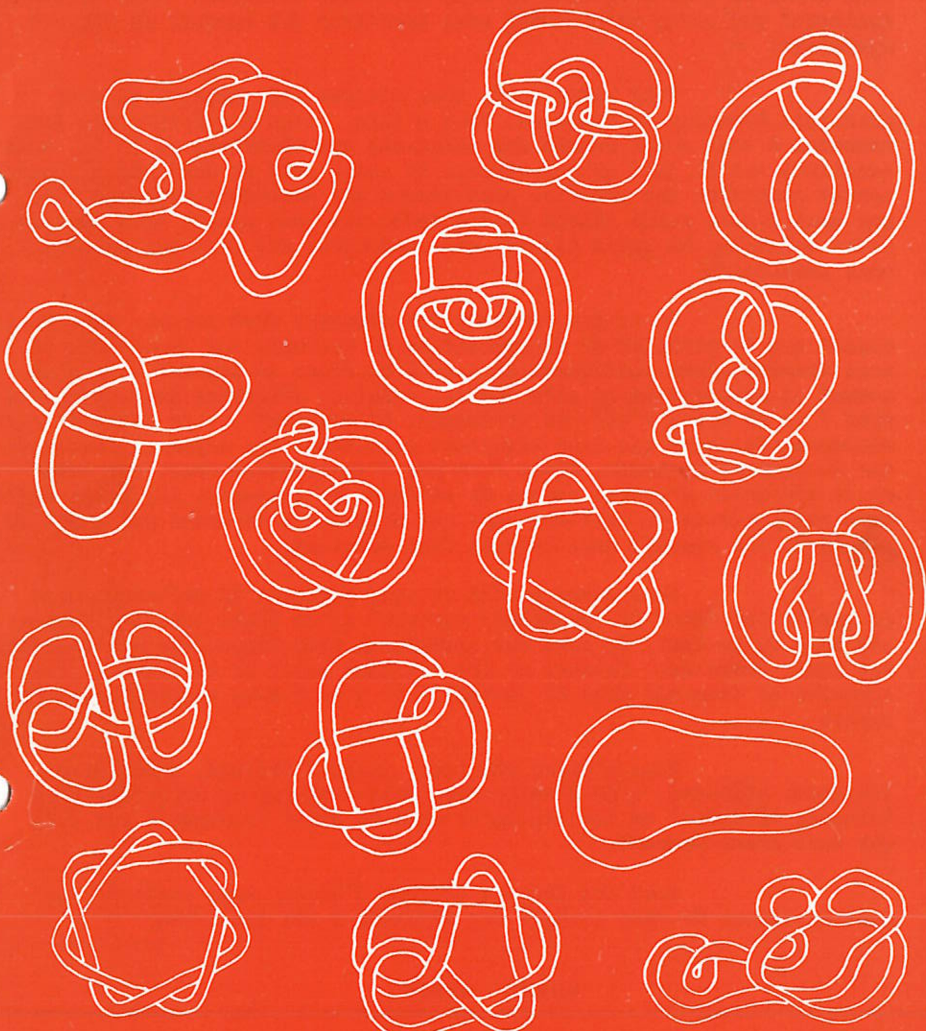
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française — Association Sans But Lucratif

MATH-JEUNES



Journal Trimestriel

10ème année | Numéro 38 | Hiver 1987-88

Chers amis,

En ce début d'année 1988, nous vous présentons tous nos voeux pour l'année nouvelle. Qu'elle vous garde tous en bonne santé et vous donne la joie d'obtenir de bons résultats scolaires. Nous espérons également que votre MATH-JEUNES vous apportera des moments de détente agréables.

Pour notre part, nous serions très heureux si nous recevions beaucoup de courrier. Vous n'êtes, jusqu'à présent, pas fort nombreux à nous avoir envoyé des solutions aux problèmes du n° 37. Nous insistons sur le fait qu'une réponse de votre part ne doit pas nécessairement comporter une solution pour chacun des problèmes proposés. Dès que vous pensez avoir résolu l'un d'entre eux vous pouvez nous envoyer votre solution. Un petit effort, nous prévoyons des prix qui peuvent vous intéresser.

En ce qui concerne les réponses déjà reçues, tous nous disent que le problème de décomposition du triangle est impossible et nous donnent comme justification : si l'on trace un segment issu d'un sommet et aboutissant au côté opposé, celui-ci détermine deux triangles dont l'un au moins n'est pas acutangle. Et pourtant ... le triangle est décomposable, bien que leur réflexion concernant les segments envisagés est évidemment correcte. Alors ? Un peu d'imagination vous fera sans doute découvrir d'autres façons de partager le triangle. Si, après cette remarque certains de ceux qui nous ont déjà écrit trouvent une façon de procéder, ils peuvent nous envoyer leur solution.

Nous avons oublié de vous signaler la présence, dans le numéro précédent de "problèmes express" et de leurs réponses dispersés dans le journal. Ce sont des situations pour lesquelles une solution est quasi immédiate. Essayez de les résoudre avant de chercher où les réponses se trouvent dans le journal ! Il y en a deux nouveaux dans ce numéro.

Nous n'avons pas reçu, jusqu'à présent, d'hexahexaflexagone illustré. L'un d'entre vous nous a envoyé un coloriage d'un hexagone décomposé en six triangles mais ce n'est évidemment pas cela que nous avons demandé.

Avec ces longues soirées d'hiver, nous espérons que vous essayerez de nous envoyer des réponses à nos questions.

BONNE ANNEE

La rédaction

Quelques éléments de TOPOLOGIE

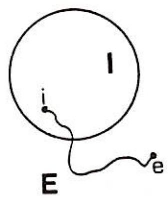
(suite)

LES PROPRIETES TOPOLOGIQUES

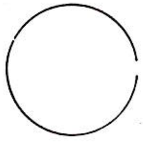
Nous avons dit (n° 37) que la topologie s'intéresse aux propriétés qui sont conservées lorsque l'on déforme continûment un objet géométrique (sans coupure, ni collage). On peut se demander quelles sont ces propriétés. Certainement pas la forme, ni le parallélisme ou la perpendicularité, ni des mesures d'aucune sorte (on dit parfois que la topologie est la science des lignes en élastique, des surfaces en caoutchouc, des solides en plasticine...). Découvrons ensemble quelques unes de ces propriétés.

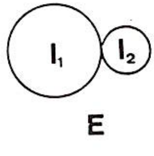
1. Le théorème de Jordan

Considérons un cercle. Il détermine dans le plan deux régions que nous appellerons extérieure E et intérieure I ; pour passer d'un point de E à un point de I, il faut absolument traverser la frontière constituée par le cercle.



Mais si on coupe le cercle en un point, il n'y a plus qu'une seule région et si on soude 2 points du cercle, il y a alors trois régions, deux intérieures et une extérieure.





Toute figure topologiquement équivalente au cercle possède la propriété de déterminer deux régions dans le plan.

Cette propriété a été pour la première fois établie par Camille Jordan (1838-1922) dans son fameux "Cours d'analyse". Curieusement, la démonstration ni simple, ni courte n'était même pas totalement correcte et les premières démonstrations rigoureuses qui ont suivi celle de Jordan étaient vraiment très compliquées. Une des raisons en est que les concepts si simples intuitivement d'intérieur, d'extérieur et de courbe fermée simple (topologiquement équivalente au cercle) sont difficiles à définir avec précision et rigueur.

