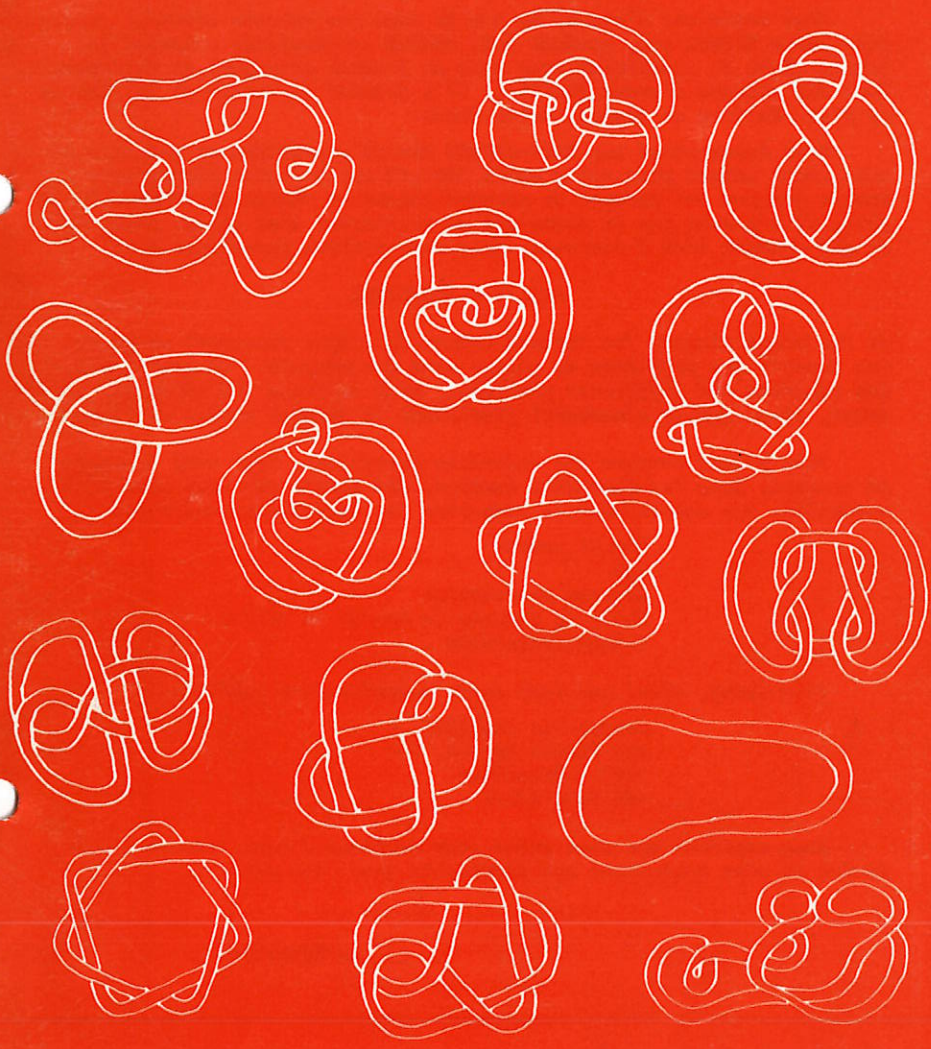
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française — Association Sans But Lucratif

MATH-JEUNES



Journal Trimestriel

9ème année Numéro 37 Automne 1987

Chers amis,

Nous voudrions d'abord, au nom de tous nos anciens abonnés, remercier Jules MIEWIS qui, pendant huit années consécutives a assumé la lourde tâche de construire pour vous un journal attrayant et intéressant. Pour des raisons d'ordre familial, il a demandé au comité de la SBPM de ne plus réaliser ce travail cette année.

Nous avons pensé que MATH-JEUNES devait poursuivre sa parution et nous avons adopté pour cette année 1987-88 une solution provisoire. Quatre groupes ont accepté de prendre chacun en charge un numéro. De ce fait, il n'y aura pas un thème qui se retrouvera dans chaque parution et qui donnera lieu à concours, mais vous pourrez participer à un

RALLYE - PROBLEMES

et les mieux classés (on tiendra compte de l'âge) recevront un prix. Les énoncés des problèmes du rallye sont accompagnés d'un astérisque. Les réponses aux différents problèmes, nous espérons VOS réponses, paraîtront, ainsi que le classement final, avec le dernier numéro de l'année.

Vous pouvez envoyer des solutions partielles, nous vous tiendrons au courant, dans les prochains numéros, des points que vous avez déjà accumulés. Vos envois devront comporter les indications suivantes :

Nom et prénom
Age
Adresse personnelle
Ecole (y compris le nom de la ville)
Classe fréquentée .

Il doivent, ainsi que tout autre courrier, être adressés à

Jacqueline VANHAMME
rue Firmin Martin, 2
1160 - Bruxelles
tél 02-6727571

Nous espérons que vous serez très nombreux à nous lire et à nous écrire et vous souhaitons une excellente année scolaire.

La Rédaction

La cryptographie à clef révélée

La cryptographie (du grec "kruptos" (caché) et "graphein" (écrire)) désigne la science du codage de l'information pour la rendre inintelligible et donc inutilisable par tous ceux auxquels elle n'est pas destinée. Cet art, d'abord essentiellement confiné aux domaines de la diplomatie et de l'armée, n'est pas nouveau. Déjà 50 ans avant Jésus-Christ, Jules César utilisait un des premiers systèmes de codage connus.

Aujourd'hui, l'ordinateur fait son apparition dans nombre de sociétés, leur offrant à la fois rapidité de traitement des données et précision pour des prix toujours plus bas: transferts de fonds par systèmes électroniques, comptabilité des entreprises, renseignements médicaux, etc... Et de temps en temps, la presse nous relate les "exploits" de quelque indélicat qui a capté de l'information stockée dans les mémoires d'un ordinateur! Cet avènement des systèmes de communication électronique pose donc à la société, désireuse de se protéger d'indiscrétions et de falsifications, de très sérieux problèmes de sécurité.

Les mathématiciens ont ici un rôle capital à jouer pour inventer des systèmes de codage efficaces, économiques et sûrs, ce qui est beaucoup plus difficile qu'il n'y paraît... Le plus souvent, le décodage est théoriquement possible à un indiscret; reste alors à élaborer des algorithmes tels que le retour en arrière pour restituer le message en clair nécessite de la part d'un ordinateur un temps de calcul rédhibitoire (des milliers ou même des milliards d'années...) à moins de connaître une astuce (gardée secrète).

Cependant, l'histoire a montré que des systèmes supposés inviolables ont souvent des défauts cachés qui les rendent transparents! C'est pourquoi le scientifique réfléchit énormément aux éventuelles failles des systèmes cryptographiques: n'y a-t-il vraiment pas moyen de retrouver la clef de décryptage en un temps raisonnable, ou même de comprendre des messages sans connaître cette clef? A l'heure actuelle, nous ne disposons d'aucun critère permettant de conclure à l'inviolabilité pratique d'un codage. Mais, sûrs de la sécurité de leurs systèmes, certains mathématiciens offrent des primes de plusieurs centaines de dollars à quiconque trouvera un défaut (Avis aux amateurs...). Et parfois, ils doivent payer!

La cryptographie est donc une science passionnante, en plein essor et dont les développements mathématiques théoriques trouvent des applications pratiques immédiates.

Nous allons étudier quelques systèmes de codage, d'abord très simples, puis les derniers-nés (à clef révélée).

LES CODAGES PAR PERMUTATIONS DE (GROUPES DE) LETTRES.

1) Le code de Jules César en est un exemple simple.

Math-Jeunes vous laisse le plaisir de retrouver l'algorithme de ce code, sachant que la phrase mystérieuse:

GH WRXV OHV SHXSOHV GH OD JDXOH FH VRQW OHV EHOJHV OHV SOXV EUDYHV

est la forme codée du message:

DE TOUS LES PEUPLES DE LA GAULE CE SONT LES BELGES LES PLUS BRAVES .

Le chiffre 3 est à la base de ce code. Pourquoi 3 ? Nul ne le sait.

