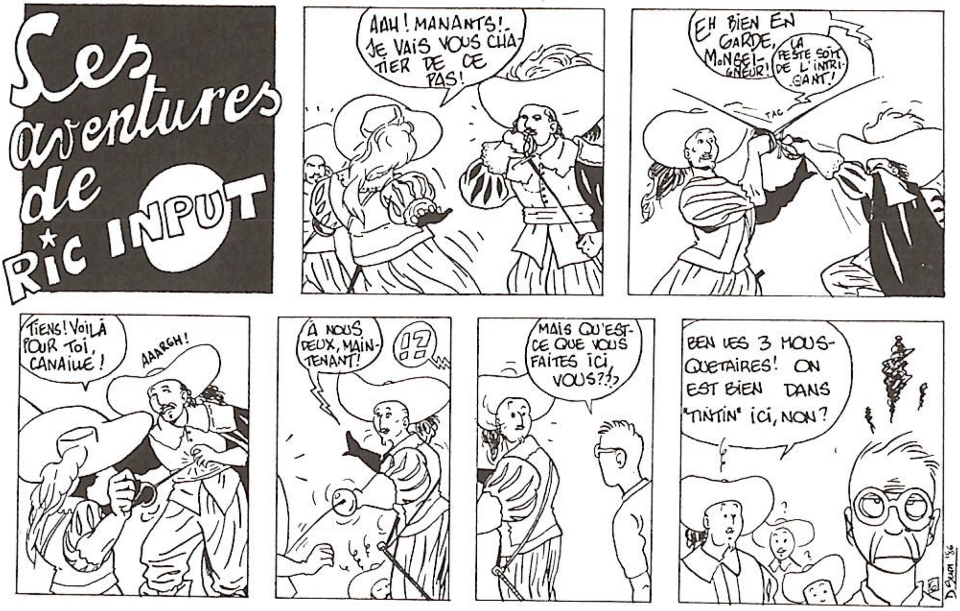


2 à 3. Lorsque l'on double un tel format, on obtient un rapport de 3 à 4. et en doublant à nouveau, on retrouve format de rapport 2 à 3. Le format 220 mm x 330 mm donne le point de départ de cette série.

L'autre format est le quarto, basé sur un rapport de 3 à 4, qui doublé donne un rapport de 2 à 3. Le point de départ est là de 210 mm x 280 mm.

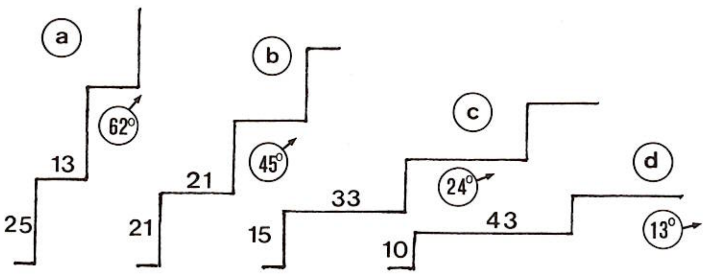
En termes d'imprimerie, la définition est légèrement différente : on parle d'un format in-folio si la feuille imprimée est pliée en deux après son passage à la presse; on parle d'un format in-quatro si la feuille imprimée est pliée en quatre après son passge à la presse.

Une feuille pliée en quatre permet donc l'impression de huit pages de livres: c'est le mode d'impression de votre Math-Jeunes et c'est là la raison pour laquelle le nombre de page de M-J est toujours un multiple de 8 (24 dans notre cas).



La formule de l'escalier

Pour passer d'un étage à l'autre d'une maison, on utilise souvent un escalier. *(Que voilà une réflexion puissante !)* Un escalier se compose de marches (là où vous mettez le pied) et de contre-marches (l'espace vertical). Votre arrière-grand-mère, qui en a vu d'autres, vous dira qu'il y a des escaliers faciles et des escaliers bien difficiles! Et bien, les menuisiers ont des formules pour expliquer celà...



Posons x la longueur de la marche et y la hauteur de la contre-marche. Intuitivement, un escalier paraitra dur lorsque y est plus grand que x.

L'escalier (a) se caractérise par $x = 13$ et $y = 25$, l'angle moyen de cet escalier peut se calculer par $\operatorname{tg} \alpha = y/x = 25/13 = 1{,}923$ et donc $\alpha = 62^\circ$. Ce sera un escalier très dur.

