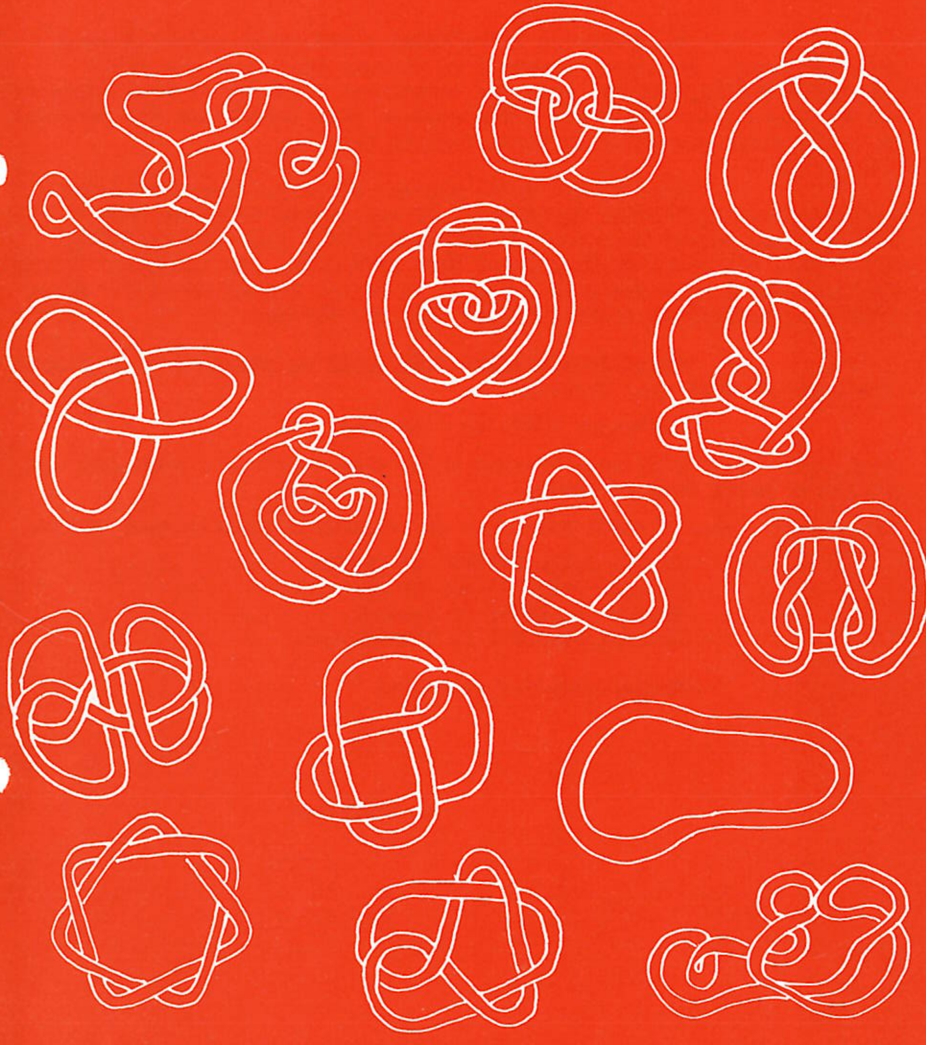
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française — Association Sans But Lucratif

MATH-JEUNES



Journal Trimestriel

10ème année | Numéro 39 | Printemps 1988

Chers amis,

Ce numéro de MATH-JEUNES a été principalement conçu par des jeunes. Philippe, Emmanuel et Olivier sont tous les trois étudiants à l'Université. Nous les remercions vivement et nous espérons qu'ils ouvrent la voie à une collaboration plus importante des lecteurs de notre petit journal à la confection de celui-ci.

