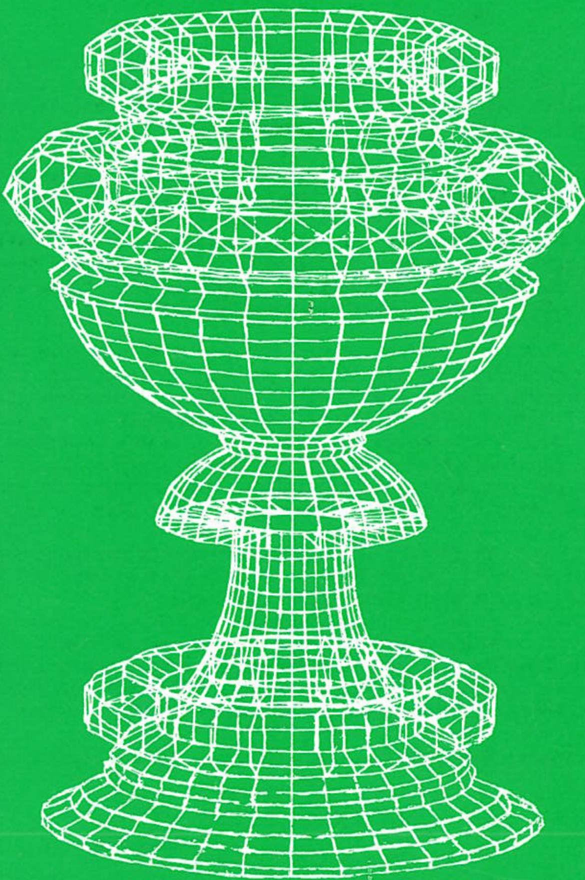
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression francaise - Association Sans But Lucratif

MATH-



JEUNES

Journal Trimestriel

9ème année | Numéro 36 | Eté 1987

Chers amis,

Tout d'abord un grand bravo à ceux qui ont eu le courage de participer à notre concours. Ils ne furent pas très nombreux mais la qualité des réponses fut généralement bonne. Vous trouverez les prix attribués en page 3 de la couverture.

Nous avons eu, ces derniers temps, quelques échos fort encourageants. Citons en exemple : un étudiant universitaire, en visite chez son professeur de collège lui dit combien il a été heureux d'avoir consevé ses MATH-JEUNES. Ils lui ont été utiles pour un travail en faculté; le 9 mai dernier à la journée portes ouvertes de l'Athénée Royal d'Uccle I un groupe d'élèves a présenté un travail inspiré d'un thème choisi dans MATH-JEUNES. De tels échos nous encouragent à continuer .

Nos projets d'articles pour l'an prochain ne sont pas encore bien définis. Nous accueillons toujours avec plaisir vos suggestions si un thème vous intéresse particulièrement. Nous consacrerons certainement encore quelques articles à la géométrie de l'espace, en particulier nous songerons au rôle joué par l'aspect numérique dans son étude et sa représentation graphique. Nous envisageons aussi d'ouvrir une fenêtre sur les mathématiques traîtées anciennement par les Arabes, mathématiques dont on trouve de nombreuses traces dans des manuscrits.

Et puis, nous cherchons toujours des collaborateurs pour rédiger des articles pouvant intéresser spécialement les plus jeunes d'entre vous et augmenter ainsi notre audience.

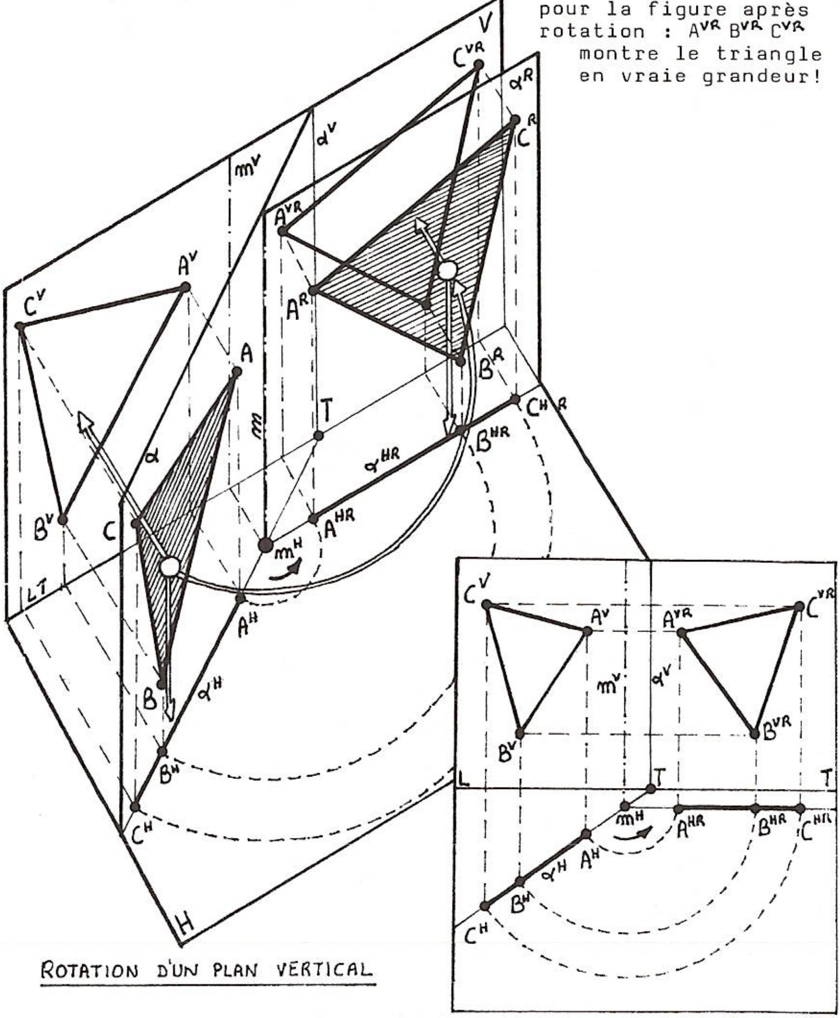
Nous vous souhaitons une excellente fin d'année scolaire. Soyez - nous fidèles et, après des vacances enrichissantes, amenez-nous de nouveaux abonnés à la rentrée. Un nombre suffisant d'abonnés est une nécessité vitale pour poursuivre notre publication.

A bientôt,

La Rédaction

DESCRIPTIVE de MONGE (2)

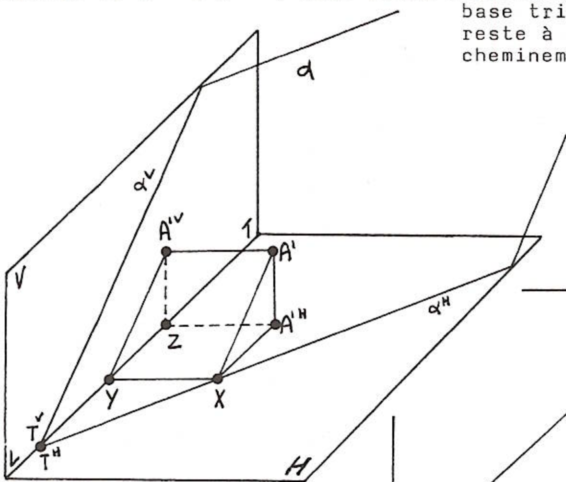
Etant donné un triangle ABC situé dans un plan vertical, on obtient facilement sur l'épure les projections $A^V B^V C^V$ et $A^H B^H C^H$. Mais ces deux projections déforment le triangle ! Le génie de Monge est d'avoir pensé aux rotations dans l'espace qui sont susceptibles d'amener le triangle à se projeter en vraie grandeur. Monge utilise le terme de rabattement pour la figure après rotation : $A^{VR} B^{VR} C^{VR}$ montre le triangle en vraie grandeur!



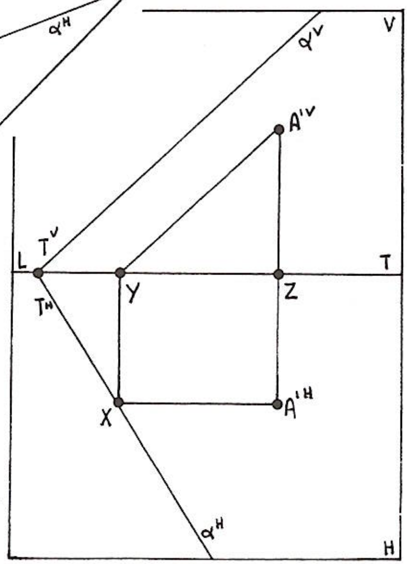
ROTATION D'UN PLAN VERTICAL

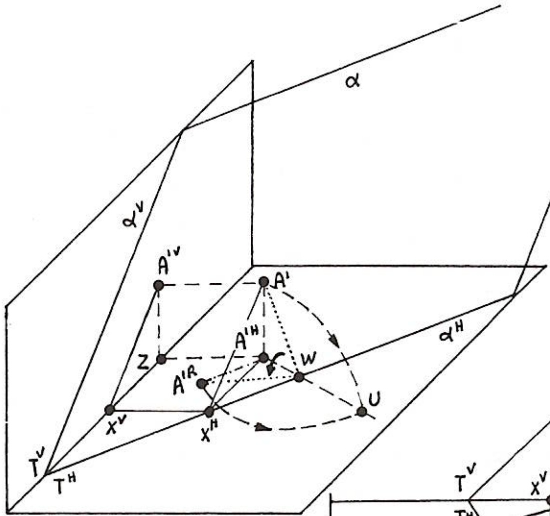
Rabattre une figure d'un plan vertical ou d'un plan de bout est chose aisée à faire. Le problème est un peu plus délicat lorsque la figure se trouve dans un plan quelconque. Un petit (?) exemple valant mieux qu'un long discours, imaginons un prisme droit à base hexagonale sectionné par un plan quelconque connu par ses traces α^H et α^V. En supposant O^H, A^H et B^H connus, il est facile de représenter la base dans le plan H. Si l'on suppose le prisme droit, les projections A'^H, B'^H,... se confondent avec A^H, B^H,... Mais où diable se trouvent A'^V, B'^V,... ?

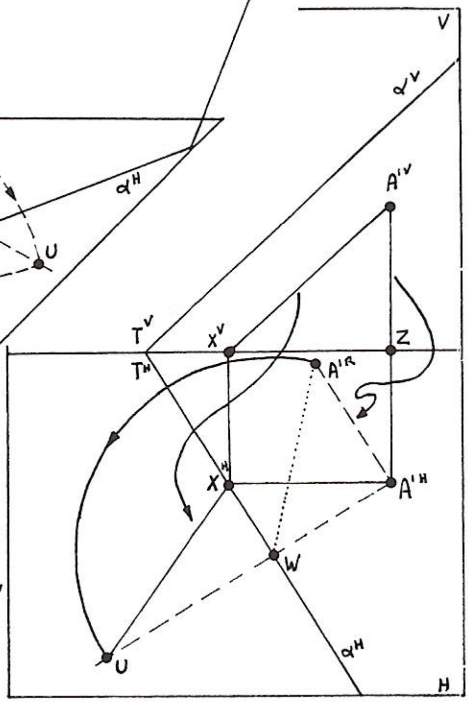
Nous analysons le problème dans la perspective cavalière: $A'^H X$ est parallèle à LT dans H; ensuite XY est perpendiculaire à LT, toujours dans H; quant à YA'^V, il est parallèle à α^V dans V. Avec Z, point de rencontre de LT et de la ligne de rappel de A'^V à A'^H, nous avons construit un prisme droit à base triangulaire. Il nous reste à effectuer le même cheminement sur l'épure.



Nous voilà capable de construire la projection sur V de la section prismatique, mais cette "coupe" n'est pas vue en vraie grandeur puisque les traces de α montrent que le plan n'est ni frontal, ni horizontal. Le rabattement peut s'effectuer autour de n'importe quelle horizontale du plan α : par commodité, nous choisissons α^H.





