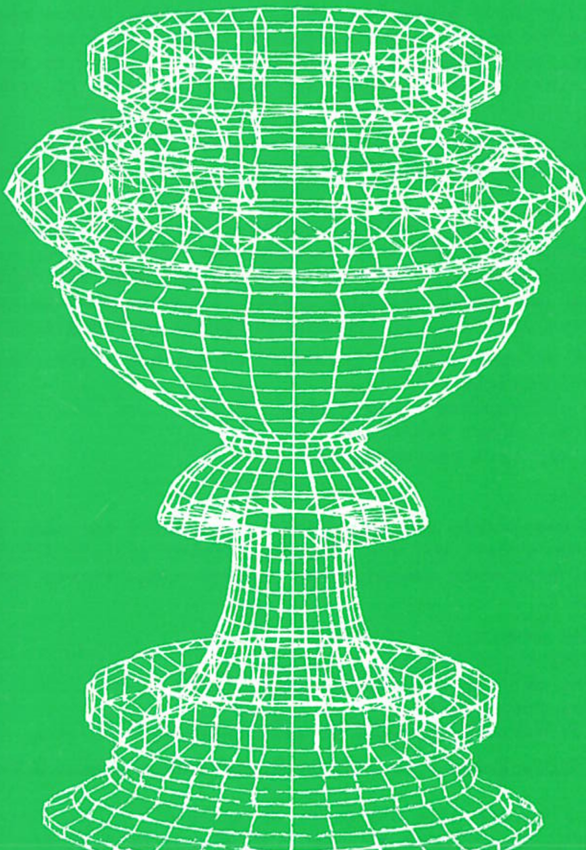
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression francaise - Association Sans But Lucratif

MATH-



JEUNES

Journal Trimestriel

9ème année Numéro 34 Hiver 1987

MESSAGE IMPORTANT

Chers amis,

En ce premier numéro de 1987, nous voulons tout d'abord vous présenter tous nos voeux de bonne santé et de bonne réussite de votre année scolaire. Nous espérons que vos résultats de Noël ne vous ont pas déçus et que c'est en pleine forme que vous attaquerez ce trimestre d'hiver.

Nombre d'entre vous auront l'occasion de participer au grand jeu des "Olympiades Mathématiques Belges" et nous leur y souhaitons plein succès.

Mais au milieu de toutes ces activités, nous vous demandons de prendre également le temps de nous envoyer vos réponses aux questions du concours de Math-Jeunes. N'hésitez pas à envoyer même des réponses partielles si vous ne pouvez résoudre toutes les questions. Le concours sera doté de nombreux prix fort intéressants. Citons en exemple :

- Une calculatrice programmable permettant l'affichage de graphes de fonctions
- Un chronomètre de précision
- Un balladeur (walk-man)
- Un appareil photographique

etc...

Vu l'importance des prix, vous comprendrez que nous désirons les réserver aux élèves qui sont personnellement abonnés à Math-Jeunes. C'est pourquoi nous vous demandons de joindre à vos envois les renseignements suivants :

Nom et prénom
Adresse personnelle
Nom et adresse complète de votre école
Classe fréquentée
Nom de votre professeur de mathématique

ainsi que la déclaration : Je suis personnellement abonné à MATH-JEUNES.

Dans l'attribution des prix, de manière à ne pas désavantager les plus jeunes, nous tiendrons compte du niveau atteint dans vos études.

Bon travail, bonne chance

La Rédaction

Quelle est la meilleure base?

Si nous écrivons les nombres sous la forme d'une suite de chiffres, et si nous utilisons une numération de position, c'est que nous avons admis le principe de la *base*. Cela signifie que la suite de chiffres :

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0$$

est mise pour

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n .$$

Ici, b est un naturel (appelé la *base*) et $a_0, a_1, \ldots$ satisfaisant à :

$$0 \leqslant a_i \leqslant b-1 \qquad i=0,\ldots,n$$

En représentant chacun des a_i par un symbole choisi dans un ensemble d'exactement b symboles (les chiffres), nous pouvons représenter un nombre arbitrairement grand par une suite -suffisamment longue- composée de ces symboles.

Toutes les sociétés qui ont développé une notion un peu avancée d'arithmétique ont utilisé la base 10. La raison communément avancée est que nous possédons 10 doigts et que les hommes ont d'abord compté sur leurs doigts. Les bases 20 et 60 furent utilisées respectivement par les Mayas et les Babyloniens, mais il s'agit là des deux seules exceptions au système de base 10. Des recherches furent effectuées sur les bases 2, 5 et même la très curieuse 47. On sait aussi que l'informatique a utilisé 8 et 16.

De temps en temps, resurgit un projet de modifier notre base et de la mener à 12. Le célèbre mathématicien AITKEN a consacré une grande part de son énergie à la défense de ce problème. Il existe aux Etats-Unis une "Société de promotion de la base duodécimale".

Mais, soyons sérieux, un tel changement ne se produira plus : nous sommes trop engagés dans l'emploi de la base 10 au niveau de nos recherches. L'obstacle anthropologique que serait l'abandon de la base 10 paraît insurmontable. Cet article essaiera de montrer que 10 n'est pas une si mauvaise base. Pour juger de cette question, nous allons examiner les besoins des mathématiciens.

Tout d'abord, si une base est b, il y a exactement b symboles différents. La plus petite des bases possibles est 2, et elle nous donne l'arithmétique binaire bien connue, qui utilise les symboles 0 et 1. Le calcul binaire est des plus simple :

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 10,$$

où seule la dernière égalité est non triviale. La table de multiplication se résume en :

$$0 \times 0 = 0, \quad 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0, \quad 1 \times 1 = 1$$

ce qui est tout-à-fait trivial...

Ce qui est dérangeant avec le calcul binaire, c'est la longueur des nombres. C'est ainsi par exemple que 73 -qui est un nombre relativement petit- se décompose en 64 + 8 + 1 et se représente donc en binaire par 1001001.

En général, si b est la base et n un nombre naturel, l'écriture d'un nombre en base b comporte

$$1 + [\log_b n]$$

où l'écriture $[x]$ représente "le plus grand naturel inférieur ou égal à x". *(voir l'encadré pour cette fonction* $\log_b$*.)*

Ainsi, en base 10, $\log_{10} 73 \simeq 1,86$ ce qui implique que 73 s'exprime par deux chiffres. Par contre en base 2,

$$\log_2 73 = \frac{\mathrm{Ln}\ 73}{\mathrm{Ln}\ 2} = \frac{\frac{\mathrm{Ln}\ 73}{\mathrm{Ln}\ 10}}{\frac{\mathrm{Ln}\ 2}{\mathrm{Ln}\ 10}} = \frac{\log_{10} 73}{\log_{10} 2} \simeq \frac{1,86}{0,30} = 1,86 \times 3,3 = 6,1$$

ce qui implique que 73 s'exprime avec 7 symboles. Pour les grands nombres, on peut dire que le nombre en base 2 possède 3,3 fois plus de chiffres que s'il est exprimé en base 10.

On peut aussi s'intéresser à la taille de la table de multiplication d'une base, c'est-à-dire aux nombres de résultats que l'on doit mémoriser si l'on néglige les résultats triviaux de type $a \times 0 = 0$ et $a \times 1 = 1 \times a = a$ et si l'on tient également compte de la commutativité.

Des b chiffres 0,1,2, ...,b-1, on omet 0 et 1, ce qui nous en laisse b-2. Les $(b-2)^2$ produits se répartissent par paires à l'exception de (b-2) d'entre eux, carrés parfaits. Il faudra donc étudier

$\frac{1}{2}\left((b-2)^2 - (b-2) \right)$ produits de deux nombres différents

et (b-2) carrés. La taille de la table de multiplication sera :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\left((b-2)^2 - (b-2) \right) + (b-2) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(b^2 - 4b + 4 - b + 2 + 2b - 4 \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(b^2 - 3b + 2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(b-1 \right)\left(b-2 \right) \end{aligned}$$

Lorsque a est un réel strictement positif différent de l'unité,
b est un réel strictement positif,
c est un réel,

on a défini le concept de *LOGARITHME DE BASE* a par l'équivalence :

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Ainsi, $\log_3 81 = 4$ puisque $3^4 = 81$

$\log_2 0{,}125 = -3$ puisque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$\log_{0,4} 0{,}16 = 2$ puisque $0{,}4^2 = 0{,}16$

On démontre facilement (?) que ces logarithmes peuvent se calculer à partir de la fonction Ln (logarithme népérien) de vos machines, la formule est:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\text{Ln } b}{\text{Ln } a}}$$

On démontre également que lorsque la base a est supérieure à 1, la fonction $\log_a$ est une fonction strictement croissante.