Nous sommes moins heureux en ce qui concerne votre participation au "Rallye Problèmes". Il est encore temps de vous y mettre. Vous pouvez nous envoyer des solutions à tous les problèmes posés dans les trois numéros parus mais attention, ces solutions doivent impérativement nous parvenir avant le 20 avril. Faites un effort sinon certains prix prévus devront rester dans nos armoires !

Voici le classement tel qu'il se présente à ce jour : largement en tête nous trouvons

Catherine ABSIL de Gerpinnes

Nous espérons qu'elle nous enverra cette fois encore des solutions aux problèmes posés dans ce numéro.

La suivent , dans l'ordre mais avec des résultats relativement proches

Pierre Marie RENARD de Wépion
Laurent CHRISTIAENS de Bruxelles
Vincent LEPOUTRE de Tournai
Olivier DEBAUCHE de Chatelineau

Bonnes vacances de Pâques

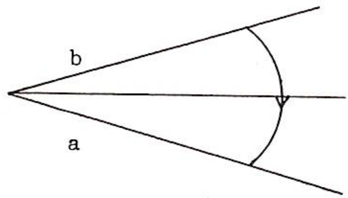
La rédaction

Plions un peu...

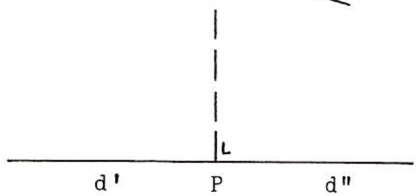
Le pliage est généralement considéré comme une activité puérile, et pourtant...plier peut non seulement aider à introduire les symétries axiales mais encore, permet d'effectuer bon nombre de constructions géométriques que l'on réalise habituellement à l'aide de la règle et du compas.
Attention, pas toutes! En effet, on ne peut pas construire un cercle à l'aide de pliages, par exemple !
Pour réaliser les constructions qui suivent cette introduction, vous devez vous munir de papier assez mince, d'un peu de précision et surtout...de patience.
Bon amusement!

1. Des constructions simples:

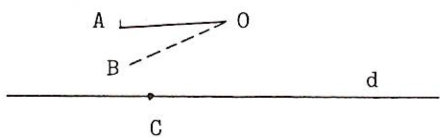
-La bissectrice d'un angle défini par les demi-droites a et b est obtenue en rabattant b sur a. Le pli obtenu est la bissectrice cherchée.



-La perpendiculaire à une droite d en un point P lui appartenant est obtenue en faisant coïncider les demi-droites d' et d" d'origine P. Le pli obtenu est la perpendiculaire cherchée.



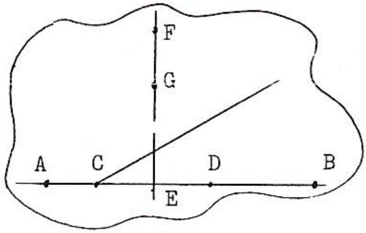
-Pour déterminer les points d'intersection d'une droite d et d'un cercle donné par son centre et un de ses points, il suffit de plier la feuille autour d'une droite OB de telle sorte que A vienne tomber sur d en un point C qui est un des deux points recherchés. L'autre s'obtient alors aisément par symétrie.



2. Constructions de polygones réguliers:

-Construction d'un triangle équilatéral au moyen d'une feuille de papier de forme quelconque:

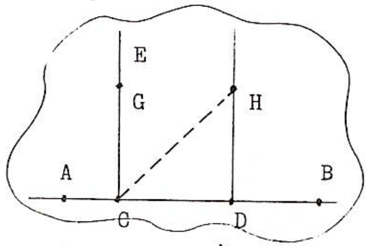
On coupe la feuille suivant un pli quelconque AB, et l'on choisit sur cette droite AB un segment CD dont la longueur sera le côté du triangle.



En rabattant C sur D, on obtient la médiatrice EF de [CD]. Ensuite, on rabat D sur EF en utilisant une droite passant par C comme charnière. On obtient ainsi un point G sur EF. Le triangle CDG est équilatéral.

