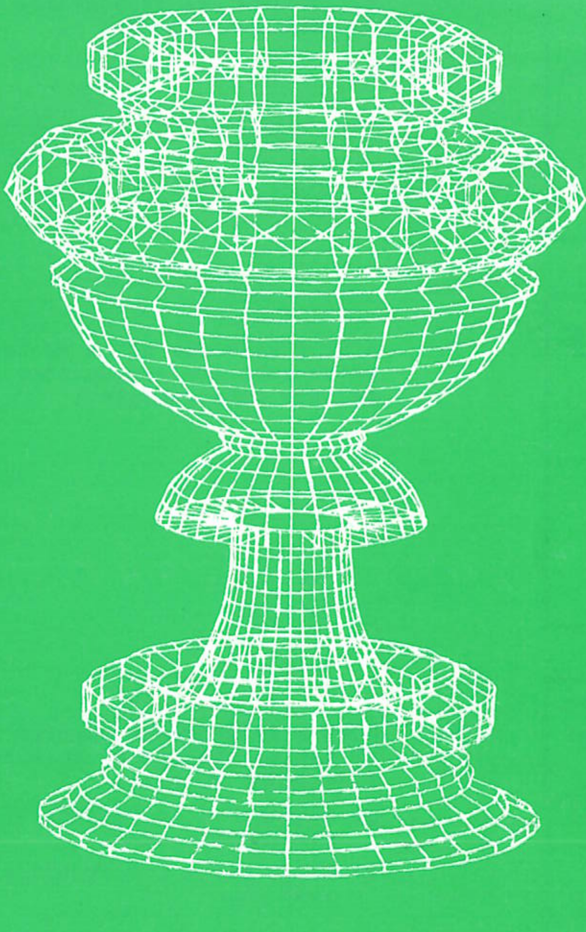
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression francaise - Association Sans But Lucratif

MATH-

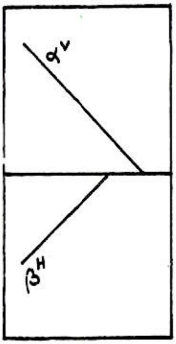


JEUNES

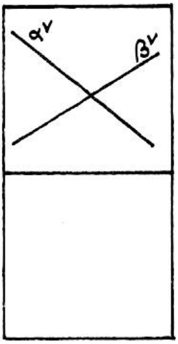
Journal Trimestriel

9ème année Numéro 35 Printemps 1987

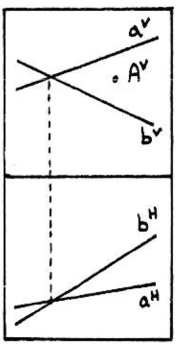
Dernière épreuve du concours



1. α est un plan de bout
β est un plan vertical
déterminez les projections i^V et i^H de leur intersection i.



2. α et β sont des plans de bout
déterminez les projections i^V et i^H de leur intersection i



3. a et b définissent un plan
A^V est la projection verticale d'un point du plan.

1) Recherchez la projection horizontale de A
2) Menez par A une frontale du plan ab.

(suite couverture 3)

Manières farfelues mais historiques de calculer 3 × 5

- La plus ancienne méthode a été retrouvée dans des tablettes babyloniennes. Elle consiste à se servir de tables de carrés. Cette méthode était toujours utilisée par Gauss dans les années 1800. Elle est basée sur la remarquable (?) formule :

$$a.b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left((a+b)^2 - (a-b)^2 \right) \right)$$

C'est ainsi, que pour calculer 3 x 5, on écrivait :

a=3
b=5
a+b = 8 dont le carré (donné par une table) = 64
a-b = 2 dont le carré est 4
la différence vaut : 64-4 = 60
la moitié de 60 vaut 30
la moitié de 30 vaut 15
donc 3 x 5 = 15 (Youpee!)

- Datant du premier siècle, une seconde méthode se servait d'une table des cosinus. Cette méthode était toujours à l'honneur vers 1700 quand un certain Simpson les utilisait (et allait d'ailleurs laisser son nom à ces formules de goniométrie). Les mathématiciens arabes l'utilisaient aux alentours de l'an 1000, sous le nom grec de PROSTAPHERESE (du grec *prosten* (en avant) et *apheresis* (soustraction)). L'astronome Tycho Brahé parle de cette méthode avec beaucoup de respect. Elle est basée sur la relation goniométrique :

$$\cos\alpha \; . \; \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \right)$$

Pour effectuer 3 x 5, on écrivait :

3 x 5 = 0,3 x 0,5 x 100
si cosα = 0,3 la table donne α = 72°32'33"
si cosβ = 0,5 la table donne β = 60°
$\alpha+\beta$ = 132°32'33" dont le cosinus est -0,67613
$\alpha-\beta$ = 12°32'33" dont le cosinus est 0,97614
la somme algébrique donne : -0,67613 + 0,97614 = 0,3000
la moitié de 0,3 est 0,15
0,15 x 100 = 15
donc 3 x 5 = 15 (Hoo Kaï di, hoo kaï da!!)

- La troisième technique utilisée pour multiplier date de l'invention des logarithmes et de la rédaction d'une table des logarithmes dits vulgaires (en base 10) par Briggs en 1617. On se base ici sur la formule :

$$\log(a.b) = \log a + \log b$$

Pour effectuer 3 x 5, on écrivait :

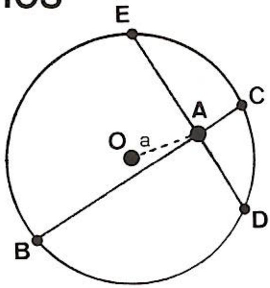
log 3 = 0,47712
log 5 = 0,69897
et donc log(ab) = 0,47712 + 0,69897 = 1,17609
et la table, lue dans l'autre sens, affirmait que
c'était le log 15 qui valait 1,17609
donc 3 x 5 = 15. (Waouahhh!!!)

Regardez votre professeur ... s'il a plus de 35 ans, et bien il a utilisé cette méthode pour multiplier des grands nombres lorsqu'il était assis à votre place.

Aujourd'hui, vos confortables calculettes utilisent la même stratégie pour calculer le ridicule 3 x 5 ou pour multiplier deux nombres de 8 chiffres. Mais si 3x5 ne s'est jamais fait comme nous venons de vous l'exposer, de nombreuses générations ont appris ainsi à multiplier des grands nombres.

Le coin des problèmes

146 Les deux cordes.



A l'intérieur d'un cercle (O,r), on choisit un point A tel que OA = a < r. Par A, on mène deux cordes BC et DE avec BC $\perp$ DE. Pour quelle position la somme des longueurs BC + DE est-elle la plus grande possible ?

147 1987.

Pourriez-vous dessiner le polyèdre convexe dont les sommets sont les points à coordonnées cartésiennes entières sur la sphère de rayon 1987 ?

148 Découpages de trapèze.

Un terrain à la forme d'un trapèze rectangle: les côtés parallèles mesurent 60 et 40 mètres; la distance de ces côtés est de 30 mètres. On demande de partager ce terrain en deux terrains de même aire, d'abord par une coupe perpendiculaire aux côtés parallèles, ensuite par une coupe parallèle aux côtés parallèles.

149 L'équation du parallélogramme.

Dans R^2, on dit que f(x,y)=0 est une équation d'une partie P si et seulement si:

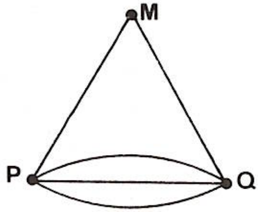
$$\forall (x,y) \in R^2 \quad (x,y) \in P \iff f(x,y) = 0$$

On demande l'équation du parallélogramme limité par les sommets : (1,1),(3,0),(2,3) et (4,2).

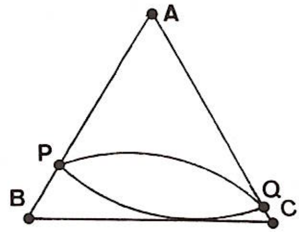
Une lunule dans un triangle

Inspiré du principe de fonctionnement d'un moteur "Wankel", nous allons vérifier qu'un "rotor" en forme de lunule (surface plane limitée par des arcs de cercle) peut tourner dans une "chambre de combustion" qui serait un triangle équilatéral.

Nous construisons la lunule à partir d'un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{3}$ et de sommets MPQ. De M comme centre, on trace un arc de cercle contenant P et Q, puis l'arc symétrique par rapport à la corde PQ.

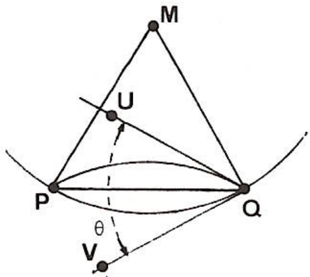


La chambre est un triangle équilatéral de côté 2a (et donc de hauteur $a\sqrt{3}$).

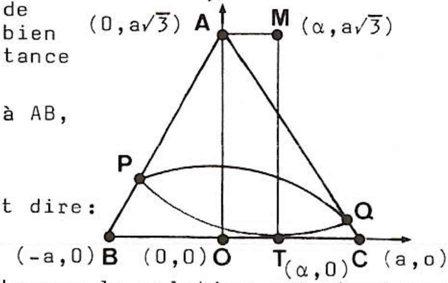


L'angle VQM est droit, donc VQ est tangent à l'arc de cercle centré en M et formant l'un des bords de la lunule: l'angle PQV vaut 30° et l'angle θ entre les deux tangentes en Q aux deux arcs de cercle vaut 60°. La lunule "rotor" "tient" dans les coins du triangle "chambre" !