Examinons le cas de la base 10 (nous y sommes plus habitués!), mais le résultat qui suit est vrai pour toute base supérieure à l'unité. (ce qui est toujours le cas dans les bases de système de numération).

$\log_{10} 100 = 2$ puisque $10^2 = 100$; $\log_{10} 1000 = 3$ puisque $10^3 = 1000$. Mais puisque la fonction $\log_{10}$ est croissante, le $\log_{10} k$ avec $100 < k < 1000$ doit s'écrire 2,... dont la partie entière est 2. Or les nombres k ont tous trois chiffres!

C'est pourquoi le nombre de chiffres d'un nombre $k > 1$ dans la base 10 vaut la partie entière du logarithme en base 10 de ce nombre k, augmentée d'une unité.
Cette partie entière du logarithme porte le nom de *caractéristique* du logarithme.

Les fonctions $\log_a$ jouissent par ailleurs de propriétés étonnantes :

$\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$ (m et n réels > 0)

$\log_a(m^k) = k \times \log_a m$ (m réel > 0, k rationnel)

Voici par exemple la table de multiplication de base 6 :

(b=6)

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	12	15
4	0	4	8	12	16	20
5	0	5	10	15	20	25

} 2 rangées négligées : reste $(b-2)^2$

(b-2) carrés

"triangle" à mémoriser : $\frac{1}{2}$ (6-1)(6-2) = 10

Base	Taille de la table de multiplication
2	0
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	28
10	36
11	45
12	55
13	66
14	78
15	91
16	105

En tenant compte des difficultés scolaires liées à l'apprentissage des tables de multiplication, on peut décider que la base 16 est peu confortable !

Un autre argument avancé pour le choix d'une base est le problème de l'emballage. Si nous devons emballer b objets identiques, nous espérons obtenir le résultat le plus compact possible. Cet argument favorise les bases 8 (2 x 2 x 2) et 12 (2 x 2 x 3) et défavorise la base 10 (2 x 5). Pourtant peu de gens sont tracassés par ce problème car on ne rencontre jamais la douzaine (?) d'oeufs sous la forme 3 x 4 x 1 ou 2 x 2 x 3 !

On peut aussi invoquer des raisons psychologiques quand on souhaite que b soit pair car l'homme aime pouvoir diviser par deux. Les bases paires nous permettent d'apprécier, d'un simple coup d'oeil au dernier chiffre, la divisibilité du nombre par 2. En base 3, par exemple, 73 se représente par 2201 et 75 par 2210 et ces deux nombres sont impairs; ce qui n'est pas immédiatement apparent dans leurs écritures en base 3.

Il existe d'autres règles plus subtiles pour découvrir les critères de divisibilité. En base 10, nous déterminons la divisibilité par 3 par l'usage d'une règle que je nommerai $\underline{A_1}$: elle consiste à additionner les chiffres par blocs de $\underline{1}$. 73 donne 7+3 = $1\overline{0}$ et 1+0 = 1 ce qui est le reste de la division de 73 par 3. (En base 3, nous regarderions simplement le dernier chiffre!)

Pour vérifier la divisibilité par 5, on regardera simplement le dernier chiffre puisque 10 est un multiple de 5.

La divisibilité par 7 est plus délicate : nous utilisons une règle S_3, additions et soustractions alternées par blocs de 3, ce qui est dû au fait que 7 divise 10^3+1. Ainsi pour savoir si 7 divise 1 031 426 859 314, on écrit :

$$1 - 031 + 426 - 859 + 314 = -149$$

qui n'est pas divisible par 7.

La divisibilité par onze se voit par la même règle, mais S_1 convient aussi. Pour ce qui est de 13, on utilise S_3.

En base 8, la divisibilité par 2 se vérifie en considérant le dernier chiffre. Pour 3, la règle est S_1 puisque 3 divise 8+1 ; 5 est testé par S_2 puisque 5 divise 8^2+1. 7 est simple puisque 7 = 8 - 1 (règle A_1) Onze donne bien du souci car les puissances de 8 ± 1 laissent des restes valant 0,2 ou 4: quant à 13, on utilise la règle S_2, puisque 13 divise 8^2+1.

En systématisant et en généralisant ces observations, on déduit qu'une base idéale (b) est telle que b-1, b+1, b^2+1, b^3+1, b^3-1 et bien sur b, sont riches de diviseurs premiers petits. (Nous négligeons b^2-1 comme produit de b-1 et b+1)

Base	liste de diviseurs premiers de :					
	b	b-1	b+1	b^2+1	b^3-1	b^3+1
8	2	7	3	5,13	73	19
9	3	2	5	41	7,13	73
10	2,5	3	11		37	7,13
11		2,5	3	61	7,19	37
12	2,3	11	13	5,29	157	19
13		2,3	7	5,17	61	157
14	2,7	13	3,5		211	61
15	3,5	2,7		113	241	211
16	2	3,5	17		7,13	241

De ce point de vue, le choix doit se porter entre 10 et 12, en remarquant toutefois que douze mène à des règles plus simples. (*)

Un dernier point de vue pourrait être de considérer l'expression b-cimale (si b=10, on dit: décimale!) des fractions simples. C'est ainsi que la base 10 donne :

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{3} = 0,33...$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{1}{5} = 0,2$

$\frac{1}{6} = 0,166...$ $\frac{1}{7} = 0,142857...$ $\frac{1}{8} = 0,125$ $\frac{1}{9} = 0,1...$

(*) pour plus de détails, voir l'encart sur les caractères de divisibilité.

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ $\frac{1}{11} = 0{,}09\ldots$ $\frac{1}{12} = 0{,}083\ldots$ $\frac{1}{13} = 0{,}076923\ldots$

et ainsi de suite... On remarque que seulement deux de ces fractions possèdent des périodes longues.

En base 12, en notant X pour 10 et ε pour 11, nous obtenons pour ces mêmes fractions écrites en base 10, l'écriture duodécimale suivante :

$\frac{1}{2} = 0{,}6$ $\frac{1}{3} = 0{,}4$ $\frac{1}{4} = 0{,}3$ $\frac{1}{5} = 0{,}2497\ldots$

$\frac{1}{6} = 0{,}2$ $\frac{1}{7} = 0{,}186X35186$ $\frac{1}{8} = 0{,}16$ $\frac{1}{9} = 0{,}14$

$\frac{1}{10} = 0{,}1249724\ldots$ $\frac{1}{11} = 0{,}111\ldots$ $\frac{1}{12} = 0{,}1$ $\frac{1}{13} = 0{,}0\varepsilon0\varepsilon0\varepsilon\ldots$

ce qui peut paraître plus simple. La base 8 n'est pas mal de ce point de vue, bien que présentant une période de 10 chiffres dans l'écriture de 1/11. La base 16 est très bonne, la première grande période (de 9 chiffres) ne se rencontrant qu'avec la fraction 1/19.

L'environnement informatique a rendu classiques les bases 8 et 16; c'est pourquoi on imagine mal un changement dans une autre direction. Le choix de la base 16 nous mènerait à une grande table de multiplication et à l'emploi de 6 nouveaux "chiffres": elle semble pourtant le choix logique.

Mais en conclusion, le mieux est quand même de rester à la base 10 : elle n'est pas si mauvaise et puis il y a l'habitude...

Cet article a été publié par la revue FUNCTION, vol9,n°1 de février 1985, notre confrère australien. Un accord de réciprocité nous en permet la traduction dans votre Math-Jeunes.