-Construction d'un carré à partir d'une feuille de papier de forme quelconque:

On coupe la feuille suivant un pli quelconque AB, et l'on choisit sur cette droite AB un segment CD dont la longueur sera le côté du carré.

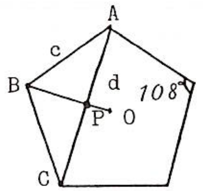


On élève les perpendiculaires à AB par C et D au moyen de la méthode vue précédemment. Appelons ces perpendiculaires CE et DF. Pour plus de facilité, on peut couper la feuille suivant CE et DF.
On rabat CD sur CE. Au point D de AB correspond ainsi un certain point G de EC.
Le point H, intersection du pli utilisé et de la droite DF constitue le quatrième sommet du carré CDGH recherché.

-Construction d'un pentagone régulier:

Pour cette construction, il est préférable de partir d'une feuille carrée ABCD que l'on construit à l'aide de la méthode utilisée ci-dessus.
Pour des constructions préliminaires, on utilisera également une moitié de feuille carrée de même base, c'est-à-dire une feuille rectangulaire de longueur AD et de largeur AD/2.

LE PENTAGONE ET SES ANGLES



La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe vaut:

$(n-2).\pi$ où n désigne le nombre de côtés du polygone.

Pour le pentagone, on obtient donc: $(5-2).\pi = 540°$.

Chaque angle intérieur d'un pentagone régulier convexe vaut donc 108°.

Intéressons-nous à présent aux diagonales du pentagone régulier convexe:

Considérons le triangle ABC.
Il est isocèle car AB et BC sont des côtés du pentagone.
Nous savons que l'angle $A\hat{B}C$ vaut 108°.
Par conséquent, chacun des angles $B\hat{C}A$ et $B\hat{A}C$ vaut 36°.
Traçons le rayon aboutissant au sommet B.
Soit P son intersection avec la diagonale AC.
P est le milieu de [AC] et les droites BP et AC sont perpendiculaires.
Par conséquent, le triangle ABP est rectangle et on a:

$\frac{d}{2} = c.\cos 36°$ ou encore $\frac{d}{c} = 2 \cos 36°$

Mais que vaut cos 36° ?

Quittons un instant la géométrie et plongeons-nous dans la manipulation de formules trigonométriques:

Nous allons calculer sin 18°.

Pour ce faire, posons $18° = \theta$.

$5\theta = 90°$

$\cos 3\theta = \cos (5\theta - 2\theta) = \cos (90°-2\theta) = \sin 2\theta \quad (1)$

mais on a aussi,

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos (2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (1 - 2 \sin^2\theta) \cos \theta - 2 \sin^2\theta \cos \theta \\ &= (1 - 4 \sin^2\theta) \cos \theta \qquad (2)\end{aligned}$$

De (1) & (2), on déduit: $1 - 4 \sin^2\theta = 2 \sin \theta$ car $\theta>0$

Nous avons donc obtenu une équation du second degré dont la résolution donne:

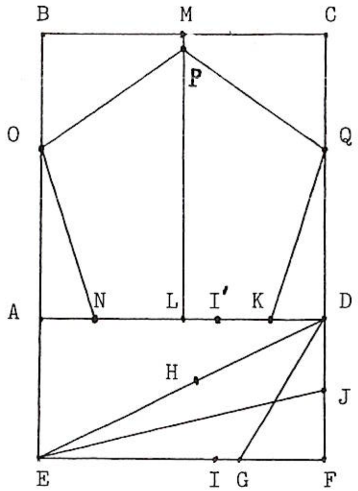
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Par conséquent, $\frac{d}{c} = 2 \cos 36° = 1 - 2 \sin^2 18° = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

On considère que le côté AD de la feuille est égal à la diagonale du pentagone.

$$\frac{\text{longueur côté}}{\text{longueur diagonale}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