Si on place à présent la lunule telle que les points P et Q appartiennent à deux côtés du triangle, il nous faut démontrer qu'une telle position est possible, qu'il y a bien un point tangent au troisième côté et que la lunule ne "déborde" pas à l'extérieur du triangle.



Dans la pratique, nous prenons le point M sur la verticale du point de tangence T et sur l'horizontale de A, puis nous vérifions qu'un arc de cercle de rayon $a\sqrt{3}$ rencontre bien AB en P et AC en Q avec la distance entre P et Q valant bien $a\sqrt{3}$.



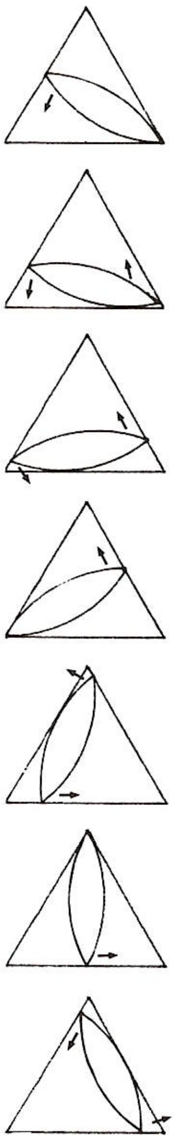
Dire que P(x,y) appartient à AB, c'est écrire l'équation de AB.

$$AB \equiv y = \sqrt{3}x + a\sqrt{3} \qquad (1)$$

Dire que $d(P,M) = a\sqrt{3}$, c'est dire:

$$(a\sqrt{3})^2 = (x-\alpha)^2 + (y-a\sqrt{3})^2 \qquad (2)$$

En combinant (1) et (2), on trouve la relation aux abscisses des intersections du cercle de centre M et de rayon $a\sqrt{3}$, et de AB.



On trouve : $4x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 3a^2 = 0$ (3)

Cette équation du second degré en x admet deux solutions puisque le discriminant vaut:

$$\Delta = 3\ (4a^2 - \alpha^2)$$

qui est strictement positif puisque

$$-a \leqslant \alpha \leqslant a$$

L'abscisse de P doit se trouver entre -a et 0: la question est donc de vérifier si l'une des racines de (3) se trouve bien dans cet intervalle. Pour cela, on pose le membre de gauche de (3) égal à f(x) et on calcule :

$f(-a) = (a + \alpha)^2 > 0$ et $f(0) = \alpha^2 - 3a^2 < 0$

Le trinôme f(x) changeant de signe entre les points -a et 0 a bien une racine x_1 dans cet intervalle.

Ainsi P : $(x_1\ ,\ \sqrt{3}\ (a + x_1)\ )$ (4)

De même : $AC \equiv y = -\sqrt{3}x + a\sqrt{3}$ (5)

et dire que $d(Q,M) = a\sqrt{3}$ revient à dire que:

$(a\sqrt{3})^2 = (x - \alpha)^2 + (y - a\sqrt{3})^2$ (6)

et en combiant (5) et (6), on retrouve ... (3)

L'autre racine x_2 de (3) devra être l'abscisse de Q, ce qui est possible puisque

$f(a) = (a - \alpha)^2 > 0$ et $f(0) < 0$; il y a à nouveau changement de signe et donc x_2 est bien entre 0 et a.

Ainsi Q : $(x_2\ ,\ \sqrt{3}\ (a - x_2)\ )$ (7)

En se souvenant que la somme S des racines d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ vaut $\frac{-b}{a}$ et le produit $P = \frac{c}{a}$, on calcule :

$$\begin{aligned} d^2(P,Q) &= (x_1 - x_2)^2 + (\sqrt{3}(a+x_1) - \sqrt{3}(a-x_2))^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 3\ (x_1 + x_2)^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 3\ (x_1 + x_2)^2 \\ &= 4\ S^2 - 4\ P \end{aligned}$$

Pour l'équation (3) , on a :

$$S = \frac{\alpha}{2} \qquad\qquad P = \frac{\alpha^2 - 3a^2}{4}$$

→ → →

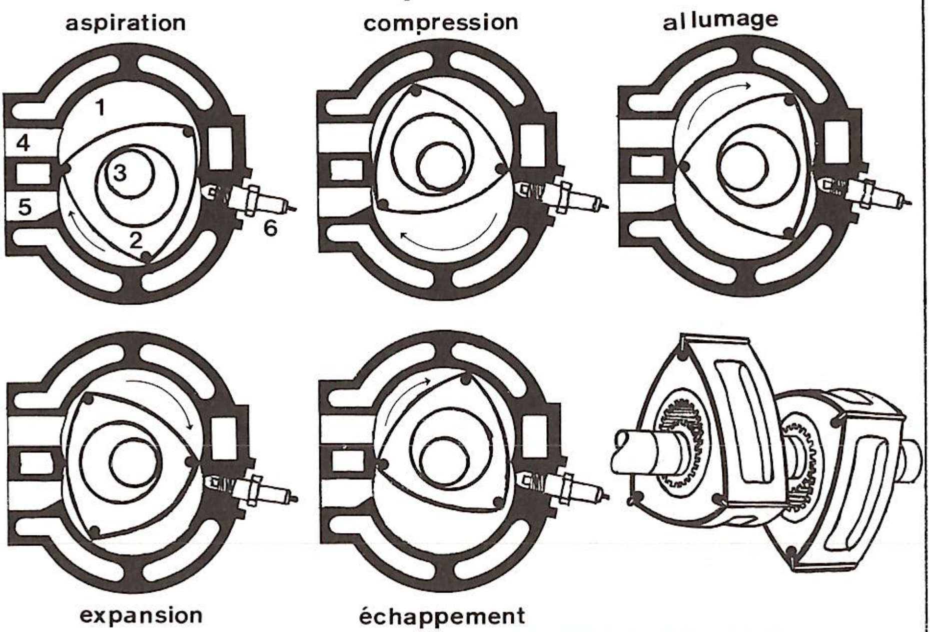
Le moteur Wankel

L'allemand Félix Wankel est né en 1902. Spécialiste de l'étude des valves rotatives à l'Institut de Recherche Aéronautique de 1936 à 1945, il travaillait au laboratoire de recherche de la firme NSU lorsqu'il mit au point son moteur rotatif entre 1954 et 1957.

Le principe est aussi simple que sa géométrie est difficile à décrire: il se compose d'un cylindre de forme ovale, d'une chambre épitrocoïdale (1), d'un rotor (2) en triangle et qui est excentré par rapport à l'arbre moteur (3), d'une lumière d'aspiration (4), d'une lumière d'échappement (5) et d'une bougie (6).

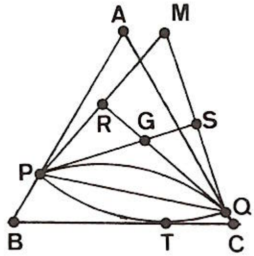
A l'aspiration, le carburant et l'air pénètrent dans la chambre par la lumière d'aspiration (4), qui reste toujours ouverte; le rotor (2) tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, le volume de la chambre diminue et la compression commence, au terme de laquelle a lieu l'allumage. Lors de la combustion, les gaz se dilatent et poussent le rotor jusqu'à ce que celui-ci ouvre la lumière d'échappement par laquelle ils sont évacués.

Le rotor actionnant directement l'arbre, on évite la bielle, le vilebrequin et le remplacement des soupapes par de simples lumières économise les arbres à cames et poussoirs. Ce type de moteur présente néanmoins un point faible : les joints d'étanchéité aux sommets du triangle rotor.



d'où $d^2(P,Q) = 3a^2$ et le triangle MPQ est bien équilatéral de côté $a\sqrt{3}$

Il est évident que l'arc inférieur de la lunule est bien toute entière dans le triangle ABC. Mais en est-il de même pour la partie supérieure de cette lunule; en d'autres termes, la tangente QR à l'arc de la lunule rencontre-t-elle bien le côté MP du triangle en un point R situé entre M et P.



Souvenons-nous que nous savons que l'angle PQR vaut 30°: mais alors QR est bissectrice de l'angle en Q du triangle équilatéral MPQ. La bissectrice est aussi médiane et G intersection de QR et PS est le centre de gravité du triangle MPQ.

Nous allons calculer ce centre de gravité puis vérifier qu'il est bien toujours intérieur au triangle ABC, ce qui prouvera que la lunule "ne déborde pas".

Les coordonnées de P (voir (4)),de Q (voir (7)) et de M $(=(\alpha, a\sqrt{3}))$ étant connues,on trouve:

Abscisse de G : $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + \alpha) = \frac{\alpha}{2}$

Ordonnée de G : $\frac{1}{3}(3a\sqrt{3} + \sqrt{3}(x_1 - x_2))$

Mais dans l'équation du second degré, on peut calculer

$x_1 - x_2 = \frac{-\sqrt{\Delta}}{a}$ (puisque $x_1 < x_2$) en général et

$x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{12a^2 - 3\alpha^2}$ dans le cas de l'équation (3).