2. Les surfaces orientables.

Imaginons un cylindre en papier dont nous aurions peint la face externe en rouge et la face interne en bleu. Il est clair que pour passer d'un point rouge à un point bleu, il faut, soit traverser la paroi du cylindre, soit passer par l'un des cercles qui le bordent. Un cylindre a deux faces, c'est une surface "*bilatère*" et toute surface qui lui est topologiquement équivalente est aussi bilatère.

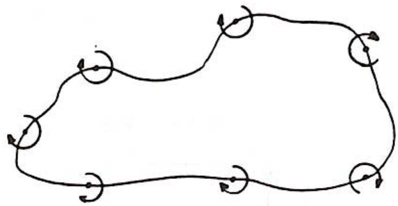
Procédons de même avec un ruban de Möbius en papier. Peignons en rouge une de ses faces..., mais que se passe-t-il ? Tout le ruban est peint en rouge. Il n'a qu'une face ! C'est une surface "unilatère".

La topologie va donc distinguer entre les surfaces bilatères et les surfaces unilatères, c'est-à-dire aussi entre les surfaces *orientables* et celles qui ne le sont pas.

Qu'entend-on par là ?

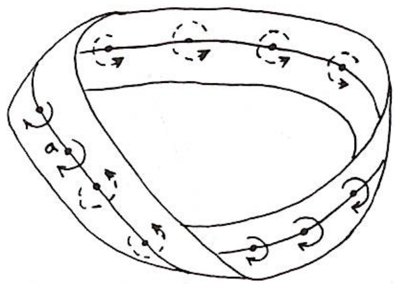
Supposons qu'autour de chaque point d'une surface (sauf éventuellement les points du bord), nous dessinions un petit arc orienté soit dans le sens des aiguilles d'une montre, soit dans le sens contraire.

Une surface est dite orientable s'il est possible de choisir le sens de l'orientation de manière telle qu'il soit le même pour tous les points d'une courbe quelconque tracée sur la surface.



Le plan est une surface orientable, la sphère, le cylindre, le tore aussi ; et d'une manière générale, toutes les surfaces bilatères sont orientables.

Mais il n'en est pas de même du ruban de Möbius ou de la bouteille de Klein. Sur un ruban de Möbius en papier suffisamment léger pour nous permettre de voir par transparence, traçons la "médiane", puis en partant d'un point a arbitraire, dessinons nos petits arcs orientés. Quand on



revient au point a, l'orientation a changé (les courbes en pointillés sont celles vues par transparence).

Un ruban de Möbius est donc non orientable et il en est de même pour toutes les surfaces unilatères.

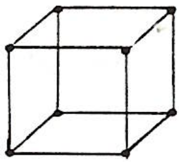
3. La caractéristique d'Euler-Poincaré

Certains d'entre vous connaissent probablement la formule d'Euler relative aux polyèdres simples :

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

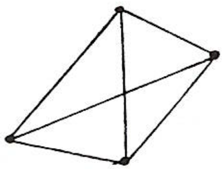
ce qui signifie que le nombre de sommets diminué du nombre d'arêtes et augmenté du nombre de faces vaut 2 quel que soit le polyèdre simple considéré.

Ainsi, pour le cube



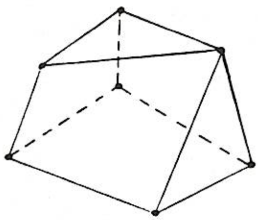
$S - A + F$
$= 8 - 12 + 6 = 2$

pour un tétraèdre



$S - A + F$
$= 4 - 6 + 4 = 2$

pour ce polyèdre quelconque

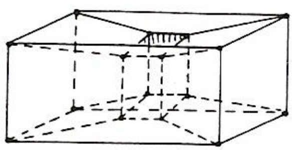


$S - A + F$
$= 7 - 12 + 7 = 2$

Le cube, le tétraèdre, le polyèdre dessinés ci-dessus sont des polyèdres simples, c'est-à-dire topologiquement équivalents à une sphère.

Si nous examinons un polyèdre topologiquement équivalent au tore, nous obtenons

$S - A + F$
$= 16 - 32 + 16 = 0$

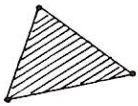


E4 Peut-on diviser un cube en six pyramides identiques ("isométriques") ? (12 ans).

Nous voyons ainsi que la valeur du nombre S - A + F varie selon le type de surface considérée.

Examinons d'un peu plus près ce qui se passe dans le plan (ici, la notion de polyèdre fait place à celle de polygone).

Le plus simple des polygones est le triangle

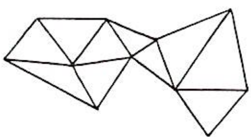


$S - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$

Si à ce triangle, nous en accolons un autre, le nombre de sommets augmente de 1, celui des arêtes de 2 et celui des faces de 1 :

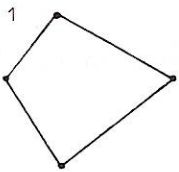
$(S+1) - (A+2) + (F+1) = S - A + F = 1$

Chaque fois que l'on adjoint un triangle aux précédents, S - A + F reste inchangé

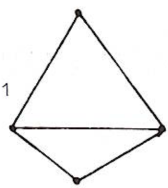


$S - A + F = 1$

Nous pouvions avoir un polygone qui ne soit pas un triangle, un quadrilatère par exemple. Mais il suffit d'y tracer une diagonale pour le partager en 2 triangles et ce faisant, le nombre de sommets reste inchangé, le nombre d'arêtes augmente de 1 et le nombre de faces augmente aussi de 1



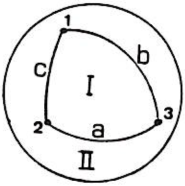
$S - A + F = S - (A+1) + (F+1) = 1$



On pourrait évidemment procéder de même pour un pentagone, un hexagone ou n'importe quel polygone.

On peut conclure que, dans le plan, et dans toute surface qui lui est topologiquement équivalente, le nombre S - A + F vaut 1.

Un raisonnement analogue au précédent nous conduit pour la sphère à S - F + A = 2

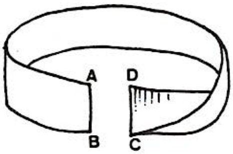


3 sommets 1, 2, 3
3 "arêtes" a, b, c
2 "faces" I, II
3 - 3 + 2 = 2

Et sur un ruban de Möbius ? Partons du rectangle ABCD.

S - A + F
= 5 - 8 + 4 = 1

Collons AB et CD, le nombre de sommets diminue de 2, le nombre d'arêtes diminue de 1 et le nombre de faces reste inchangé, donc



S - A + F = 0

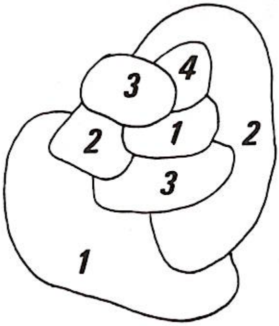
Ce nombre S - A + F, appelé *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'une surface est une constante, la même pour toutes les surfaces topologiquement équivalentes.