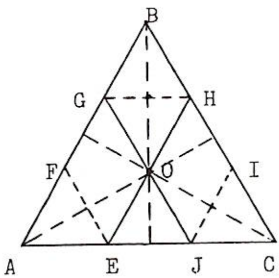
(voir rappel de la page précédente)



Nous allons obtenir la longueur du côté à l'aide de constructions auxiliaires réalisées dans le rectangle ADEF.
($|AE|=|AD|/2$)
On forme un pli diagonal DE; on rabat DF sur DE.
On obtient ainsi le point H image de F et le pli DG ($G \in EF$).
On rabat EF sur ED selon le pli EJ ($J \in DF$), le point I de EF étant obtenu par coïncidence avec H.
La longueur EI est donc la longueur du côté du pentagone cherché.
On reporte alors I en I' sur AD en élevant la perpendiculaire II' à EF.
Dès lors, on ne considère plus que le carré ABCD.
On construit la médiane LM du carré.
On prend le milieu K de I'D et on reporte KD en AN: NK est le côté du pentagone dont LM est un axe de symétrie.
Il suffit alors de faire pivoter NK autour de N de telle sorte que K tombe sur AB en O et de faire pivoter ON autour de O pour faire tomber N sur LM en P.
Q est obtenu d'une manière analogue à O.
MQKNO est le pentagone demandé.

-Construction d'un hexagone régulier à partir d'un triangle équilatéral:

On commence par construire un triangle équilatéral comme on l'a vu précédemment.



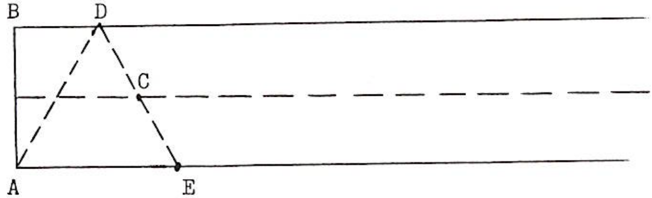
On obtient le point O comme intersection de deux axes de symétrie du triangle. On effectue alors les plis EF, GH et IJ en rabattant respectivement A, B et C sur O.
EFGHIJ est un hexagone.

3. <u>Pliage à l'aide de bandes de papier à bords parallèles</u>:

-Triangle équilatéral:

Supposons la bande de papier coupée à l'une de ses extrémités suivant une perpendiculaire AB aux bords.

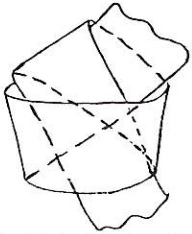
On forme le pli correspondant à l'axe de symétrie longitudinal de la bande.
On fait alors pivoter AB autour de A de telle sorte que le point B tombe sur l'axe en un point C.
Le pli effectué pour cela étant AD. Si l'on prolonge le pli DC jusqu'en E, on obtient le triangle ADE qui est équilatéral.

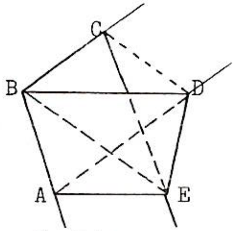


Remarquons qu'avec cette construction, on obtient en fait deux triangles équilatéraux:
ABC avec la largeur de la bande de papier comme côté;
ADE avec la largeur de la bande de papier comme hauteur.

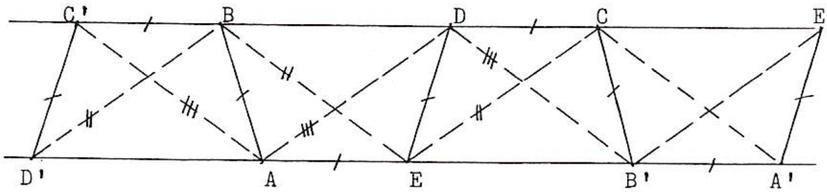
-Pentagone régulier:

A l'aide d'une bande de papier à bords parallèles, on fait un noeud simple que l'on serre sans froisser le papier.
On coupe alors la bande en CD et AE et l'on obtient ainsi le pentagone ABCDE qui est régulier.