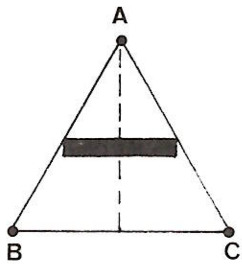
Aussi l'ordonnée de G vaut-elle : $\frac{\sqrt{3}}{3}(3a - \frac{1}{2}\sqrt{12a^2 - 3\alpha^2})$

Puisque α varie entre 0 et a, on trouve :

-que x varie entre 0 et $\frac{a}{2}$

-que y varie entre $a(\sqrt{3} - 1)$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

En tenant compte de la symétrie, on trouve que le centre de gravité G du triangle MPQ doit appartenir au rectangle défini par :



$$\frac{-a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$$

$$a(\sqrt{3} - 1) \leqslant y \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

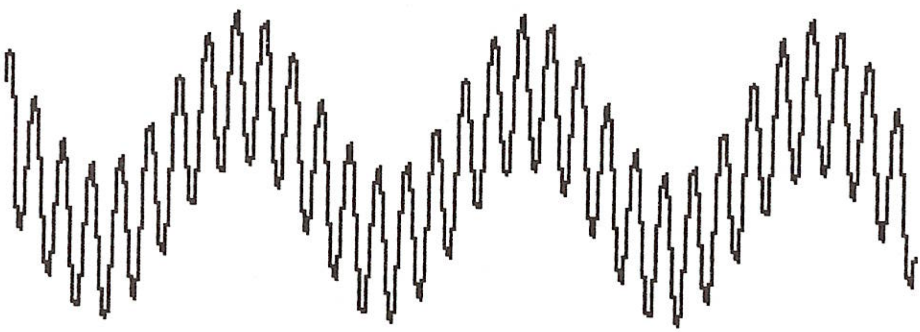
qui est entièrement inclus au triangle ABC

Les systèmes de coordonnées dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère, certains sous-ensembles de couples (x,y) peuvent être caractérisés par certaines relations liant directement ou indirectement cet x à cet y.

Le cas le plus classique se rencontre avec les coordonnées cartésiennes où une relation permettant de calculer y en fonction de x est donnée. Ce cas a été prévu par la plupart des fabricants de micro-ordinateurs : une instruction spéciale est réservée à cet effet; elle permet d'énoncer la relation liant y à x. Il suffit ensuite de dessiner les couples (x,f(x)). Voici par exemple, le graphe de la fonction

$$f(x) = \sin(5x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

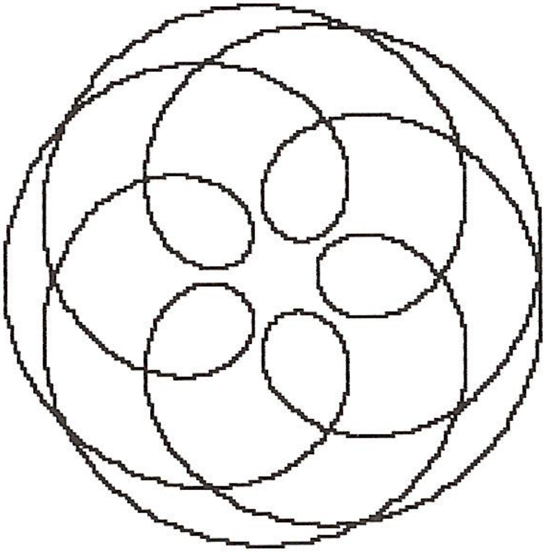


Les coordonnées paramétriques sont d'un usage très simple en micro-informatique : ici on connait une relation entre x et un paramètre t variant entre certaines bornes et une relation entre y et ce même paramètre t. Il nous suffit d'effectuer une boucle sur le paramètre t, de calculer et de dessiner les couples (x,y) correspondants. Voici à titre d'exemple la courbe définie par :

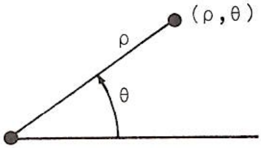
$$x = 48\cos t - 36\cos\left(\frac{8}{3}t\right)$$

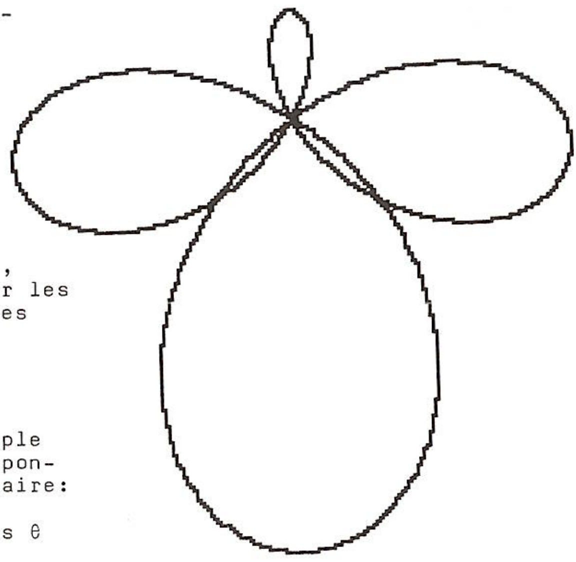
$$y = 48\sin t - 36\sin\left(\frac{8}{3}t\right)$$

Il s'agit d'une courbe nommée EPICYCLOIDE, qui représentent le lieu d'un point lié à un cercle qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle.



Le mathématicien utilise parfois les <u>coordonnées polaires:</u> dans ce cas, on connait une relation entre une distance et un angle. On se donne une demi-droite qui sert à mesurer les angles θ. La distance ρ est le rayon polaire.





En micro-informatique, nous devrons retrouver les équations paramétriques par les relations :

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta$$

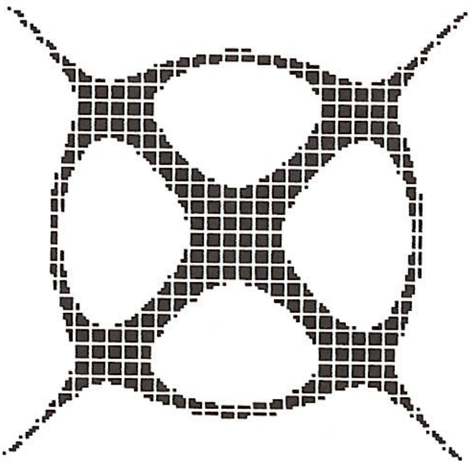
Voici, à titre d'exemple la courbe scarabée répondant à l'équation polaire:

$$\rho = \frac{5}{3} \cos (2\theta) - \cos \theta$$

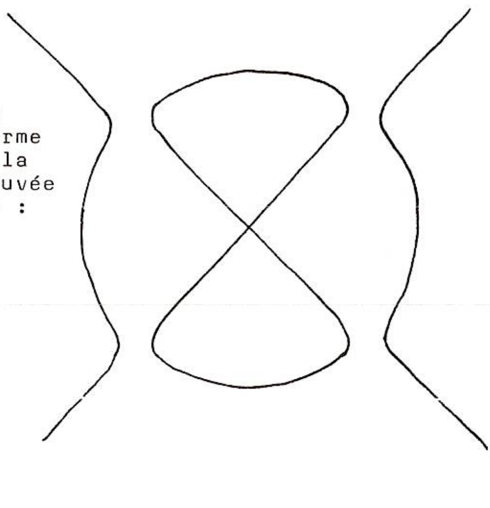
Un quatrième système de coordonnées se rencontre parfois lorsque l'équation est donnée de manière implicite, c'est-à-dire, lorsque l'on connait une relation entre x et y, mais qu'il est impossible d'extraire une inconnue en fonction de l'autre. On en est réduit dans ce cas, à calculer pour chaque point de l'écran, la valeur de la fonction implicite et à dessiner celui-ci lorsque l'erreur n'est pas trop grande. Voici par exemple une courbe dite du diable, que l'on doit à Cramer: elle vérifie l'équation implicite :

$$y^4 - x^4 - 4,8\ y^2 + 5\ x^2 = 0$$

Par deux boucles imbriquées, on parcourt l'écran et on imprime lorsque la valeur de ce polynôme est en valeur absolue inférieure à 1,5. On obtient le nuage de points:



à comparer avec la forme réelle de la courbe trouvée par Cramer :

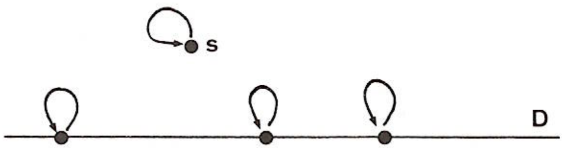


L'homologie

UNE TRANSFORMATION QUI APPLIQUE TOUTE DROITE SUR UNE DROITE

Fixons dans un plan un point s et une droite D ne passant pas par s. Nous allons essayer de construire une transformation dans laquelle

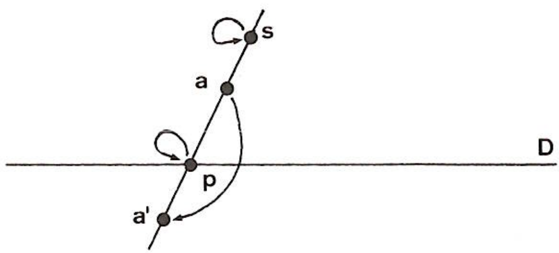
1. Le point s est fixe
2. Tout point de la droite D est fixe
3. Toute droite a pour image une droite



Première remarque : toute droite passant par s qui rencontre D en un point p est sa propre image si nous voulons que (3.) soit respecté. En effet son image contient le point s image de s et le point p image de p. L'image d'un point a appartiendra nécessairement à la droite sa.