Nous vous félicitons d'avoir certainement, en fins limiers, tous découvert la clef qui permet de coder et de décoder (utilisée à l'envers) à la "Jules César". Vous êtes dès lors bien convaincus qu'un tel codage n'est vraiment pas sûr, puisque si son principe est connu, le message sera toujours déchiffré en essayant au plus 25 clefs!

2) Le codage par permutations de lettres.

On permute les lettres de l'alphabet, par exemple selon la clef suivante:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
W	C	M	K	X	H	B	V	R	Z	P	Y	A	J	L	U	S	D	I	F	G	E	Q	T	O	N

qui transforme le texte:

DEPUIS DES ANNEES MES CONDISCIPLES ET MOI PARTICIPONS AUX OLYMPIADES MATHEMATIQUES BELGES

en:

KXUGRI KXI WJJXXI AXI MLJKRIMRUYXI XF ALR UWDFRMRULJI WGT LYOAURWKXI AWFVXAWFRSGXI CXYBXI .

Cette fois-ci, le nombre de clefs à essayer pour retranscrire le message en un texte clair est le nombre de toutes

les permutations des lettres de l'alphabet, soit 26! qui est supérieur à 4.10^{26} (Bon courage!).

Et pourtant, des mathématiciens ont montré qu'en moyenne la connaissance d'un morceau de ... 28 lettres seulement d'un texte ainsi codé suffit pour rendre le message intelligible!

Comment procède-t-on ?

On commence par comparer la distribution de fréquences des lettres dans le message codé avec leurs probabilités d'apparition dans un texte en français. Pour cette langue, les lettres se classent comme suit : E S I A N T U R ... par ordre de probabilité décroissante (E T A O I N S R ... pour l'anglais).

Tableau de fréquences des lettres dans notre texte codé:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
5	1	1	1	0	4	3	0	1	0	4	4	4	3	0	1	0	0	8	1	1	5	1	6	1	2	3	0

Nous pouvons donc raisonnablement supposer que X qui apparaît le plus souvent correspond à E et que I correspond à S. (Nous avons beaucoup de chance ici, puisqu'en plus R et W correspondent respectivement à I et A.)

A ce stade, nous disposons donc déjà de:

.E..IS .ES A..EES .ES ....IS.I..ES E. ..I .A..I.I...S A..
.....IA.ES .A..E.A.I..ES .E..ES

Ensuite, on se base sur les structures de la langue française et les fréquences d'apparition des arrangements de deux ou trois lettres (ET, OU, LA, UN, LES, AUX, etc...).

Ce genre de code, à priori inviolable étant donné le grand nombre de clefs à essayer (26!) s'avère donc très peu sûr à employer, à moins qu'un éventuel indiscret ne parvienne même pas à ... identifier la langue dans laquelle le message est écrit en clair!

C'est ainsi que pendant la seconde guerre mondiale, des messages alliés codés par substitutions de lettres et interceptés par les armées ennemies n'ont jamais pu être déchiffrés par celles-ci: ils étaient écrits dans la langue des Indiens Navajos d'Amérique du Nord (incorporés au Signal Corps de l'armée). Ce dialecte très complexe, tout en nuances et extrêmement difficile à apprendre était connu à cette époque par seulement 28 étrangers au peuple Navajo (tous anthropologues ou missionnaires, ni allemands, ni japonais). De plus, les Indiens Navajos étaient en nombre suffisant pour

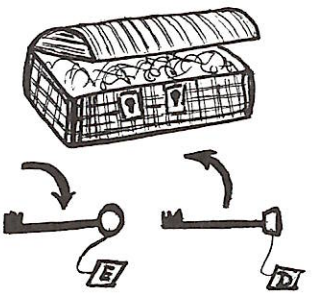
permettre une utilisation efficace et territorialement étendue de ce codage (Ils étaient plus de 50000).

Les systèmes expliqués ci-dessus (ainsi que tous ceux imaginés jusqu'en 1974) apparaissent comme des "coffres-forts mathématiques" munis d'une clef qui permet à l'expéditeur de coder son message et au destinataire de le décoder. La sécurité repose donc sur le secret de la clef qui, notamment pour des transactions commerciales, risque de devoir être communiquée à un grand réseau de correspondants. De plus, lorsque les messages ne sont pas manuscrits, un destinataire ne pourrait-il pas s'envoyer des messages semblant provenir d'un expéditeur donné, ou un fraudeur falsifier des documents ?

Les cryptosystèmes à clef révélée résolvent à la fois le problème du secret de la clef et celui de l'authentification de l'expéditeur. Le principe a été inventé à l'université de Stanford (USA) par Hellman, Diffie et Merkle en 1975.

LES CRYPTOSYSTEMES A CLEF REVELEE.

Cette fois, le "coffre-fort mathématique" est muni de deux clefs: l'une sert à le fermer, c'est-à-dire à encoder le message (clef E), et l'autre à l'ouvrir, c'est-à-dire à décoder le message (clef D). La clef E est rendue publique, tandis que la clef D n'est connue que par le destinataire.



Il existe des catalogues (analogues à des annuaires téléphoniques) reprenant les clefs E et les algorithmes de codage des différents destinataires.

La clef D (secrète) n'est évidemment pas indépendante de la clef E (publique) puisqu'elles servent à effectuer des opérations inverses l'une de l'autre. Théoriquement, tout indiscret devrait donc pouvoir, connaissant E, calculer D. Dès lors, des mathématiciens s'ingénient à imaginer des systèmes pour lesquels le calcul de D nécessite un temps déraisonnable, même sur nos ordinateurs les plus performants.

Nous exposerons ici le principe d'un seul système à clef révélée, apparemment très fiable et abondamment appliqué de nos jours: le système RSA.

********* PRE-REQUIS MATHEMATIQUES. **********

Un nombre premier est un nombre naturel qui possède exactement deux diviseurs: 1 et lui-même.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... sont premiers.
1 n'est pas premier.

Deux naturels sont premiers entre eux lorsque leur plus grand commun diviseur (PGCD) vaut 1 (c'est-à-dire que 1 est leur seul diviseur commun).

18 et 35 sont premiers entre eux, 12 et 27 ne le sont pas.

L'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ du naturel n est le nombre d'entiers appartenant à $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ et premiers avec n.

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$, ...

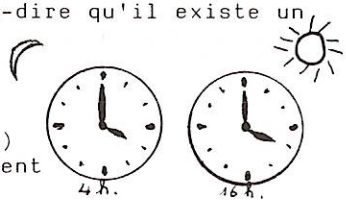
Congruence:

L'entier a est congru à l'entier b modulo le naturel non n, ce qu'on note $a \equiv b \pmod{n}$, lorsque a et b ne diffèrent que d'un multiple de n, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $a = b + k \cdot n$.

$-2 \equiv 9 \equiv 31 \pmod{11}$

$120° \equiv 300° \pmod{180°}$

16 heures $\equiv$ 4 heures (mod. 12 heures)
(Nos montres à aiguilles nous indiquent l'heure modulo 12 heures !)



15 et 6 sont opposés l'un de l'autre modulo 21, car $15 + 6 \equiv 0 \pmod{21}$.

3 et 5 sont inverses l'un de l'autre modulo 7, car $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$.

Petit théorème de FERMAT (1640):

Si p est un nombre premier et n un naturel non divisible par p, alors $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Autrement dit, le reste de la division de n^{p-1} par p vaut 1.

$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{5}$

$6^2 = 36 \not\equiv 1 \pmod{3}$ mais 6 est divisible par 3

$12^6 = (12^2)^3 = 144^3 \equiv 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$

LE SYSTEME RSA.

Il a été inventé en 1977 à l'Institut de Technologie du Massachusetts (USA) par Rivest, Shamir et Adelman.