4. Le problème des 4 couleurs.

Ce problème de topologie est un des plus simples à énoncer qui soit, un enfant de 10 ans comprend aisément de quoi il est question et cependant, il est resté sans solution pendant 124 ans. En voici l'énoncé.

SE 4
Les six pyramides ont pour bases les six faces du cube et pour sommet le centre du cube.

Toute carte dessinée dans le plan peut être coloriée en utilisant au maximum 4 couleurs de manière à ce que deux pays ayant une frontière commune n'aient jamais le même couleur.

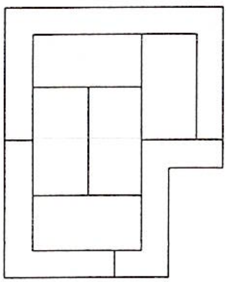


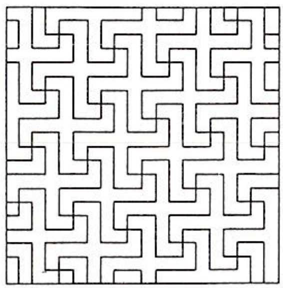
Ce théorème semble avoir été pour la 1er fois formulé en 1852 par un étudiant d'Edimbourg écrivant à son frère alors élève du mathématicien De Morgan.

L'élève soumit le problème à son professeur qui s'y cassa les dents et depuis, bien des générations de lycéens et de mathématiciens, amateurs ou professionnels, se sont penchés sans succès sur la question.

En 1976, ce problème a été résolu conjointement par K. Appel, W. Haken et J. Koch. L'annonce qu'une démonstration était enfin trouvée a suscité à la fois beaucoup d'intérêt et de multiples controverses. En effet, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, une démonstration nécessitait l'aide d'ordinateurs ; plus de 1 200 heures de travail d'ordinateurs ont été nécessaires d'une part pour effectuer les calculs trop longs et d'autre part, pour déterminer et analyser un certain nombre de cartes "types".

Pour clore ce petit aperçu de topologie, je vous propose d'exercer votre sagacité sur les cartes ci-dessous. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour chacune d'elles ?





Cl. FESTRAETS

Histoire extraordinaire d'une balle ordinaire

Je laisse tomber une balle de ping-pong au-dessus de la table. Elle rebondit : poc. Puis encore : poc. Puis encore : poc, poc, poc,..., de moins en moins haut mais de plus en plus vite. A la fin, elle fait des bonds si petits et si rapprochés que je n'entends plus qu'une sorte de grésillement. Et enfin elle s'immobilise sur la table. Combien de fois a-t-elle rebondi ? Je recommence et compte les bonds. Mais elle finit par aller si vite que je ne peux pas suivre. Combien de bonds y a-t-il dans ce grésillement qu'elle fait à la fin ? Dix, quinze, vingt,...? Je ne sais pas. Au total elle rebondit sans doute entre trente et cinquante fois. Mais je dis ça comme ça, à l'estime. Et puis, tous comptes faits, qu'est-ce que ça peut bien faire ? Quarante fois ? Cinquante fois ? Où est la différence ? La question n'est même pas intéressante. Je laisse tomber (c'est le cas de le dire).

Mais voilà que cette fichue balle rebondit dans ma tête. Elle ne veut pas me lâcher ! Ces bonds tout petits, est-ce qu'ils ne deviennent pas à la fin si petits que je ne les vois plus ? Et quand je crois que la balle est arrêtée, est-ce qu'elle n'est pas en train de faire encore des bonds imperceptibles ? Et alors peut-être fait-elle beaucoup plus que cinquante bonds ? Pourtant, quand je la regarde là, elle a bien l'air immobile ! Enervant...

Mais comment rebondit-elle au juste ? Il me semble que la hauteur de chaque bond est une fraction, toujours la même, de la hauteur du bond précédent. Je fais quelques mesures à la règle graduée. Ce n'est pas très précis, mais mon impression semble se confirmer : chaque mesure de hauteur d'un bond donne environ 6/10 de la hauteur précédente. Si je lâche la balle de 1m de haut, elle rebondit successivement à $\frac{6}{10}$ de mètre, puis $(\frac{6}{10})^2$, puis $(\frac{6}{10})^3$, etc.

Etc ? Vous avez dit etc. ? Mais alors, cette balle ne s'arrête jamais ? Si je la vois rebondir à un moment quelconque, elle rebondit encore une fois, moins haut certes, mais elle rebondit ! Et donc encore une fois, suivie d'encore une fois ! Elle rebondit une infinité de fois ! Ça, c'est quand même un peu plus que cinquante... Est-ce vraiment possible ? Parce qu'alors elle continue à rebondir indéfiniment ? C'est-à-dire pendant toute l'éternité ?

J'ai décidé, *contre tout espoir*, de faire le compte de tous ces temps de rebondissement. Et j'ai commencé par la descente initiale de 1 mètre de haut. Un souvenir du cours de physique :

$$e = \frac{1}{2} gt^2,$$

où e est l'espace parcouru (ici 1 mètre), t est (en secondes) le temps de la descente (ce que je cherche) et g = 9,81 (m/sec^2). Donc

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = (\frac{2e}{g})^{\frac{1}{2}} = (\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}}$$

puisque e = 1. Pour le premier bond, de hauteur $h_1 = \frac{6}{10}$, je dois additionner le temps de la montée et celui de la descente. Ce dernier se calcule comme ci-dessus :

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{2} gt^2, \text{ d'où } t = (\frac{2}{g} \frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}.$$

Mais le temps de la montée est égal à celui de la descente (je suis allé revoir cela dans mon cours de physique de 4e). D'où pour le temps de ce premier bond, que je désigne par t_1 :

$$t_1 = 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}}(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}.$$

Pour t_2, temps du deuxième bond, celui qui est haut de $(\frac{6}{10})^2$, je trouve de même

$$t_2 = 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^2]^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}]^2$$

Et tant qu'à faire, je passe tout de suite en n$^{\text{ième}}$ bond, qui dure un temps

$$t_n = 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^n]^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}]^n.$$

Donc les temps cumulés jusqu'à celui du n$^{\text{ième}}$ bond font :

$$T_n = (\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} + 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}}(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}} + 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}]^2 + \dots + 2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}} [(\frac{6}{10})^{\frac{1}{2}}]^n. \quad (1)$$

E 5 Combien d'angles rentrants peut avoir un pentagone ? Et un hexagone ?