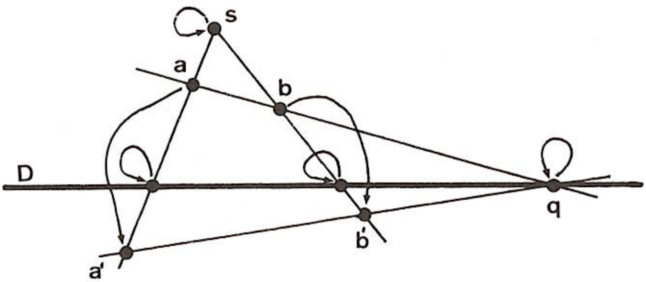
Et la parallèle à D menée par s ? Son image comprend le point s et ne peut couper D car sinon le point d'intersection étant fixe appartiendrait également à la droite donnée, ce qui est faux. La parallèle à D menée par s est donc aussi sa propre image.

Prenons donc un point a et donnons-lui une image a' appartenant à sa. Sommes-nous à même de construire l'image d'un point quelconque b en respectant les conditions données ?

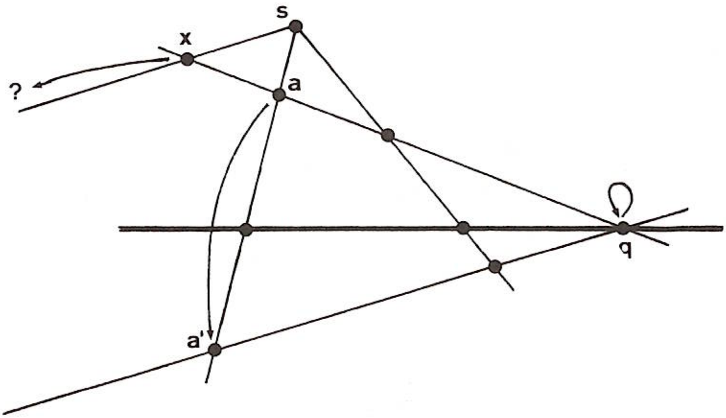


a) Supposons d'abord que b n'appartient pas à sa et que ab rencontre D en q. La droite image de ab passera par q et a' et l'image de b sera l'intersection de sb avec qa'.

Mais l'image de ab sera-t-elle vraiment a'b'. Autrement dit: tout point de ab aura-t-il, par une telle construction son image sur a'b' ?



Faisons parcourir la droite ab par un point x . Par notre construction l'image de x sera toujours le point d'intersection de sx et de a'q donc appartiendra bien à a'b'. N'y a-t-il vraiment aucun problème ? Nous prenons le point d'intersection de sx et a'b' ; ce point existe-t-il toujours ? N'existe-t-il pas un point x de ab tel que sx soit parallèle à a'b' ? Regardez le dessin ci-dessous .



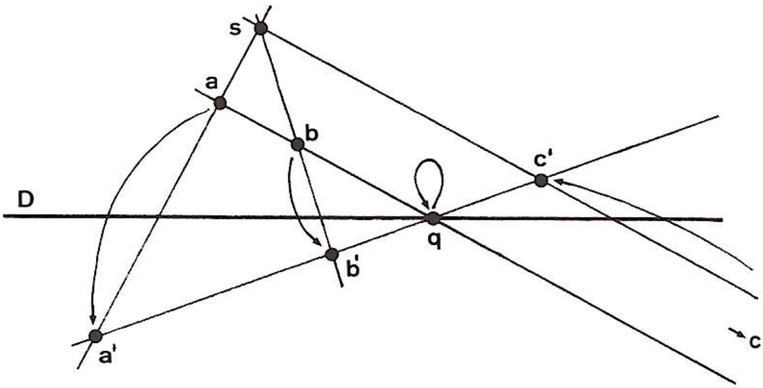
Le point x de notre figure n'a pas d'image ! Notre transformation n'est définie que sur une partie du plan.

Nous allons nous en sortir par un petit tour de passe-passe.

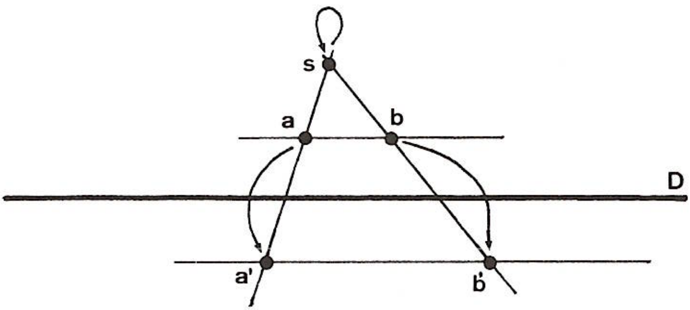
Nos droites sx et a'b' ont en commun une direction. Changeons notre vocabulaire et remplaçons direction par *point impropre* ou *point à l'infini* . Nos droites sx et a'b' ont en commun un point impropre. Ce sera l'image de x.

En faisant ceci, nous avons évidemment adjoint aux éléments du plan que nous connaissons bien de nouveaux éléments, les points impropres des droites de Π. Nous désignons par $\overline{\Pi}$ notre plan ainsi complété. Chaque droite de ce plan sera la réunion d'une droite de Π et de son point impropre. Nous désignerons par $\overline{D}$ ou $\overline{ab}$ les droites de $\overline{\Pi}$.

La question est à présent de savoir si notre transformation est maintenant une application de $\overline{\Pi}$ dans $\overline{\Pi}$ respectant nos conditions. Nous devons pour cela vérifier que l'image du point impropre d'une droite $\overline{ab}$ existe et appartient bien à $\overline{a'b'}$. Le dessin ci-dessous nous montre la construction de l'image c' du point impropre c de $\overline{ab}$. La droite joignant s au point impropre de $\overline{ab}$ est la droite parallèle à $\overline{ab}$. Elle rencontre a'b' en c' qui est donc l'image de c.



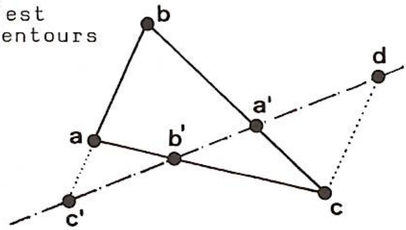
b) Et si ab était parallèle à D, comment construire b' ?
Dans ce cas, le point commun de $\overline{ab}$ et de $\overline{D}$ est le point impropre de D. La droite joignant a' à ce point sera donc parallèle à D. D'où la construction de b' :



Dans le dessin ci-dessous, nous avons construit les images des points b et c en nous servant du couple (a,a'). Obtiendrons-nous la même image de c en nous servant du couple (b,b'). Cela est évidemment nécessaire pour que nous ayons bien une application de $\overline{\Pi}$ dans $\overline{\Pi}$. Pour que c ait la même image c' en utilisant le couple (b,b'), il faut et il suffit que bc et b'c' se coupent sur D. Il en est bien ainsi par le théorème de Desargues (voir l'encadré) .

LES RESULTATS DE MENELAUS ET DE DESARGUES .

On sait peu de la vie et de l'oeuvre de Menelaus, si ce n'est qu'il vécut à Alexandrie aux alentours de 80 à 100 p.J.C.. Un de ses résultats, exprimé en termes modernes dit :



dans un triangle abc, si

a' bc tel que $\overline{a'b} = r\ \overline{a'c}$

b' ca tel que $\overline{b'c} = s\ \overline{b'a}$

c' ab tel que $\overline{c'a} = t\ \overline{c'b}$

alors (a',b' et c' alignés) $\Longleftrightarrow$ r.s.t = 1

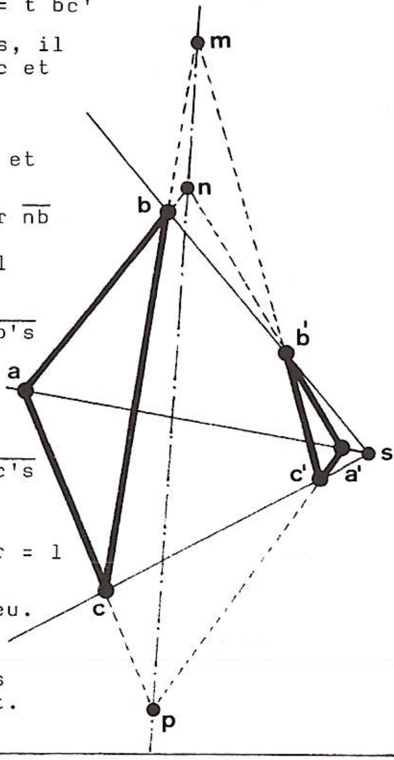
Le sens $\Rightarrow$ est une simple conséquence du théorème de Thales

$\overline{a'b} = r\ \overline{a'c} \rightarrow \overline{bc'} = r\ \overline{cd}$

$\overline{b'c} = s\ \overline{b'a} \rightarrow \overline{cd} = s\ \overline{ac'}$ $\Big\}$ $\overline{bc'} = r.s\ \overline{ac'}$, $\overline{ac'} = t\ \overline{bc'}$ $\Big\}$ r.s.t = 1

$\leftarrow$ se démontre par l'absurde.