Caractères de divisibilité

Pour rechercher un caractère de divisibilité par un naturel donné d, on considère un naturel quelconque A que l'on met sous la forme $A = \mathfrak{M}d + k$, c'est-à-dire que l'on décompose en une somme de deux termes dont l'un est multiple de d et l'autre le plus petit possible. La condition nécessaire et suffisante pour que A soit multiple de d est que k le soit.

La méthode pratique se ramène à chercher si il existe une puissance p de la base telle que $b^p \pm 1$ soit multiple de d. Pour la clarté -et par habitude-, nous poserons b = 10, mais le principe est le même dans d'autres bases.

1. Admettons que $10^p + 1$ est multiple de d

Si l'on décompose A en blocs de p chiffres en commençant par la droite, on aura :

$$A = a_0 + a_1\ 10^p + a_2\ 10^{2p} + a_3\ 10^{3p} + \dots \text{ avec } a_i < 10^p$$

Et puisque 10^p est multiple de d - 1 ($10^p = \mathfrak{M}d - 1$)

$$A = a_0 + a_1\ (\mathfrak{M}d-1) + a_2\ (\mathfrak{M}d-1)(\mathfrak{M}d-1) + \dots$$

$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + \mathfrak{M}d$$

Ainsi A sera multiple de d ssi $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ (=k) est multiple de d.

Un tel critère se dit critère S_p (S pour marquer la présence alternée de soustraction et p pour indiquer que les blocs a_i contiennent chacun p chiffres.)

Exemple : de $10^3+1 = 1001 = 7 \times 143$, on peut déduire un critère de divisibilité par 7.

Soit A = 598 256 897; on a : $a_0 = 897$, $a_1 = 256$ et $a_2 = 598$;

puis k = 897 + 598 - 256 = 1239 qui est multiple de 7, donc A l'est aussi.

Dans la pratique, on peut améliorer le critère en remarquant que :

$$1 = \mathfrak{M}7 + 1$$
$$10 = \mathfrak{M}7 + 3$$
$$100 = \mathfrak{M}7 + 2$$

et les triplets peuvent se décomposer : ainsi $a_0 = 897 =$

$8 \times 100 + 9 \times 10 + 7 = 8\ (\mathfrak{M}7 + 2) + 9\ (\mathfrak{M}7 + 3) + 7\ (\mathfrak{M}7 + 1)$
$= 8 \times 2 + 9 \times 3 + 7 \times 1 + \mathfrak{M}7$

Ainsi dans chaque triplet , on multiplie les chiffres de droite à gauche respectivement par 1, 3 et 2 et on additionne les nombres obtenus. Cette façon de procéder donne pour le nombre A :

triplet a_0 : $8 \times 2 + 9 \times 3 + 1 \times 7 = 50$

triplet a_1 : $2 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 6 = 25$

triplet a_2 : $5 \times 2 + 9 \times 3 + 1 \times 8 = 45$

$k = a_0 - a_1 + a_2 = 50 - 25 + 45 = 70 = \mathfrak{m}7$.

La même règle S_3 peut servir de critère de divisibilité par 13 puisque $1001 = 13 \times 77$ et par 11 puisque $1001 = 11 \times 91$, mais dans ce cas la règle S_1 fonctionnait déjà puisque 11 ($= 10^1 + 1$) est multiple de 11 ...

2. Admettons que $10^p - 1$ est multiple de d
===

On décompose à nouveau A en blocs de p chiffres en commençant par la droite ce qui donne :

$$A = a_0 + a_1\, 10^p + a_2\, 10^{2p} + a_3\, 10^{3p} + \ldots$$

$$= a_0 + a_1\,(\mathfrak{m}d+1) + a_2\,(\mathfrak{m}d+1)(\mathfrak{m}d+1) + \ldots$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \mathfrak{m}d$$

Ainsi A sera multiple de d ssi $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ (=k) est multiple de d.

Un tel critère se dit critère A_p (A pour indiquer que l'on effectue une sommation et p pour indiquer le nombre de chiffres par blocs.)

<u>Exemple</u> : de $10^1-1 = 9 = 3 \times 3$, on peut trouver un critère de divisibilité par 3.

Soit A = 231 587; on a $a_0 = 7$, $a_1 = 8$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, et $a_5 = 2$; puis $k = 7 + 8 + 5 + 1 + 3 + 2 = 26$ qui n'est pas divisible par 3, donc A ne l'est pas.

Dans la pratique, on se sert des règles :

A_1 : diviseur(s) de $10^1 - 1$ (9) : 3 et 9

S_1 : diviseur(s) de $10^1 + 1$ (11) : 11

A_2 : diviseur(s) de $10^2 - 1$ (99) : 3 et 11 (inintéressants !)

S_2 : diviseur(s) de $10^2 + 1$ (101) : -

A_3 : diviseur(s) de $10^3 - 1$ (999) : 3 et 37

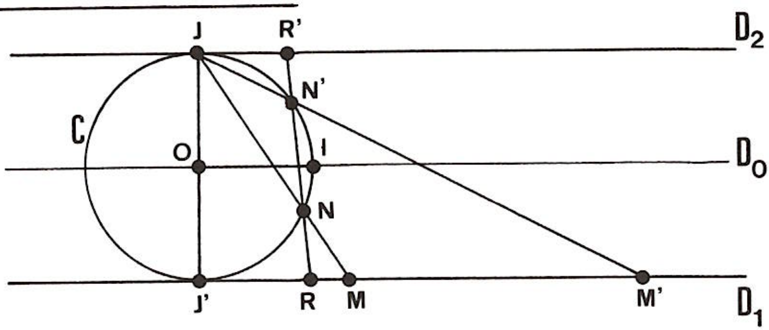
S_3 : diviseur(s) de $10^3 + 1$ (1001) : 7, 11 et 13

On remarque qu'il n'est pas utile d'étudier une règle A_2 car elle s'intéresse aux diviseurs de b^2-1 qui ne peuvent bien sûr être que des diviseurs de b-1 et b+1, donc des valeurs qui peuvent se tester par les règles S_1 et A_1. C'est pour une raison similaire que l'un des diviseurs testés par A_3 l'est par A_1 et que l'un des diviseurs testés par S_3 peut l'être plus simplement par la règle S_1.

L'équation du second degré

En 1842, le mathématicien Karl von Staudt a proposé une méthode géométrique pour la construction des racines de l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$ dans le cas où cette équation admet deux racines distinctes α et β.

1. Analyse du problème :



On considère le repère orthonormé (O,I,J) et le cercle C de rayon unité. D_1 et D_2 sont les tangentes au cercle aux extrémités du diamètre JJ'. En considérant J' origine de la droite orientée D_1, on porte sur cette droite les points M et M' d'abscisses α et β racines de $x^2 + px + q = 0$.

Dans le repère (O,I,J), nous calculons et construisons :

Equation de C : $x^2 + y^2 = 1$

Equation de JM : (qui contient $J(0,1)$ et $M(\alpha,-1)$) :

$$2x + \alpha y - \alpha = 0$$

Coordonnée de N :

$$\begin{cases} JM \equiv 2x + \alpha y - \alpha = 0 & (1) \\ C \equiv x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

On tire de (1) : $x = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha y)$, et en reportant cette valeur dans (2) :

$$\left(\frac{\alpha - \alpha y}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$$

ce qui se simplifie en :

$$(4 + \alpha^2)\, y^2 - 2\alpha^2 y + \alpha^2 - 4 = 0 \qquad (3)$$

Cette équation du second degré en y admet comme solution les ordonnées des points d'intersection N et J, or l'ordonnée de J est connue et vaut 1 ; par suite ce polynôme peut être divisé par (y-1) et le résultat cherché par une grille de Horner :

	$4 + \alpha^2$	$-2\alpha^2$	$\alpha^2 - 4$
		$4 + \alpha^2$	$4 - \alpha^2$
1	$4 + \alpha^2$	$4 - \alpha^2$	0