Fabrication du "coffre-fort" par le destinataire des messages:

	Exemple (avec des nombres "trop petits")
L'ordinateur choisit au hasard deux "grands" (c'est-à-dire d'au moins cent chiffres) nombres premiers distincts p et q . (Quelques minutes lui suffisent.)	$p = 29$ $q = 37$
Calcul de leur produit n (qui a au moins 200 chiffres).	$n = 29.37 = 1073$
Calcul de l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ de n.	$\varphi(n) = 29.37 - 29 - 37 + 1$ $= 1008$
Choix d'un entier e entre 3 et n, et premier relativement à $\varphi(n)$.	$e = 23$ $(1008 = 2^4.3^2.7)$
Calcul de l'inverse d de e modulo $\varphi(n)$.	$\varphi(n) \overset{(1)}{=} e.43 + 19$ $e \overset{(2)}{=} 19.1 + 4$ $19 \overset{(3)}{=} 4.4 + 3$ $4 \overset{(4)}{=} 3.1 + 1$ D'où $1 \overset{(4)}{=} 4 - 3 \overset{(3)}{=} 4 - (19 - 4.4)$ $= 5.4 - 19 \overset{(2)}{=} 5(e-19) - 19$ $= 5.e - 6.19$ $\overset{(1)}{=} 5.e - 6(\varphi(n)-43.e)$ $= 263.e - 6.\varphi(n)$ $1 \equiv 263.e \pmod{\varphi(n)}$ Et donc, $d = 263$.

e et n sont rendus publics; p, q, $\varphi(n)$ et d sont secrets.

"Verrouillage du coffre-fort" ou encodage d'un message:

Transcrire le message M à encoder sous forme numérique en utilisant la bijection:

A → 00	J → 09	S → 18
B → 01	K → 10	T → 19
C → 02	L → 11	U → 20
D → 03	M → 12	V → 21
E → 04	N → 13	W → 22
F → 05	O → 14	X → 23
G → 06	P → 15	Y → 24
H → 07	Q → 16	Z → 25
I → 08	R → 17	

Message M:
JE LIS MATH JEUNES

↓

09 04 11 08 18 12 00 19 07
09 04 20 13 04 18

Partitionner M en k blocs M_1, M_2, M_3, ..., M_k d'égale longueur tels que chaque nombre M_i soit < n.

$M_1 = 090$, $M_2 = 411$,
$M_3 = 081$, $M_4 = 812$,
$M_5 = 001$, $M_6 = 907$,
$M_7 = 090$, $M_8 = 420$,
$M_9 = 130$, $M_{10} = 418$.

Encoder M par la formule:

$E(M_i) \equiv M_i^e \pmod{n}$
avec $0 \leq E(M_i) < n$

$$E(M_1) \equiv M_1^e = 90^{23}$$
$$= 90.90^2.90^4.90^{16}$$
$$= 90.90^2.(90^2)^2.(90^2)^8$$
$$\equiv 90.589.589^2.589^8$$
$$\equiv 90.589.342.342^4$$
$$\equiv 90.589.342.7^2$$
$$\equiv 588 \pmod{1073}$$
$$E(M_2) \equiv M_2^e = 411^{23}$$
$$\equiv 062 \pmod{1073}$$

etc...

Le message codé à transmettre est donc:
588,062,...

"Ouverture du coffre-fort" ou décryptage d'un message:

Le destinataire utilise la formule:

$D(E(M_i)) \equiv (E(M_i))^d \pmod{n}$
avec $0 \leq D(E(M_i)) < n$

qui transforme chaque $E(M_i))$ en M_i.

$$D(E(M_1)) = D(588) \equiv 588^{263} \pmod{1073}$$

On doit retrouver 90, c'est-à-dire M_1 .

En effet,

$$D(E(M_1)) = D(90^e) \equiv 90^{e.d}$$
$$= 90^{6.\varphi(n)+1}$$
(voir calcul de d)
$$= 90^{6(29-1)(37-1)}.90$$
$$\equiv 1.90 \pmod{1073=29.37}$$

Car
$(90^{29-1})^{6(37-1)} \equiv 1^{6(37-1)} \equiv 1$
modulo 29, et
$(90^{37-1})^{6(29-1)} \equiv 1^{6(29-1)} \equiv 1$
modulo 37,
par le petit théorème de Fermat.

Signature d'un message:

Supposons qu'une personne a souhaite envoyer un message M à une personne b et le signer (y mettre un signe d'authentification). Comment va-t-elle procéder ?

a applique à M sa clef (secrète) de décodage D_a, puis la clef de codage E_b du destinataire. b reçoit donc $E_b(D_a(M))$. Pour décrypter, il lui suffit d'appliquer D_b, puis E_a.

Si le message décodé a un sens, b est certain que a en est l'expéditeur, puisque seul a connaît la clef D_a.

Sécurité de la "serrure":

Tous les algorithmes imaginés jusqu'ici pour découvrir la clef D, c'est-à-dire calculer d connaissant e et n, se ramènent à la factorisation de n en p.q . Or la factorisation d'un entier n par l'algorithme le plus rapide connu nécessite à peu près $\exp([\ln(n).\ln(\ln(n))]^{\frac{1}{2}})$ opérations binaires, chacune demandant à peu près une microseconde (10^{-6} sec.) sur un ordinateur puissant. Dès lors, la factorisation d'un nombre de 200 chiffres prend environ 3,8 milliards d'années de calculs!

Pouvons-nous conclure qu'un système RSA est inviolable ? Peut-être que bientôt quelqu'un écrira un algorithme permettant de calculer d en un temps raisonnable, ou même de restituer le texte en clair sans connaître d. Mais toutes ces hypothèses paraissent aujourd'hui hautement improbables aux mathématiciens qui, vu l'importance pour la société de protéger le contenu des mémoires de ses ordinateurs de toute indiscrétion ou falsification, se penchent sur cette branche des mathématiques en plein essor qu'est la cryptographie.

Mais un proverbe de Marcel Pagnol ne dit-il pas: "Tout le monde savait que c'était impossible. Il est arrivé un imbécile qui ne le savait pas et qui l'a fait." ?

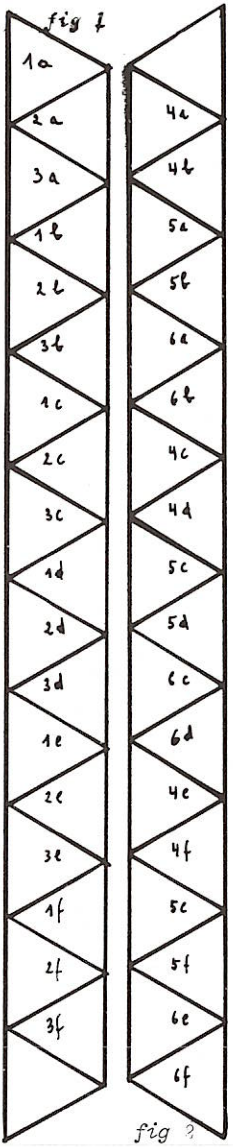
Françoise Valette

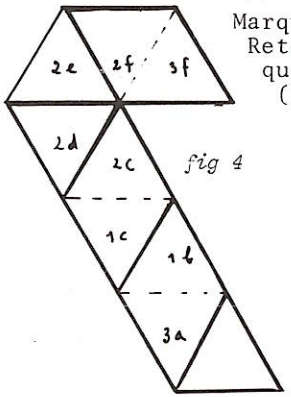
L'hexahexaflexagone

On appelle *flexagones* des polygones flexibles obtenus à partie de triangles équilatéraux Celui que nous allons examiner s'appelle *hexahexaflexagone* parce que c'est un hexagone qui peut montrer 6 faces différentes!

Pour obtenir un hexahexaflexagone, il suffit de prendre un ruban de papier, large de 3,5 à 4 cm au moins pour que l'objet soit facile à manipuler. Un rouleau de caisse fait l'affaire à merveille : pour 25F on peut rater une série de flexagones et en réussir encore beaucoup plus.

Le premier triangle équilatéral, qui doit avoir comme hauteur la largeur de la bande s'amorce en formant à l'extrémité de la bande un angle de 60° par une découpe aux ciseaux. Il se termine par pliage d'un bord de la bande (le bon) le long de la découpe. Les 18 suivants s'obtiennent à partir du premier, en suivant les bords du papier et en pliant sans tracer : c'est facile et rapide !