Montrons que ce pentagone est bien régulier.
Si l'on déplie la bande, on obtient les quatre trapèzes suivants:



Suite aux coïncidences et à l'uniformité de la bande, on peut dire que

$D'\hat{C}'B = D\hat{C}B' \Longrightarrow C'D' = CB'$

$C'\hat{B}A = C\hat{B}'A' \Longrightarrow BA = CB'$

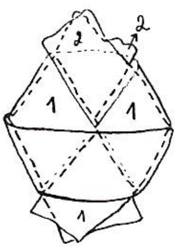
$B\hat{A}E = B'\hat{A}'E' \Longrightarrow BA = A'E'$

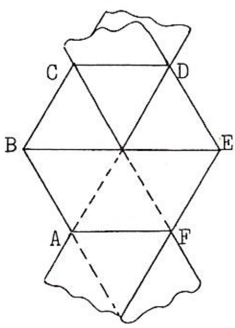
On déduit donc que $C'D' = C'B = BA = AE = DC = CB' = B'A' = A'E'$

On voit donc que le pentagone ABCDE est bien régulier.

-Hexagone régulier:

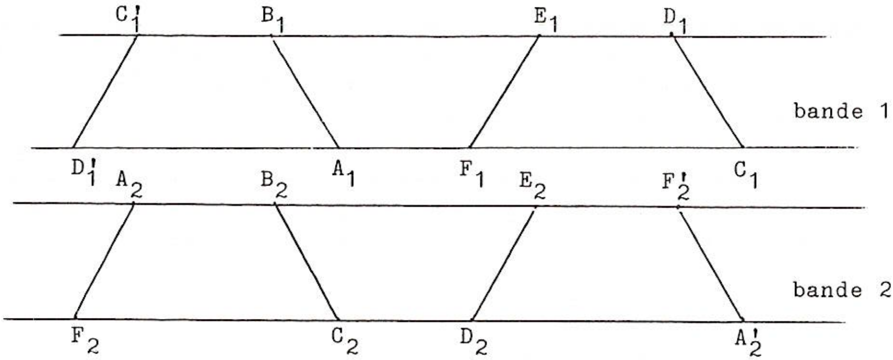
La construction se fait à l'aide de deux bandes de papier de même largeur.
On fait un noeud plat que l'on serre sans froisser le papier.





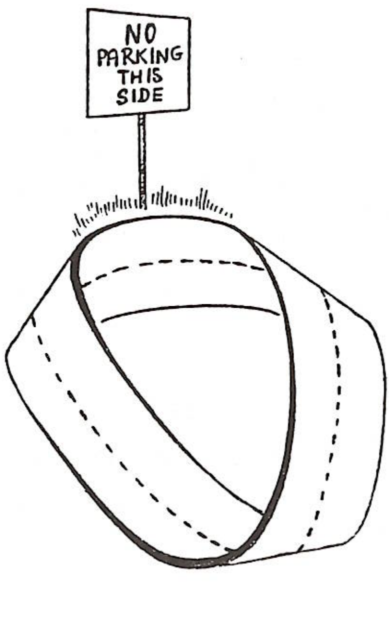
Si l'on coupe les bandes suivant CD et AF, on obtient un hexagone régulier ABCDEF.

Pour montrer qu'il est régulier, déplions les deux bandes.



D'une manière analogue à celle utilisée précédemment dans le cas du pentagone, on démontre que l'hexagone ABCDEF est bien régulier.

Philippe Alphonse



Principe des tiroirs

Principe des tiroirs:

> *Si p.q+1 perles sont disposées dans p tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient plus de q perles.*

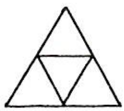
En effet, si tous les tiroirs contenaient au plus q perles, les p tiroirs contiendraient au plus p.q perles.

Quelques applications:

Remarquez que dans les problèmes suivants, on demande chaque fois de démontrer qu'un certain nombre d'éléments (au moins) d'un ensemble donné répondent à une condition donnée.