(3) s'écrit : $(y - 1)((4 + \alpha^2)y + 4 - \alpha^2) = 0$;
ainsi le point N admet l'ordonnée $\dfrac{\alpha^2 - 4}{4 + \alpha^2}$ et l'abscisse :

$$x = \frac{\alpha - \alpha y}{2} = \frac{\alpha - \alpha\left(\dfrac{\alpha^2 - 4}{4 + \alpha^2}\right)}{2} = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4} .$$

De même, en partant de l'équation de $JM' \equiv 2x + \beta y - \beta = 0$,

on trouve la coordonnée de N' : $\left(\dfrac{4\beta}{\beta^2 + 4} , \dfrac{\beta^2 - 4}{\beta^2 + 4} \right)$

Nous pouvons à présent trouver l'équation de la droite NN' :

$$NN' \equiv y - \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + 4} = \frac{\dfrac{\beta^2 - 4}{\beta^2 + 4} - \dfrac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + 4}}{\dfrac{4\beta}{\beta^2 - 4} - \dfrac{4\alpha}{\alpha^2 - 4}} \left(x - \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4}\right)$$

ce qui se simplifie (heureusement !) en :

$$NN' \equiv (4 - \alpha\beta) y - 2 (\alpha + \beta) x + \alpha\beta + 4 = 0 \qquad (4)$$

Par ailleurs, nous savons que si l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines α et β, alors :

$$\alpha + \beta = -p \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta = q .$$

L'équation (4) s'écrit alors :

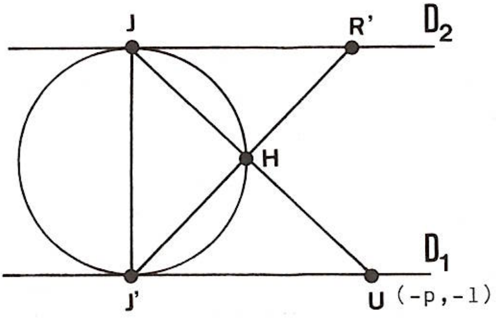
$$NN' \equiv (4 - q) y + 2px + q + 4 = 0$$

Le système $\begin{cases} NN' \equiv (4-q)y + 2px + q+4 = 0 \\ D_1 \equiv y = -1 \end{cases}$ fournit R : son abscisse sur D_1 orientée(origine = J') vaut $x = -\dfrac{q}{p}$

Le système $\begin{cases} NN' \equiv (4-q)y + 2px + q+4 = 0 \\ D_2 \equiv y = 1 \end{cases}$ fournit R' : son abscisse sur D_2 orientée(origine = J) vaut $x = -\dfrac{4}{p}$

En conclusion de cette première partie, une construction simple permet le passage de M et M' à R et R' (et réciproquement !)

2. A la recherche de R' :



Soit U un point d'abscisse (-p) sur D_1.

L'équation de JU est:

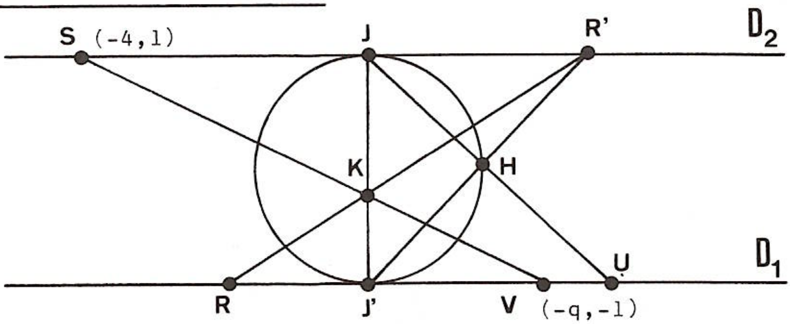
$JU \equiv py - 2x - p = 0$

Un calcul proche de celui qui permit de trouver N montre que:

$H : \left(\frac{-4p}{p^2+4} , \frac{p^2-4}{p^2+4} \right)$

On calcule $J'H \equiv p^2x + 2py + 2p = 0$ et le système $\begin{cases} J'H \\ D_2 \end{cases}$ donne bien pour abscisse de R' la valeur $-\frac{4}{p}$ espérée.

3. A la recherche de R :



Soient U le point d'abscisse -p et V le point d'abscisse -q sur D_1 et le point d'abscisse -4 sur D_2.(= point S)

L'équation de SV est : $SV \equiv (q-4)\, y - 2x - q - 4 = 0$

L'abscisse de K étant nulle, on trouve son ordonnée par le système $\begin{cases} JJ' \\ SV \end{cases}$: $y = \frac{q+4}{q-4}$.

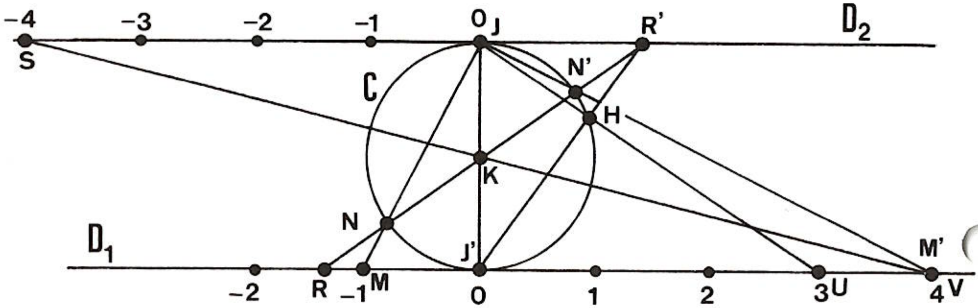
L'équation de KR' est : $KR' \equiv (q-4)\, y - 2px - q - 4 = 0$.

Le système $\begin{cases} KR' \\ D_1 \end{cases}$ fournit R : son abscisse sur D_1 vaut bien $-\frac{q}{p}$.

L'assemblage des trois constructions permet ainsi de trouver α et β à partir de p et q.

4. Construction pour p et q négatifs.

Soit $x^2 - 3x - 4 = 0$



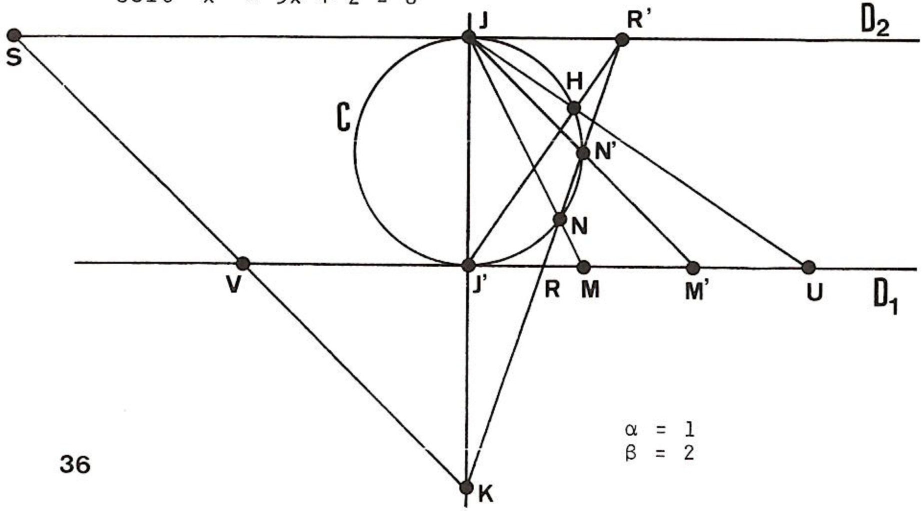
(1) Placer U d'abscisse 3 sur D_1
(2) Tracer JU
(3) Obtenir H (= JU $\cap$ C)
(4) Tracer J'H
(5) Obtenir R' (= J'H $\cap$ D_2)
(6) Placer S d'abscisse -4 sur D_2
(7) Placer V d'abscisse 4 sur D_1
(8) Tracer SV
(9) Obtenir K (= SV $\cap$ JJ')
(10) Tracer R'K
(11) Obtenir R (= R'K $\cap$ D_1)
(12) Obtenir RR' (=R'K)
(13) Obtenir N (RR' $\cap$ C)
(14) Tracer JN
(15) Obtenir M (JN $\cap$ D_1)
(16) Obtenir N' (RR' $\cap$ C)
(17) Tracer JN'
(18) Obtenir M' (JN' $\cap$ D_1)