Marquons ces triangles (fig1) Retournons le ruban et marquons de même l'autre face (fig2). Ensuite plions 4a sur 4b et, à côté, 5a sur 5b : nous voyons apparaître 2a et 3b; puis plions 4d sur 4c et le même mouvement de l'arrière à l'avant, losange après losange, complète la série (fig3). Plaçons notre objet de gauche à droite, gardons les 3 derniers triangles et replions le long de l'arête gauche de 2e (fig4), puis entre 2c et 1c, en ramenant vers l'avant 3a sur 3f. Replions 1a en dessous de tout : il se superpose au triangle blanc. Collons les deux faces blanches: l'hexahexaflexagone est prêt (fig5).

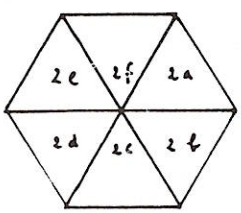
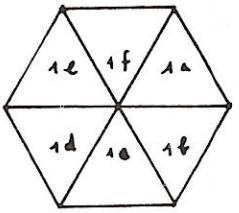


fig 5



C'est maintenant que cela devient amusant ...

La face 1 vers nous, prenons l'objet en mains et, du pouce et de l'index gauches plions 1a et 1b l'un sur l'autre, de la main droite plions 1e sur 1f et, automatiquement, 1c se plie sur 1d (fig 6)

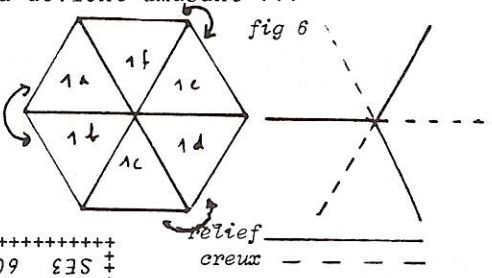


fig 6

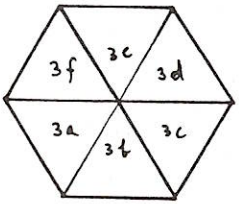
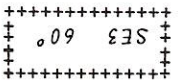


fig 7



l'hexagone s'ouvre par le milieu nous offrant une troisième face (fig 7)

Recommençons le jeu entre 3f et 3a, 3d et 3e et 3b et 3c. L'hexagone s'ouvre et voici une 4ème face ! (fig 8). Continuons ... Zut, revoilà la face 1 Est-ce fini? Et les 2 autres promises ?

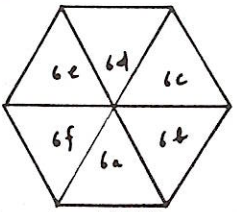


fig 8

Un peu de patience. Repinçons entre 1a et 1b : la forme ne s'ouvre pas (c'est que cette face se présente différemment de la première fois : une décoration dissymétrique nous le montrera plus tard). Tournons alors de 60° et pinçons l'arête suivante et ainsi de suite jusqu'à obtenir une ouverture. Nous vous garantissons que les six faces apparaîtront à un moment ou l'autre. Mais la fréquence d'apparition n'est pas la même pour toutes (c'est une jolie étude à faire).

Maintenant que vous êtes parvenus à trouver ces six faces, pourquoi ne pas inscrire un message en six phrases que vous ferez trouver par un copain (ou copine) ou par un parent ?

A moins que vous ne préfériez faire un jeu de couleurs et de formes décoratives. Vous pouvez obtenir de très jolies choses. Si vous vous donnez le mal de particulariser chaque sommet, vous aurez des surprises en faisant défiler les faces (ex fig 9).

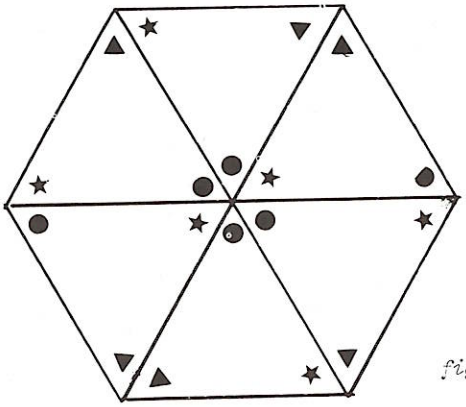


fig 9

Réalisez un ou plusieurs hexahexaflexagones et envoyez-les nous sous enveloppe. Le plus beau ou(et) le plus original sera publié dans un numéro suivant. Un commentaire sur vos constatations sera également le bienvenu.

Simone Trompler

E1 Quel est le plus grand nombre que l'on peut écrire en utilisant, comme seuls chiffres, quatre chiffres "1" ?

Quelques éléments de TOPOLOGIE

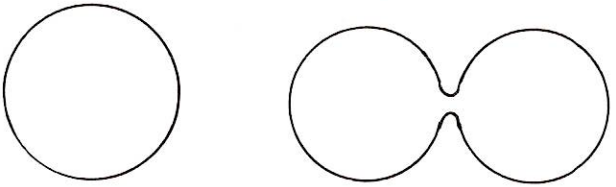
A côté des structures algébriques (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels,...), les mathématiques actuelles reconnaissent l'importance des structures topologiques, essentielles si l'on veut définir des notions aussi fondamentales que celles de limite ou de continuité.

Que je rassure tout de suite le jeune lecteur! Il n'entre pas dans mes intentions de développer ici un cours de topologie. Je voudrais simplement indiquer quelques idées de base très élémentaires et citer quelques problèmes majeurs qui, au siècle dernier, ont contribué à l'élaboration de la topologie (étymologiquement, science du lieu), appelée autrefois "*Analysis situs*".

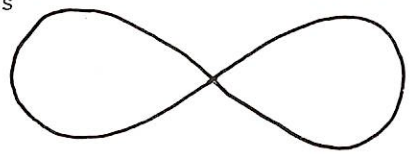
Science du lieu. Mais n'est-ce pas la géométrie qui classiquement s'intéresse aux "lieux", c'est-à-dire à l'espace et aux figures qu'il contient? Sans doute. Et il n'est donc pas étonnant que les premiers pas de la topologie aient été guidés par la géométrie.

Cependant, alors qu'en géométrie, on mesure (des longueurs, des angles, des aires, des volumes,...), on compare (ce segment est double de celui-ci, ce triangle est semblable à cet autre,...), il n'en est rien en topologie. D'une manière fort intuitive, on peut dire que la topologie s'intéresse aux propriétés qui sont conservées lorsque'on déforme un objet géométrique sans le couper, sans y faire de trou, sans non plus coller ou souder en-

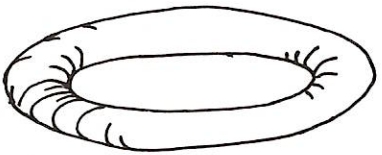
semble deux parties de cet objet. Ainsi, les deux figures ci-dessous ont du point de vue de la topologie, les mêmes propriétés; on dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes* ou encore *homéomorphes*.



Par contre, cette troisième figure n'est pas topologiquement équivalente aux deux précédentes

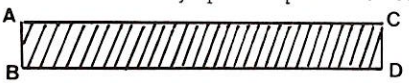


Une sphère, un cube, un cylindre sont topologiquement équivalents; mais ces surfaces ne sont pas équivalentes au tore que voici



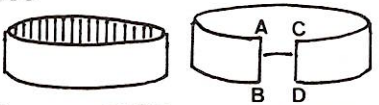
Il est bien évident que s'il est possible de déformer une sphère, de l'aplatir pour obtenir un cube, il est impossible de la déformer pour obtenir un tore sans y pratiquer de trou.