1) *Une cible a la forme d'un triangle équilatéral de côté 2. On tire 5 balles. Montrez qu'il y a au moins 2 impacts dont la distance est inférieure ou égale à 1.*

Divisons la cible en 4 triangles équilatéraux de côté 1.



Comme il y a 5 impacts répartis dans les 4 triangles (on suppose que le tireur n'a pas manqué la cible!), par le principe des tiroirs, on déduit qu'il y a au moins 2 impacts dans le même triangle.
La distance entre ces 2 impacts ne peut donc être supérieure à 1.

- *Que peut-on dire des distances entre les impacts si l'on tire 17 balles ?*
- *Et avec 4^n+1 balles ?*

2) *On considère 12 nombres distincts de 2 chiffres. Montrez que l'on peut toujours en choisir 2 tels que leur différence soit un nombre de 2 chiffres identiques.*

Soient q_i et r_i les quotients et restes obtenus en divisant les 12 nombres n_i par 11.

UN PEU D'HISTOIRE

Peter - Gustav Lejeune DIRICHLET (13/02/1805 - 5/05/1859)

né d'une famille française installée à Düren.

De 1822 à 1827, il vit à Paris, où il devient l'ami de J.B.Fourier.

En 1827, il devient maître de conférences à l'Université de Breslau, puis, en 1829 à l'Université de Berlin, où il sera professeur dès 1839.

En 1855, il est appelé à succéder à Gauss à l'Université de Göttingen.

Ses oeuvres essentielles portent sur la théorie des nombres, l'analyse et la théorie du potentiel.

Par exemple, il démontre, à partir de ce que nous appelons aujourd'hui les "séries de Dirichlet", que toute progression arithmétique ak+b avec a et b entiers fixés premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers.
Les séries de Dirichlet sont du type

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n^s}$ où les X(n) sont des caractères modulaires.

Son célèbre principe des tiroirs, il l'utilisera pour clarifier la structure du groupe des unités de certains corps de nombres algébriques.

En théorie du potentiel, il étudiera les fonctions harmoniques dans un domaine ouvert donné, la distribution des valeurs étant imposée sur la frontière de ce domaine.

Il étudiera avec finesse la convergence des séries trigonométriques.

Dirichlet professait une grande admiration pour Gauss dont il emportait toujours en voyage les "Disquisitiones Arithmeticae", disait-il...

On a alors: $n_1 = 11.q_1 + r_1$

$$n_2 = 11.q_2 + r_2$$

$$\vdots$$

$$n_{12} = 11.q_{12} + r_{12}$$

Parmi les 12 restes (compris entre 0 et 10 inclus), il en existe au moins 2 qui sont égaux. (principe des tiroirs)

Soient r_i et r_j ces 2 restes, on a:

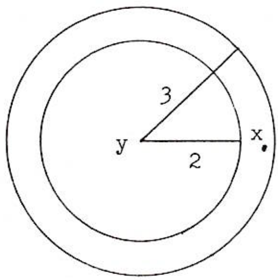
$$\begin{aligned} n_i - n_j &= (11.q_i + r_i) - (11.q_j + r_j) \quad (\text{si } n_i < n_j) \\ &= 11.(q_i - q_j) + (r_i - r_j) \end{aligned}$$

Cette différence est donc un multiple de 11 et est donc composée de deux chiffres semblables.

3) Abordons maintenant un problème plus difficile.

On considère un cercle C de 16 cm de rayon à l'intérieur duquel se trouvent 500 points distincts.
Démontrer qu'il est toujours possible de placer une couronne de 2 et 3 cm de rayons de telle manière que celle-ci recouvre au moins 10 points.

Si un point x est recouvert par une couronne centrée en y, alors $2 < \|xy\| < 3$ (cm).