M est d'abscisse -1 sur D_1 (donc α =-1) et M' est d'abscisse 4 sur D_1 (donc β = 4) : on vérifie bien que :

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

5. Construction pour p négatif et q positif.

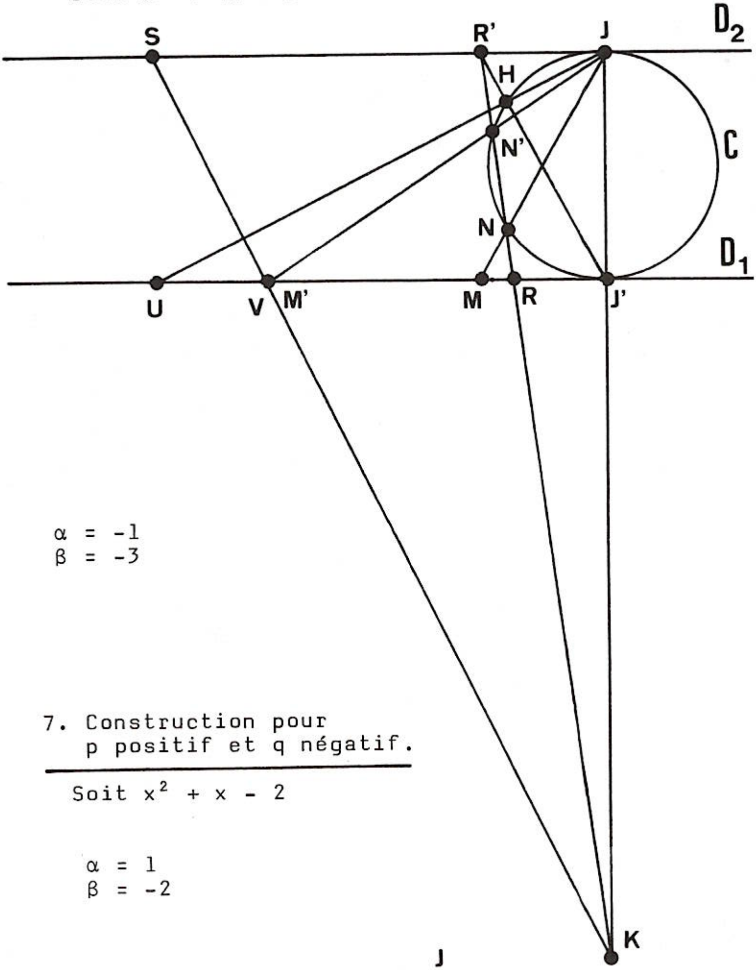
Soit $x^2 - 3x + 2 = 0$



$\alpha = 1$
$\beta = 2$

6. Construction pour p et q positifs.

Soit $x^2 + 4x + 3 = 0$

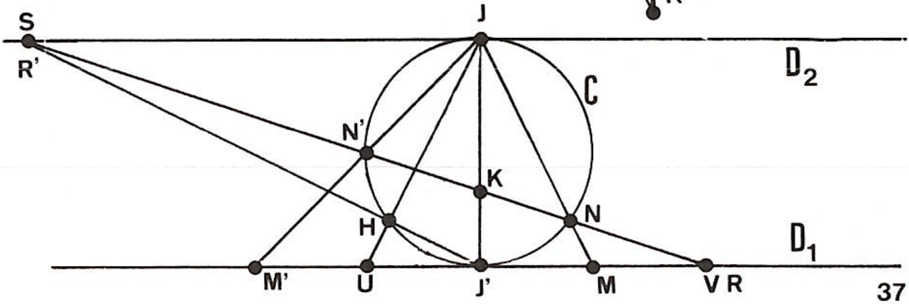


$\alpha = -1$
$\beta = -3$

7. Construction pour p positif et q négatif.

Soit $x^2 + x - 2$

$\alpha = 1$
$\beta = -2$




Ces aventures de Ric INPUT
$a^2 - b^2 =$
$(a - b)^2$
QU'EST-CE QUE C'EST QUE ÇA ?
BOUH!
CACA !
C'EST TRÈS MAUVAIS!!
VOILA CE QU' IL FALLAIT FAIRE!
DITES-MOI... PAS RÈGLEMENTAIRE, CETTE CRAIE SÈCHE! VOUS ABÎMEZ LES TABLEAUX NOIRS!
ET CES MAINS EN POCHE? EST-CE UN EXEMPLE POUR LA JEUNESSE? ...
ET CETTE BRAYETTE OUVERTE?
AH MAIS ÇA NE SE PASSERA PAS COMME ÇA!!
ET PUIS D'ABORD J'AVAIS LA BONNE RÉPONSE!!!
REGARDEZ! ELLE EST AU TABLEAU!?!
PARDON, M'SIEUR J'LE F'RAIS PLUS...
TU PEUX DISPOSER PETIT!
5
D. SERON '86

40 femmes infidèles

Le grand sultan était consterné de voir dans sa capitale tant de femmes infidèles. Quarante femmes trompaient ouvertement leurs maris; mais comme toujours, et bien que les faits fussent de notoriété publique, les dits maris ignoraient tout de la conduite de leur femme. Pour punir les femmes coupables, le sultan proclama un édit autorisant les maris trompés à tuer leur femme, à la condition expresse cependant qu'ils fussent tout à fait sûrs de leur infortune. La proclamation n'indiquait ni le nombre, ni le nom de ces femmes : elle stipulait seulement que leur cas était connu de toute la ville, et conseillait aux maris de réagir. Or, à la grande surprise de tout le corps législatif et de toute la police municipale, on n'entendit parler d'exécution d'épouses ni le jour de la proclamation, ni les jours suivants. Un mois entier s'écoula sans résultat, et on commençait à croire que les maris trompés n'avaient cure de leur honneur.

- O Grand Sultan, dit le vizir, ne faudrait-il pas proclamer le nom des quarante femmes infidèles, puisque leurs maris sont trop paresseux pour les punir eux-mêmes ?

- Non, dit le sultan. Attendons. Mon peuple est peut-être paresseux, mais il est aussi intelligent et sage. Je suis sûr qu'il se passera bientôt quelque chose.

Et en effet, le quarantième jour suivant la proclamation, l'action éclata soudain. Au cours de cette seule nuit, quarante femmes furent tuées, et une rapide enquête révéla qu'il s'agissait bien des quarante femmes connues pour avoir trompé leurs maris.

- Je ne comprends pas, s'écria le vizir. Pourquoi ces quarante maris ont-ils attendu si longtemps pour passer aux actes, et pourquoi ont-ils en fin de compte agi tous le même jour ?

- Elémentaire, mon cher Watson, dit le sultan en riant dans sa barbe. J'avoue que j'attendais justement cette bonne nouvelle aujourd'hui même. Comme je vous l'ai dit, mes sujets sont peut-être trop paresseux pour organiser la filature de leurs femmes afin de prouver leur fidélité ou leur infidélité, mais ils se sont montrés assez intelligents pour résoudre la question par pure déduction logique.

- Je ne vous comprends pas, Grand Sultan, dit le vizir.

- Voilà : supposons qu'il y ait, non pas quarante femmes infidèles, mais une seule. Dans ce cas tout le monde le saurait sauf le mari. Mais le mari, qui croirait en la vertu de sa femme et qui ne connaîtrait dans la ville aucun cas d'infidélité (s'il y en avait eu un, il en aurait entendu parler), vivrait avec l'idée que toutes les femmes, y compris la sienne, sont des épouses fidèles. S'il lisait la proclamation relative aux femmes infidèles, il se rendrait compte qu'il ne pourrait s'agir que de sa propre femme. Il la tuerait donc la première nuit. Me suivez-vous ?

- Je vous suis, dit le vizir.