Ce rectangle



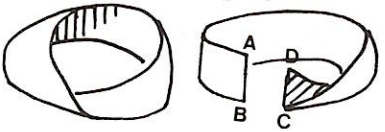
n'est pas équivalent à ce cylindre

car il a fallu souder AB et CD pour passer de l'un à l'autre;



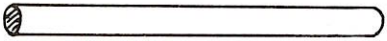
le cylindre n'est pas équivalent au ruban de Möbius

qui, lui, s'obtient à partir du rectangle en soudant AB et DC



Je fais maintenant appel à votre imagination. Supposons que nous soudions les bords du rectangle comme suit : AC et BD d'abord, AB et CD ensuite. Qu'obtient-on ? Et si l'on soude AC et BD, puis AB et DC ? Avez-ous trouvé ? Dans le premier cas en soudant AC et BD, on obtient un long cylindre et si

l'on raccorde ensuite AB et DC apparaît un tore

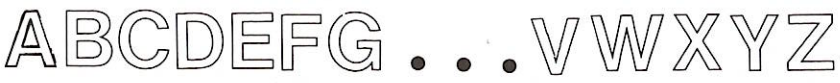


Dans le second cas, la première soudure nous fournit le même long cylindre, mais la deuxième soudure est impossible à réaliser, à moins qu'il n'y ait pénétration de la surface à l'intérieur d'elle-même; on obtient une curieuse surface connue sous le nom de *"bouteille de Klein"*; elle n'est topologiquement équivalente ni au tore, ni au cylindre.

Pour illustrer encore l'idée d'équivalence topologique, je vous propose une petite récréation : classer les lettres de l'alphabet en mettant dans une même classe celles qui sont équivalentes :

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Et si les lettres sont écrites comme ceci



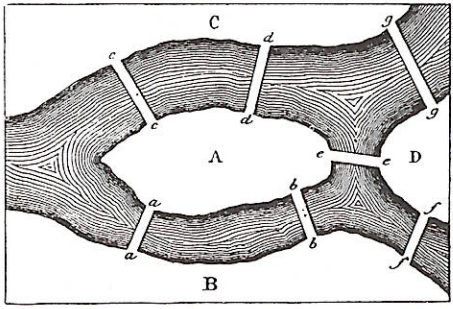
que deviennent les classes d'équivalence ? Bon amusement !

* * *

Parmi les travaux des mathématiciens qui conduisent petit à petit à la topologie actuelle, il en est un, dû à EULER, et resté célèbre sous le nom de *"Problème des ponts de Koenigsberg"*. Il parut en 1759 dans les *"Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin"* sous le titre *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*. Voici une traduction du début de ce texte, rédigé en latin, comme il était d'usage à cette époque.

"Outre cette partie de la géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dès les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelé Geometria situs. D'après lui, cette branche de la science s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur. Mais quels sont les problèmes qui appartiennent à cette géométrie; quelles sont les méthodes qu'il faut employer à leur résolution? C'est ce qui n'a pas encore été nettement défini. Récemment, j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient dans son énoncé que des considérations d'ordre et non de mesure; aussi ai-je résolu d'exposer ici, comme un specimen, la méthode que j'ai trouvé pour résoudre ce problème.

A Koenigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g.



Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont et que l'on n'y passe qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns; impossible, disent les autres; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. Je me suis donc proposé le problème suivant, qui est très général :

Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre de ponts jetés sur ce fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts. "

Abandonnons ici le texte d'Euler et attachons-nous à la résolution du problème proposé, tout d'abord à partir de l'exemple des ponts de Koenigsberg.

Décidons de désigner par une succession de lettres majuscules un trajet qui passe successivement par les régions représentées par ces lettres. Ainsi, BACAD représente un trajet qui va de B en A (par le pont a par exemple), puis de A en C (par le pont c par exemple), de C en A (par le pont d) et de A en D (par le pont e).

Puisqu'il y a 7 ponts, tout trajet passant une et une seule fois par chacun d'eux devra comporter 8 lettres majuscules.

D'autre part, remarquons que 5 ponts desservent la région A donc la lettre A devra figurer trois fois dans le trajet

ou

De même, 3 ponts aboutissent à chacune des régions B,C,D, de sorte que celles-ci doivent figurer deux fois dans le trajet.

3 lettres A, 2 lettres B, 2 lettres C, 2 lettres D nous donnent en tout 9 lettres. Or nous avons vu plus haut que tou trajet passant une et une seule fois par chaque pont comporte exactement 8 lettres. Le problème des ponts de Koenigsberg est donc impossible.

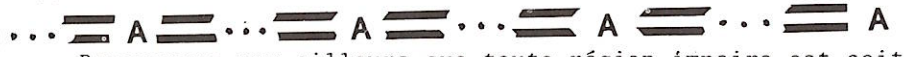
Essayons maintenant de généraliser.

S'il y a n ponts, tout trajet passant une et une seule fois par chacun d'eux comporte n+1 lettres majuscules.

Soit A une région impaire, c'est-à-dire à laquelle aboutit un nombre impair de ponts, soit 2k+1. La lettre A doit figurer ((2k+1)+1)/2 = k+1 fois dans le trajet.

Par exemple, si le nombre de ponts est 7, A figure (7+1)/2 égale 4 fois dans le trajet

ou



Remarquons par ailleurs que toute région impaire est soit le début, soit la fin du trajet (mais pas les deux à la fois). Il ne peut donc y avoir que 2 ou 0 régions impaires.

Soit B une région paire, c'est-à-dire reliée aux autres régions par un nombre pair de ponts, soit 2k. La lettre B figurera k+1 fois dans le trajet si celui-ci part de B (et se termine en B) et k fois si le trajet part d'une autre région que B.

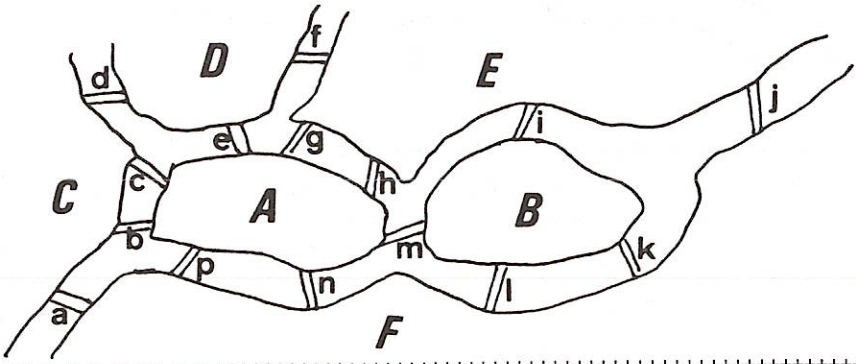
Par exemple, si le nombre de ponts est 6, la lettre B figurera soit 4 fois dans le trajet

soit 3 fois

Résumons-nous

S'il y a une ou plus de deux régions impaires, le trajet est impossible.

S'il y a 2 régions impaires, l'une est le point de départ, l'autre le point d'arrivée du trajet et les autres régions intermédiaires sont paires.



E2 Un triangle a des côtés qui mesurent 13 cm, 18cm et 31cm. Quelle est son aire ?

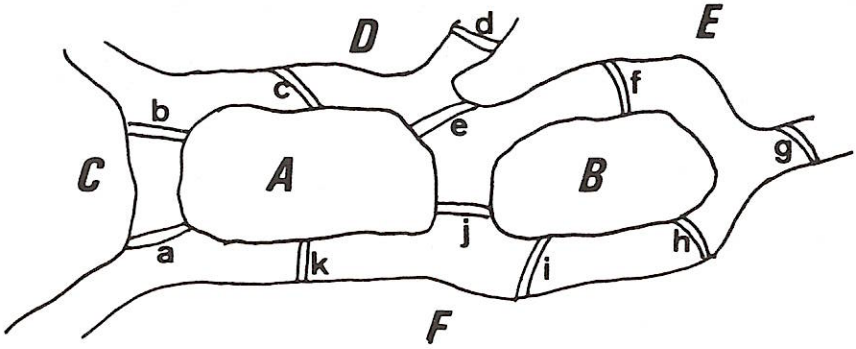
Régions	Nombre de ponts	Nombre de lettres figurant dans le trajet
A	8	8/2 = 4
B	4	4/2 = 2
C	4	4/2 = 2
D	3	(3+1)/2 = 2
E	5	(5+1)/2 = 3
F	6	6/2 = 3
		16 = 15 + 1

Le nombre total de lettres est égal au nombre total de ponts augmenté de un. Voici un des trajets possibles:

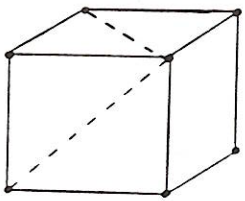
$D_d C_a F_p A_b C_c A_e D_f E_g A_h E_i B_m A_n F_l B_k F_j E$

(les minuscules placées entre deux majuscules représentent les ponts permettant d'aller d'une région à l'autre).