L'escalier (b) où les marches et contre-marches ont même taille se caractérise bien sûr par un angle de 45°.

Les escaliers (c) et (d) qui font penser à des escaliers de terrasses ont respectivement une pente de 24° et de 13°.

Il semble ainsi clair qu'il vaut mieux un escalier de type (d) qu'un de type (a) dans sa maison ; oui, mais voilà, un escalier (d) consomme plus de place qu'un escalier de type (a). Ce qui entre parenthèses, explique le fait que les escaliers d'anciennes maisons sont souvent plus durs que ceux des nouvelles constructions, car l'espace comptait plus dans le temps.

Les charpentiers sont arrivés expérimentalement à déclarer qu'un escalier sera facile si la relation

$$2y + x = 63$$

est vérifiée. Les quatre escaliers de la page précédente vérifient cette relation et sont donc considérés comme faciles par les charpentiers. Si l'on dispose de peu de place, un escalier avec $x = 13$ et $y = 28$ serait considéré comme difficile.

Il vous reste à vérifier si l'escalier de votre maison est facile ou non ...

Un jeu à programmer

Voici un jeu que vous pourriez programmer sur votre micro.

trois nombres a,b et m sont choisis au hasard, en respectant les conditions suivantes :

$$3 \leqslant a \leqslant 10 \quad , \quad 3 \leqslant b \leqslant 10 \quad , \quad a \neq b \quad , \quad 10 \leqslant m \leqslant 20$$

Une grille de largeur m est remplie de nombres, selon le schéma suivant :

1	2	3	...	m
m+1	m+2	m+3	...	2m
2m+1	...			

Les cases contenant un multiple de a ou de b sont coloriées, les autres restent blanches. Une fenêtre carrée de 10x10 est découpée au hasard par le programme et affichée à l'écran.

En voyant la fenêtre, vous devez essayer de retrouver les nombres a et b que votre micro avait choisi. Bonne programmation!

Des moyennes

Calculer la moyenne de deux ou plusieurs nombres, voilà une activité bien banale... Certains d'entre vous savent déjà qu'à côté de la moyenne arithmétique, d'autres telles la géométrique, la quadratique ou l'harmonique rendent bien des services.

Ainsi, pour deux réels a et b strictement positifs, avec $a \leqslant b$, on a :

moyenne arithmétique.

$$m = \frac{a+b}{2}$$

moyenne géométrique.

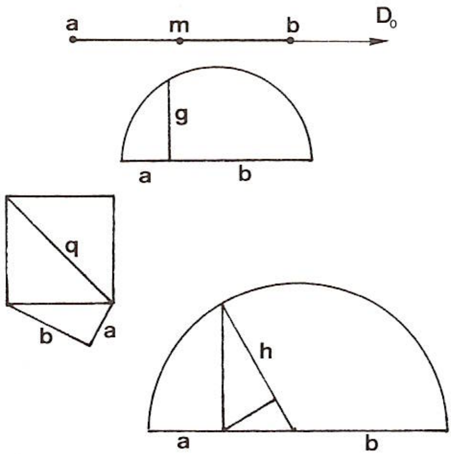
$$g = \sqrt{a\ b}$$

moyenne quadratique.

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

moyenne harmonique.

$$h = \frac{2ab}{a+b}$$



Si les relations métriques dans un triangle rectangle n'ont pas de secrets pour toi, tu vérifieras aisément la "version géométrique" des formules définissant les diverses moyennes.

Mais finalement, que veut dire l'expression "prendre la moyenne de deux nombres" ? Nous admettrons aisément que l'on peut qualifier de moyenne tout réel x positif compris entre a et b.

Par exemple:

$$a \leqslant b$$

implique que

$$a^2 \leqslant ab \qquad \text{et} \qquad ab \leqslant b^2$$

et puisque a et b sont positifs :

$$a \leqslant \sqrt{ab} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{ab} \leqslant b$$

et en regroupant les résultats :

$$a \leqslant g \leqslant b$$

Tu peux justifier de la même manière pour les autres moyennes connues.