- Maintenant, supposons que deux femmes aient trompé leurs maris; appelons les deux maris Abdullah et Hadjibaba. Abdullah savait depuis toujours que la femme d'Hadjibaba le trompait, et Hadjibaba en savait autant de la femme d'Abdullah. Mais chacun pensait que sa propre femme lui était fidèle. Le jour de la proclamation, Abdullah se dit : "Ah ah! cette nuit Hadjibaba va tuer sa femme ". Et Hadjibaba pensa la même chose d'Abdullah. Or le lendemain matin les deux femmes étaient encore en vie. Ce fait prouvait, et à Abdullah, et à Hadjibaba, qu'ils avaient eu tort de croire à la fidélité de leurs femmes. Aussi, au cours de la seconde nuit, deux poignards devaient avoir trouvé leur cible, et deux femmes devaient avoir péri.

- Jusque-là, je vous suis bien, dit le vizir, mais que se passera-t-il s'il y a trois femmes infidèles ou davantage ?

- A partir d'ici, nous allons employer ce qu'on appelle la récurrence, ou l'induction mathématique. Je viens de vous démontrer que s'il n'y avait que deux femmes infidèles dans la ville, leurs maris les auraient tuées la deuxième nuit, par la force d'une déduction purement logique. Supposons maintenant qu'il y ait eu trois femmes infidèles : celle d'Abdullah, celle d'Hadjibaba et celle de Farouk. Farouk sait bien que les femmes d'Abdullah et d'Hadjibaba trompent leurs maris, aussi s'attend-il à ce que ces deux individus assassinent leurs femmes la seconde nuit. Or ils n'en font rien. Pourquoi ? Evidemment parce que la femme de Farouk est infidèle, elle aussi. Et le poignard, ou plutôt les trois poignards, entreront en jeu la troisième nuit.

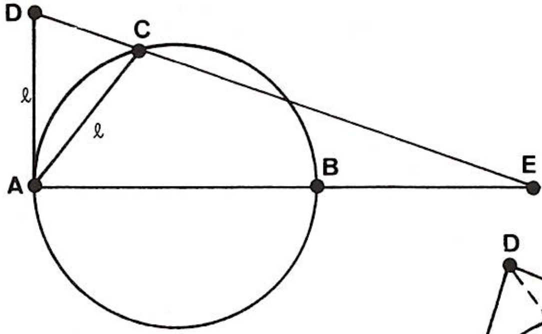
- O! Grand Sultan, s'écria le vizir, vous avez dessillé mes yeux. S'il y avait eu quatre femmes infidèles, chacun des quatre maris trompés aurait ramené le cas à celui des trois femmes infidèles, et n'aurait pas tué la sienne avant le quatrième jour. Et ainsi de suite jusqu'à la quarantième femme.

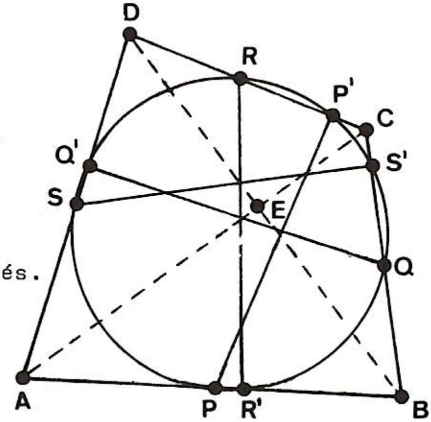
- Je suis heureux que vous ayez enfin compris, dit le sultan. Il est agréable d'avoir un vizir d'intelligence si inférieure à celle du citoyen moyen. Et si je vous disais qu'il y avait en réalité quarante et une femmes infidèles ?

Le coin des problèmes

142 Problème de limite.

A l'extrémité A d'un diamètre AB d'un cercle de rayon unité, on trace une corde AC de longueur ℓ et un segment AD tangent au cercle également de longueur ℓ. La droite DC prolongée rencontre le diamètre AB prolongé en E. On demande la position occupée par E lorsque la longueur ℓ tend vers zéro. (voir dessin page suivante.)





143 Le cercle des 8 points.

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires en E. P,Q,R et S sont les milieux des côtés. P',Q',R' et S' sont les projections de ces milieux sur les côtés opposés.

Montrer que ces 8 points (P,Q,R,S,P',Q',R' et S') sont cocycliques.

144 Les carrés bimagiques.

Les carrés magiques sont bien connus : un carré magique composé des nombres 1 à 9 consiste en une répartition sur 3 lignes et 3 colonnes de ces 9 nombres de manière que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soit une constante.

Un carré bimagique est un carré magique, tel que, lorsque ses nombres sont remplacés par leurs carrés, les lignes, les colonnes et les diagonales ont à nouveau une somme constante.

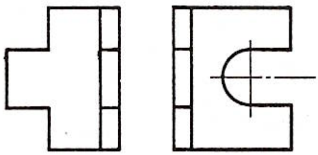
Existe-t-il des carrés bimagiques de 9 et de 16 nombres ?
Et si oui, saurez-vous les trouver ?

145 Les mois rectangulaires.

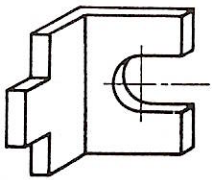
On possède une quantité illimitée de calendriers grégoriens des années futures, où les mois sont divisés en colonnes d'une semaine, lundi en haut, dimanche en bas. On tire au hasard une année et un mois de cette année. Quelle est la probabilité pour que ce mois s'écrive exactement avec quatre colonnes ?

La perspective cavalière

La perspective *cavalière* est une projection oblique sur un plan qui a pour but de faciliter la compréhension des formes d'un objet. Elle s'utilise principalement pour des représentations techniques de pièces à caractère d'initiation (fonctionnement d'appareils) ou de publicité (catalogue). Le dessin industriel utilise ce type de projection pour apporter aux personnes peu averties de cet art des renseignements de formes immédiats que les projections orthogonales ne donneraient pas.



PROJECTION ORTHOGONALE

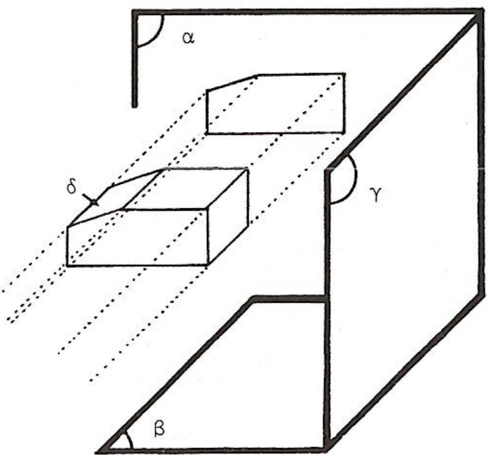


PROJECTION OBLIQUE.

Dans cette perspective, on imagine que l'une des faces de la pièce est parallèle au plan de projection et on considère l'observateur placé à une grande distance de la pièce. Si les rayons visuels dirigés vers la pièce sont perpendiculaires au plan de projection, on obtient une projection orthogonale. Si les rayons visuels sont obliques, on obtient une projection oblique qui a reçu le nom de "perspective cavalière".

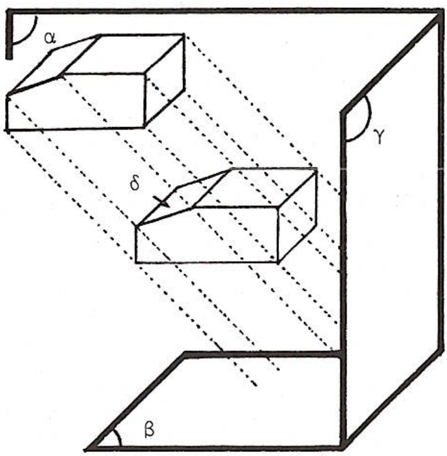
PROJECTION ORTHOGONALE

(rayons visuels perpendiculaire au plan α)



PERSPECTIVE CAVALIERE

(rayons visuels obliques par rapport à α)



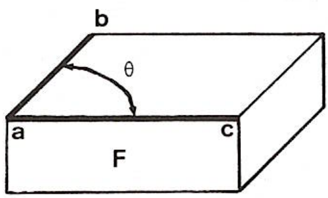
Par rapport à l'observateur, le plan α est un plan *frontal* et les faces de l'objet parallèles à ce plan sont des faces frontales : elles apparaissent en vraie grandeur (sans déformation) dans la perspective cavalière.