Formule un peu compliquée ? Si on veut. Mais je m'aperçois qu'il vaudrait mieux calculer une fois pour toutes le facteur commun $2(\frac{2}{g})^{\frac{1}{2}}$ qui vaut

$$2\left(\frac{2}{9,81}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,903... \qquad (2)$$

De plus, j'observe que

$$\left(\frac{6}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,774... \qquad (3)$$

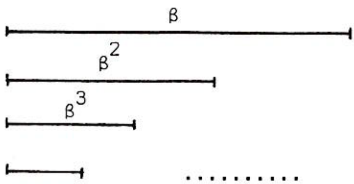
Si, pour raccourcir un peu ce que je dois écrire, je remplace la quantité (2) par a et la quantité (3) par β, j'obtiens pour l'expression (1) :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} a + a\beta + a\beta^2 + ... + a\beta^n \\ &= a(\frac{1}{2} + \beta + \beta^2 + ... + \beta^n). \qquad (4) \end{aligned}$$

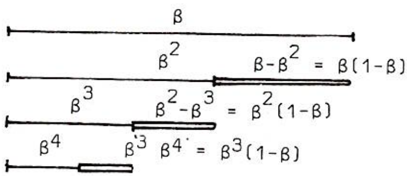
Mais comment calculer cette somme, et même cette somme prolongée indéfiniment (pour tenir compte de tous les bonds, en nombre infini) ?

Je suis perplexe. Et comme d'habitude quand je ne sais plus quoi faire, je fais des petits dessins, presque par désoeuvrement. Je dessine, l'un en-dessous de l'autre, des segments de longueurs

$$\beta,\ \beta^2, ..., \beta^n, ...$$



Il faudrait donc que j'additionne, que je mette bout à bout tous ces segments. Mais je ne vois pas où cela va me conduire. Alors, machinalement, je me mets à les comparer, en en faisant les différences (en traits forts sur la figure) :



Puis je m'aperçois qu'en mettant bout à bout ces différences, j'arrive à remplir le segment initial de longueur β. Remplir vraiment ? En un sens oui, puisque le reste β^n devient aussi petit qu'on veut quand n croît. Donc, n'importe quel point du segment initial finit par être atteint, sauf son extrémité gauche. Ce qui fait que je me décide à écrire *

$$\beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) +\ldots+ \beta^n(1-\beta) +\ldots$$
$$= (1-\beta)(\beta + \beta^2 +\ldots + \beta^n + \ldots) = \beta. \tag{5}$$

Et alors, heureuse surprise, je retrouve dans (5) la "somme infinie" que je cherche, et je la calcule

$$\beta + \beta^2 +\ldots + \beta^n +\ldots = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

D'où, pour le temps de tous les bonds,

$$T = a(\frac{1}{2} + \beta + \beta^2 +\ldots+ \beta^n +\ldots) = a(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta})$$
$$= \frac{a}{2}\ \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Je remplace a et β par leurs valeurs, ce qui donne

$$T = 3{,}544\ldots \text{ (secondes)}$$

Surprise ! Une infinité de bonds dure un temps fini, et même pas très long : quelques secondes ! Ce n'est, à proprement parler, pas croyable. De toutes façons, on sait bien qu'avec les maths, tout peut arriver... Mais personnellement, j'ai les pieds sur terre. Je préfère penser à autre chose.

Alors, j'ai été me coucher. Mais voilà que ce sale truc d'infini me poursuit dans mon sommeil. Et d'abord, j'ai rêvé que j'étais Zénon et que je parcourais le vestibule chez moi, de la porte d'entrée à celle de derrière. Je fais tranquillement la moitié de la longueur, puis la moitié du reste, c'est-à-dire un quart de la longueur, puis la moitié du quart qui reste, c'est-à-dire un huitième, etc. J'ai fait des pas, des pas,... avec un sentiment de fatigue croissant. Et c'était de plus en plus énervant de faire des pas de plus en plus petits. Je me disais "mon pauvre Zénon, tu n'y arriveras jamais !" Je me suis réveillé en sueur, complètement épuisé.

---

* Ceux de nos lecteurs qui connaissent les limites disposeront d'une justification plus formelle de cette égalité.

Pourtant, le vestibule, je l'ai arpenté des centaines de fois, et j'arrive normalement à la porte de derrière. Donc c'est qu'on peut mettre une infinité de longueurs dans une longueur donnée, et que si je prends la longueur du vestibule pour unité, je peux raconter mon rêve en écrivant

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Mais alors, la balle de ping-pong, pourquoi ne ferait-elle pas une infinité le bonds, de plus en plus brefs, en un temps donné ? J'arrive à imaginer que je coupe le vestibule en une infinité de segments. Après tout, je pourrais aussi diviser mentalement une période de temps en une infinité de périodes. Et voilà que je commence à me faire à ce genre d'idées... Il vaudrait peut-être mieux que je me méfie ! Les mathématiciens qui s'amusent à ce genre de choses ont peut-être l'esprit dérangé.

Parce qu'enfin c'est bien beau, des bonds de plus en plus petits, dont les hauteurs tendent vers zéro. Mais qu'est-ce que ça représente à la fin ? Ça devient plus petit qu'un micron, qu'un angström, qu'un milliardième le milliardième de milliardième d'angström ? Qu'est-ce qu'il va dire le professeur de physique ? "Vous déraillez mon jeune ami. En dessous des dimensions d'une particule élémentaire, votre discours ne représente plus rien. Vous l'imaginez encore votre balle : un tourbillon d'électrons, de protons, de neutrons,... ? Tout cela grouille dans tous les sens. Votre balle ne ressemble plus du tout à un solide. Qu'est-ce que vous voulez dire quand vous affirmez qu'elle rebondit à une hauteur de 10^{-1000} cm ? Allons, essayez de rester réaliste."

Et bien alors, quand je pense que le professeur de math et celui de physique ont été à l'Université dans la même faculté et qu'ils ont suivi ensemble des cours de math et de physique ! Lequel des deux a raison ? Parce que forcément n'est-ce pas, quand on raconte quelque chose, c'est vrai ou c'est faux. Y a pas de milieu, c'est connu. En science, c'est comme ça.

Pour en avoir le coeur net, j'ai invité les deux professeurs à prendre un verre et je leur ai mis le nez dans leurs contradictions. Ils n'en ont pas été plus émus que cela, et m'ont convaincu qu'un modèle mathématique d'une situation physique, par exemple la suite des hauteurs

$$1,\ \frac{6}{10},\ \left(\frac{6}{10}\right)^2,\ \dots \qquad (6)$$

pour la balle, n'explique jamais tout. Il a, comme ils disent, un domaine de validité. Les quelques premiers bonds de la balle correspondent bien aux quelques premiers termes de la suite (6). Après, les phénomènes se présentent différemment et il faut d'autres modèles mathématiques pour expliquer ce qui se passe physiquement. "Il n'empèche", a ajouté le professeur de math, "personnellement je trouve passionnant d'étudier le modèle (6) de la balle dans toutes ses conséquences mathématiques. La suite (6) est un objet mathématique intéressant en lui-même."

Le professeur de français était à la table voisine et il n'a pas les oreilles dans sa poche. Il s'est approché et nous a dit qu'il trouvait lui aussi notre histoire passionnante. "On voit tous les jours", a-t-il dit, "des balles qui rebondissent. Quoi de plus banal ? Mais vous avez regardé ce phénomène d'un oeil nouveau, comme s'il était étrange, et cela a fait partir votre réflexion très loin. Le dramaturge allemand Bertolt Brecht assignait au théâtre la même fonction : montrer les choses banales comme si elles ne l'étaient pas, les faire paraître insolites, pour que les spectateurs se posent à leur sujet des questions nouvelles, stimulantes. Brecht appelait cela la *distanciation*. Et il disait "C'est ce que font, et depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer tels phénomènes (les oscillations des pendules, les mouvements des atomes, le métabolisme des infusoires dans une goutte d'eau, etc.) Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne la comprenaient pas ; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux ; de la sorte, ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié. Ainsi certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour effet de les faire véritablement comprendre. Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience l'expérience quotidienne, s'abolit lorsque son évidence est niée par l'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension."