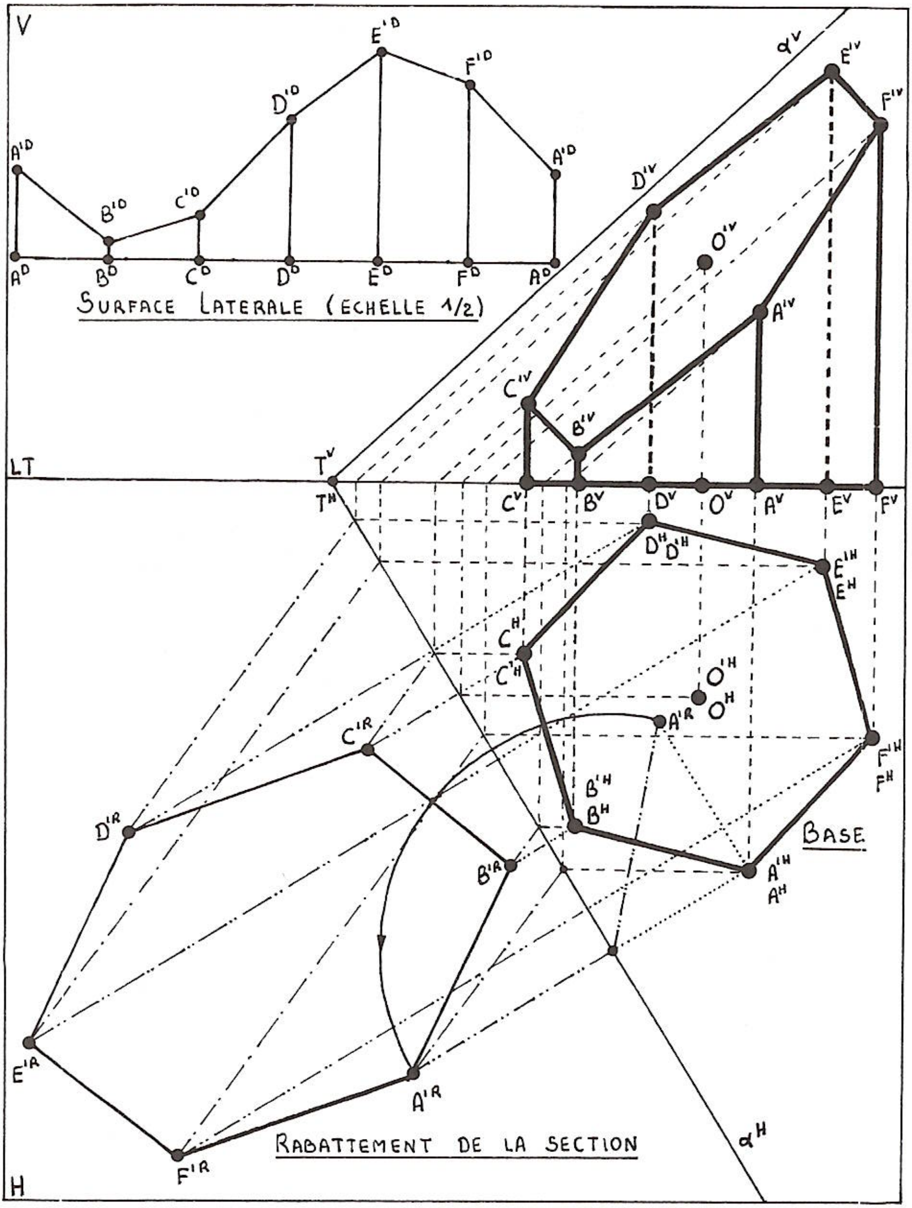


A'^H se déplace sur une perpendiculaire à la charnière : jusque où ?

1) $A'^H X^H$ est la projection horizontale d'une frontale passant par A'. Sa projection verticale contient X^V et A'^V : $X^V A'^V$ est la vraie grandeur de A'X. La distance $X^H U$ est égale à $X^V A'^V$. Pour rabattre un autre point, on trace une parallèle à $A'^H X^H$ et une parallèle à $X^H U$; $A'^H U$ est perpendiculaire à α^H.

2) On peut aussi rechercher la vraie grandeur de A'W et la porter en WU. $A'^R A'^H$ est perpendiculaire à $A'^H W$, donc parallèle à α^H, et a la même longueur que le segment $A'^V Z$. WA'^R est la vraie grandeur de WA', le rabattement autour de α^H applique A' sur U. Pour les autres points, on utilise l'angle en X, ce qui permet de ne reporter qu'une seule distance $A'^V Z$ pour rabattre tout les points de l'épure.

L'épure complète se trouve à la page suivante. On y a ajouté, mais à l'échelle 1/2 par manque de place, le développement de la surface latérale : la hauteur des trapèzes se trouve en vraie grandeur dans H, et les bases des trapèzes se voient dans V. Alors, à vos ciseaux ...



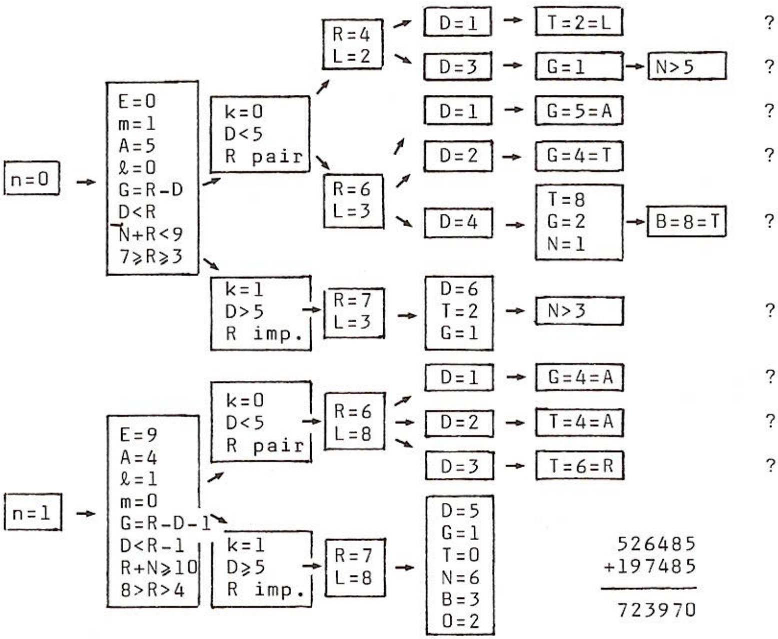
V
LT
H
SURFACE LATERALE (ECHELLE 1/2)
BASE
RABATTEMENT DE LA SECTION

Le coin des problèmes

R135 Les deux pages suivantes donnent les 54 solutions : elles se répartissent en 11 séries suivant les 11 développements connus du cube. La série comporte 6 modèles ou 3 modèles suivant qu'il n'existe pas ou qu'il existe un centre de symétrie dans le développement du cube.

R136 On a :

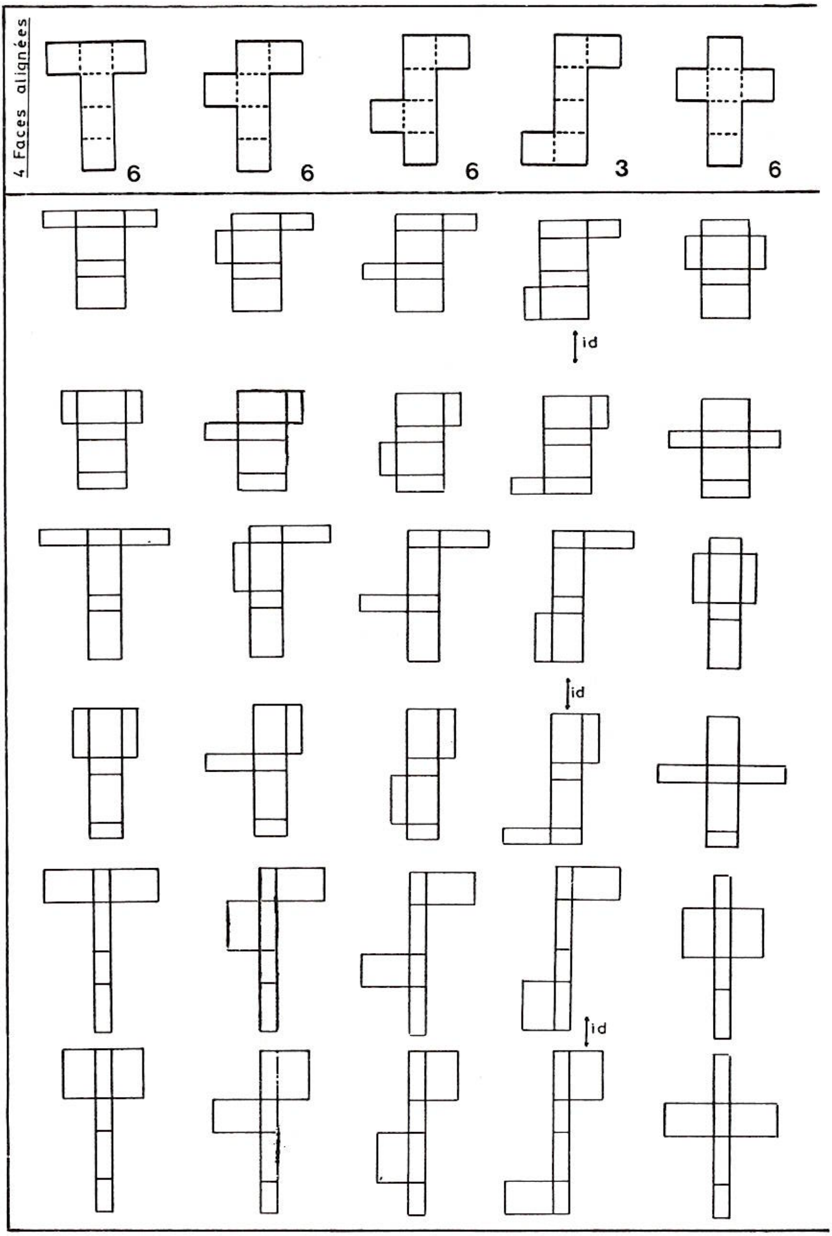
$$
\begin{array}{ll}
2D = T + 10k & k = 0 \text{ ou } 1 \\
2L + k = R + 10 & \ell = 0 \text{ ou } 1 \\
2A + \ell = E + 10m & m = 0 \text{ ou } 1 \\
N + R + m = B + 10n & n = 0 \text{ ou } 1
\end{array}
$$

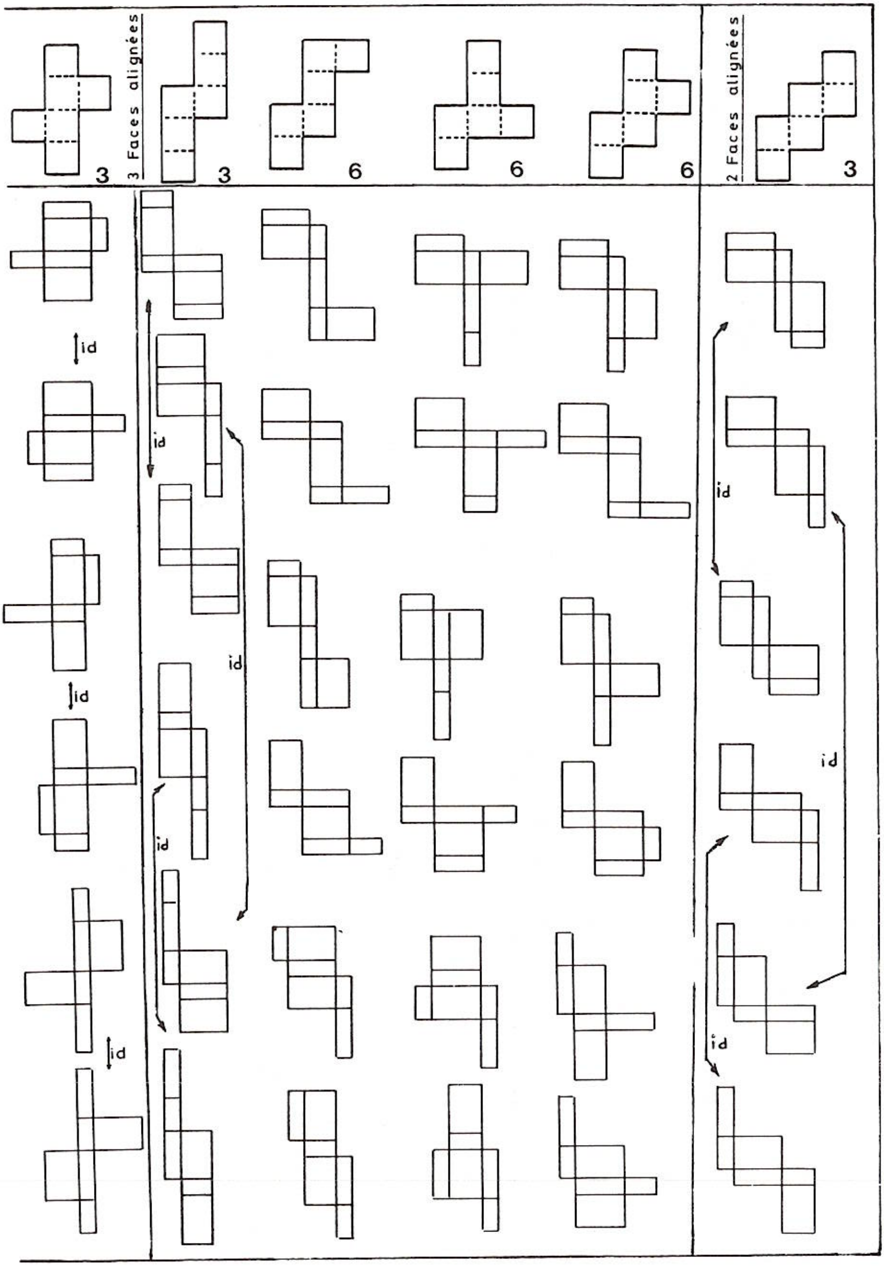


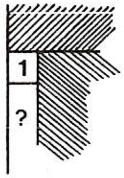
$$
\begin{array}{r}
526485 \\
+197485 \\
\hline
723970
\end{array}
$$

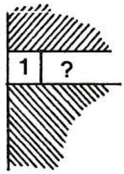
R137 L'aire de ce rectangle est $1^2+4^2\div7^2+\ldots+18^2 = 1056$. Ses dimensions sont des sommes de côtés, donc des nombres naturels. Ce rectangle doit contenir le plus grand carré. Ses dimensions sont donc au moins 18. Or $1056 = 2^5.3.11$. Les seuls rectangles possibles sont donc : 22x48, 33x32 et 44x24.