Le plan β est un plan *horizontal* et les faces parallèles à ce plan sont dites des faces horizontales : des faces rectangulaires se représentent sous forme de parallélogrammes La perspective cavalière déforme donc ces faces.

Le plan γ est un plan *de profil* et les faces parallèles à ce plan sont dites de profil : pour celles-ci aussi, il y a déformation.

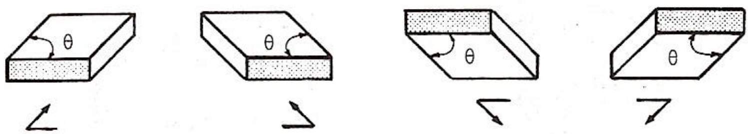
Quant à la face δ de l'objet, elle est perpendiculaire au plan frontal et est dite *de bout* (en deux mots : vue du bout ou par le bout!).

Les arêtes perpendiculaires au plan α de projection sont appelées des *fuyantes*. Il existe différentes conventions de représentation de celles-ci. Considérons le parallélépipède rectangle ci-contre représenté en perspective cavalière.

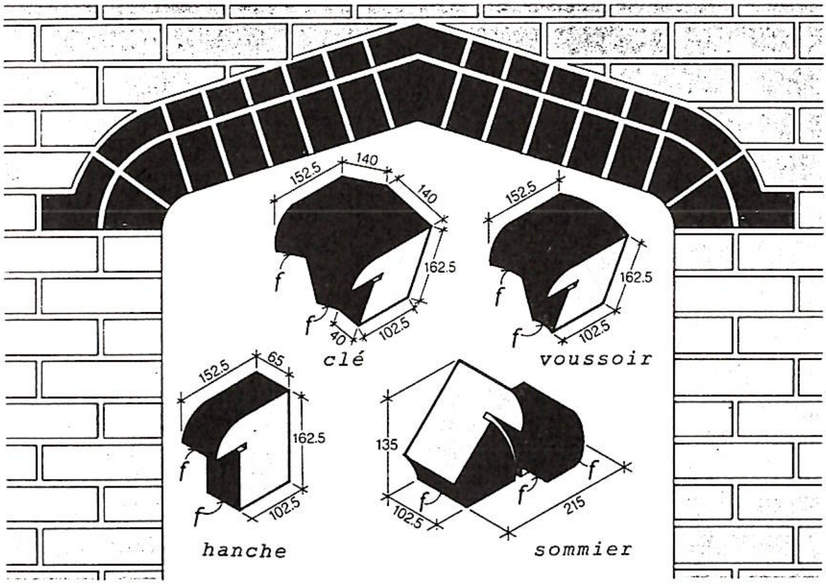


L'inclinaison des fuyantes est mesurée par l'angle θ déterminé par la fuyante ac et le côté ac de la face frontale F. En principe, toute valeur de cet angle est acceptable, mais la pratique retient des valeurs de 30°,45° et 60° car ces valeurs se rencontrent dans les formes d'équerres vendues dans le commerce.

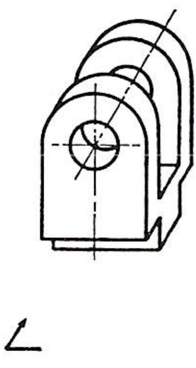
Une fois la valeur de l'angle choisi, il est nécessaire de donner une direction des fuyantes car pour une même valeur θ, quatre cas différents peuvent se présenter :



Les faces visibles du parallélépipède ne sont pas les mêmes dans les quatre cas : le choix se porte en dessin industriel sur la direction la plus instructive pour la forme de la pièce. C'est ainsi que les deux représentations de la pièce ci-dessous sont loin d'être équivalentes au niveau de l'information qu'elles apportent : seule la représentation de droite laisse voir la trace de deux trous percés dans la partie inférieure de la pièce .

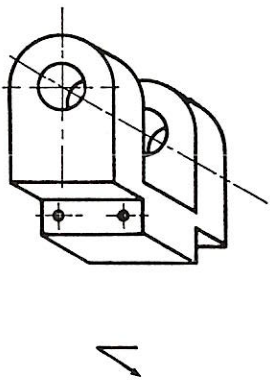


Extrait d'un catalogue d'un briquetier anglais montrant la forme d'une arche de style Tudor. La vue centrale des 4 types de briques est essentielle à la compréhension du style de cette arche.



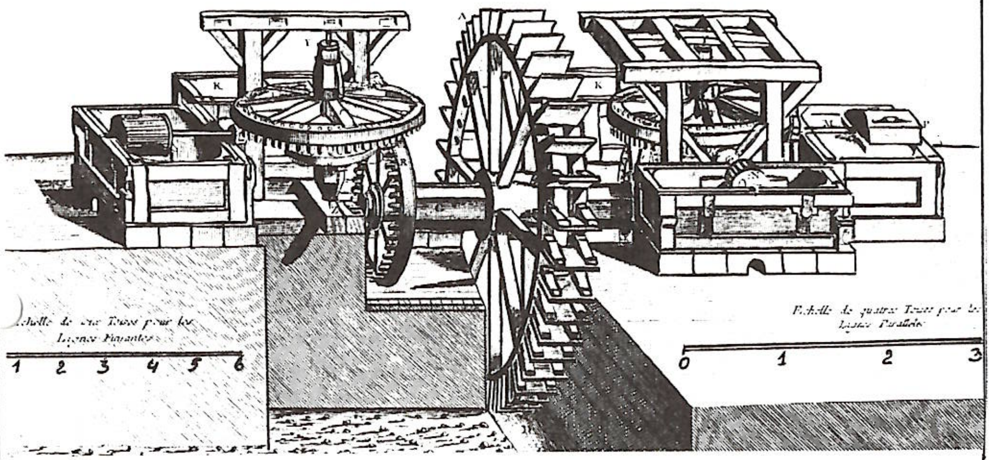
$\theta = 60°$

$r = 0,5$



$\theta = 30°$

$r = 0,7$



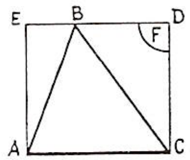
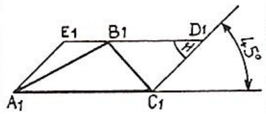
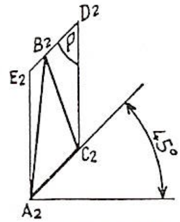
Représentation d'un moulin à papier dans l'Encyclopédie de d'Alembert. L'échelle à gauche est une "échelle de six toises pour les lignes fuyantes", l'échelle de droite est une "échelle de trois toises pour les lignes parallèles". On en déduit un rapport de réduction de 0,4. L'inclinaison est de ± 50°.

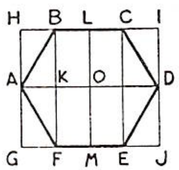
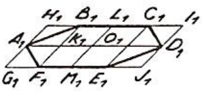
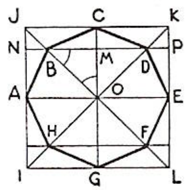
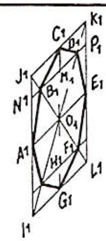
Une fois choisie l'inclinaison et la direction des fuyantes - généralement par une étude sommaire préalable des caractéristiques de l'objet à représenter -, on s'occupera de la réduction à donner à ces fuyantes. On admet en effet dans la perspective cavalière que la longueur des fuyantes est inférieure à la longueur réelle de l'arête considérée. Les fuyantes sont réduites d'un rapport r dit rapport de réduction qui est généralement indiqué sur le dessin. Les différentes valeurs usuelles de r sont 0,5 , 0,6 et 0,7.

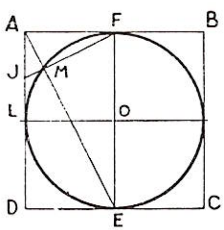
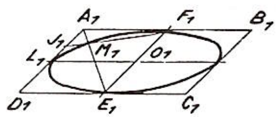
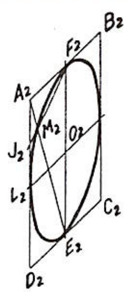
A la page suivante sont représentées diverses perspectives de figures géométriques élémentaires.