N. ROUCHE

N.B. C'est le Groupe Français d'Education Nouvelle qui a attiré l'attention sur la distanciation au sens de Brecht.

LE COIN DES PROBLEMES

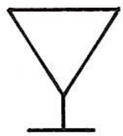
✻ 154 De combien de pourcents une population doit-elle croître chaque année pour doubler en 10 ans ? (14 ans).

155 Je regarde par la fenêtre et je vois, à peu près à la hauteur de mes yeux, un buisson. J'en dessine le contour sur la vitre avec un marqueur. Ensuite, je recule et voilà que je vois le buisson déborder son contour. Qu'est-ce qui se passe ? (13 ans).

✻ 156 Mon ami et moi sommes chacun sur le sommet d'une montagne. Entre lui et moi, il n'y a aucun autre sommet. Est-ce que nous nous voyons nécessairement ? (12 ans)

✻ 157 En supposant que votre feuille de papier mesure a cm et b cm et en supposant a > b, quelle sera la boîte qui aura la plus grande capacité ? [Voir article "A propos d'Origami"] (12 ans).

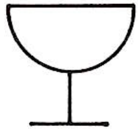
158



Un demi-verre, pas plus ! (14 ans)

159 Je calcule 1 + 3 = 4, puis 1 + 3 + 5 = 9, puis 1 + 3 + 5 + 7 = 16. Ca fait chaque fois un carré. Est-ce que ça va continuer ? (14 ans)

✻ 160

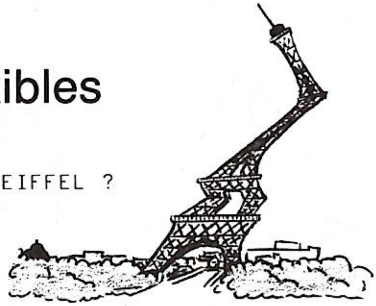


Un demi-verre, pas plus ! (17 ans)

✻ 161 J'écris trois chiffres l'un à côté de l'autre, puis je les reproduis, ce qui me fait un nombre de 6 chiffres. Ce nombre est divisible par 7, 11 et 13. Je recommence avec trois autres chiffres, et constate la même chose. Intrigant ... Est-ce général ? (12 ans)

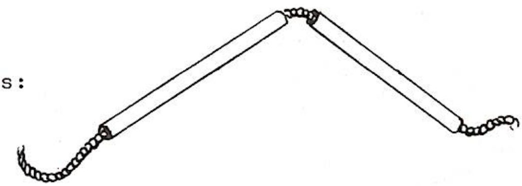
Armatures et polyèdres flexibles

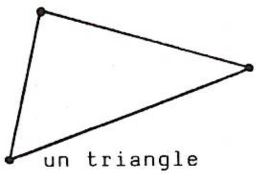
ET, SI ON PLIAIT LA TOUR EIFFEL ?

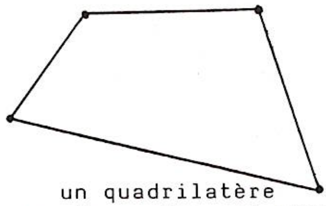


Pour bien comprendre cet article, procurez-vous le matériel suivant: un paquet de pailles, de la fine ficelle, du carton très rigide, de la colle et des ciseaux.

En introduisant la ficelle dans des pailles, construisons:







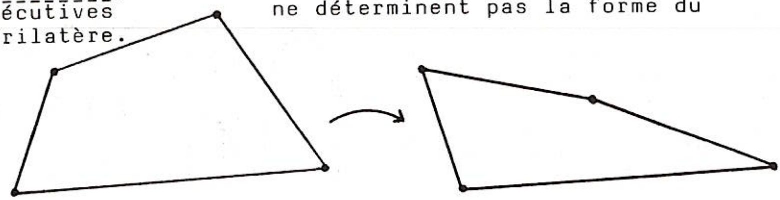
un triangle et un quadrilatère (pas nécessairement plan).

Les pailles forment les arêtes.

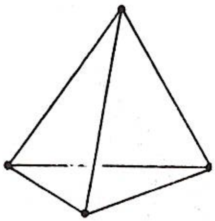
Pouvons-nous déformer ces armatures sans les endommager (Il est défendu de couper ou de plier les pailles.) ?

Pour le triangle: non, nous dirons que le triangle est rigide.

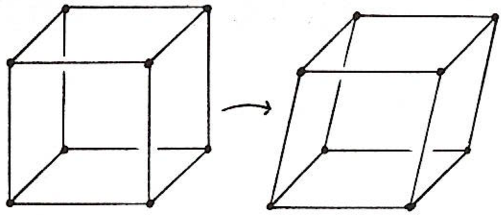
Pour le quadrilatère: oui, nous dirons que le quadrilatère est flexible, c'est-à-dire que les longueurs des arêtes consécutives ne déterminent pas la forme du quadrilatère.



Construisons maintenant les armatures d'un tétraèdre et d'un cube.

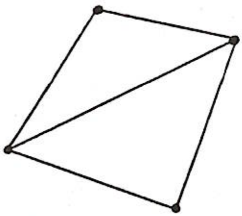


L'armature du tétraèdre est rigide.



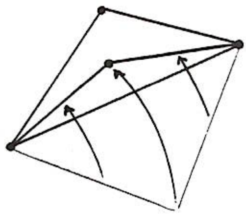
L'armature du cube est flexible.

Remarquons que certaines armatures sont rigides dans le plan, mais flexibles dans l'espace!



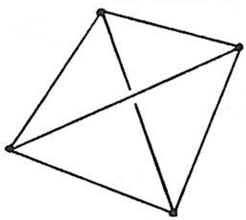
Cette armature est rigide dans le plan,

et



flexible dans l'espace.

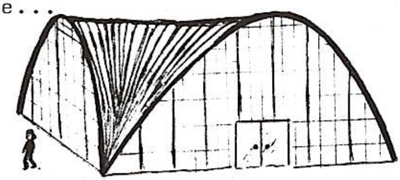
En lui ajoutant une seule arête, nous parvenons cependant à la rendre rigide dans l'espace également.



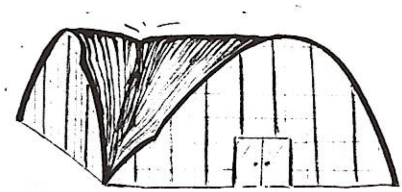
La rigidité des armatures est un problème qui préoccupe les architectes et les ingénieurs depuis bien longtemps.

Imaginez donc ce qui pourrait se produire si l'armature de la Tour Eiffel était flexible...

Il y a quelques années, le toit construit dans un style moderne d'un bâtiment aux Etats-Unis a bougé...
Cela n'était pas prévu par les constructeurs!