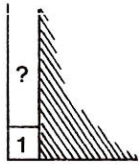
Le carré de 1 ne peut pas se trouver au bord, sous peine de faire apparaître des surfaces non pavables avec les autres carrés.

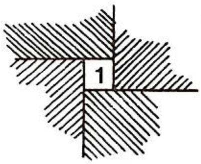

4 Faces alignées
6
6
6
3
6
id
id
id


3 Faces alignées
2 Faces alignées
3
3
6
6
6
3
id





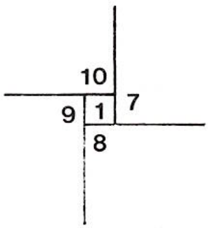




Il doit avoir ses sommets en coïncidence avec des sommets des carrés qui l'entourent.

Les bords des carrés qui l'entourent doivent autant que possible entrer en prolongement ; ce qui s'obtient avec les 4 carrés dont les côtés sont des nombres consécutifs : 7,8,9 et 10.

Il reste à utiliser les carrés de 4,14, 15 et 18.



Pour obtenir 22 x 48, il faut:

48 - (10+9) = 29 et 29 = 15+14
et 22 - (9+8) = 5, mais il n'y a pas de 5!

Pour obtenir 24 x 44, il faut :

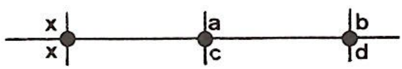
44 - (10+9) = 27 impossible à réaliser.

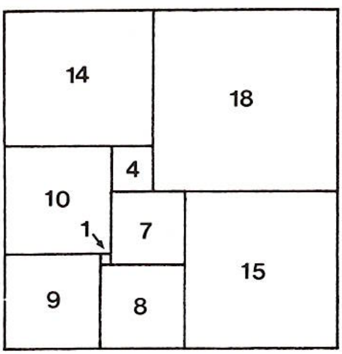
Il reste 32 x 33, et on a bien

33 - (10+9) = 14
et 32 - (9+8) = 15 ,

ce qui conduit à la configuration ci-dessous, qui se complète avec les deux carrés de 4 et 18 restants.

R138





On a : $\dfrac{a - x}{c - x} = \dfrac{b - a}{d - c}$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{bc - ad}{(b - a) - (d - c)}$$

avec $b-a \neq d-c$

Si $b-a = d-c$, il n'existe pas de point de même abscisse dans les deux graduations : chacune des graduations est la translatée de l'autre par la translation (b-a) ou (a-b).

$x=0$ si $bc-ad = 0$ ou encore $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: chacune des graduations est homothétique de l'autre par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$.

R139 Remarquons que la seconde moitié du manuscrit a été tapée par Anne trois fois plus vite que la première moitié.

Désignons par n le nombre de jours qu'a duré la frappe par Anne de cette seconde moitié du manuscrit. Nous pouvons en déduire que la première moitié a été tapée par Anne en 3n jours à raison de 10 pages par jour. Par conséquent, la moitié du manuscrit représente 30n pages, et le manuscrit entier 60n pages. Pour le taper, Anne a mis $3n+n = 4n$ jours. Anne a donc tapé $60n/4n = 15$ pages par jour en moyenne, quel que soit le nombre de pages du manuscrit. C'est donc la mère qui a raison.

R140 Pour que les nombres a,b et c puissent être considérés comme les trois côtés d'un triangle, il faut et il suffit
1°) que a,b,c soient positifs,
2°) que le plus grand de ces 3 nombres soit plus petit que la somme des deux autres.

Le nombre x étant supérieur à 1 par hypothèse, a,b,c sont positifs. De plus, si $x>1$, on a nécessairement $a>c$. Montrons que $a>b$, ce qui revient à prouver que $a-b>0$, soit $x^2-x>0$, ce qui est réalisé puisque les deux facteurs x et $x-1$ sont positifs.

Des trois nombres a,b,c, a est donc le plus grand. Il suffit alors de montrer que $a<b+c$ ce qui revient à $x>1$, ce qui est vrai.

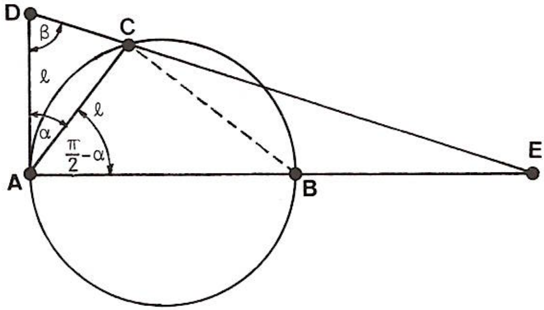
Pour avoir un triangle isocèle, il faut $b=c$ puisque a est forcément la base. $b=c$ équivaut à $x^2-2x-2 = 0$. Cette équation du second degré a deux racines distinctes de signes contraires. Seule la racine positive est acceptable si elle est supérieure à 1. Nous obtenons $x = 1+\sqrt{3}$. La valeur commune des deux côtés égaux est alors $3+2\sqrt{3}$.

R141 Supposons que je décide de ne pas payer le parcmètre lorsque le cafetier croit avoir vu l'agent pendant l'heure précédente. Le cafetier se trompe une fois sur quatre, l'agent risque alors de passer pendant les dix minutes qui viennent avec une probabilité de 10/60 ou 1/6 puisqu'il va alors nécessairement passer pendant l'heure qui suit, n'étant pas passé pendant l'heure précédente. Le risque monétaire correspondant est pour moi :

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) 48 \text{ f.} = 2\text{f.} = \text{le prix du parcmètre.}$$

Les deux solutions sont donc strictement équivalentes du point de vue pécuniaire (et des probabilités!).

R142



La longueur du segment AE vaut ℓ tg $\beta = \ell$ tg$\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = \ell \text{ cotg } \frac{\alpha}{2}$
(car le triangle ACD est isocèle et par les formules des angles complémentaires)

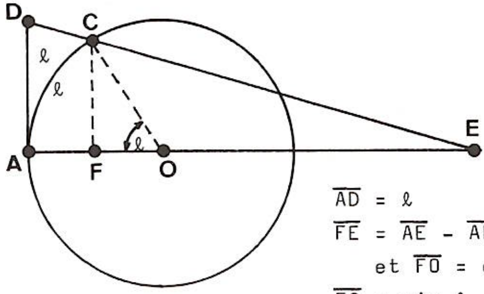
Or dans le triangle ACB, $\ell = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \sin \alpha$

Ainsi $\overline{AE} = 2 \sin \alpha \text{ cotg } \frac{\alpha}{2} = 2\ 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \text{ cotg } \frac{\alpha}{2}$

$$\overline{AE} = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Lorsque $\ell \to 0$, $\alpha \to 0$ et $\overline{AE} \to 4$

On peut reposer ce problème avec l'arc AC de longueur ℓ au lieu de la corde.



On trace CF $\perp$ AB

Les triangles AED et FEC sont semblables,

aussi : $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{FE}}{\overline{FC}}$

$\overline{AD} = \ell$

$\overline{FE} = \overline{AE} - \overline{AF} = \overline{AE} - (1 - \overline{FO})$

et $\overline{FO} = \cos \ell$

$\overline{FC} = \sin \ell$

$\overline{AE} \times \overline{FC} = \overline{AD} \times (\overline{AE} - (1 - \overline{FO}))$

$\overline{AE} \sin \ell = \ell (\overline{AE} - (1 - \cos \ell))$

$\overline{AE} \sin \ell - \overline{AE}\, \ell = \ell (1 - \cos \ell)$

$$\overline{AE} = \frac{\ell (1 - \cos \ell)}{\ell - \sin \ell}$$

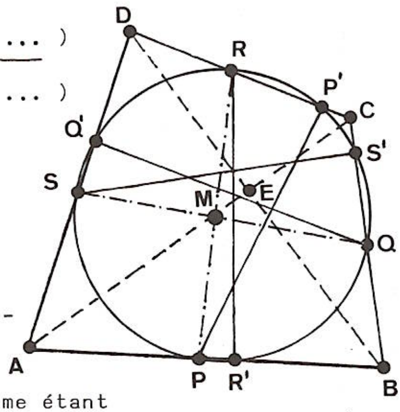
La limite pour $\ell \to 0$ de cette expression peut se trouver en utilisant les développements de Mac Laurin des fonctions sin et cos :

$$\lim_{\ell \to 0} \overline{AE} = \lim_{\ell \to 0} \frac{\ell \left(1 - \left(1 - \frac{\ell^2}{2!} + \frac{\ell^4}{4!} - \ldots \right)\right)}{\ell - \left(\ell - \frac{\ell^3}{3!} + \frac{\ell^5}{5!} - \ldots \right)}$$

$$= \lim_{\ell \to 0} \frac{\ell \left(\frac{\ell^2}{2!} - \frac{\ell^4}{4!} + \ldots \right)}{\frac{\ell^3}{3!} - \frac{\ell^5}{5!} + \ldots}$$

$$= \lim_{\ell \to 0} \frac{\frac{\ell^3}{2!} \left(1 - \frac{2\ell^2}{4!} + \ldots \right)}{\frac{\ell^3}{3!} \left(1 - \frac{6\ell^2}{5!} + \ldots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{3!}} = 3$$



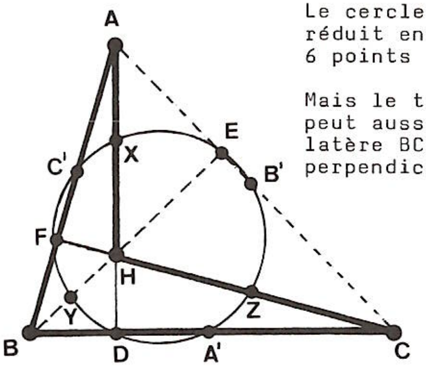
R143 C'est une application classique du théorème de Thales que de vérifier que pour un quadrilatère quelconque ABCD, les milieux P,Q,R et S sont sommets d'un parallélogramme! Les côtés de ce parallélogramme étant parallèles aux diagonales du quadrilatère, notre hypothèse supplémentaire de présence en E d'un angle droit nous permet d'affirmer que PQRS est un rectangle.

Un cercle circonscrit à un rectangle existe toujours et admet pour diamètres les diagonales de ce rectangle. Les triangles PRR', RPP', SQQ' et QSS' étant rectangles par construction ont leurs sommets sur le cercle ayant leur hypoténuse prise comme diamètre. Dès lors, les 8 points sont cocycliques.

Ce résultat, qui ne semble pas avoir été publié, ni signalé avant 1944 admet pourtant le célèbre cercle des 9 points d'Euler comme cas particulier; ce qui -nous semble-t-il- constituerait ainsi la démonstration la plus simple de ce célèbre théorème. (démonstration de l'américain Brand.)