Un calcul algébrique élémentaire te permettra aussi de vérifier que les quatre moyennes définies plus haut se retrouvent toujours dans le même ordre :

$$h < g < m < q$$

Ainsi, pour $a = 4$ et $b = 9$, on a : $h \simeq 5{,}54$
$g = 6$
$m = 6{,}5$
$q \simeq 6{,}96$

Avec un peu de curiosité, l'amateur de moyenne cherchera bien sûr à en découvrir d'autres et à les comparer aux précédentes.

Ainsi, $\sqrt{\dfrac{a^3+b^3}{a+b}}$, $\dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$, ou même une moyenne asymétrique : $\dfrac{a+2b}{3}$. Il y a sans doute bien des découvertes à faire ...

Le mathématicien est toujours tenté par les généralisations, par la "belle" formule. La suivante est assez remarquable :

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

où x désigne un réel quelconque, et où a et b sont toujours des réels strictement positifs.

Si $x = 1$, nous avons bien la moyenne arithmétique.

Si $x = 2$, nous avons

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} ,$$

ce qui est bien la moyenne quadratique.

Si $x = -1$,

$$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} =$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$, c'est notre moyenne harmonique.

Et si nous faisons tendre x vers 0, la calculette nous permettra facilement de vérifier que le résultat tend vers $\sqrt{ab}$, soit notre moyenne géométrique.

Pour les amateurs de recherches plus théoriques, si

$$\mu_x = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

est une moyenne de a et b positifs de "balance" x, on peut montrer que pour deux balances de moyennes x et y, on a:

$$x \leqslant y \Rightarrow \mu_x \leqslant \mu_y \qquad (1)$$

Ceci est évident lorsque l'on a démontré que la fonction μ_x est une fonction de x toujours croissante.

Soient deux moyennes μ_x et μ_y dont le produit vaut le produit ab, on a dans ce cas :

$$x = - y \qquad (2)$$

Ainsi, le produit de la moyenne arithmétique (m) de deux nombres par leur moyenne harmonique (h) donne le produit des deux nombres (ab); et on a x=1 et y = -1. Voilà des moyennes bien complémentaires ...

Troisième résultat : on observe toujours :

$$\left(\frac{a}{\mu_x} \right)^x + \left(\frac{b}{\mu_x} \right)^x = 2 \qquad (3)$$

Et peut-être seras-tu capable maintenant, pour une moyenne donnée de calculer sa balance ...

J.P.ANDRIEN.

Le coin des problèmes

135 Histoire de développement.

Le développement d'un parallélipipède rectangle dont aucune face n'est un carré se présente dans le plan comme un ensemble de six rectangles qui se "touchent" par un côté. On déclare de même type deux développements lorsque l'un d'eux est l'image de l'autre par une isométrie. Combien y-a-t-il de types différents de développement ? Comment les classer logiquement ?

136 Histoire de prénom.

Chaque lettre désigne un chiffre déterminé; le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes. Saurez-vous résoudre ce rébus ?

```
  DONALD
+ GERALD
--------
  ROBERT
```

137 Le carreleur masochiste.

Un carreleur doit paver un certain rectangle avec 9 carreaux carrés mesurant 1,4,7,8,9,10,14,15 et 18 cm de côté. On lui affirme qu'un tel rectangle existe. Pourrez-vous le découvrir ?

138 Les graduations.

Une droite est doublement graduée. On connait les abscisses a et b de deux points dans la première graduation et les abscisses correspondantes c et d dans la deuxième graduation.

a) on suppose qu'il existe un point qui a la même abscisse dans les deux graduations. Calculer cette abscisse en fonction des nombres a,b,c et d. Préciser la condition d'existence de ce point.

b) A quelle(s) condition(s) ce point est-il d'abscisse nulle?

139 Contestation sur une moyenne.

Anne s'est vu confié par sa mère un manuscrit à taper à la machine. Elle décida de taper en moyenne 20 pages par jour. Mais, manquant d'habitude, elle tape la première moitié du manuscrit à raison de 10 pages par jour seulement. Puis elle réussit à adopter un rythme de 30 pages par jour, et son travail une fois achevé, elle se vanta davant sa mère d'avoir réalisé la moyenne prévue.

"Tu fais erreur, affirma la mère en souriant.
Comment 10 + 30 = 40; 40 : 2 = 20. J'ai comblé mon retard de la première moitié en faisant 10 pages de plus par jour pour la seconde partie du manuscrit !
Il n'en reste pas moins, répliqua la mère que tu as tapé en moyenne moins de 20 pages par jour. Réfléchis bien! "

A qui donnez-vous raison ? A Anne ou à sa mère ?