S'il y a 0 région impaire, l'une des régions paires est à la fois le point de départ et le point d'arrivée du trajet



E3 Sur cette figure représentant un cube, deux droites sont dessinées en pointillé. Quel est l'angle de ces deux droites ?



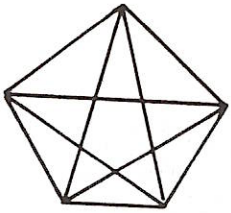
Soit A la région initiale et finale.

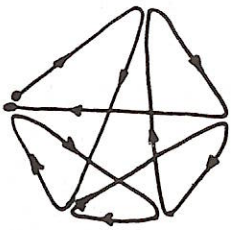
Régions	Nombre de ponts	Nombre de lettres figurant dans le trajet
A	6	(6+2)/2 = 4
B	4	4/2 = 2
C	2	2/2 = 1
D	2	2/2 = 1
E	4	4/2 = 2
F	4	4/2 = 2
		12 = 11 + 1
		= nombre total de ponts + 1

Voici un des trajets possibles

$$A_a\ C_b\ A_c\ D_d\ E_g\ F_h\ B_i\ F_k\ A_e\ E_f\ B_j\ A$$

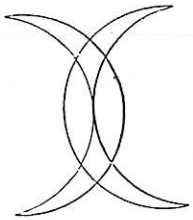
Un problème (de topologie bien sûr) qui peut être rattaché au précédent est celui qui consiste à dessiner d'un seul trait (sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur la même ligne) une figure donnée

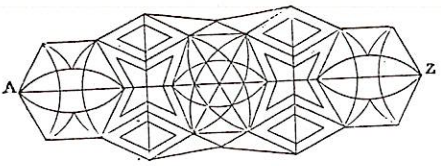




Il est évident que les sommets de la figure peuvent être assimilés aux différentes régions et les lignes qui les relient aux ponts.

On dit que Mahomet dessinait sur le sable sa signature, formée de deux croissants enlacés, d'un seul coup avec la pointe de son cimeterre. Je vous propose d'en faire autant (avec un crayon, pas un cimeterre!) et d'essayer aussi votre adresse sur la figure suivante (avant de commencer, un conseil, regardez où se trouvent les sommets impairs).





à suivre

Claudine Festraets

Le coin des problèmes

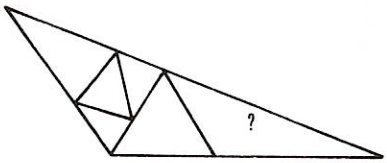
***150** Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un vis-à-vis de l'autre. La hauteur du premier est de 30 aunes et celle du second de 20 aunes. La distance entre leurs pieds est de 50 aunes. Un oiseau est perché sur la cime de chaque arbre. Brusquement les oiseaux aperçoivent un poisson à la surface de l'eau; ils se jettent simultanément sur lui, volent à la même vitesse et l'atteignent au même instant. A quelle distance du pied de chaque palmier le poisson se trouvait-il, sachant que ces distances sont mesurées en aunes par des nombres entiers ? *(13-14 ans)*

***151** La ville d'Atchi est située sur la rive d'un fleuve dont le cours est parfaitement rectiligne. La ville de Bitcha est située à 100 km en aval et à 50 km de la rive. Comment faut-il tracer une route de Bitcha jusqu'au fleuve pour que le prix de transport des marchandises entre les deux villes soit minimum, sachant que le prix du transport d'une tonne par km est deux fois plus élevé par la route que par le fleuve ? *(15 ans)*

152 Dans le cryptogramme donné, chaque lettre P désigne un chiffre pair, chaque lettre I désigne un chiffre pair. Reconstitue la multiplication.
Il n'y a qu'une seule solution.
(12 ans)

```
  P P I
    I I
  ------
  P I P I
  P I I
 -------
I I I I I
```

***153** Est-il possible de partager un triangle dont un triangle dont un angle est supérieur ou égal à 90° en triangles acutangles (les trois angles sont strictement inférieurs à 90°) ? Si oui, quel est le nombre minimum de triangles nécessaires pour ce partage ?
Justifiez votre réponse *(12 ans)*.



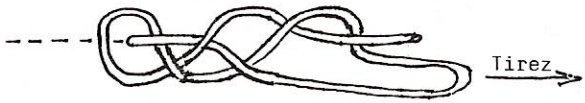
Les chiffres entre parenthèses indiquent l'âge en dessous duquel vous ne possédez peut-être pas les acquis mathématiques nécessaires pour pouvoir résoudre le problème.

Histoire de nœuds

1. Qu'est-ce que la théorie des noeuds?

Quoique relativement récente, la théorie mathématique des noeuds prend sa source dans l'expérience la plus banale de la vie quotidienne: qui ne s'est jamais trouvé confronté à un noeud de lacets particulièrement coriace? La théorie des noeuds est née du besoin de dénouer intelligemment les noeuds, donc sans couper dedans, mais seulement en tirant sur les brins et en faisant passer des boucles dans d'autres. Ici, entendons-nous sur la définition d'un noeud: l'idée que nous en avons est celle d'un brin de ficelle à extrémités libres:

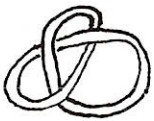
Mais si nous travaillions avec cette notion de noeud, la théorie s'arrêterait ici: tout noeud à extrémités libres peut être dénoué en manipulant les extrémités:



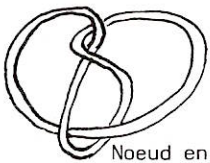
Ce théorème (car c'en est un !) a une base extrêmement intuitive: ceux qui portent encore cravate ou lacets savent bien qu'on parvient toujours à les défaire en tirant sur les bouts.

Nous voyons donc que, pour avoir une théorie qui ne s'arrête pas en queue de poisson, nous devons modifier notre notion de noeuds. C'est pourquoi nous dirons qu'un noeud est un brin de ficelle "sans extrémités", c'est-à-dire une courbe fermée qui ne se recoupe pas, dans l'espace. En voici des exemples:

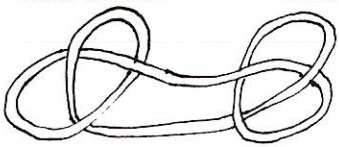
Noeud trivial



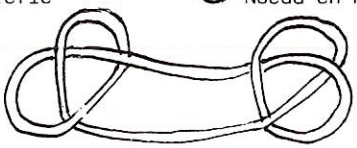
Noeud de trèfle



Noeud en huit

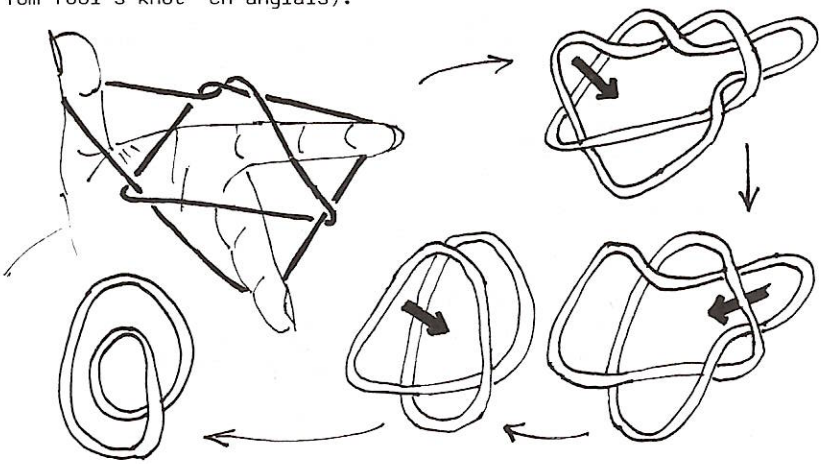


Noeud carré

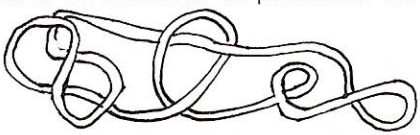


"Granny knot"