En effet, un triangle ABC d'orthocentre H est bien un quadrilatère ABCH dont les diagonales sont perpendiculaires ! Le cercle des 8 points pour le quadrilatère ABCH de diagonales AC et BH contient les points :

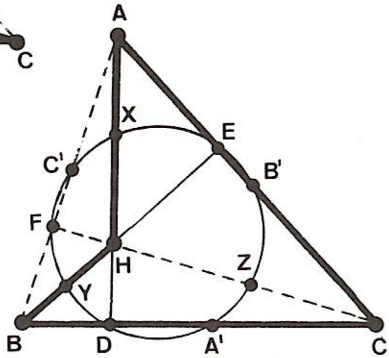
milieu de AB : C'	projection de C' sur CH : F
milieu de BC : A'	projection de A' sur HA : D
milieu de CH : Z	projection de Z sur AB : F
milieu de HA : X	projection de X sur BC : D



Le cercle des 8 points de ABCH se réduit en un cercle contenant les 6 points : C',A',Z,X,F et D

Mais le triangle ABC d'orthocentre H peut aussi être vu comme le quadrilatère BCAH dont les diagonales sont perpendiculaires !

Le cercle des 8 points de ce quadrilatère de diagonales BA et CH contient les points :



milieu de BC : A'
milieu de CA : B'
milieu de AH : X
milieu de HB : Y

projection de A' sur AH : D
projection de B' sur HB : E
projection de X sur BC : D
projection de Y sur CA : E

Le cercle des 8 points de BCAH se réduit en un cercle contenant les 6 points : A',B',X,Y,D et E

Les points A', X et D étant communs aux 2 cercles, ces deux cercles n'en font qu'un ...

Et le cercle d'Euler n'est que le cercle des huit points commun à ABCH et à BCAH (ainsi d'ailleurs qu'à CABH) !

R144 La somme des 9 premiers carrés est 285 si l'on en croit la formule : $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Chaque ligne de carrés bimagiques aura pour somme le tiers : soit 95. Sur une ligne se trouvera le carré de 9 : 81 : il nous faut donc deux autres carrés dont la somme fait 95-81 = 14, ce qui est impossible : il n'y a donc pas de carrés bimagiques d'ordre 3.

La somme des 16 premiers carrés vaut 1496, donc la somme sur une ligne vaut 374. La ligne contenant 256 doit se compléter par 3 carrés dont la somme vaut 374-256 = 118 ce qui ne peut se faire que d'une manière, avec 1,36 et 81. Mais alors, il n'est plus possible de compléter la colonne contenant 256. Il n'y a donc pas non plus de carrés bimagiques d'ordre 4.

R145 La question est plus simple qu'il n'y paraît : un mois ne s'écrit exactement en quatre colonnes que si c'est un mois de février, si le premier jour est un lundi et si l'année n'est pas bissextile (!)

Pour évaluer la probabilité, il convient d'explorer un cycle grégorien de 400 ans pour ce qui est de la périodicité des années bissextiles et un cycle de 28 ans pour ce qui est de la périodicité des premiers févriers qui sont des lundis. (c'est le cycle des lettres dominicales compte tenu des années bissextiles. voir M-J n°31, printemps 86).

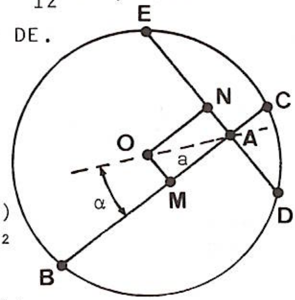
Comme 28 n'est pas diviseur de 400, il nous faut calculer sur une période de 2800 ans (PPCM de 28 et 400).

Sur 2800 ans, il y a $\frac{2800}{4} - \frac{2800}{100} + \frac{2800}{400} = 679$ années bissextiles.

Il reste donc 2121 années non bissextiles sur 2800; il y a une chance sur 7 que le mois de février de cette année commence un lundi et une chance sur 12 de choisir le mois de février.

Cela donne une probabilité : $\frac{2121}{2800} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{12} = 0{,}00902$

R146 M : milieu de BC; N : milieu de DE.



$$BC = 2.\ BM = 2\sqrt{r^2 - OM^2}$$

$$DE = 2.\ EN = 2\sqrt{r^2 - ON^2}$$

$$(BC + ED)^2 = BC^2 + 2.BC.ED + ED^2$$

$$(BC - ED)^2 = BC^2 - 2.BC.ED + ED^2 \quad (+)$$

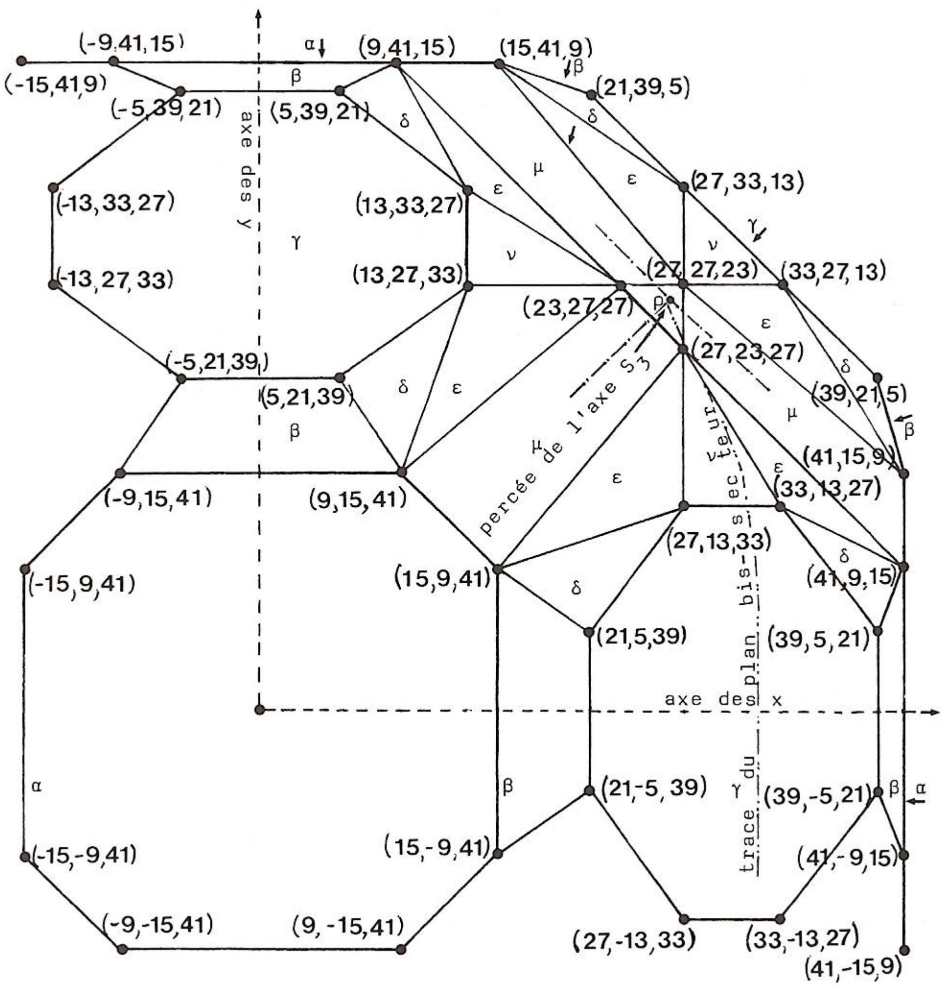
$$(BC + ED)^2 + (BC - ED)^2 = 2\,(BC^2 + ED^2)$$

$$\begin{aligned}(BC + ED)^2 &= 2\,(BC^2 + ED^2) - (BC - ED)^2 \\ &= 2\,(4\,(r^2 - OM^2) + 4\,(r^2 - ON^2)\,) - (BC - ED)^2 \\ &= 16r^2 - 8\,(OM^2 + ON^2) - (BC - ED)^2 \\ &= 16r^2 - 8a^2 - (BC - ED)^2\end{aligned}$$

Le maximum est donc atteint lorsque BC = ED. Or, si les cordes sont égales, elles sont inclinées par rapport à OA de $\alpha = 45°$.

Et $BC + ED = 2\sqrt{4r^2 - 2a^2}$

R147 La première démarche consiste en la recherche des triples naturels dont la somme des carrés vaut 1987. On trouve (41,15,9),(39,21,5),(33,27,13) et (27,27,23). Chacun des 3 premiers triples donne 48 points (6x8 : 6 à cause des permutations possibles de ce triple (=3!); et 8 (=2^3) car chaque élément du triple peut être affecté du signe + et du signe -. Le troisième triple ne donne que 24 points (2^3x3). Le polyèdre possède donc <u>168 sommets</u>. Une représentation du polyèdre par projection sur le plan des deux premières coordonnées revient à représenter les triples en négligeant la troisième coordonnée. On peut aussi se contenter de la représentation dans le quadrant des x et y positifs (en y adjoignant toutefois les plus proches points des autres quadrants pour aider à la compréhension des faces situées à l'intersection des plans de symétrie et de la sphère. En se servant du critère de coplanairité de 4 points dans l'espace, on arrive à reconstituer les faces. On n'oubliera pas d'exploite les axes de symétrie et plans de symétrie d'un tel polyèdre. L'axe de symétrie par rotation de 120° confondu avec la grande diagonale d'un cube inscrit dans une sphère suggère la présence



d'un axe de symétrie 3 partant du centre de la face (23,27,27), (27,27,23),(27,23,27) vers le centre de la shpère. Les plans bissecteurs de ces dièdres de 120° sont aussi des plans de symétrie du polyèdre. Ainsi, la recherche des faces ne doit effectivement avoir lieu que pour 1/48 de la sphère! (48 = 8x3x2 : 8:plans de symétrie comprenant les axes ; 3: axe de symétrie de 120°; 2: plan bissecteur de cette symétrie.
On trouve les faces :

6	octogones :	α	= 6x8 =	48 demi-arêtes
24	quadrilat.:	β	= 24x4=	96 "
12	octogones :	γ	= 12x8=	96 "
48	triangles :	δ	= 48x3=	144 "
48	triangles :	ε	= 48x3=	144 "
24	quadrilat.:	μ	= 24x4=	96 "
24	triangles :	ν	= 24x3=	72 "
8	triangles :	ρ	= 8x3 =	24 "

194 faces — 720 demi-arêtes = 360 arêtes.

On vérifie bien la relation d'Euler : 194 + 168 - 360 = 2.
On peut également calculer les vraies grandeurs des arêtes en se servant de la formule de la distance de deux points dans R^3.

Rappels: $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$ sont coplanaires ssi :

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

où un déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ vaut suivant la règle de Sarrus:

$$x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$$

Quant à la distance entre (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3), elle vaut:

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

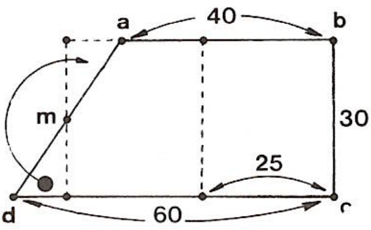
Vous pouvez bien sur vous amuser avec une autre année et découvrir quantité de polyèdres ; mais il vous faut savoir qu'un théorème de Lagrange affirme que pour qu'un naturel soit décomposable en somme de trois carrés entiers, ce naturel ne peut pas être de la forme :

$$4^a\ (8\,b + 7) \quad \text{avec} \quad a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0$$

ce qui, pour les années à venir, interdit 1991 (a=0,b=248) 1999 (a=0,b=249), 2007 (a=0,b=250) , 2012 (a=1,b=62), ...

R148 Premier cas : solution géométrique.