Quant au théorème de Desargues, il affirme que si deux triangles abc et a'b'c' sont tels que les droites aa',bb' et cc' concourent en s, alors les points d'intersection m de bc et b'c', n de ab et a'b' et p de ca et c'a' sont alignés.



Si $\overline{mb} = q\ \overline{mc}$, $\overline{pc} = t\ \overline{pa}$ et $\overline{na} = r\ \overline{nb}$ il suffit d'après le résultat de Menelaus de prouver que q.t.r = 1

Or dans sab coupé par a'b', on a

$\overline{a's} = v\ \overline{a'a}$, $\overline{na} = r\ \overline{nb}$, $\overline{b'b} = u\ \overline{b's}$

dans sac coupé par a'c', on a

$\overline{a'a} = \frac{1}{v}\ \overline{a's}$, $\overline{pc} = t\ \overline{pa}$, $\overline{c's} = w\overline{cc'}$

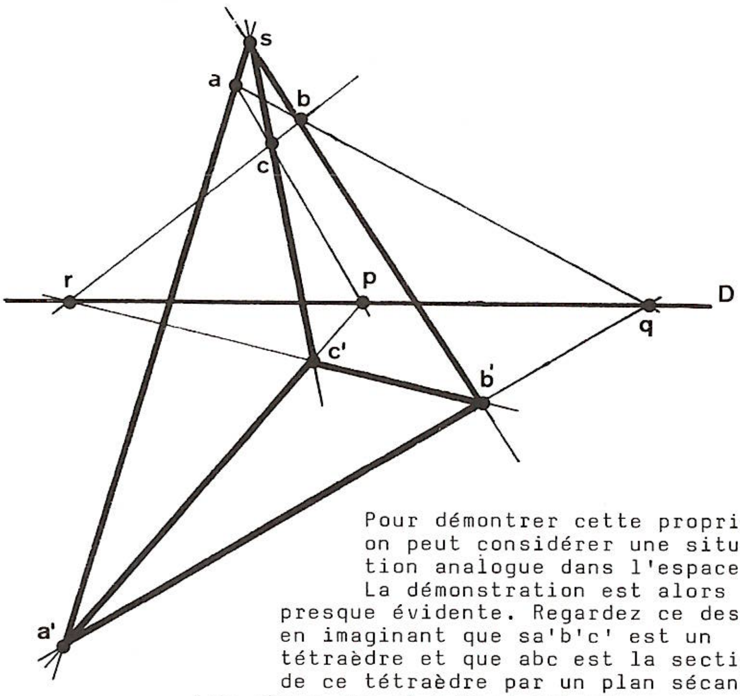
dans sbc coupé par b'c', on a

$\overline{b's} = \frac{1}{u}\ \overline{b'b}$, $\overline{mb} = q\ \overline{mc}$, $\overline{c'c} = \frac{1}{w}\ \overline{c's}$

et de vru = 1, $\frac{tw}{v} = 1$ et $\frac{q}{uw} = 1$,

on tire par multiplication :q.t.r = 1

On sait de Desargues qu'il était architecte au service de Richelieu. Il vécut de 1596 à 1650. C'est lui qui eut le premier l'idée des triangles homologiques qu'exploita avec bonheur Poncelet.



Pour démontrer cette propriété, on peut considérer une situation analogue dans l'espace. La démonstration est alors presque évidente. Regardez ce dessin en imaginant que sa'b'c' est un tétraèdre et que abc est la section de ce tétraèdre par un plan sécant. Les plans abc et a'b'c' ont alors une droite d'intersection et les droites ab et a'b' qui sont coplanaires puisque dans une même face du tétraèdre se coupent sur cette intersection (ou lui sont toutes deux parallèles). Il en est de même de ac et a'c' et de bc et b'c' ce qui établit la propriété.

Deux triangles du plan qui occupent de telles positions respectives sont appelés *homologiques* et la transformation que nous définissons est une *homologie*.

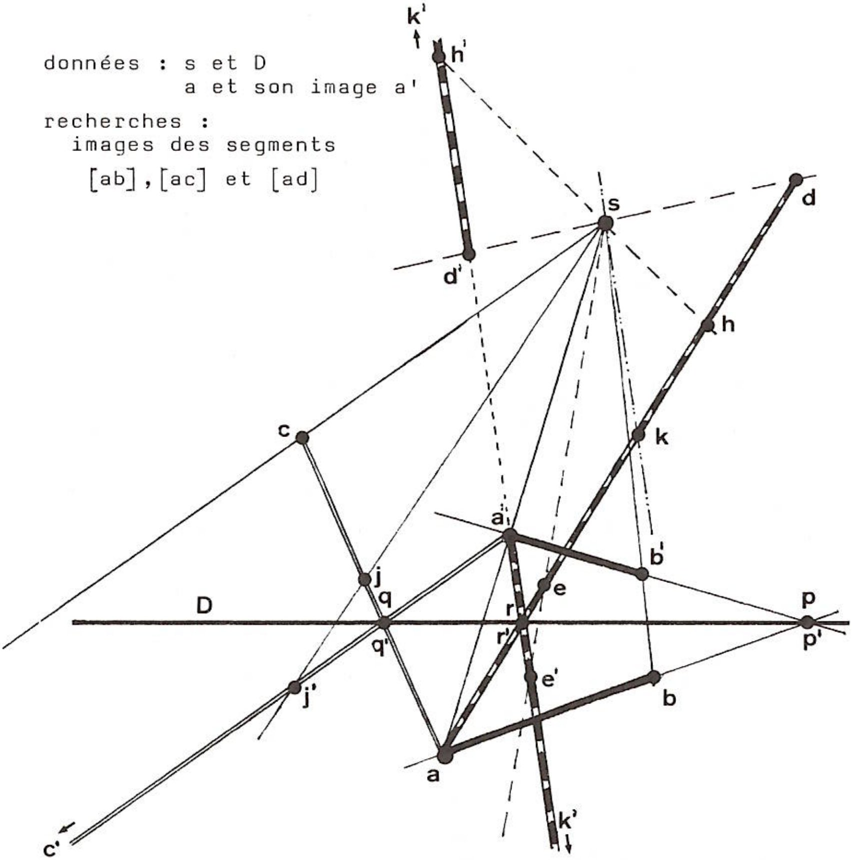
c) Il nous reste à construire l'image d'un point b qui appartient à sa. La construction utilisée jusqu'ici ne convient plus car les droites se superposent. Mais nous venons de voir que l'on peut utiliser n'importe quel couple pour définir la transformation. Construisons donc un couple auxiliaire (c,c') et à partir de celui-là construisons l'image de b.

IMAGES DE SEGMENTS DE DROITES .

Une droite s'applique sur une droite ... donc un segment sur un segment ... peut-être, mais est-ce bien sûr ? N'oublions pas qu'il s'agit de droites de $\overline{\Pi}$. Voyez les exemples page suivante :

données : s et D
a et son image a'

recherches :
images des segments
[ab], [ac] et [ad]



Recherche pour [ab] : on trace ab → p ; a'p' et sb → b'

Recherche pour [ac] : l'image de aj est a'j'. Il existe sur aj un point c dont l'image est le point impropre c'

Recherche pour [ad] : le point auxiliaire e d'image e' permet de trouver la droite a'e' porteuse de l'image du segment. L'image de h est h' et il existe k (sk parallèle à a'e') dont l'image est le point impropre.

Ainsi : l'image du segment [ab] est un segment
l'image du segment [ac] est une demi-droite
l'image du segment [ad] est la réunion de deux demi-droites.

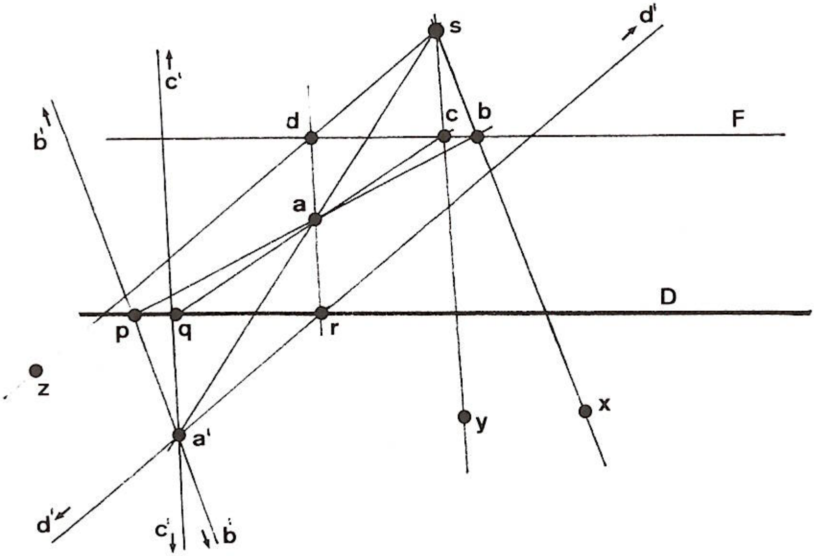
Comment expliquer cette situation ?

Orientons la droite ab. Le point impropre de ab précède tous les points de ab mais aussi est après tous les points de ab de sorte que $\overline{ab}$ est une ligne fermée au même titre qu'un cercle. Or quand vous choisissez deux points sur un cercle, il existe deux arcs qui ont ces points pour extrémités. De même, sur la droite $\overline{ab}$, on peut dire que a et b sont extrémités de deux segments : l'un comprend le point impropre et se dessine dans le plan euclidien comme réunion de deux demi-droites. Or nous avons vu que dans une homologie, la propriété "être un point impropre" ne se conservait pas. Des points impropres ont pour image un point à distance finie et vice-versa.