Deux noeuds sont <u>équivalents</u> si on peut passer de l'un à l'autre sans les couper, c'est-à-dire uniquement en tirant sur des boucles, en faisant passer des boucles l'une dans l'autre, etc...(Il s'agit d'une notion d'équivalence topologique, au sens de l'article sur ce sujet dans la même revue: on s'imagine que les noeuds sont formés de fils en caoutchouc; deux noeuds sont équivalents si on peut déformer un fil en l'autre...). Voici quelques problèmes auxquels s'attaque la théorie des noeuds. Etant donné un noeud, peut-on le dénouer? (c'est-à-dire, est-il équivalent au noeud trivial?). Plus généralement, étant donnés deux noeuds, sont-ils équivalents ou inéquivalents? Il n'est pas toujours immédiat de dire au premier coup d'oeil si un noeud est trivial ou pas, et c'est la base d'un certain nombre de jeux de salons à réaliser avec un élastique ou une cordelette. En voici un exemple (appelé "Tom fool's knot" en anglais):



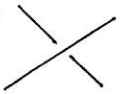
Considérons maintenant le noeud de trèfle. Pouvons-nous le dénouer, quitte à le triturer affreusement au préalable? En en faisant par exemple:



Notre intuition nous dit que le noeud de trèfle ne peut être dénoué. Ce résultat, pressenti depuis longtemps, n'a été démontré rigoureusement qu'en 1908 par Tietze. On a aussi pu montrer par la suite que les cinq noeuds du bas de la page précédente sont deux à deux inéquivalents.

2. <u>Un peu d'histoire</u>.

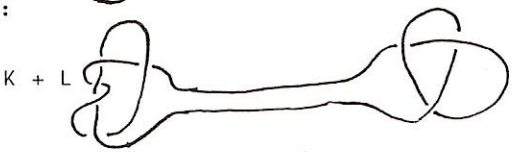
La théorie des noeuds est née vers 1870 sous l'impulsion de trois physiciens écossais: Maxwell (père de l'électromagnétisme), Thomson (mieux connu sous le nom de Lord Kelvin), et surtout Tait. Thomson avait une théorie de la structure de la matière selon laquelle les atomes seraient de petits noeuds formés par des lignes dans l'éther

(pour les physiciens du 19ème siècle, l'éther était un milieu extrêmement subtil qui imprégnait tous les corps et vibrait sous l'action des ondes lumineuses; ce concept est aujourd'hui abandonné). Dans l'idée de décrire les divers types d'atomes, Tait s'embarque, de 1867 à 1873, dans un programme consistant à classifier les noeuds et à établir parmi eux une hiérarchie basée sur une notion de complexité. Tait introduit les diagrammes de noeuds, c'est-à-dire les projections des noeuds sur un plan, un trait interrompu à un croisement indiquant un passage en-dessous:  (Nous utiliserons dorénavant cette convention dans nos dessins).

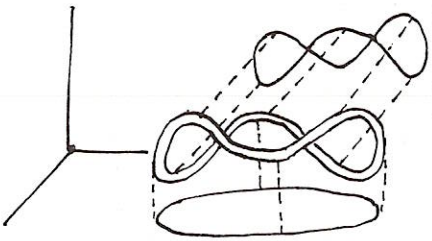
Tait remarque qu'on peut faire la somme de deux noeuds. Soient K, L deux noeuds:

"Décollons" K et L:

Et recollons:



Ainsi, le "granny knot" rencontré au §1 est la somme de deux noeuds de trèfle. L'addition des noeuds est commutative, et admet le noeud trivial comme élément neutre. Un noeud non trivial est <u>premier</u> s'il n'est pas décomposable en la somme de deux noeuds non triviaux. Tait a utilisé constamment le résultat suivant: tout noeud non trivial est de manière unique la somme de noeuds premiers (ce théorème, analogue à la factorisation d'un nombre naturel en nombres premiers, a été démontré beaucoup plus tard). Il a aussi introduit le <u>nombre de croisements</u> d'un noeud, c'est-à-dire le nombre minimum de points doubles parmi toutes les projections planes du noeud (et des noeuds qui lui sont équivalents).



Deux projections d'un même noeud: l'une à 0 point double, l'autre à 2 points doubles. Ce noeud a donc 0 croisement (il s'agit bien entendu du noeud trivial).

Tait s'est alors lancé dans une classification des noeuds premiers jusqu'à 9 croisements où, pour simplifier davantage, il identifiait un noeud et son image dans un miroir (notons qu'il était parfaitement conscient du fait que le noeud de trèfle n'est pas équivalent à son image-miroir

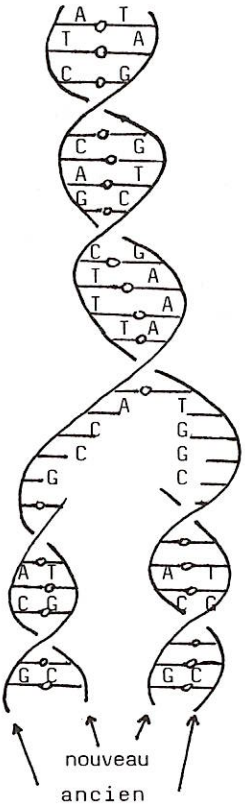
mais ceci ne fut démontré qu'en 1914 par Dehn). Voici le début de la classification de Tait:

Nombre de croisements	Types de noeuds premiers (en identifiant un noeud et son image-miroir)
1	Pas de noeud
2	Pas de noeud
3	Noeud de trèfle
4	Noeud en huit
5	 
6	  

Faute de place, nous ne donnons pas la suite des tables de Tait. Signalons qu'on dispose actuellement d'une classification des noeuds premiers jusqu'à 13 croisements. Les travaux récents s'orientent vers la recherche d'invariants des noeuds. Un invariant est un objet associé à un noeud, de telle manière que deux noeuds équivalents aient le même invariant. L'idéal serait un invariant complet, c'est-à-dire tel que deux noeuds ayant même invariant soient équivalents. Un invariant complet n'existe pas encore. Un des meilleurs invariants connus à ce jour a été obtenu en 1983 par le mathématicien néo-zélandais Vaughan Jones. C'est un polynôme de Laurent en une variable t (donc une expression polynomiale où t^{-1} peut apparaître, par exemple $-t^{-4} + 5t^{-1} - 1 + 2t^2 + 6t^3$). Le polynôme de Jones peut se calculer aisément, et il est très bon pour distinguer les noeuds à peu de croisements, et pour distinguer un noeud de son image-miroir.

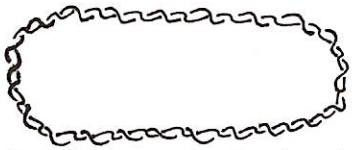
3. Biologie moléculaire.

L'acide désoxyribonucléique (ADN) est une substance commune à presque toutes les espèces vivantes, et qui renferme l'information génétique de l'espèce. L'ADN forme des chaînes moléculaires larges d'environ 2.10^{-6}cm et d'une longueur variant de 3.10^{-3}cm à plusieurs cm selon les espèces. En 1953, F. Crick et J.D. Watson proposent, pour la

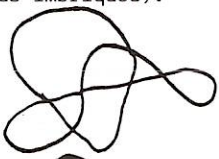


structure de l'ADN, le modèle "en double hélice" qui leur vaut le prix Nobel en 1962. Deux hélices formées de sucres et de phosphates reliés par des liaisons covalentes (liaisons fortes), sont jointes par des barreaux constitués de bases de nucléotides: adénine (A), thymine (T), cytosine (C), guanine (G). Un A fixé à une des deux hélices est nécessairement apparié à un T sur l'autre hélice, via une liaison-hydrogène (liaison faible); il en va de même pour C et G. L'information génétique est un très long mot en les lettres A, T, C, G. Le modèle proposé pour la réplication de l'ADN (c'est-à-dire le dédoublement des chaînes, préalable à la division cellulaire, et nécessaire pour que les cellules-filles aient la même information génétique que la cellule-mère) est le suivant: les liaisons-hydrogènes se rompent, les deux hélices s'écartent, et chacune reconstitue son hélice complémentaire.