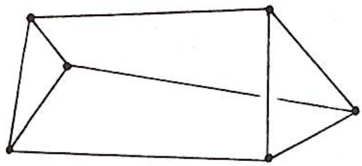


Ils n'avaient pas réalisé
avoir construit une
charpente flexible...

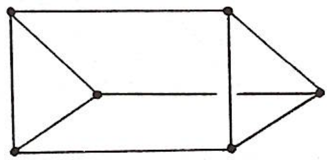


Les endroits où les ingénieurs sont amenés à construire des armatures sont innombrables (ponts, pylônes, toits, ...). Ceci explique l'intérêt porté depuis plus d'un siècle par les mathématiciens aux problèmes de rigidité.

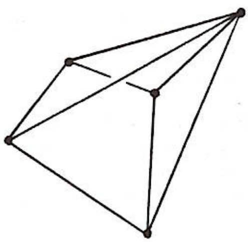
Un constructeur dangereux sommeille-t-il en vous ? Construiriez-vous des bâtiments qui plient ? Testez vos capacités en déterminant si les armatures suivantes sont rigides ou flexibles (réponses à la fin de l'article):



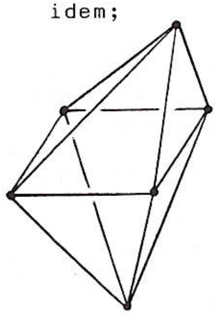
dans le plan, puis dans l'espace;



idem;



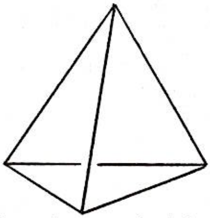
dans l'espace;



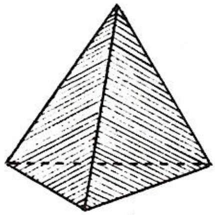
dans l'espace.

Toutes les figures construites jusqu'à présent peuvent se voir comme les armatures (arêtes et sommets) de polyèdres que nous allons obtenir en découpant les faces dans un carton bien rigide.

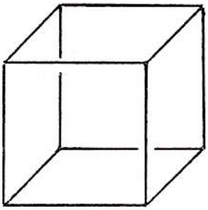
A vos ciseaux!



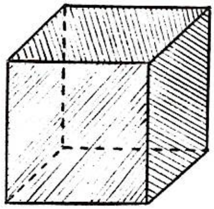
Armature rigide



Tétraèdre (rigide)



Armature flexible



Cube (rigide...)

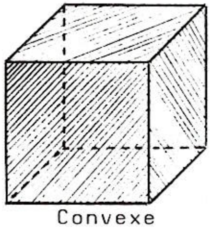
Sur une armature rigide, on construit évidemment un polyèdre rigide.

Est-il possible de construire un polyèdre flexible (sur une armature flexible) ?

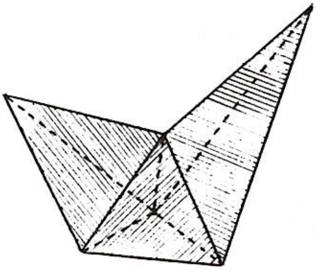
Longtemps, des mathématiciens se sont penchés sur cette question sans parvenir à trancher. De fortes présomptions les poussaient à répondre non. Ils ont ainsi été amenés à énoncer la conjecture: "Tous les polyèdres sont rigides." . (Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, mais que personne n'est encore parvenu à démontrer ou à infirmer.)

En 1813, Cauchy a publié une partie de la démonstration. Il a prouvé que: "Tous les polyèdres convexes sont rigides."

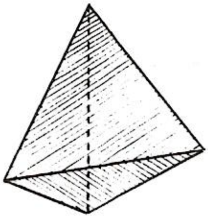
Un polyèdre est convexe lorsque tout segment joignant deux points intérieurs est entièrement inclus au polyèdre (c'est-à-dire qu'un observateur placé en n'importe quel point du polyèdre en "voit" tout l'intérieur).



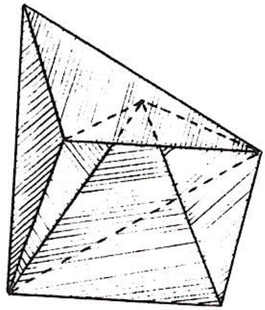
Convexe



Non convexe



Convexe



Non convexe

Les nombreuses recherches effectuées sur les polyèdres non convexes n'ont cessé, jusqu'il y a dix ans, de conforter les mathématiciens dans l'idée que la conjecture est vraie.

En juin 1977, c'est le coup de théâtre: un mathématicien américain Robert Connelly construit un polyèdre flexible... absolument monstrueux! (Math-Jeunes vous fait grâce de sa description!) Ce modèle est très vite simplifié par Pierre Deligne (éminent mathématicien belge) et Nicolaas Kuiper.

Nous vous proposons de construire un polyèdre flexible (modèle de Klaus Steffen) à 9 sommets, 21 arêtes et 14 faces. Peut-être est-il possible de faire plus simple (c'est-à-dire moins que 9 sommets) ?

Utilisez un carton bien rigide et collez soigneusement pour bien discerner les mouvements dûs à la flexibilité du modèle ... des défauts de construction!

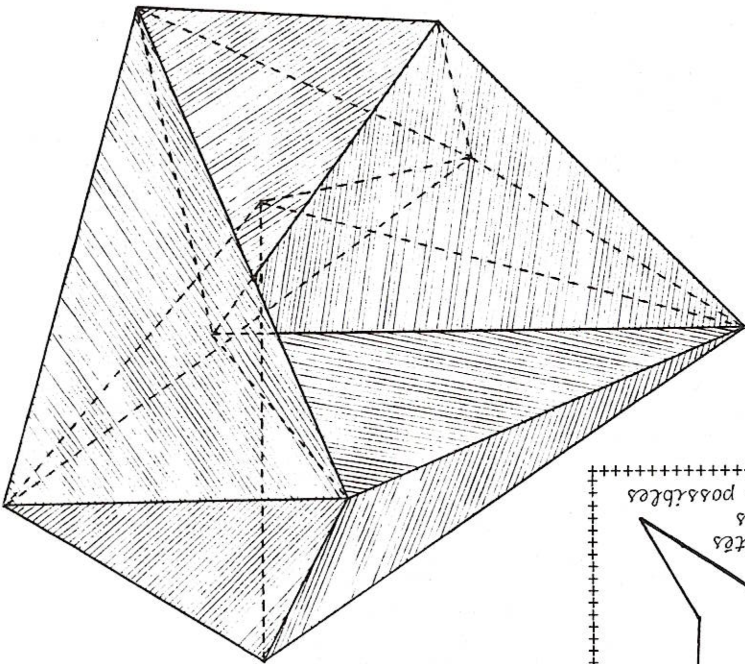
Pour mieux distinguer les mouvements, il est vivement recommandé d'agrandir le patron.

Le volume délimité par un tel polyèdre reste constant quand on fait bouger celui-ci. (Ce n'est pas du tout évident!)