En fait l'image d'un segment de $\overline{ab}$ est bien un segment $\overline{a'b'}$ mais si un point du segment [ab] de la droite ab est envoyé sur le point impropre de a'b', nous aurons un dessin dans le plan euclidien qui sera composé de une ou deux demi-droites.

D'où l'importance de pouvoir détecter tous les points qui sont envoyés sur des points impropres : nous les obtiendrons tous en recherchant sur les droites issues de s les points qui sont envoyés à l'infini. Voyons comment rechercher un tel point :

Soit sx une droite passant par s. Un point b de cette droite sera envoyé sur un point impropre si l'image de ab est parallèle à sx. Commençons par dessiner l'image a'b'. Le point sur D est fixe d'où ab passe par ce point et nous trouvons ainsi b. On recommence pour un point c sur une droite sy.



sx étant parallèle à a'b', les triangles a'pa et sba sont semblables et on a :

$$\frac{|a'p|}{|bs|} = \frac{|aa'|}{|as|}$$

De même, les triangles a'qa et sca sont semblables d'où

$$\frac{|a'q|}{|cs|} = \frac{|aa'|}{|as|}$$; par suite, on trouve que $$\frac{|a'p|}{|bs|} = \frac{|a'q|}{|cs|}$$

et comme sc est parallèle à a'q et sb parallèle à a'p, on a bc parallèle à D. Les points appliqués sur des points impropres appartiennent donc tous à une droite parallèle à D que nous désignerons par F. Nous vous laissons le soin de vérifier que tout point de F est bien appliqué sur un point impropre et que tout point impropre est l'image d'un point de F.

L'ensemble des points impropres est donc l'image d'une droite et comme toute droite doit être appliquée sur une droite nous sommes amenés à parler de la "droite impropre" pour désigner l'ensemble des points impropres du plan.

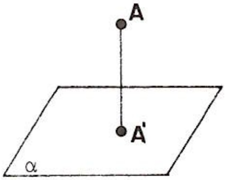
Mais en avons-nous le droit ? Si cet ensemble est une droite il doit en être de même de son image. Vérifiez qu'il en est bien ainsi et que l'image est également une droite parallèle à D, généralement distincte de F. On la désignera par H. Une homologie transforme les droites parallèles de Π en des droites qui se coupent sur H.

Nous vous suggérons de vous essayer à la construction par homologie de certaines parties du plan, par exemple d'un carré ou d'un cercle, vous serez peut-être surpris ou amusé par certains résultats. Nous serions heureux de recevoir certains de vos dessins. Mais, attention, il est indispensable pour obtenir un résultat valable de travailler avec grand soin et précision.

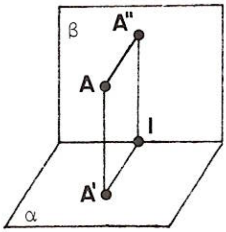
Le terme homologie a été inventé par le géomètre français Jean-Victor PONCELET, né à Metz en 1788, mort en 1867. Ce lieutenant des armées napoléoniennes fut fait prisonnier à la bataille de Krasnoï où 7000 français sous les ordres de Ney soutinrent l'assaut de 25000 russes. Retenu en captivité sur la Volga pendant plus de deux ans, il chercha dans le travail une distraction aux ennuis de la captivité. Réduit à ses souvenirs de l'Ecole Polytechnique, privé de livres, il reconstitua pour ses compagnons d'infortune la géométrie de cette époque puis jeta les bases de recherches originales : la géométrie projective, les pôles et polaires, la théorie de l'involution et le principe de dualité. Rentré en France, il sera général, membre de l'Académie des Sciences et commandant de l'Ecole Polytechnique et pour le plus grand bonheur des mathématiciens, il publiera ses "mémoires d'exil".

La géométrie descriptive de Monge

La géométrie descriptive inventée ou en tout cas formalisée par Monge a pour objet de représenter les figures de l'espace au moyen de figures planes obtenues par projection orthogonale sur deux plans de référence.



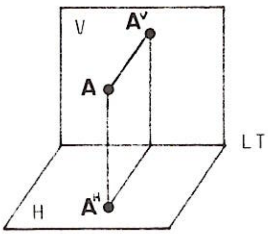
La projection orthogonale de A sur un plan α est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur α. Il est clair que A n'a qu'une projection A', mais que A' est la projection de l'infinité de point composant la perpendiculaire à α élevée de A'. Aussi la connaissance de A' ne suffit pas à déterminer A.



Le second renseignement qui vient de suite à l'esprit est la donnée de la distance AA' agrémentée d'un signe + ou - selon que A est d'un côté ou de l'autre de α, ce qui permet de désigner univoquement A.

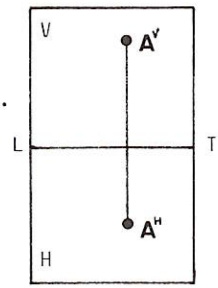
L'idée de Monge fut de "donner" cette distance "signée" par une seconde projection de A sur un plan β orthogonal au plan α. La figure AA'A"I est un rectangle et AA' = IA" .

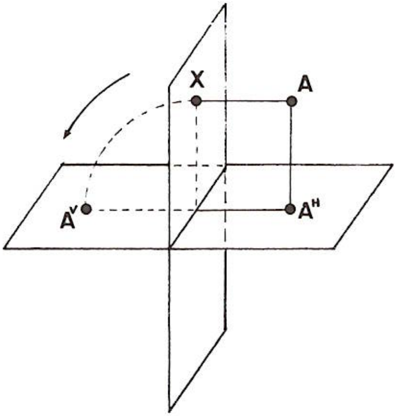
Le plan α est dit l'*horizontal* (H) et la projection d'un point A sur ce plan est notée A^H. Le plan β orthogonal à α est dit le *vertical* (V) et la projection de A sur ce plan est notée A^V. Ces noms sont donnés par souci de clarté, mais ne représentent pas forcément des situations physiques de plans horizontaux et verticaux. V est orthogonal à H, c'est tout ce qu'on leur demande!



La situation représentée ici à gauche se représente sur une *épure* qui se voit ici à droite.

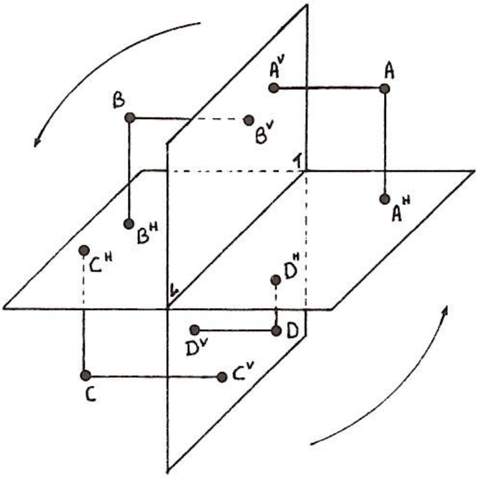
La trace qui joint A^V à A^H se nomme une *ligne de rappel*. Le rôle de ces lignes sera assez important dans cette représentation de l'espace.

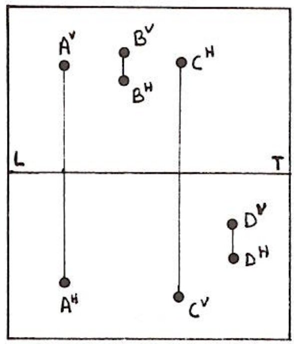




En quelque sorte, on crée l'épure en faisant subir aux traces dans le plan vertical (X) une rotation vers l'arrière de 90°, ce qui crée le point A^V de l'épure. (On parle de rabattement du plan vertical.

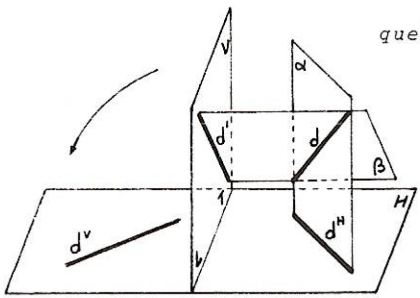
La droite commune aux plans H et V, qui est aussi l'axe de la rotation s'appelle *ligne de terre* (LT). La présence de cette ligne fixe la position des solides par rapport aux plans de projection. Elle est inutile pour déterminer forme et dimensions d'un solide.



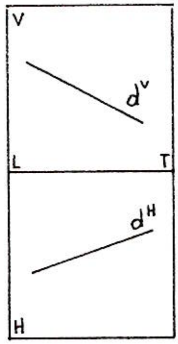


La représentation des droites s'obtient en utilisant deux plans fictifs de projection, l'un orthogonal à H (*plan vertical*), l'autre orthogonal à V (*plan de bout*).

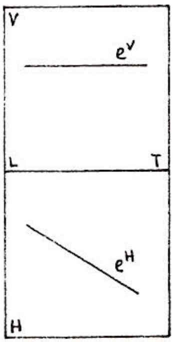
La droite d est une droite *quelconque*, e est une droite *horizontale* (parallèle à H)(e^V // LT); f est une droite *frontale* (parallèle à V)(f^H // LT); g est une droite *verticale* (perpendiculaire à H)(g^H est réduit en un point); h est une droite *de bout* (perpendiculaire à V)(h^V est réduit en un point).