140 Triangle isocèle.

L'unité de longueur étant choisie, on considère les expressions :

$a = x^2 + x + 1, \quad b = 2x + 1, \; c = x^2 - 1 \quad$ avec $x > 1$

a,b,c peuvent-ils être les mesures de longueur des côtés d'un triangle isocèle ?

141 Parcmètre.

Je dois m'arrêter 10 minutes dans une boutique en plein centre: j'hésite à payer le parcmètre (20 fr. la demi-heure). L'agent de police fait sa ronde toutes les 2 heures et l'amende risquée est de 480 fr..Je demande alors au cafetier du coin s'il a vu passer l'agent de police pendant l'heure précédente. Mais la réponse ainsi obtenue est inexacte une fois sur quatre, autant parce que le cafetier croit à tort l'avoir vu, que parce qu'il ne l'a pas vu alors qu'en réalité, l'agent est passé. Que feriez-vous alors à ma place (en faisant abstraction de toute règle de morale) : payer les 20 fr. du parcmètre d'office ou bien ne les payer que si le cafetier affirme que l'agent n'est pas passé pendant l'heure précédente ?

Les nombres d'Amstrong

Les nombres d'Amstrong (nous n'avons pu trouver, malgré toutes nos recherches, de qui il s'agissait!) sont des nombres égaux à la somme des cubes des chiffres qui le composent. Analysons ce problème pour voir s'il nous est possible de les trouver par des moyens numériques.

On constate d'abord que 1 est un nombre d'amstrong, puisque $1^3 = 1$. De tels nombres existent donc. Voyons à présent le problème suivant le nombre de chiffres du nombre d'Amstrong.

Si le nombre a un chiffre, la somme des cubes de ce chiffre varie entre 1 (1x1x1) et 729 (9x9x9)

Nombre : 1 — 9
Somme : 1 — 729
Intersection non vide.

Si le nombre a deux chiffres, la somme des cubes de ses chiffres varie entre 1 (1x1x1 + 0x0x0) et 1458 (2 x (9x9x9))

Nombre : 10 — 99
Somme : 1 — 1458
Intersection non vide

Si le nombre a trois chiffres, la somme des cubes de ses chiffres varie entre 1 (1x1x1 + 2 x (0x0x0))et 2187 (3 x (9x9x9))

Nombre : 100 — 999
Somme : 1 — 2187
Intersection non vide

Si le nombre a quatre chiffres, la somme des cubes de ses chiffres varie entre 1 (1x1x1 + 3 x (0x0x0)) et 2916 (4 x (9x9x9))

Nombre : 1000 — 9999
Somme : 1 — 2916
Intersection non vide

Si le nombre a cinq chiffres, la somme des cubes de ses chiffres varie entre 1 (1x1x1 + 4 x (0x0x0)) et 3645 (5 x (9x9x9))

Nombre : 10000 — 99999
Somme : 1 — 3645
Intersection vide

.ısi, le dernier nombre d'Amstrong possible est 2916.

Pour savoir si un nombre convient, il faudra le décomposer en ses chiffres et calculer la somme des cubes. La limite 2916 ayant 4 chiffres, ceux-ci s'obtiennent mathématiquement par :

N est le nombre à tester

millier :	N1	= INT (N/1000)
centaine :	N2	= INT (N/100) - N1 * 10
dizaine :	N3	= INT (N/10) - N1 * 100 - N2 * 10
unité :	N4	= N - N1 * 1000 - N2 * 100 - N3 * 10

D'un point de vue informatique, il faudra se méfier des approximations créées par le calcul de la fonction puissance (^) (On a : $5^3 - 125 = 2,98023224$ E-8 sur le micro de la rédaction ...)