Soit m le milieu du segment [ad]. Le trapèze est transformé en un rectangle de 30 x 50.
Il reste à partager ce rectangle par une ligne distante de



25 m du côté [bc]

<u>Premier cas : solution algébrique</u>

On a :

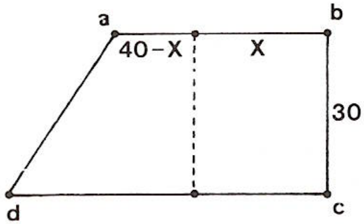
$$30\ x = 30\ (\frac{60 - x + 40 - x}{2})$$

$$30\ x = 30\ (50 - x)$$

$$x = 50 - x$$

$$2x = 50$$

$$x = 25$$

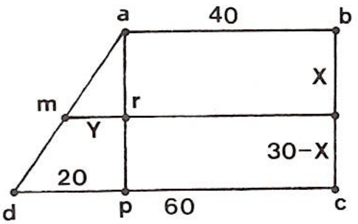


<u>Deuxième cas : solution algébrique.</u>

Des triangles semblables adp et amr, on tire :

$$\frac{y}{20} = \frac{x}{30}$$

d'où $y = \frac{2\ x}{3}$



Les deux aires étant égales, on a

$$x\ (\frac{40 + 40 + y}{2}) =$$

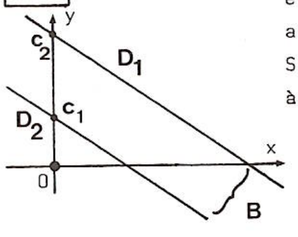
$$(30 - x)\ (\frac{60 + 40 + y}{2})$$

$$x(40 + \frac{x}{3}) = (30-x)(50 + \frac{x}{3})$$

ce qui mène à l'équation : $x^2 + 120\ x - 2250 = 0$

et à $\rho' = 5850 = (15\sqrt{26})^2$: on retient $x \simeq 16{,}49$ et $y \simeq 10{,}99$

R149



Considérons deux droites parallèles D_1 et D_2 d'équations respectives

$ax + by = c_1$ et $ax + by = c_2$

Si $c_1 < c_2$, un point (x,y) appartient à la "bande" B ssi :

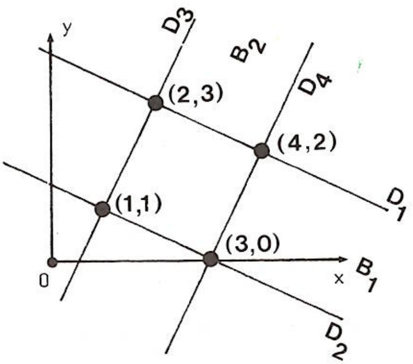
$$c_1 \leqslant ax + by \leqslant c_2$$

Or on a si $\alpha \in [c_1, c_2]$

$$|\alpha - c_1| + |\alpha - c_2| = |c_1 - c_2|$$

donc : $|ax+by-c_1| + |ax+by-c_2| - |c_1 - c_2| = 0$

est l'équation d'une bande limitée par les droites d'équation $ax+by-c_1 = 0$ et $ax+by-c_2 = 0$



Ainsi, on a :

$D_1 \equiv x + 2y - 8 = 0$
$D_2 \equiv x + 2y - 3 = 0$
$D_3 \equiv 2x - y - 1 = 0$
$D_4 \equiv 2x - y - 6 = 0$

Pour B_1, $c_1 = 8$, $c_2 = 3$

$|c_1 - c_2| = 5$

Pour B_2, $c_1 = 1$, $c_2 = 6$

$|c_1 - c_2| = 5$

$B_1 \equiv |x+2y-3| + |x+2y-8| - 5 = 0$
$B_2 \equiv |2x-y-1| + |2x-y-6| - 5 = 0$

D'autre part, si $B_1 \equiv f(x,y)=0$ et si $B_2 \equiv g(x,y)=0$, alors

$$B_1 \cap B_2 \equiv |f(x,y)| + |g(x,y)| = 0$$

donc, l'équation du parallélogramme est :

$$P \equiv \big| |x+2y-3| + |x+2y-8| - 5 \big| + \big| |2x-y-1| + |2x-y-6| - 5 \big| = 0$$

On peut aussi s'intéresser au bord du parallélogramme : en notant ∂P le bord de P, on a la relation :

$$\partial P = P \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)$$

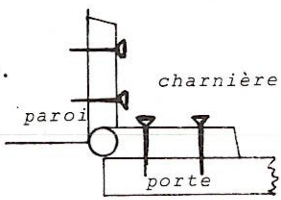
et puisque l'équation d'une union s'obtient par le produit des équations des composantes; on a

$$D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \equiv (x+2y-3)(x+2y-8)(2x-y-1)(2x-y-6) = 0$$

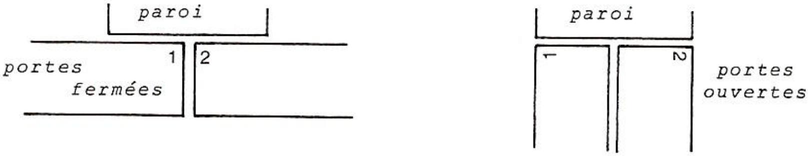
$$\begin{aligned} \text{et } \partial P \equiv & \big| |x+2y-3| + |x+2y-8| - 5 \big| \\ & + \big| |2x-y-1| + |2x-y-6| - 5 \big| \\ & + |(x+2y-3)(x+2y-8)(2x-y-1)(2x-y-6)| = 0 \end{aligned}$$

La charnière à 4 points d'ancrage

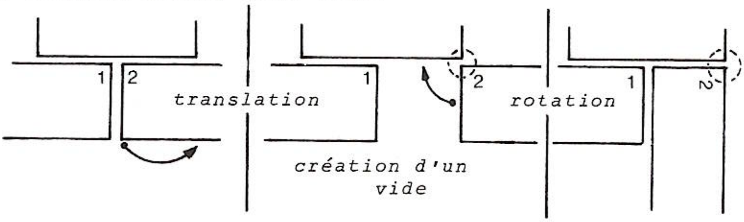
Chacun sait que le moyen le plus simple de permettre à une porte de s'ouvrir est de la munir de charnières. Ces pièces autorisent la rotation de la porte autour d'un axe.



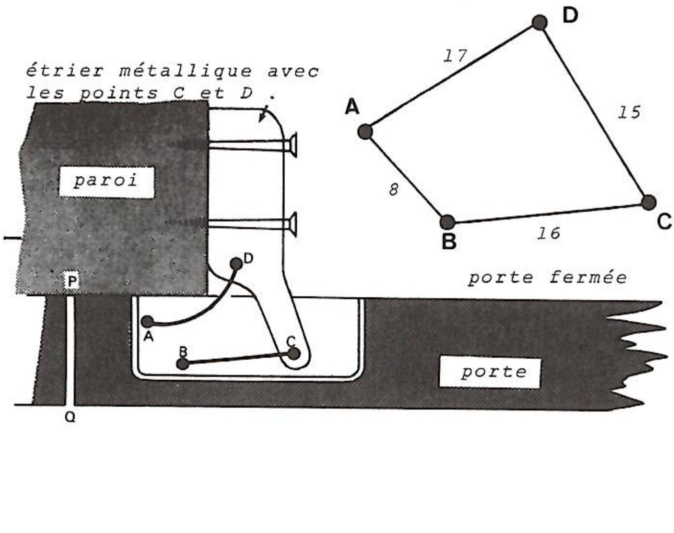
Mais certaines portes de cuisines modernes fonctionnent avec des charnières qui du point de vue des transformations du plan, sont assez sensationnelles! Il s'agit en fait d'une combinaison de translations et de rotations. Vous avez peut-être chez vous ce type de charnières : allez y jeter un coup d'oeil !

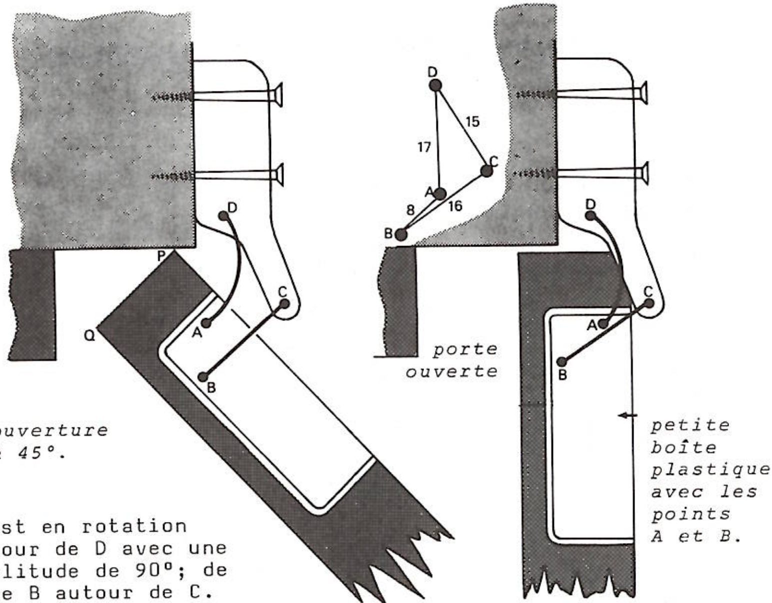


Sur de pareilles armoires, on constate que les tranches de deux portes sont très proches en position fermée. Cette proximité interdit l'usage de charnières traditionnelles par suite du manque de place pour " manoeuvrer " la porte. Pour ouvrir de telles portes, le principe est d'effectuer d'abord une translation le long du bord de l'armoire, puis ensuite la rotation pourra avoir lieu.



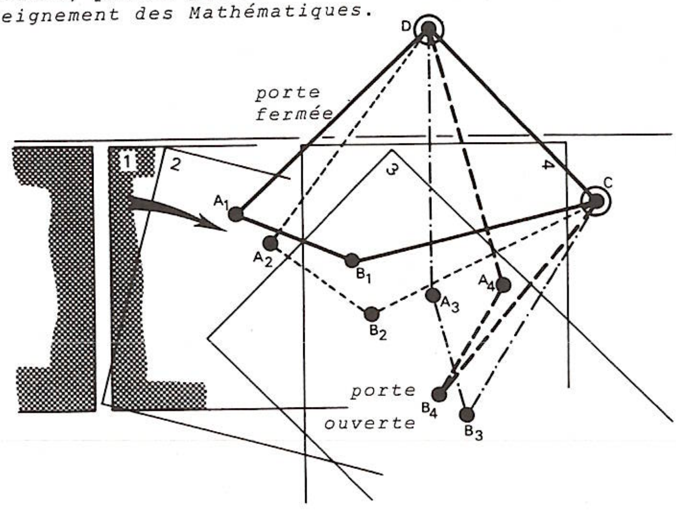
Cette vision théorique du mouvement à effectuer peut être réalisée par une charnière dite "à quatre points d'ancrage". ABCD est un quadrilatère dont les côtés sont indéformables; C et D sont fixés à la paroi, et A et B à la porte.



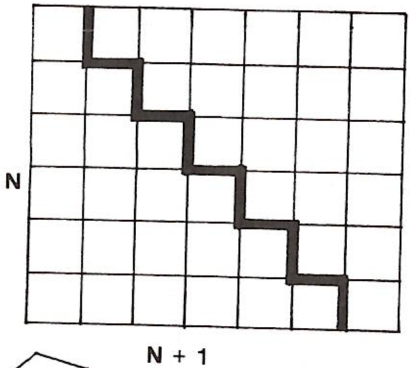


A est en rotation autour de D avec une amplitude de 90°; de même B autour de C. La direction de la droite AB subit donc également une rotation de 90°.

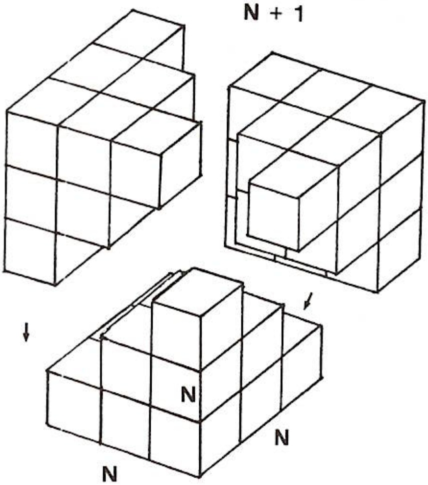
Nous avons emprunté cet article à notre excellent confrère PYTHAGORAS, publié par la Commission Hollandaise pour l'Enseignement des Mathématiques.