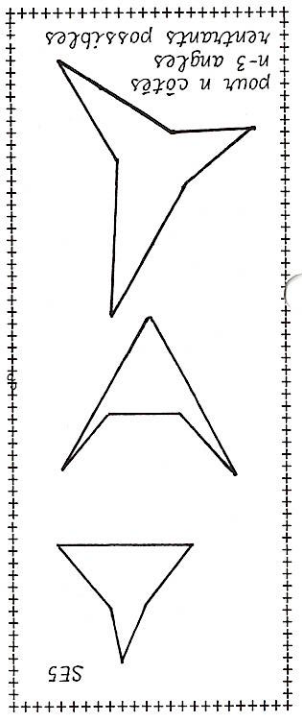
Actuellement, on conjecture que le volume délimité par tout polyèdre flexible reste constant au cours de ses mouvements. Personne ne l'a encore démontré ou n'en a donné de contre-exemple. Célébrité assurée à celui qui tranchera...

Il est évident que l'armature d'un polyèdre flexible est toujours flexible. On a pu montrer que celle d'un polyèdre convexe (et donc rigide) sera flexible sauf si toutes les faces du polyèdre sont des triangles, auquel cas l'armature est rigide.

Polyèdre flexible de Klaus Steffen.



Bon amusement pour la construction!



Réponses aux questions du test:

Figure 1: rigide dans le plan,
flexible dans l'espace.

Figure 2: flexible dans le plan,
flexible dans l'espace.

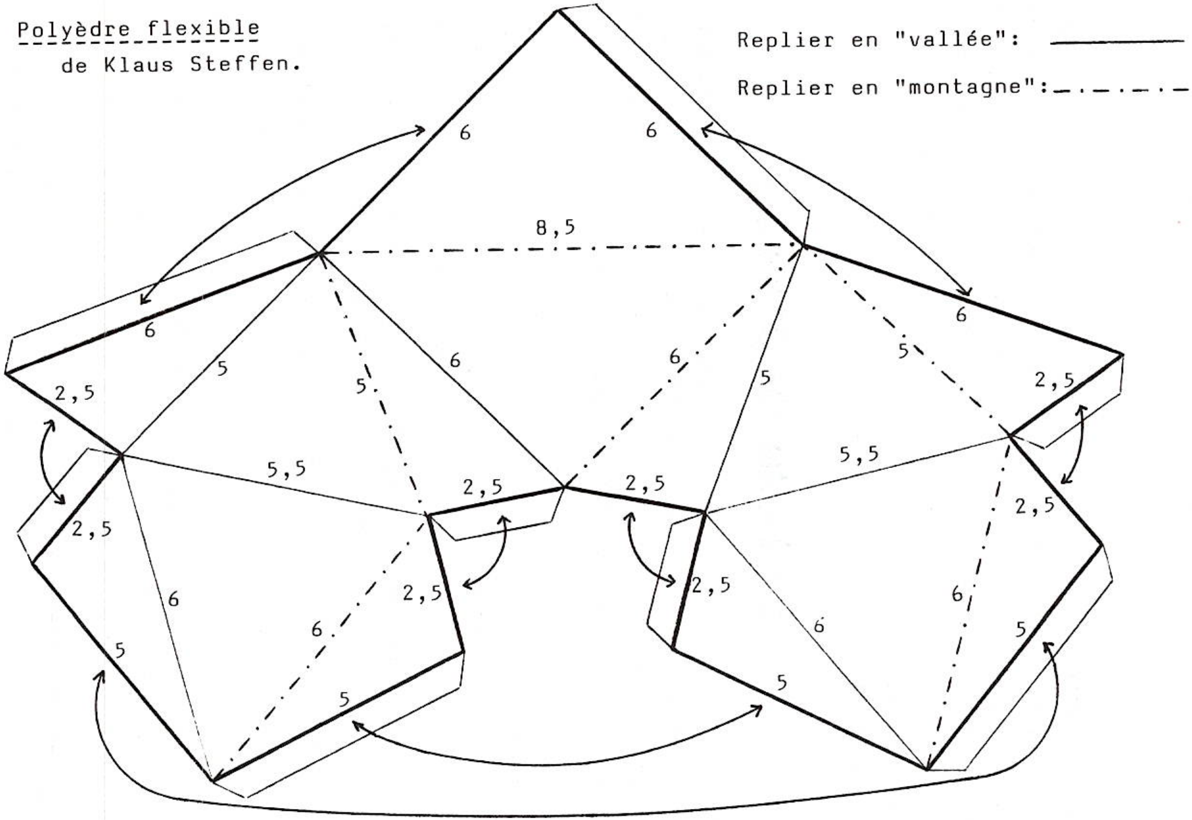
Figure 3: flexible.

Figure 4: rigide.

Polyèdre flexible
de Klaus Steffen.

Replier en "vallée": ———

Replier en "montagne": — · — · — · —



A propos d'ORIGAMI

Beaucoup d'entre vous savent probablement que les Japonais pratiquent depuis des siècles un jeu et un art du papier plié : les origami. Ils sont capables d'obtenir bien mieux que la cocote chère aux bureaucrates des dessins humoristiques et que les petits avions de Quick et Flupke. Par pliages savants un petit carré de papier se métamorphose en grenouille, en grue articulée, en jonque chinoise...
Plus modestement, nous vous proposons :

La boîte du patissier

Il est possible d'obtenir à partir d'une simple feuille de papier, par un pliage relativement simple, une boîte assez solide pour transporter des petits fours. Voici comment faire : Prenez une feuille de papier ordinaire (format A4 en quarto, peu importe) et suivez les instructions ci-après.

1° Divisez très exactement votre feuille de papier en six et formez un cinq plis comme indiqué sur la figure. A ce propos, comment diviser très exactement un segment en six parties égales ?... Thalès, vous connaissez ? Rassurez-vous, la précision obtenue par une mesure soigneuse et une division suffit largement.

2° Pliez suivant AB (fig 1). Pliez le coin a comme indiqué (figure 2). Plier le coin b comme le coin a. Faites de même en B.

3° Rabattez les coins pliés en a et en b l'un sur l'autre comme indiqué (figure 3).

4° Faites les mêmes opérations qu'en 2° et 3° sur l'autre côté de manière à obtenir la figure 4.

5° Soulevez les deux côtés le long du pointillé central de la figure 4 et ouvrez la boîte. Marquez d'un pli les arêtes verticales et les deux courtes arêtes horizontales. La boîte est prête. La voici en figure 5.

<u>Légende</u> :

————————————	bords réels de la feuille	
------------------------	pli en creux	par rapport au "plieur",
—·—·—·—·—·—·—·—	pli en relief	à chaque étape
....	bords apparents de la feuille, en fait constitué par un pli.	

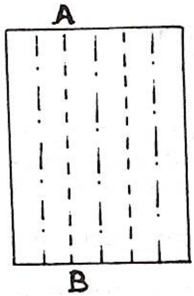


figure 1

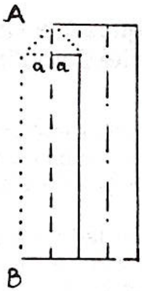


figure 2

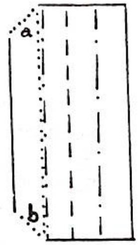


figure 3

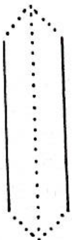


figure 4

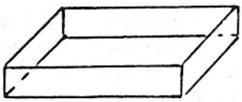


figure 5

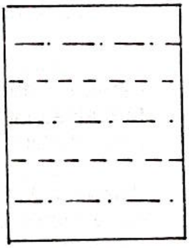


figure 6

Variante :

Il y a, bien entendu, moyen de faire une autre boîte avec une feuille de papier identique à la vôtre en plaçant les six plis de départ dans la direction perpendiculaire à la première (figure 6). Cette nouvelle boîte, construite suivant la même méthode, n'a pas les dimensions de la première.