<u>D'où vient ce nom de "cavalière" pour une perspective ?</u>

- *dessin exécuté librement comme vu d'en haut (de cavalier, adj. : trop libre, désinvolte.) (Quillet)*
- *dessin exécuté à la cavalière, en se promenant (de cavalier, nom : homme à cheval.) (Littré) (Larousse)*
- *dessin représentant un objet vu d'un point élevé (de cavalier, nom : ouvrage militaire de fortification élevé .) (Hachette) (Robert)*

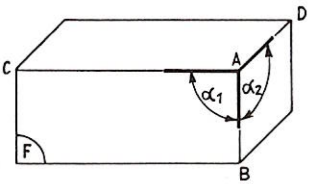
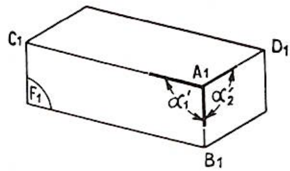
Le triangle est situé dans un plan :		
frontal	horizontal	de profil
		

L'hexagone est situé dans un plan		L'octogone est situé dans un plan	
frontal	horizontal	frontal	de profil
			

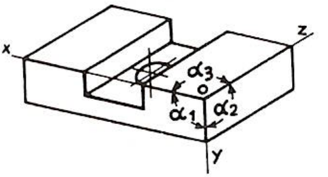
Le cercle est situé dans un plan		
frontal	horizontal	de profil
		

La perspective axonométrique

Dans la perspective *axonométrique*, la pièce occupe une position quelconque par rapport au plan de projection. Aucune de ses faces principales n'est parallèle ou perpendiculaire à ce plan. Aucune de ses faces ne sera donc vue en vraie grandeur.

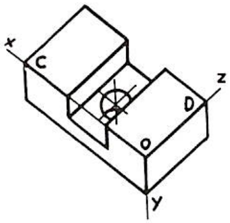
Perspective CAVALIERE	Perspective AXONOMETRIQUE
Représentation	
	
(F) face de départ : rectangulaire. Position frontale par rapport au plan de projection. Les faces perpendiculaires au plan de projection sont déformées.	(F_1): parallélogramme. Position quelconque par rapport au plan de projection. Toutes les faces de la pièce sont déformées.
$\alpha_1 = 90°$	α_1' quelconque (valeur recommandée par les normes du dessin industriel : 105°)
α_2 déterminé suivant l'inclinaison des fuyantes	α_2' quelconque (valeur recommandée : 120°)
AB arête verticale en vraie grandeur	A_1B_1 arête généralement dans un plan de profil réduite suivant un rapport de réduction r_1
AC arête frontale-horizontale représentée en vraie grandeur	A_1C_1 arête oblique réduite suivant un rapport de réduction r_2
AD: fuyante, réduite suivant un rapport de réduction r	A_1D_1 arête oblique réduite suivant un rapport de réduction r_3

Soient les trois angles α_1, α_2 et α_3 déterminés par les trois axes concourants principaux Ox, Oy et Oz d'une pièce représentée suivant une perspective axonométrique:



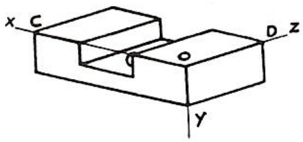
AXONOMETRIQUE

xOy = 105°   yOz = 120°



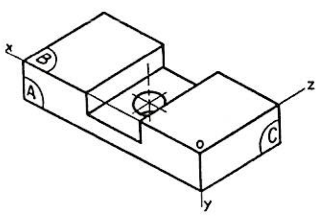
DIMETRIQUE USUELLE

xOy = yOz = 131°30'



DIMETRIQUE REDRESSEE

xOy = yOz = 105°



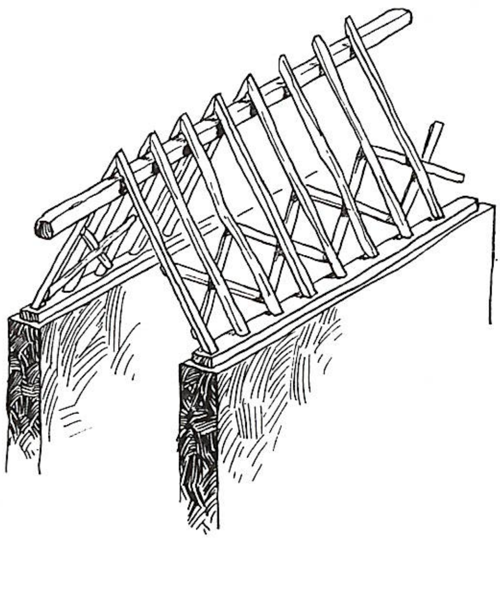
ISOMETRIQUE

xOy = yOz = 120°

- si deux des trois angles sont égaux, on obtient une perspective *dimétrique*. On distingue la perspective dimétrique usuelle où les deux angles égaux valent 131°30' (en fait un angle dont le sinus vaut 3/4, ce qui simplifie les constructions), qui permet de mettre en évidence la partie supérieure de la pièce ; et la perspective dimétrique redressée où les angles égaux valent 105° (60° + 45°, angles d'équerres!), qui permet de mettre en évidence les parties latérales de la pièce

- si les trois angles sont égaux (forcément à 120°), la perspective est appelée *isométrique*. Elle permet de mettre en évidence les trois faces principales A,B et C d'une pièce.

Les représentations axonométriques sont fréquemment appliquées en architecture, pour montrer l'aménagement intérieur d'une pièce d'une habitation. Ci-dessous, une ébauche d'une représentation axonométrique de la charpente d'une remise.



Deuxième épreuve du concours

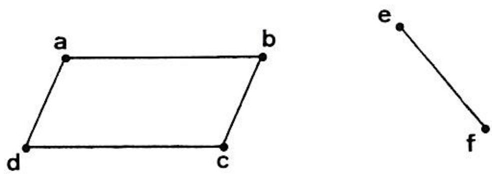
1. Situé dans un plan frontal, un pentagone régulier convexe est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. Un de ses côtés est horizontal.

   Représentez le même pentagone

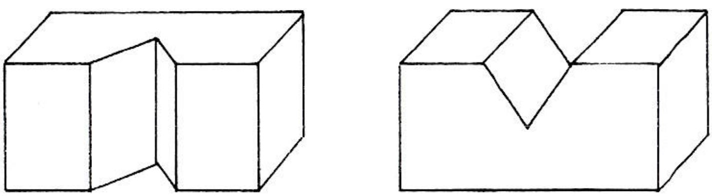
   1) dans un plan horizontal
   2) dans un plan de profil

   Indiquez votre choix de l'angle des fuyantes et du rapport de réduction.

2. Le carré abcd représenté ci-dessous est situé dans un plan horizontal. Le segment [ef] est contenu dans le même plan. On demande de construire dans ce plan l'image d'un carré dont [ef] est un côté.



3. Voici un solide représenté en perspective cavalière dans deux positions différentes. A partir de ces perspectives, reconstituez le solide et envoyez-nous un développement de celui-ci



Si vous ne pouvez résoudre les 3 questions, envoyez-nous des réponses partielles.

SOMMAIRE N° 34 - Hiver 1986

Comité de rédaction :
F. Carlier, Gh. Marin, N. Miéwis, J. Vanhamme
Graphisme :
D. Seron
Edition :
J. Miéwis, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège
Nouveaux prix des abonnements :

Belgique :	*groupés (5 au moins)*	*80 FB*
	isolés	*120 FB*
		par abonnement.
Etranger :	*y compris Pays-Bas et Luxembourg*	
	par paquet de 5 abonnements :	*800 FB*
	isolé :	*240 FB*

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240FB par 5 unités)
Pour la Belgique : Cpte n° 001-0828109-96
de Math-Jeunes, Chemin des Fontaines, 14bis,
7460 - Casteau.
Pour l'étranger : Cpte n° 000-0728014-29
de SBPMef, même adresse, à partir d'un compte
postal ou par mandat postal.
en communiquant nom et code postal de votre école.
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.