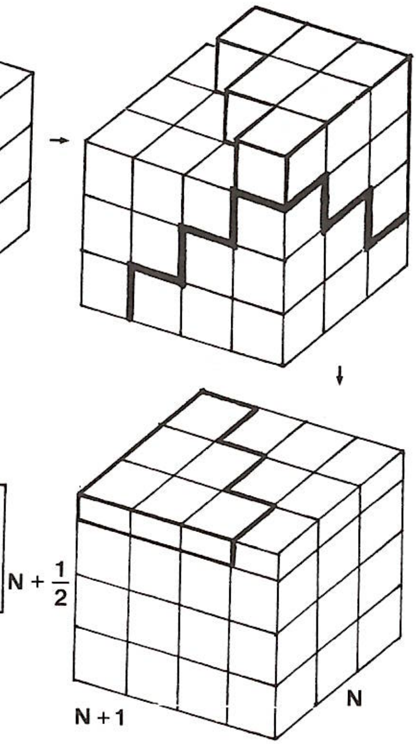


Démonstrations sans paroles

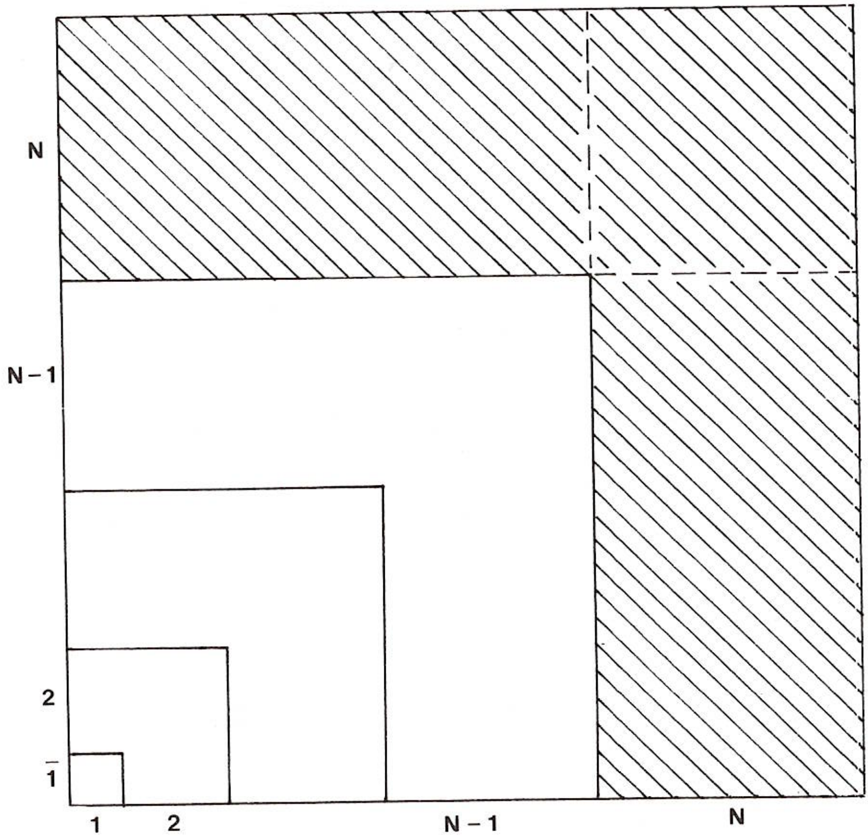


$$1 + 2 + 3 + \dots + N =$$
$$\frac{1}{2}\,(\,N\,.\,(\,N + 1\,)\,)$$





$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 =$$
$$\frac{1}{3}\,(\,N\,.\,(N + 1)\,.\,(N + \tfrac{1}{2})\,)$$



Aire hachurée : $2 \cdot (N \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + N)) - N^2$

$= 2 \cdot N \cdot \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N + 1) - N^2$

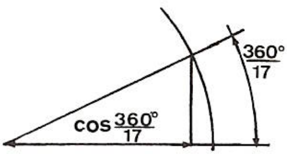
$= N^3 + N^2 - N^2$

$= N^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + N)^2$$
$$= \frac{1}{4} \cdot N^2 \cdot (N + 1)^2$$

Dis Monsieur, dessine-moi un HEPTADÉCAGONE...

Je vous accorde tout de suite que les professeurs de dessin ont des tas de trucs pour dessiner un heptadécagone (polygone régulier à 17 côtés) avec une précision diabolique -en tout cas avec une erreur inférieure à la taille d'une mine de crayon- et pourtant, depuis que Gauss a montré qu'une construction exacte existait, tous les professeurs de mathématique lui ont fait confiance, mais bien peu ont seulement vu cette démonstration. N'écoutant que son courage, Math-Jeunes vous la livre... Accrochez-vous, on y va ...



Résoudre le problème revient à montrer que l'on peut construire avec la seule aide d'une règle et d'un compas, la valeur de $\cos \frac{360°}{17}$. Gauss pose le problème dans le champ des complexes.

Si l'on pose $\omega = \cos \frac{360°}{17} + i \sin \frac{360°}{17}$, les 16 racines complexes non réelles ω_k $(1 \leqslant k \leqslant 16)$ peuvent s'écrire :

$$\omega_k = \omega^k$$

puisque $\omega_k = \cos k\,\frac{360°}{17} + i \sin k\,\frac{360°}{17} = (\cos \frac{360°}{17} + i \sin \frac{360°}{17})^k$ par application de la relation de De Moivre. (Voir l'encadré pour plus de détails!)

Puisqu'il s'agit là des racines complexes du polynôme $x^{17}-1$, on peut écrire :

$$x^{17} - 1 = (x - 1)(x - \omega_1)\ldots(x - \omega_{16})$$

d'où $\dfrac{x^{17} - 1}{x - 1} = (x - \omega_1) \ldots (x - \omega_{16})$

Mais la règle d'Horner nous montre aussi que

$$\frac{x^{17} - 1}{x - 1} = x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1$$

Ainsi les 16 ω_k sont les racines du polynôme : $x^{16} + \ldots + 1$

Retenons aussi, que par sa définition même : $\omega^{17} = 1$, et que donc : $\underline{\omega^{16} + \omega^{15} + \omega^{14} + \ldots + \omega + 1} = \dfrac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = \underline{0}$ *(1)*

L'idée géniale de Gauss consiste à vérifier que les puissances successives cubiques de ω couvrent exactement les 16 racines ω_k :

Valeur de n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ω^{3^n} :	ω^1	ω^3	ω^9	ω^{27}	ω^{81}	ω^{243}	ω^{729}	ω^{2187}	ω^{6561}
racine :	ω_1	ω_3	ω_9	ω_{10}	ω_{13}	ω_5	ω_{15}	ω_{11}	ω_{16}

9	10	11	12	13	14
ω^{19683}	ω^{59049}	ω^{177147}	ω^{531441}	$\omega^{1594323}$	$\omega^{4782969}$
ω_{14}	ω_8	ω_7	ω_4	ω_{12}	ω_2

15	16	
$\omega^{14348907}$	$\omega^{43046721}$	...
ω_6	ω_1	

(En effet $\omega^{27} = \omega^{17} . \omega^{10}$
$= 1 . \omega^{10}$
$= \omega_{10}$)

Nous allons nous servir de cet ordre de classement des racines: ω_1, ω_3, ω_9, ω_{10}, ω_{13}, ω_5, ω_{15}, ω_{11}, ω_{16}, ω_{14}, ω_8, ω_7, ω_4, ω_{12}, ω_2 et ω_6 .

Nous créons :

$$u_1 = \omega_1 + \omega_9 + \omega_{13} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_8 + \omega_4 + \omega_2$$

et $u_2 = \omega_3 + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_6$

en prenant une racine sur deux dans cet ordre et en sommant; puis nous créons :

$$v_1 = \omega_1 + \omega_{13} + \omega_{16} + \omega_4$$
$$v_2 = \omega_9 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_2$$
$$v_3 = \omega_3 + \omega_5 + \omega_{14} + \omega_{12}$$
$$v_4 = \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_6$$

en prenant une racine sur quatre dans cet ordre et en sommant; et enfin nous créons :

$$w_1 = \omega_1 + \omega_{16} \qquad w_5 = \omega_{13} + \omega_4$$
$$w_2 = \omega_3 + \omega_{14} \qquad w_6 = \omega_5 + \omega_{12}$$
$$w_3 = \omega_9 + \omega_8 \qquad w_7 = \omega_{15} + \omega_2$$
$$w_4 = \omega_{10} + \omega_7 \qquad w_8 = \omega_{11} + \omega_6$$

A propos des nombres complexes

Un nombre complexe est un couple ordonné (a,b) de deux réels a et b. En définissant l'égalité par :

$$(a,b) = (c,d) \text{ si } a=c \text{ et } b=d \quad ,$$

l'addition par $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ et
le produit par $(a,b) . (c,d) = (ac-bd,ad+bc)$; on vérifie que l'on a ainsi muni l'ensemble des couples d'une structure de champ . C'est le *champ des complexes*.

Si à (a,0), on fait correspondre a; cette correspondance se conserve dans les opérations :

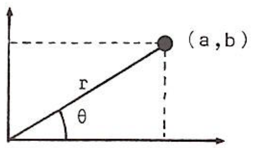
$(a,0) = (c,0)$ correspond à l'égalité $a=c$
$(a,0) + (c,0) = (a+c,0)$ correspond à la somme $a+c$
$(a,0) . (c,0) = (ac,0)$ correspond au produit ac

On peut ainsi identifier les nombres complexes de la forme (a,0) aux réels a : $(a,0) = a$ *(c'est un isomorphisme)*

Si l'on pose $(0,1) = i$, les définitions permettent:
$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a+bi$
(c'est l'écriture canonique du complexe (a,b).)

Avec ces notations, les définitions deviennent :

$a+bi = c+di$ si $a=c$ et $b=d$
$a+bi + c+di = (a+c) + (b+d)i$
$(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ ce qui signifie que pour opérer sur les nombres complexes, il suffit d'appliquer les règles de calcul habituelles, avec la convention supplémentaire : $\underline{i^2 = -1}$. (ce qui peut se montrer en calculant : $i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$.)



Puisque le complexe a+bi est lié au couple (a,b) et que ce point peut être repéré dans le plan par r et θ, Gauss a suggéré de noter a+bi sous la forme $r \cos\theta + ri \sin\theta = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ encore notée $r \text{ cis } \theta$. On prend les initiales de cos et sin, ainsi que le i pour créer cette nouvelle écriture cis. *C'est la forme goniométrique d'un nombre complexe.*
r est le module et *θ l'argument principal* du nombre complexe.
L'ensemble des arguments est du type : $\theta + k\, 360°$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$.

Le produit de $r_1 \text{ cis } \theta_1$ par $r_2 \text{ cis } \theta_2$ vaut $r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1+\theta_2)$ (ce qui se vérifie facilement si l'on connait les formules goniométriques de cos (a+b) et sin (a+b) !)

En généralisant le produit à la puissance, on obtient :

$$(r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis}^n\theta = r^n \text{ cis } n\theta \qquad (n \in \mathbb{N}°)$$

d'où : $\text{cis}^n \theta = \text{cis } n\theta$

ou encore : $\underline{(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta}$

formule découverte par le mathématicien anglais De Moivre.

Examinons à présent plus en détail le problème de la détermination de racines n-ièmes d'un nombre complexe z .

On a $z = r \text{ cis } \theta$; on cherche $x = s \text{ cis } \phi$ tel que $x^n = z$

De $(s \text{ cis } \phi)^n = s^n \text{ cis } n\phi = r \text{ cis } \theta$, on tire $\underline{r = s^n}$, mais surtout : $n\phi = \theta + k\ 360°$ d'où : $\underline{\phi = \dfrac{\theta + k\ 360°}{n} \quad (\forall k \in \mathbb{Z})}$

Lorsque k varie de 0 à n-1, on obtient n valeurs distinctes de l'argument ϕ: il y a donc n racines complexes n-ièmes d'un complexe z.

On remarque que ces n racines ont le même module : leurs images dans le plan appartiendront donc à une même circonférence. D'autre part, la différence entre les arguments principaux de deux racines obtenues par des valeurs consécutives du paramètre k est une constante (360°/n) : ainsi les images forment les sommets d'un polygône régulier à n côtés.

Voici à titre d'exemple, le calcul des 5 racines 5-ièmes de l'unité (=1).