Problème * 157

Enfin le voici !

En supposant que votre feuille de papier mesure a cm sur b cm et en supposant $a > b$, quelle sera la boîte qui aura la plus grande capacité ?

Envoyez-nous vos solutions. Le problème intervient pour le rallye.

M. BOULVIN

Les Mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Louvain.

Dans le numéro de l'été 87, nos excellents collègues G. Noël et P. Dufour vous ont brossé un rapide tableau des carrières envisageables pour un licencié en sciences mathématiques et des possibilités de se préparer à ces carrières à l'Université de Mons.

Dans toutes les universités on fait ce genre d'analyse, pour arriver à des conclusions très proches mais marquées par les spécificités locales.

Voici comment nous envisageons les choses à l'Université Catholique de Louvain.

Les carrières futures.

Jusqu'il y a peu on pouvait à dix, quinze ou dix-huit ans se choisir une carrière: médecin, pompier, professeur ou marchand de crème glacée. Les formalités initiatiques une fois accomplies (réussir des études par exemple) on pouvait alors prévoir le déroulement de sa carrière jusqu'à l'âge de la pension.

Il n'en va plus de même aujourd'hui. Les carrières les plus passionnantes de demain n'existent pas encore aujourd'hui, et encore moins un curriculum d'études qui y mène. Le premier gouverneur de la station terrienne sur Mars sera-t-il un astrophysicien, un docteur en droit, un spécialiste de la gestion ? Pourquoi pas un mathématicien ?

Ce phénomène, comme souvent, a ses bons et ses mauvais côtés. La mauvaise nouvelle c'est qu'un diplôme, quel qu'il soit, ne donne plus automatiquement accès à une profession dans la spécialité. La bonne nouvelle c'est qu'il ne ferme plus l'accès à d'autres professions.

Un bon diplôme c'est avant tout la preuve que l'on peut réussir ce que l'on entreprend, que l'on a déja une première bonne formation et que l'on sera capable de continuer à se former.

De ce point de vue, le diplôme de mathématicien n'est certainement pas plus mauvais qu'un autre. Les mathématiques, on en retrouve partout et de plus en plus. La rigueur du mathématicien, son imagination (énoncer et démontrer un théorème c'est d'abord résoudre un problème), son exigence de précision sont des qualités appréciées dans de nombreux domaines.

Il n'y a pas de voie privilégiée vers les carrières de demain. La meilleure voie est celle ou vous serez le meilleur, celle qui vous permettra le mieux de faire valoir vos qualités. La vraie formation professionnelle vient ensuite; et le plus souvent elle n'est pas liée à un diplôme.

Des carrières nouvelles.

Ce sont des carrières qu'hier on appelait de demain; l'informatique par exemple. Pour ces carrières l'université à déja réagi et propose une formation plus spécifique.

A l'Université de Louvain, un licencié en sciences mathématiques peut obtenir une licence en informatique très complète en deux années complémentaires. Les plus forts peuvent même opter, dès la seconde candidature en mathématiques, pour l'orientation algorithmique et programmation. Cette licence (quatre ans comme la licence normale) forme de vrais mathématiciens (ils ont le même diplôme que les autres) tout en leur permettant, par un choix d'options, d'acquérir une première spécialisation en informatique. La licence en informatique peut alors s'obtenir en une seule année complémentaire.

Mais il n'y a pas qu'en informatique que des études complémentaires sont prévues pour les mathématiciens. D'autres spécialisations leur sont tout aussi bien adaptées.

En sciences actuarielles (les mathématiques de l'assurance) et en statistiques, divers diplômes existent à l'Université de Louvain, accessibles après les candidatures en mathématiques ou mieux après la licence.

Les études de mathématiques sont une des voies privilégiées vers ces branches et les nombreuses professions qui leur sont liées dans l'industrie, les banques ou les compagnies d'assurances.

Moins spécifiquement, mais de manière tout aussi concrète, existent des diplômes complémentaires en économie et en gestion. Là aussi les mathématiciens sont appréciés.

Les carrières de toujours.

Entendez par là l'enseignement et la recherche auxquels vous avez peut-être d'abord songé comme débouché normal pour un licencié en mathématiques; et vous avez sans doute songé aussi à la mauvaise réputation de l'emploi dans ces carrières.

N'en faites cependant pas les carrières d'hier. Elles sont toujours d'actualité aujourd'hui ! Elles le seront encore demain ! Tant qu'il y aura des écoles, même dans la station terrienne de Mars, on enseignera les mathématiques. Et il faudra encore des profs de math capables de s'adapter à l'enseignement de matières nouvelles à des générations nouvelles.

L'enseignement des mathématiques, sa méthodologie, est sans doute un des plus vieux problèmes qui se pose aux mathématiciens. Le département de Mathématique de l'Université de Louvain y consacre une énergie importante, dans la recherche et dans la formation des étudiants. Chaque année des mémoires (travaux de fin d'études) y sont consacrés. Des doctorats (de vrais doctorats en mathématiques) sont rédigés à Louvain-la-Neuve sur ce sujet.

La recherche en mathématiques, pures ou appliquées, n'a jamais été aussi florissante. Les mathématiciens participent de près à l'explosion scientifique de ces dernières décennies. Souvent même, et parfois sans le savoir, ils l'ont précédée. Des mathématiciens, par exemple, ont fait de l'informatique théorique bien avant la construction du premier ordinateur.

Que l'accent soit mis sur la recherche appliquée ou sur la recherche fondamentale (on y revient !), on aura besoin aussi des mathématiciens.

Si vous vous sentez une vocation de mathématicien, n'hésitez pas. Il y a encore beaucoup de travail !

Paul HENRARD

Le secrétariat du Département de Mathématique peut vous fournir des renseignements complémentaires.

✍ : Chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve; ☎ : 010/47 31 52.

SOMMAIRE

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2, 1160 Bruxelles
tél 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

M. Boulvin, J.P. Houben, N. Rouche

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme.

Prix des abonnements :

Belgique :	*groupés (5 au moins)*	*80 FB*
	isolés	*120 FB*
Etranger :	*y compris Pays-Bas et Luxembourg*	
	par paquet de 5 abonnements	*800 FB*
	isolé	*240 FB*

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Anciens numéros : sont encore disponibles
Années 81-82, 82-83, 83-84, 84-85, 85-86(sauf le n°29),86-87
Belgique : 81-82 à 85-86 : 50 FB l'année ; 86-87 : 80 FB
Etranger : 81-82 à 85-86 : 100FB l'année ; 86-87 : 160 FB

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte N° 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 - Casteau
Pour l'étranger : Cpte N° 000-0728014-29
SBPMEF, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 Casteau , à partir d'un compte postal
ou par mandat postal international.
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement.
Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.