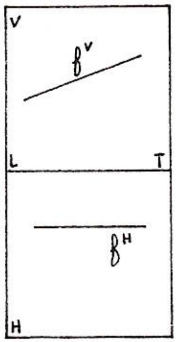
quelconque



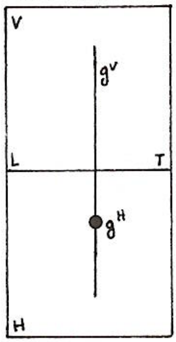
horizontale



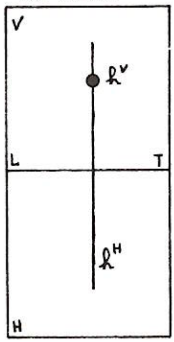
frontale

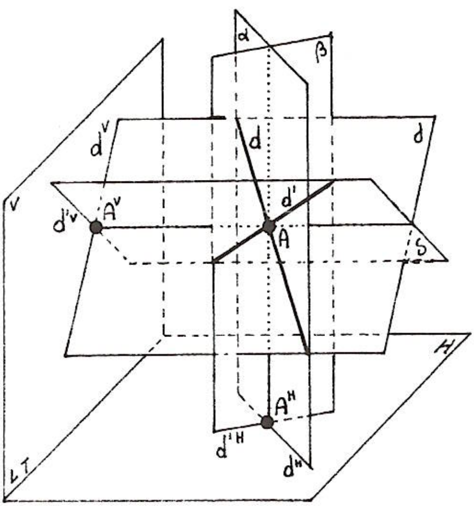


verticale

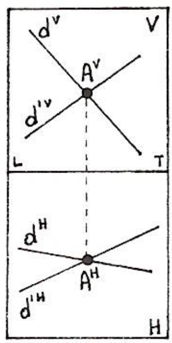


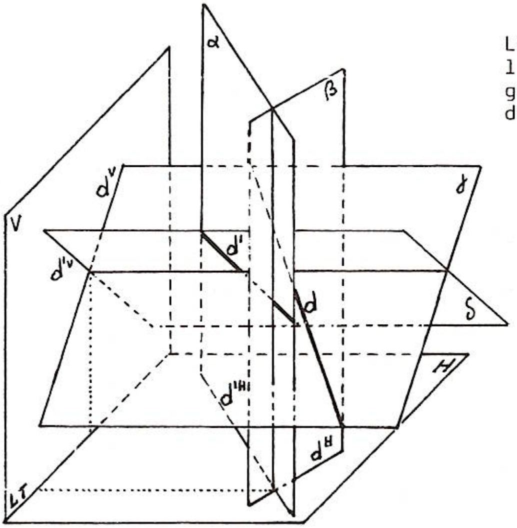
de bout



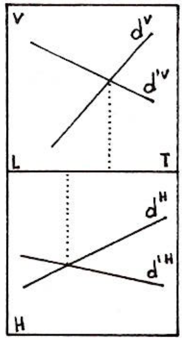


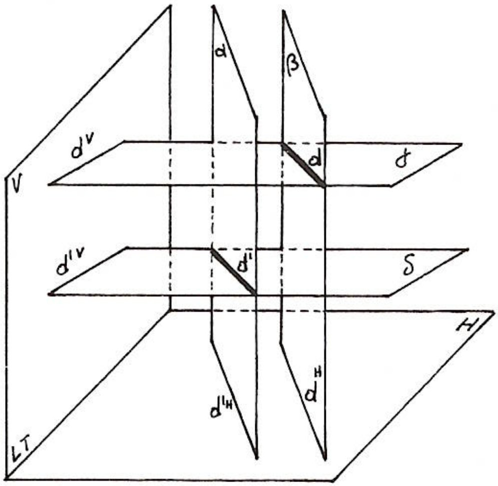
Des droites sécantes ont des projections sécantes telles que les deux points d'intersection des projections ont la même ligne de rappel.



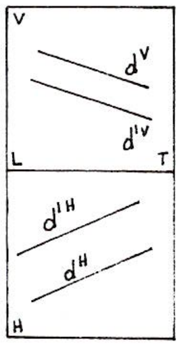


Là où se croisent sur l'épure deux droites gauches, il n'y a pas de point dans l'espace!

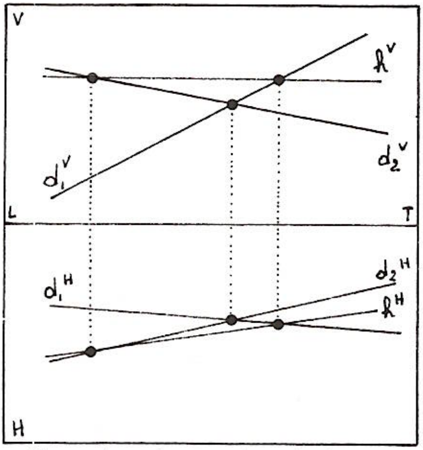




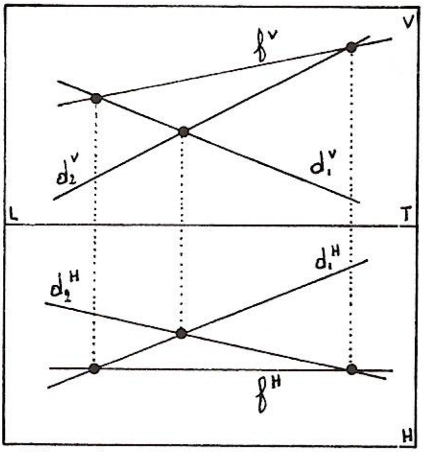
Les droites parallèles admettent deux projections parallèles dans V et H.



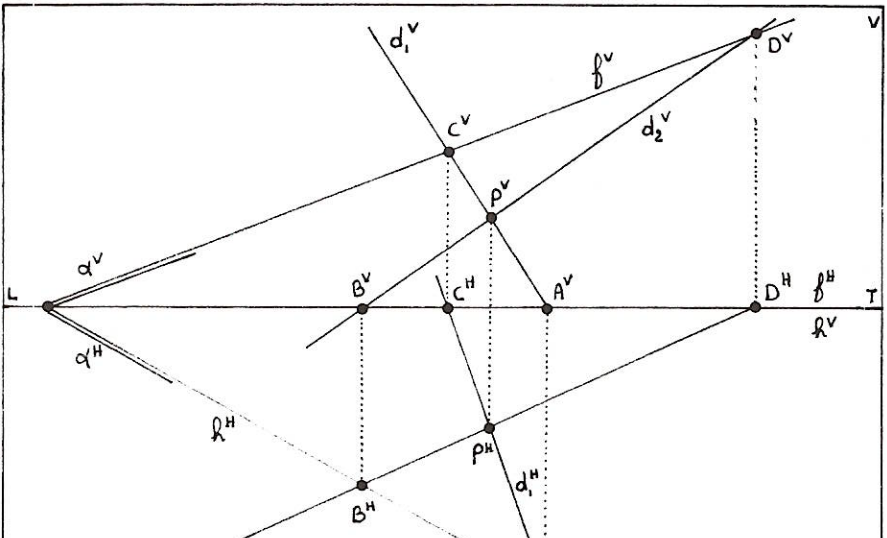
La représentation des plans est implicite : elle se fait par les traces de deux droites sécantes ou parallèles qui déterminent mathématiquement ce plan. En général, on essaie de trouver les *traces* du plan: on définit de ce nom les intersections du plan avec H et V. Obtenir ces traces est un problème simple : on trouve d'abord une horizontale dans un plan donné par deux droites sécantes. La trace d'un plan dans H est l'horizontale du plan dont la projection dans le plan vertical est confondue avec L.T..Trouver une frontale d'un plan conduit à un problème similaire. La trace dans V est une frontale dont la projection dans le plan horizontal est confondue avec L.T.. En effectuant les deux constructions sur le même dessin, on trouve bien le même point de percée de la ligne de terre avec le plan considéré. (Heureusement d'ailleurs!)



Plan donné par d_1 et d_2
Recherche d'une horizontale h

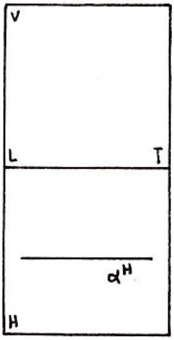


Plan donné par d_1 et d_2
Recherche d'une frontale f

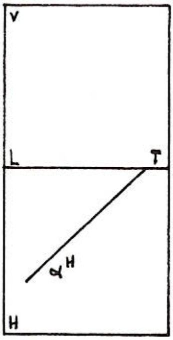


Plan donné par d_1 et d_2 : α^V et α^H sont les traces du plan.

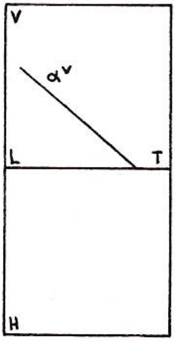
Il existe des plans particuliers qui peuvent se repérer par leur projection particulière.