$a+bi = 1+0i$ (écriture canonique)

$r = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ (théorème de Pythagore)

$\cos\theta = \dfrac{a}{r} = 1$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = 0$ (résolution de triangles)

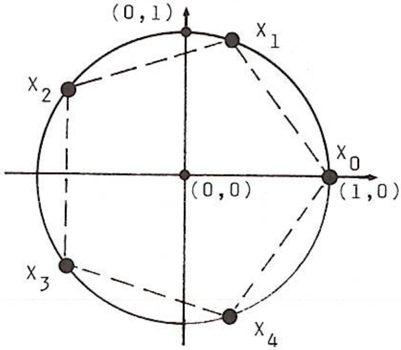
d'où $\theta = 0°$ et $z = 1 \text{ cis } 0°$ (écriture goniométrique)

$s = \sqrt{1} = 1$ et :

$k=0 : \phi_0 = 0° : x_0 = \cos 0° + i \sin 0° = 1$
$k=1 : \phi_1 = 72° : x_1 = \cos 72° + i \sin 72° = 0,31 + i\ 0,95$
$k=2 : \phi_2 = 144° : x_2 = \cos 144° + i \sin 144° = -0,81 + i\ 0,59$
$k=3 : \phi_3 = 216° : x_3 = \cos 216° + i \sin 216° = -0,81 - i\ 0,59$
$k=4 : \phi_4 = 288° : x_4 = \cos 288° + i \sin 288° = 0,31 - i\ 0,95$

On retiendra que x_1 et x_{5-1} admettent une somme réelle : on vérifie facilement que ce résultat est vrai pour tout n impair : si w_i représente la i-ième racine n-ième de 1,

$$\underline{w_k + w_{n-k} = \text{un réel} \quad (= 2 \cos k \frac{360°}{n})}$$



en prenant une racine sur huit dans cet ordre et en sommant. Une heureuse surprise nous attend ici : chaque v_k se présente sous forme $\omega_k + \omega_{17-k}$ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ et l'on sait que cette somme est un réel égal à $2 \cos k \frac{360°}{17}$.

En posant $\alpha = \frac{360°}{17}$, on obtient successivement :

$w_1 = 2 \cos \alpha$
$w_4 = 2 \cos 4\alpha$
$w_2 = 2 \cos 2\alpha$
$w_8 = 2 \cos 8\alpha$
$w_3 = 2 \cos 3\alpha$
$w_5 = 2 \cos 5\alpha$
$w_6 = 2 \cos 6\alpha$
$w_7 = 2 \cos 7\alpha$
$v_1 = 2 (\cos \alpha + \cos 4\alpha)$
$v_2 = 2 (\cos 2\alpha + \cos 8\alpha)$
$v_3 = 2 (\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)$
$v_4 = 2 (\cos 6\alpha + \cos 7\alpha)$
$u_1 = 2 (\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha)$
$u_2 = 2 (\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha)$

$$\underline{u_1 + u_2} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{16}$$
$$= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{16}$$
$$\underline{= -1} \quad \text{(suite au résultat } (1)) \qquad \underline{(2)}$$

Remarquons à présent que $8\alpha = 8 \frac{360°}{17} \simeq 169° < 180°$, ce qui a comme conséquence que les angles $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 8\alpha \in [0, 180°]$ où la fonction cosinus est décroissante :

donc $\underline{v_2 < v_1}$ et $\underline{v_4 < v_3}$ $\underline{(3)}$

De même, puisque $\alpha \simeq 21° < 60°$, $\cos \alpha > \cos 60° = 0,5$
$2\alpha \simeq 42° < 60°$, $\cos 2\alpha > \cos 60° = 0,5$
$4\alpha \simeq 84° < 90°$, $\cos 4\alpha > \cos 90° = 0$

on a $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha > 1$ et $\cos 8\alpha < 0$ n'empèche pas

$\underline{u_1 > 0}$ $\underline{(4)}$

Nous calculons à présent le produit $u_1.u_2$

$$2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha).2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha)$$

$$\begin{aligned}= 4\,(&\cos\alpha \cos3\alpha + \cos\alpha \cos5\alpha + \cos\alpha \cos6\alpha + \cos\alpha \cos7\alpha \\ &+ \cos2\alpha\cos3\alpha + \cos2\alpha\cos5\alpha + \cos2\alpha\cos6\alpha + \cos2\alpha\cos7\alpha \\ &+ \cos4\alpha\cos3\alpha + \cos4\alpha\cos5\alpha + \cos4\alpha\cos6\alpha + \cos4\alpha\cos7\alpha \\ &+ \cos8\alpha\cos3\alpha + \cos8\alpha\cos5\alpha + \cos8\alpha\cos6\alpha + \cos8\alpha\cos7\alpha\,)\end{aligned}$$

et à l'aide des formules de goniométrie qui transforment les produits en sommes :

$$\begin{aligned}= 2\,(&\cos4\alpha + \cos2\alpha + \cos6\alpha + \cos4\alpha + \cos7\alpha + \cos5\alpha + \cos8\alpha + \cos6\alpha \\ &+ \cos5\alpha + \cos\alpha + \cos7\alpha + \cos3\alpha + \cos8\alpha + \cos4\alpha + \cos9\alpha + \cos5\alpha \\ &+ \cos7\alpha + \cos\alpha + \cos9\alpha + \cos\alpha + \cos10\alpha + \cos2\alpha + \cos11\alpha + \cos3\alpha \\ &+ \cos11\alpha + \cos5\alpha + \cos13\alpha + \cos3\alpha + \cos2\alpha + \cos14\alpha + \cos15\alpha + \cos\alpha\,)\end{aligned}$$

$= 2(4\cos\alpha + 3\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + 3\cos 4\alpha + 4\cos 5\alpha + 2\cos 6\alpha + 3\cos 7\alpha$
$+ 2\cos 8\alpha + 2\cos 9\alpha + \cos 10\alpha + 2\cos 11\alpha + \cos 13\alpha + \cos 14\alpha + \cos 15\alpha)$

et puisque les cosinus d'angles opposés sont égaux :

$= 8\ (\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha)$
$= 4\ (u_1 + u_2)$
$= 4\ (-1)$ (d'après *(2)*)

On sait donc que u_1 et u_2 sont deux nombres dont on connait la somme (-1) et le produit (-4) : ils sont donc racines de l'équation du second degré :

$$\underline{Z^2 + Z - 4 = 0} \qquad \underline{(5)}$$

et les deux racines de signes contraires d'après le signe du produit sont :

$$\underline{u_1 > 0 \quad \text{et} \quad u_2 < 0} \qquad \text{(par (4))}$$

On sait que $v_1 + v_2 = u_1$; calculons $v_1.v_2$

$2\ (\cos\alpha + \cos 4\alpha).\ 2\ (\cos 2\alpha + \cos 8\alpha)$
$= 4\ (\cos\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \cos 8\alpha + \cos 4\alpha \cos 2\alpha + \cos 4\alpha \cos 8\alpha)$
$= 2\ (\cos 3\alpha + \cos\alpha + \cos 9\alpha + \cos 7\alpha + \cos 6\alpha + \cos 2\alpha + \cos 12\alpha + \cos 4\alpha)$
$= 2\ (\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha)$
$= u_1 + u_2 = -1$

On a donc $v_1 + v_2 = u_1$ et $v_1\ v_2 = -1$, ainsi, v_1 et v_2 sont racines de l'équation du second degré :

$$\underline{Z^2 - u_1 Z - 1 = 0} \qquad \underline{(6)}$$

avec $\underline{v_2 < v_1}$ (d'après *(3)*)

On sait que $v_3 + v_4 = u_2$; on calcule de même $v_3\ v_4 = -1$, d'où il ressord que v_3 et v_4 sont racines de l'équation

$$\underline{Z^2 - u_2 Z - 1 = 0} \qquad \underline{(7)}$$

avec $\underline{v_3 < v_4}$ (d'après *(3)*)

Or $v_3 = 2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha) = 4\cos 4\alpha \cos\alpha = (2\cos\alpha)(2\cos 4\alpha)$
et $v_1 = 2(\cos\alpha + \cos 4\alpha) = (2\cos\alpha) + (2\cos 4\alpha)$
et puisque $w_1 = 2\cos\alpha$ et $w_4 = 2\cos 4\alpha$, on a

$$w_1 + w_4 = v_1 \qquad \text{et} \qquad w_1\ w_4 = v_3$$

d'où l'on tire que w_1 et w_4 sont racines de l'équation

$$\underline{Z^2 - v_1 Z + v_3 = 0} \qquad \underline{(8)}$$

avec $\underline{w_1 > w_4}$ par la décroissance de la fonction cosinus

La résolution successive des équations (5),(6),(7) et (8) permet d'obtenir une expression de $\cos\alpha$ en utilisant les quatre opérations fondamentales et l'extraction de racine carrée.

Cette première étape nous a montré que l'heptadécagone était construisible. Nous allons à présent préparer le terrain à la construction proprement dite en montrant l'utilité d'un angle ϕ défini par la relation : $\operatorname{tg} 4\phi = 4$

Dans ce cas, le discriminant de *(5)* vaut $\sqrt{17} = \sqrt{1 + 16}$
$= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 4\phi} = \sqrt{\sec^2 \phi} = \sec 4\phi$

Remarquons aussi que $\sin 4\phi = \operatorname{tg} 4\phi \cos 4\phi = 4 \cos 4\phi$

$$u_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1) = \frac{1}{2}(\sec 4\phi - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4\phi}{\cos 4\phi}\right)$$

$$= \frac{2}{4}\,\frac{(1 - \cos 4\phi)}{\cos 4\phi} = \frac{2.2.\ \sin^2 2\phi}{\sin 4\phi} = \frac{4 \sin^2 2\phi}{2 \sin 2\phi \cos 2\phi} = 2 \operatorname{tg} 2\phi$$

On calcule de même : $u_2 = -2 \operatorname{cotg} 2\phi$

Voyons à présent le discriminant de *(6)* :

$$\sqrt{u_1^2 + 4} = \sqrt{4\operatorname{tg}^2 2\phi + 4} = 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\phi + 1} = 2 \sec 2\phi$$

$$v_1 = \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4}}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} 2\phi + 2 \sec 2\phi}{2} = \frac{2 \operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}^2\phi} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2\phi}{1 - \operatorname{tg}^2\phi}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}\phi)^2}{1 - \operatorname{tg}^2\phi} = \frac{1 + \operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}\phi} = \operatorname{tg}(\phi + 45^\circ)$$

On calcule de même : $v_2 = \operatorname{tg}(\phi - 45^\circ)$

Quant au discriminant de *(7)*, il vaut $2 \operatorname{cosec} 2\phi$, et

$$v_3 = \frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 + 4}}{2} = \frac{-2 \operatorname{cotg} 2\phi + 2 \operatorname{cosec} 2\phi}{2} = \frac{1 - \cos 2\phi}{\sin 2}$$

$$= \frac{2 \sin^2\phi}{2 \sin\phi \cos\phi} = \operatorname{tg}\phi$$

Ainsi $\underline{\operatorname{tg}\phi} = v_3 = \underline{2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)}$ *(9)*

et $\underline{\operatorname{tg}(\phi - 45^\circ)} = v_2 = 2(\cos 2\alpha + \cos 8\alpha) = \underline{4 \cos 3\alpha \cos 5\alpha}$ *(10)*

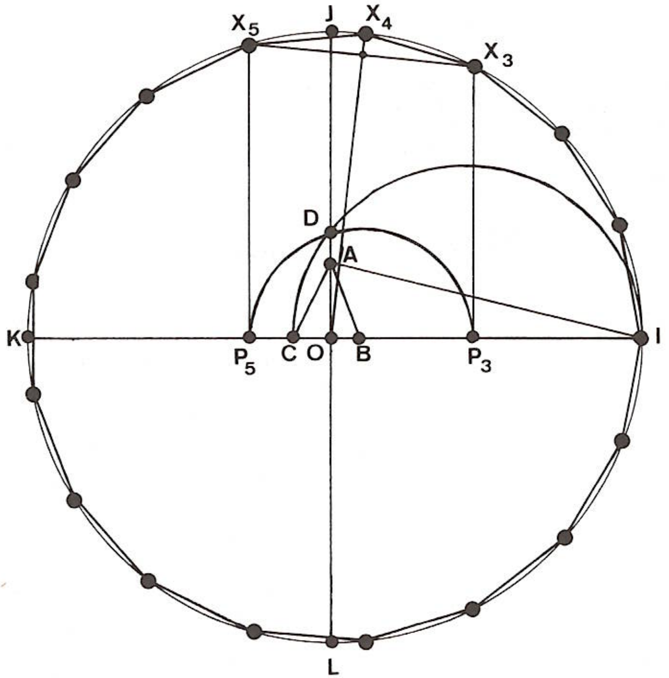
Et pour ceux qui nous ont accompagné jusqu'ici, la récompense: la construction du polygone régulier convexe à 17 côtés ...

Dans un cercle de rayon 1, nous traçons deux diamètres orthogonaux KI et JL qui se coupent au centre O du cercle Le point A est choisi sur OJ pour que $\overline{OA} = 1/4$ (on trace deux médiatrices pour ainsi diviser OJ en 4 parties égales.)

B est un point de OI tel que $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$: on obtient ce point par deux constructions de bissectrices.