Or, si $2 < \|xy\| < 3$, le point y est recouvert par la couronne centrée en x.
Donc, pour démontrer qu'une couronne recouvre 10 points, il suffit de démontrer qu'il existe un point quelconque (pas forcément un des 500) recouvert par 10 couronnes dont les centres sont 10 des 500 points.

Or, la surface du cercle est 256π et celle d'une couronne est de $\pi(R^2-r^2) = 5\pi$.

Comme $500.5\pi > 9.256\pi$ c'est-à-dire $2500\pi > 2304\pi$, chaque région du cercle sera recouverte par au moins 9 couronnes et il existera toujours au moins un point p recouvert par au moins 10 couronnes.

Si on centre une couronne en p, elle recouvrira les centres de ces 10 couronnes, qui sont bien 10 des 500 points.

- *Quel est le nombre minimum de points pour lequel cette démonstration reste valable ?*
- *Et si on remplaçait la couronne par une autre figure de même surface ?*

Olivier Ducarme

MATH-JEUX

Pierre propose à Paul de jouer au jeu suivant:

"D'un tas de 24 billes, placé devant eux, ils retirent chacun à leur tour 1, 2 ou 3 billes. Le perdant sera celui qui retirera la dernière bille."

"Je commence", dit Pierre qui retire 3 billes. Il en reste 21.

Ensuite, chacun des joueurs retire successivement:

Paul	*Pierre*	*Reste*
1	3	17
2	2	13
3	1	9
1	3	5
2	2	1

...et Paul doit prendre la dernière bille et perd la partie!

On remarque aisément que lorsque Paul retire 1, 2 ou 3 billes, Pierre en retire respectivement 3, 2 ou 1 afin de laisser un multiple de 4 plus 1 billes (en effet, les restes sont respectivement $21=4.5+1$, $17=4.4+1$, $13=3.4+1$, $9=2.4+1$, $5=4.1+1$, $1=4.0+1$) pour finalement en laisser une que Paul sera obligé de prendre.

On appelle une telle façon de jouer une "*stratégie gagnante*". Il en existe une pour tous les jeux satisfaisant aux quatre conditions suivantes:

1) Il y a deux adversaires qui jouent à tour de rôle;

2) Il y a toujours un seul gagnant;

3) Les joueurs connaissent complètement l'état du jeu;

4) Le jeu ne fait pas intervenir le hasard.

Sur un échiquier, on place une Reine à la case F8.
Deux joueurs la déplacent chacun à leur tour selon les règles suivantes:

1) Tout déplacement doit se faire:
- *soit vers le bas;*
- *soit vers la gauche;*
- *soit en diagonale vers le bas et à gauche.*

2) Le gagnant est celui qui place la Reine en A1.

Nous savons qu'il existe une stratégie gagnante et nous allons la rechercher.
Pour ce genre de recherche, il est généralement plus facile de commencer par la fin.
Examinons donc la situation en fin de partie.

Le joueur qui place la Reine en A1 a gagné; plaçons donc un G comme *"gagnant"* dans la case A1.

Il est évident que le joueur qui aura le malheur de mettre la Reine en A2 va perdre la partie car son adversaire pourra alors mettre la Reine en A1.
Plaçons donc un P comme *"perdant"* en A2 ainsi que sur toutes les cases qui conduisent directement en A1.

8	P							P
7	P						P	
6	P					P		
5	P				P			
4	P			P				
3	P	G	P					
2	P	P						
1	G	P	P	P	P	P	P	P
	A	B	C	D	E	F	G	H

La case B3 conduit seulement sur des cases où figurent un P et est donc une case gagnante que l'on note G.

8	P	P	P	P	G	P	P	P
7	P	P	P	P	P	P	P	P
6	P	P	P	G	P	P	P	P
5	P	P	P	P	P	P	P	G
4	P	P	P	P	P	G	P	P
3	P	G	P	P	P	P	P	P
2	P	P	G	P	P	P	P	P
1	G	P	P	P	P	P	P	P
	A	B	C	D	E	F	G	H

Nous pouvons noter toutes les cases en appliquant les règles suivantes:

a) On note P toute case qui conduit à une case notée G;

B) On note G toute case qui conduit <u>seulement</u> à des cases notées P.