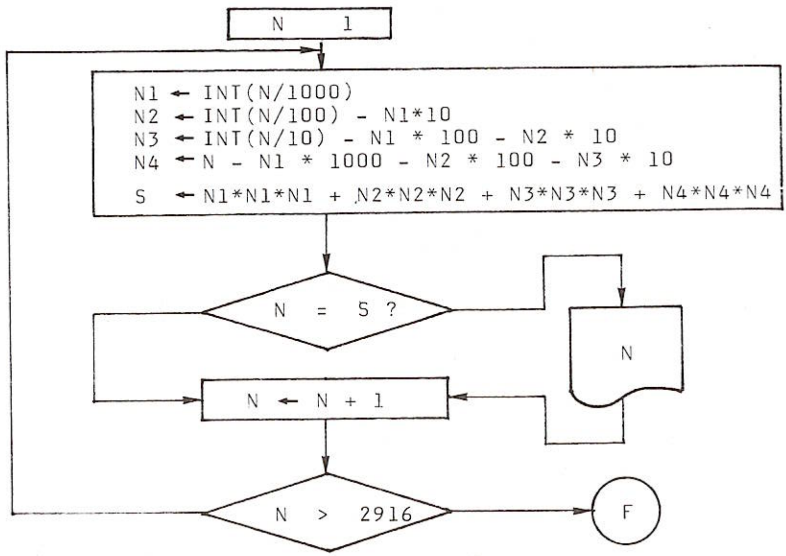
On peut y remédier par :

INT (N1^3 + N2^3 + N3^3 + N4^3 + 0.5)

ou encore en remplaçant x^3 par x*x*x

On peut aussi analyser les chiffres d'un nombre en trans formant celui-ci en une chaîne (STR$), en le décomposant (MID$) et en retransformant les chaînes-chiffres en chiffres (VAL).

Voici l'organigramme de ce problème :



Saurez-vous trouver les nombres d'amstrong ?

Qui a écrit ceci?

... Il y en avait qui jouaient au go pendant que d'autres discutaient de mathématiques, c'est-à-dire essentiellement de topologie, car c'est ce qui était alors en vogue parmi les mathématiciens.

Je me souviens très bien d'une conversation entre un individu à moitié vautré sur un divan, ayant l'air de penser profondément et un autre debout devant lui. "D'ou il s'ensuit, disait celui qui était debout, que telle et telle chose sont vraies.
- Oui, mais pourquoi ? lui demandait celui qui était allongé.
- Mais c'est trivial voyons ! Supposons d'abord que... or d'après le théorème de ... Si maintenant j'utilise l'égalité de ..., j'en déduis que... Je remplace alors ça par ça dans ça... Je déplace le vecteur truc..." Et ainsi de suite pendant un quart d'heure. Et pendant ce temps-là, l'autre sur son divan essayait désespérément de comprendre, pour finalement conclure lui aussi : "Oui, c'est trivial."

Nous, les physiciens, tout ça nous faisait bien rire et nous n'arrêtions pas de faire des gorges chaudes de ce fameux trivial. Selon nous, "trivial" en mathématiques voulait simplement dire "démontré". Il y avait, disions-nous, un théorème de mathématiques qui disait que les mathématiciens ne peuvent démontrer que des théorèmes triviaux... puisque tout théorème démontré est trivial.

Les mathématiciens, évidemment, ne trouvaient pas ça drôle. Quant à moi, je prenais un malin plaisir à les faire enrager en leur disant que les mathématiques manquent singulièrement de suspense, puisque les mathématiciens ne peuvent démontrer que des choses évidentes.

PREMIERE EPREUVE DU CONCOURS

Envoyez-nous deux photos d'un même édifice pris sous des angles différents en déterminant pour chacune d'elles les points de fuite (2 ou 3). Vous pouvez coller les photos sur une feuille plus grande et prolonger les lignes parallèles sur le papier.

SOMMAIRE N° 33 - Automne 1986

Comité de rédaction:
F.Carlier, Gh. Marin, N. Miéwis, J. Vanhamme

Graphisme :
D. Seron

Edition :
J. Miéwis, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège

Nouveaux prix des abonnements :

Belgique : groupés(5 au moins) 80FB
isolés 120FB
par abonnement.

Etranger : y compris Pays-Bas et Luxembourg
par paquet de 5 abonnements : 800 FB
isolé : 240FB

Poster historique :
Belgique : 30FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60FB (240 FB par 5 unités)

Pour la Belgique : Cpte n° 001-0828109-96
de Math-Jeunes, Chemin des Fontaines,14bis,
7460 - Casteau.

Pour l'étranger : Cpte n° 000-0728014-29
de SBPMef, même adresse, à partir d'un compte
postal ou par mandat postal.

en communiquant nom et code postal de votre école.

En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.