Le point C est sur OK de telle manière que $\widehat{CAB} = 45^\circ$ (construction d'un angle droit et d'une bissectrice)

Le cercle de diamètre CI rencontre OJ en D.



Le cercle de centre B et contenant D rencontre OI en P_3 et OK en P_5. Les perpendiculaires à IK élevées en P_3 et en P_5 rencontrent le cercle en X_3 et X_5.

Calculons $2(\cos \widehat{IOX_3} + \cos \widehat{IOX_5})$:

$2\ (\overline{OP_3} + \overline{OP_5}) = 2\ (\overline{OB} + \overline{BP_3} + \overline{OB} + \overline{BP_5}) = 4\ \overline{OB}$

et puisque $\overline{OA} = \frac{1}{4}$; $4\ \overline{OB} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \text{tg } OAB = \text{tg } \phi$

Ainsi, $\underline{2\ (\cos \widehat{IOX_3} + \cos \widehat{IOX_5}) = \text{tg}\phi}$ *(11)*

A présent : $4 \cos \widehat{IOX_3} \cos \widehat{IOX_5}$:

$4\ (\overline{OP_3}\ \overline{OP_5}) = -\ 4\ \overline{OD}^2$ (hauteur dans un triangle rectangle)

$= 4\ \overline{OC}\ \overline{OI}$ (idem , dans l'autre demi-cercle)

$= 4\ \overline{OC}\ 1 = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \text{tg } \widehat{CAO} = \text{tg } (\phi - 45°)$

En conclusion : $\underline{4 \cos \widehat{IOX_3} \cos \widehat{IOX_5} = \text{tg } (\phi - 45°)}$ *(12)*

Les relations (9) et (10) comparées aux relations (11) et (12) montrent que :

$$IOX_3 = 3\alpha$$

$$IOX_5 = 5\alpha$$

Les points X_3 et X_5 sont les troisièmes et cinquièmes sommets du polygone régulier à 17 côtés. La médiatrice du segment X_3X_5 ou la bissectrice de l'angle X_3OX_5 rencontre le cercle en X_4. On termine la construction en reportant la corde X_3X_4 côté de l'heptadécagone.

Mots masqués

M	O	N	T	A	L	E	S	N	K
R	L	Y	N	E	N	U	G	E	O
I	E	L	S	O	O	A	R	G	C
C	W	S	M	R	N	L	E	I	H
H	I	I	S	S	E	G	R	E	A
E	S	R	L	A	N	D	A	U	I
T	M	E	M	Y	N	E	N	R	N
A	I	F	S	A	A	S	E	E	O
D	T	E	N	S	U	Y	U	L	T
A	H	S	D	M	E	R	W	O	P
S	E	Y	N	A	U	A	I	D	M
N	K	E	B	R	L	L	Z	A	O
E	R	H	N	T	E	E	L	W	C
L	E	L	O	I	R	N	N	E	B
L	B	N	R	N	R	M	R	S	R
K	S	U	I	O	A	R	H	E	O
Z	C	K	E	C	C	L	E	S	W
S	E	U	L	R	C	Q	S	P	N
O	R	E	B	A	H	O	S	U	U
D	O	E	M	M	R	E	D	L	A
D	M	U	T	A	T	T	A	N	R
Y	S	I	O	D	N	A	I	R	B

Cochez dans la grille ci-contre les noms des prix Nobel ci-dessous : l'énigme est un prix Nobel de Chimie.

AGNON
ALDER
ANDRIC
ASSER
BAEYER
BRAUN
BRIAND
BROWN
BUCK
CAMUS
CARREL
CHAIN
COMPTON
CURIE
DALEN
DAWES
DIELS
DOISY
ECCLES
EIGEN
ELIOT
ENDERS
EULER
HABER
HESS
HEYSE
KOCH
KREBS
LANDAU
LAUE
LELOIR
LEWIS
LURIA
LYNEN
MACLEOD
MARCONI
MARTIN
MAURIAC
MONTALE
MULLER
NANSEN
NATTA
NEEL
NERNST
PERRIN
RAMSAY
RICHET
ROSS
ROUS
SADATE
SEFERIS
SEGRE
SIMON
SMITH
SNELL
SODDY
SUMNER
SYNGE
TATUM
WALTON
WERNER
ZEEMAN
ZERNIKE

CAR-MATH: les mathématiques à l'Université de l'Etat de Mons

Tout le monde connaît un peu de mathématique.. Depuis Monsieur-tout-le-monde qui doit au moins être capable de vérifier l'addition au restaurant jusqu'aux experts de la N.A.S.A. qui expédient des satellites dans l'espace. Mais toutes ces personnes ne sont pas mathématiciennes pour autant. La plupart se contentent d'appliquer des techniques toutes faites à des problèmes concrets. Bien peu ont une activité créative en mathématique .

Car, contrairement à ce que beaucoup pensent, on crée encore en mathématiques. On crée même de plus en plus. La production mathématique augmente exponentiellement, au point qu'il n'est personne au monde qui puisse se vanter de connaître toute la mathématique. Les mathématiciens professionnels s'acharnent à résoudre des problèmes que leurs prédécesseurs leur ont laissés. Et ils en laissent à leur tour pour leurs successeurs.

Beaucoup de théories mathématiques ont des applications pratiques. Beaucoup d'entre elles se sont même développées pour répondre aux besoins d'autres sciences. Mais le mathématicien est aussi capable d'élaborer une nouvelle théorie simplement parce qu'elle est belle, élégante, parce qu'elle permet de mieux comprendre ou de relier entre elles d'autres théories déjà existantes. Les cas sont nombreux de sujets (les nombres complexes par exemple) qui n'ont eu d'application pratique que bien longtemps après avoir été construits par amour de l'art. Beauté, pureté, mais aussi efficacité et applicabilité sont donc autant de facettes de l'activité mathématique.

Tout cela est très bien, direz-vous, mais que devient le mathématicien ? Trouvera-t-il du travail ? Nous n'oserions pas affirmer que tous les mathématiciens ont un emploi. Car cela signifierait qu'aucun n'est chômeur alors que des contre-exemples existent.

Passons en revue les débouchés possibles. Nous verrons qu'en dehors de l'enseignement, qui dans 4 ans ne sera peut-être pas aussi bouché qu'on le croit aujourd'hui, le mathématicien peut mettre à profit sa formation dans d'autres domaines :

- *Le mathématicien-professeur*. C'est le débouché traditionnel (mais loin d'être le seul). La tendance actuelle n'est pas à engager beaucoup d'enseignants. Et pourtant certaines écoles éprouvent parfois des difficultés pour remplacer un professeur absent. Et comme le nombre d'étudiants en mathématique a assez sensiblement diminué depuis quelques années, tant en régendat qu'en licence, il n'y aurait rien d'étonnant à voir apparaître une pénurie de professeurs de mathématique d'ici 4 ou 5 ans. C'est peut-être le bon moment pour commencer des études de mathématiques si on veut devenir enseignant ...

- *Le mathématicien dans une administration ou dans une entreprise*. Depuis toujours, les banques et les compagnies d'assurance engagent des mathématiciens, notamment ceux qui ont acquis une formation complémentaire en actuariat. En dehors de ce créneau relativement spécialisé, on assiste aujourd'hui à une forte demande de mathématiciens dans les départements informatiques des entreprises. Les responsables apprécient la formation à la rigueur, la manière d'aborder des problèmes complexes et la clarté d'esprit des mathématiciens qui leur permettent d'aborder un large éventail de problèmes en dehors de leur spécialisation propre.

- *Le mathématicien-chercheur*. A l'issue de leurs études, un certain nombre de mathématiciens s'orientent vers la recherche. Il peut s'agir de recherche pure dans laquelle le but premier est de faire avancer la mathématique et pour laquelle un certain nombre de postes sont prévus dans les universités et un certain nombre de bourses sont proposées par les organismes de recherche (par exemple : F.N.R.S.). Il peut aussi s'agir de recherche plus appliquée où le but premier est la résolution de problèmes liés à d'autres disciplines et pour laquelle la formation spécifique du mathématicien en fait un membre indispensable d'équipes pluridisciplinaires. Cette recherche s'effectue dans les universités, dans les laboratoires interuniversitaires ou dans de grandes entreprises privées (voir par exemple : Institut Von Karman, équipe du professeur Nihoul cherchant à modeliser le comportement de la mer du Nord, Laboratoire Solvay, Petrofina ...) Des postes existent dans ces laboratoires et des bourses peuvent être obtenues (par exemple à l'I.R.S.I.A.) .

La candidature en sciences mathématiques est une période d'approfondissement de la matière vue dans l'enseignement secondaire. Peu de sujets vraiment nouveaux sont abordés. L'étudiant retrouvera les espaces vectoriels, les dérivées, les intégrales, les probabilités. Mais ces objets prendront une ampleur nouvelle, sous un éclairage qu'on ne rencontre dans aucune autre section, même pas en faculté polytechnique. Des sujets fondamentaux sont également rencontrés en candidature, la topologie par exemple. Mais c'est surtout en licence que l'étudiant aura des contacts avec des théories récentes, parfois en prise directe avec la recherche.

Les études en mathématiques à l'Université de Mons sont organisées de manière que les étudiants puissent s'orienter tant vers l'enseignement et la recherche "pure" que vers un emploi du secteur privé, notamment en informatique.

En candidature, les étudiants recoivent une formation générale dans les domaines classiques : algèbre, analyse, géométrie, probabilités. Dès la première année, ils reçoivent également un cours d'initiation à l'informatique.

En licence, deux options leur sont proposées : dans l'option "traditionnelle", on approfondit les cours fondamentaux et on présente aux étudiants un choix assez étendu de cours à option. Dans l'option "informatique", les cours à option sont nécessairement des cours d'informatique ou de mathématique appliquée. Cette option "informatique" a déjà permis à nombre d'étudiants de trouver des emplois dans des firmes privées dès l'obtention de leur diplôme. Ceux qui auraient choisi l'option traditionnelle peuvent encore se spécialiser plus tard en suivant les cours des "certificats en informatique". Tous peuvent également après la licence en mathématiques s'inscrire en licence en sciences actuarielles (diplôme délivré en deux ans par la Faculté des Sciences Economiques et Sociales).

Si vous êtes "fort en math.", pourquoi ne pas devenir mathématicien ?

Article de G. NOEL et P. DUFOUR de l'Université de Mons.

Résultats du concours

Après avoir dépouillé les réponses aux concours, le jury a retenu 3 premiers prix exaequo pour la qualité des solutions et de la présentation : il s'agit de :

MAI ALHADJI, de Mons, en Math. spéc. à l'Athénée de Mons,
RENAUD SIZAIRE, de Bruxelles, en 5ème au Coll.St.Michel à Bruxelles,
ISABELLE STRYKERS, de Tilff, en 4ème au Coll.St.Louis à Liège.

Le jury a aussi retenu trois second prix : il s'agit de :

MARTINE BOTTE, de Bruxelles, en 5ème à l'Athénée Thomas à Bruxelles,
ANNE BRASSEUR, de Jodoigne, en 5ème à l'Athénée d'Hannut,
ALAIN SPINEUX, de Couillet, en 5ème à l'Inst.St.Joseph de Charleroi.

Toutes nos félicitations à ces lauréats et nos encouragements à tous ceux qui nous ont fait parvenir des réponses partielles.

Les lauréats recevront leurs prix directement à leur domicile.

Le texte du numéro 33 était extrait des mémoires humoristiques et anticonformistes du Prix Nobel de Physique 1965, Richard Feynman. Le livre s'intitule " Vous voulez rire, Monsieur Feynman !" publié en 1985 par Interéditions - Paris.

Ce livre bourré de clins d'oeil séduira bien sûr les scientifiques, mais aussi les profanes qui y découvriront la science sous un jour plein de vie.

Sommaire

Comité de rédaction :
N. MIEWIS, J. VANHAMME
Edition :
J. MIEWIS, Avenue de Péville, 150, 4030 Liège
Nouveaux prix des abonnements :
Belgique : groupés (5 au moins) 80FB
isolés 120FB
par abonnement.
Etranger : y compris Pays-Bas et Luxembourg
par paquet de 5 abonnements : 800 FB
isolé : 240 FB
Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Pour la Belgique : Cpte n° 001 - 0828109 - 96
de Math-Jeunes, Chemin des Fontaines, 14bis,
7460 - Casteau.
Pour l'étranger : Cpte n° 000 - 0728014 - 29
de S.B.P.M.e.f., même adresse, à partir d'un
compte postal ou par mandat postal,
en communiquant nom et code postal de votre école.
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme
de 100 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.