A l'origine, on pensait que les chaînes d'ADN étaient relativement courtes et linéaires. Vers 1960, avec les progrès de la microscopie électronique, on s'est rendu compte que ces chaînes étaient fort longues et que, chez de très nombreuses espèces, elles se referment.



Le nombre d'enlacements des deux hélices est en fait très élevé: chez la bactérie Escherichia Coli, les deux hélices tournent environ 300.000 fois l'une autour de l'autre. Par conséquent le schéma ci-contre pour la réplication n'est pas très réaliste: comment séparer deux brins fermés enlacés 300.000 fois? Ce problème topologique a amené les biologistes à réfléchir aux noeuds et aux entrelacs (c'est-à-dire aux noeuds imbriqués).



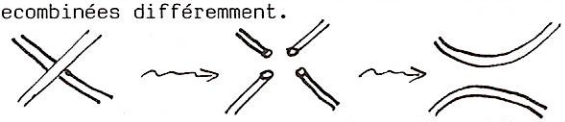
Plus récemment, on a aussi rencontré noeuds et entrelacs dans l'axe des molécules d'ADN (seul l'axe est observable au microscope électronique; les deux hélices sont trop petites pour être observées).

En 1983, Stasiak et Cozzarelli ont imaginé un procédé permettant de déterminer le sens des croisements. Tous les noeuds jusqu'à 7 croisements, quelques noeuds à 8 ou 9 croisements, et plusieurs entrelacs ont déjà été observés.

Pour pouvoir se diviser, la cellule doit se débarrasser de tous ces noeuds et entrelacs, sinon la vie s'arrête. C'est pourquoi les biologistes ont pressenti, dans les années 1960, l'existence d'enzymes, les topo-isomérases, qui modifient les propriétés topologiques des chaînes, mais préservent la formule chimique de l'ADN. Dans les années 1970, on a isolé les premières topo-isomérases; depuis, on en a trouvé chez de nombreuses espèces, y compris l'homme. Ces enzymes n'effectuent que 2 types d'opérations sur les chaînes d'ADN; chaque type est capable de faire ou défaire noeuds et entrelacs.

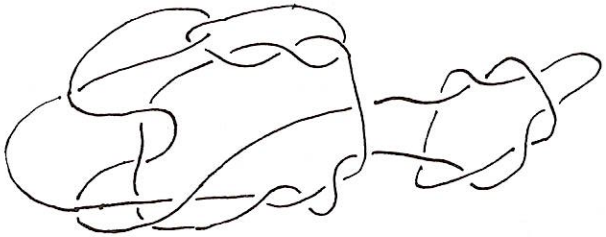
1°) Un segment d'ADN est brisé, un autre est passé dans la brèche, et le segment initial est recollé.

2°) Deux segments voisins d'ADN sont brisés, et les extrémités sont recombinées différemment.



Ceci a été exploité pour la fabrication d'un médicament contre le trypanosome, un parasite responsable de la maladie du sommeil: on noue son ADN, qui devient si inextricablement enchevêtré que la cellule ne peut plus se diviser. Ici, on soigne donc par la topologie (malheureusement, cette drogue n'est pas utilisée en raison de sérieux effets secondaires).

Certains biologistes s'intéressent à la théorie mathématique des noeuds pour étudier l'équivalence des noeuds d'ADN qu'ils rencontrent. De tels noeuds n'apparaissent presque jamais sous la forme simple des tables, mais présentent en général des croisements superflus. Ainsi, on pourrait observer le noeud suivant



qui est en fait le noeud trivial (le voyez-vous immédiatement?). Sur base d'une photo au microscope électronique, un algorithme permet de calculer le polynôme de Jones de chaque noeud: si les polynômes sont égaux, les noeuds sont probablement équivalents; si par contre ils sont différents, les noeuds sont sûrement inéquivalents. Une modification des polynômes de Jones d'un ensemble de noeuds au cours d'une réaction met donc en évidence l'action d'une topo-isomérase.

Cette collaboration qui s'amorce entre mathématiciens et biologistes nous expliquera-t-elle un jour pourquoi la vie continue?

A. Valette

Des machines pour faire des devoirs d'algèbre...

... peut-être, mais il faut réfléchir davantage! Voyons cela. Les nouvelles calculatrices HP-28C et CASIO-FX5500 peuvent en effet "calculer avec des lettres". On observe ceci :

HP 28C

Touches	Ecran
A ENTER	'A'
B +	'A+B'
2 ^	'(A+B)^2'
EXPAN	'A^2+2*A*B+B 2

CASIO FX5500

Touches	Ecran
$(A + B)x^2$	$(A + B)^2$
EXPD	$A^2+2AB+B^2$

Ce qui est plus spectaculaire c'est la factorisation qui est possible sur la CASIO : (pas possible sur HP)

Touches	Ecran
$Ax^2+AB-2Bx^2$	$A^2+AB-2B^2$
FCTR	$(A+2B)(A-B)$

Si on donne $(A^2+AB-2B^2)/(A-B)$ elle ne peut pas simplifier. Par contre elle peut faire $((A+2B)(A-B))/(A-B)$ et trouver $A+2B$.

La résolution d'équations se fait tout aussi aisément

HP 28C

Touches	Ecran
2 x × 5 +	'2 * X + 5'
x ISOL	- 2.5

CASIO FX5500

Touches	Ecran
2 STO A	2
5 STO B	5
SOLVE (x)	2X + 5 = 0
EXE	-5/2

Pour le second degré :

X x^2 X + 1 -	'SQ(X)+X-1
'x' QUAD	'(-1+s1*2,23)/2'
où s1 signifie ±1	

1 STO A	1
1 STO B	1
-1 STO C	-1
SOLVE(x^2)	$X^2+X-1=0$
EXE	$\sqrt{5}/2-1/2$, $-\sqrt{5}/2-1/2$
EXE	0.618,-1.618

D'une façon analogue, on peut résoudre des systèmes linéaires à 2 ou 3 inconnues sur les deux machines.

Ici s'arrêtent les possibilités de la CASIO pour les équations alors qu'on peut généraliser le processus sur HP pour n'importe quelle équation ou à peu près.

Voici quelques exercices choisis dans "Algèbre 2B" de Lorent et Lorent et leur résolution sur machines :

N° 31 : Décomposer $4a^2-9b^2-c^2+6bc$ en facteurs
Sur CASIO on écrit directement ce polynôme et la touche FCTR donne $(2A+3B-C)(2A-3B+C)$
Impossible sur HP

N°63 : Résoudre l'équation $2x+3(x-2)+9=0$
Sur HP on écrit directement l'expression et les touches EXPAN COLLT et 'x' ISOL donnent -.6
Sur CASIO on écrit l'expression puis EXPD qui donne 5X+3 . 5 STO A,3 STO B,SOLVE(x), EXE donnent -3/5.

Francis Michel

SOMMAIRE

La cryptographie à clef révélée 1

L'hexahexaflexagone 9

Quelques éléments de la TOPOLOGIE 11

Le coin des problèmes 18

Histoire de noeuds 19

Des machines pour faire les devoirs d'algèbre... couverture 3

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2, 1160 Bruxelles
tél 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

C. Festraets, F. Michel, S. Trompler, A. Valette, F. Valette

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme.

Prix des abonnements :

Belgique :	*groupés (5 au moins)*	*80 FB*
	isolés	*120 FB*
Etranger :	*y compris Pays-Bas et Luxembourg*	
	par paquet de 5 abonnements	*800 FB*
	isolé	*240 FB*

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Anciens numéros : sont encore disponibles
Années 81-82, 82-83, 83-84, 84-85, 85-86(sauf le n°29),86-87
Belgique : 81-82 à 85-86 : 50 FB l'année ; 86-87 : 80 FB
Etranger : 81-82 à 85-86 : 100FB l'année ; 86-87 : 160 FB

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte N° 001-0828109-98
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 - Casteau
Pour l'étranger : Cpte N° 000-0728014-29
SBPMEF, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 Casteau , à partir d'un compte postal
ou par mandat postal international.
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement.
Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.