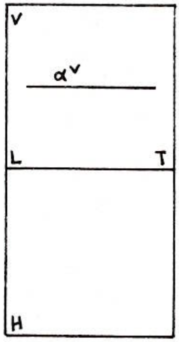
plan frontal



plan vertical



plan de bout

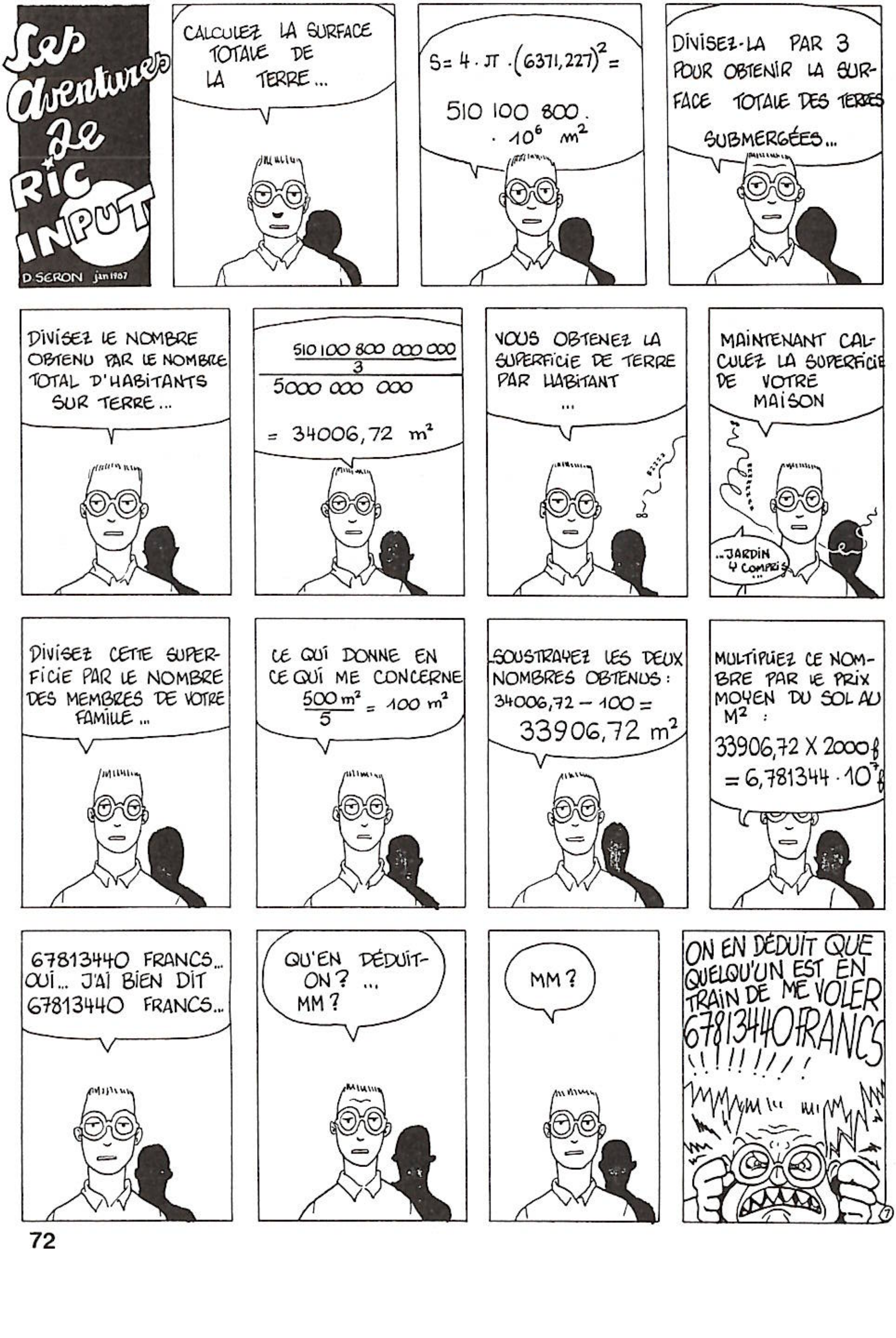


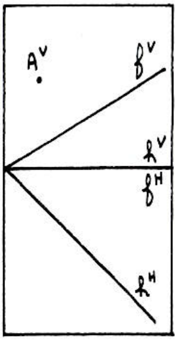
plan horizontal

To be continued...

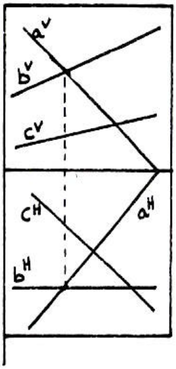
Gaspard Monge est originaire de Beaune où il est né en 1746. Bien que très modeste, sa famille réussit à le faire admettre chez les oratoriens de la ville qui décelèrent en lui des aptitudes pour les sciences. Refusant une chaire de physique qu'on lui offrait à Lyon alors qu'il n'avait que 16 ans, il préféra entrer à l'école militaire de Mézières. Un jour qu'on l'avait chargé de faire des études préliminaires pour un travail de fortification, il utilisa, au lieu des tatonnements en usage alors, une méthode tellement expéditive qu'il s'attira d'abord des reproches de ses chefs et qu'il obtint à grand peine la permission de s'expliquer. Il s'en tira tellement bien que ses chefs le nommèrent répétiteur de mathématique mais lui enjoignirent de ne jamais rien publier de sa méthode : la descriptive était alors un secret militaire.

Il publia alors des travaux d'analyse, devint professeur de mathématique et de physique, entra à l'Académie des Sciences comme examinateur des élèves de la marine, et enfin devint professeur de géométrie à la toute nouvelle Ecole Normale. En 1795, lié d'amitié à Bonaparte, il l'accompagne en Egypte où il participe aux fouilles de Péluse. Il donnera à cette occasion la première explication scientifique du mirage. Il sera président de l'Institut français du Caire, conte de Péluse et sénateur représentant de Liège après son retour en France. La Restauration lui confisquera ses titres et fonctions et il mourra en 1818 abandonné de tous, sauf de ses anciens élèves.

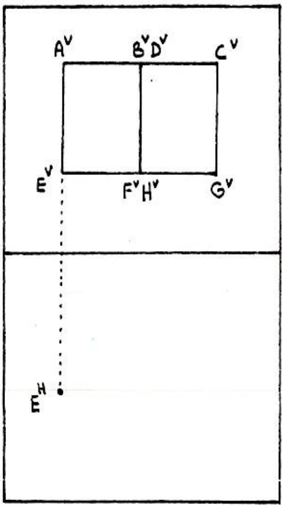

Les Aventures de Ric Input
D. SERON jan 1987
CALCULEZ LA SURFACE TOTALE DE LA TERRE...
S = 4 . π . (6371,227)² =
510 100 800 . · 10⁶ m²
DIVISEZ-LA PAR 3 POUR OBTENIR LA SURFACE TOTALE DES TERRES SUBMERGÉES...
DIVISEZ LE NOMBRE OBTENU PAR LE NOMBRE TOTAL D'HABITANTS SUR TERRE...
510 100 800 000 000 / 3 / 5000 000 000
= 34006,72 m²
VOUS OBTENEZ LA SUPERFICIE DE TERRE PAR HABITANT ...
MAINTENANT CALCULEZ LA SUPERFICIE DE VOTRE MAISON
...JARDIN Y COMPRIS...
DIVISEZ CETTE SUPERFICIE PAR LE NOMBRE DES MEMBRES DE VOTRE FAMILLE ...
CE QUI DONNE EN CE QUI ME CONCERNE 500 m² / 5 = 100 m²
SOUSTRAYEZ LES DEUX NOMBRES OBTENUS : 34006,72 − 100 =
33906,72 m²
MULTIPLIEZ CE NOMBRE PAR LE PRIX MOYEN DU SOL AU M² :
33906,72 X 2000 f
= 6,781344 · 10⁷ f
67813440 FRANCS... OUI... J'AI BIEN DIT 67813440 FRANCS...
QU'EN DÉDUIT-ON ? ... MM ?
MM ?
ON EN DÉDUIT QUE QUELQU'UN EST EN TRAIN DE ME VOLER 67813440 FRANCS
!!!!!!!!!



4. A est dans le plan fh
On demande de déterminer A^H
et de mener par A la droite q
perpendiculaire à h
et la droite r perpendiculaire
à f en dessinant leurs projections.



5. Les droites a et b définissent
un plan β.
La droite C n'est pas incluse
dans ce plan.
Déterminez les projections du point
de percée de C dans β.



6. Vous avez sur l'épure la
projection verticale d'un cube
et la projection horizontale
d'un de ses sommets.
Il faut construire la projection
horizontale du cube.

ATTENTION : Vos solutions
doivent nous parvenir à
la rédaction 150, Avenue de
Péville à 4030 Grivegnée

pour le Mercredi 15 avril

au plus tard !

N'oubliez pas de joindre la fiche
signalétique (voir n° 34)

Sommaire

Comité de rédaction :
F. Carlier, Gh. Marin, N. Miéwis, J. Vanhamme
Graphisme :
D. Seron
Edition :
J. Miéwis, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège
Nouveaux prix des abonnements :
Belgique : groupés (5 au moins) 80 FB
isolés 120 FB
par abonnement.
Etranger : y compris Pays-Bas et Luxembourg
par paquet de 5 abonnements : 800 FB
isolé : 240 FB
Poster historique :
Belgique : 30 FB (120FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240FB par 5 unités)
Pour la Belgique : Cpte n° 001-0828109-96
de Math-Jeunes, Chemin des Fontaines, 14bis,
7460 - Casteau.
Pour l'étranger : Cpte n° 000-0728014-29
de SBPMef, même adresse, à partir d'un compte postal ou par mandat postal.
en communiquant nom et code postal de votre école.
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.