La figure ci-contre nous donne la disposition des P et des G.

<u>"La stratégie gagnante consiste à placer la Reine sur les cases notées G."</u>

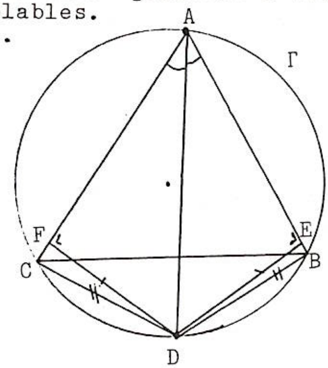
On peut appliquer cette méthode à beaucoup de jeux pour peu qu'ils répondent aux conditions précisées plus haut.
Vous pouvez donc vous exercer à chercher des stratégies gagnantes pour d'autres jeux, il vous suffit d'un peu de patience.

Philippe Alphonse

Dupont donne 50 francs à la réception d'un hôtel pour payer la nuit. L'employé découvre par la suite que Dupont n'aurait dû payer que 45 francs et il envoie le garçon lui rendre 5 pièces de 1 franc. Le garçon, malhonnête, n'en donne que trois à Dupont et garde les deux autres. Dupont a donc payé 47 francs. Le garçon a gagné deux francs. Ceci fait donc 49 francs. Où est passé le franc manquant ?

Drôle de démonstration!

On dit souvent que la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses.
Cependant, méfions-nous des figures, car de fausses constructions peuvent induire en erreur et mener à des résultats visiblement erronés mais également à des résultats faux et pourtant vraisemblables.
En voici une illustration.



Soit le triangle ABC, Γ son cercle circonscrit et D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ avec Γ.

Soient E et F respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur AB et AC.

D étant un point de la bissectrice, on a: AE = AF.

Par conséquent, les triangles ADF et ADE ont:

- un angle égal à savoir $\widehat{CAD} = \widehat{DAB}$;
- le côté AD en commun;
- les côtés AE et AF de même longueur.

Ils sont donc égaux et FD = DE.

Les segments [CD] et [DB] sous-tendent des arcs de Γ vus sous un angle $\hat{A}/2$ de A, ils ont donc même longueur.

Les triangles FDC et BDE sont égaux:

En effet: - CD = DB;

- FD = DE;
- $\widehat{CFD} = \widehat{BED} = 90°$.

Donc, CF = BE.
Or, AC = AF + FC = AE + EB = AB (car AF = AE et FC = EB)

Par conséquent, le triangle ABC est <u>ISOCELE</u> !

Or nous étions parti d'un triangle quelconque !

La démonstration est donc fausse !

Et pourtant les justifications paraissent correctes, sauf... Nous avons supposé que F et E se trouvaient à l'intérieur du cercle !
Il n'en est rien ! L'un de ces deux points se trouve bien à l'intérieur de cercle, mais l'autre est à l'extérieur !

C'est simple, mais il fallait y penser !

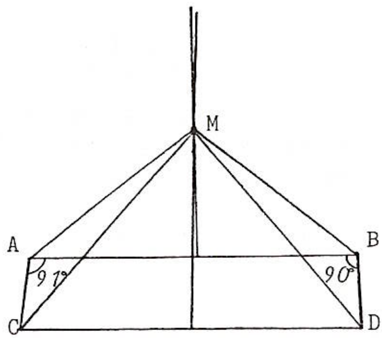
Considérons maintenant un segment [AB] et les points C et D situés tous les deux dans le même demi-plan par rapport à la droite AB et tels que:

-CA = BD;

-BAC = 91°;

-ABD = 90°.

Soit M le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [CD].



On a: - AM = BM
- CM = DM vu la définition de M.

Les triangles MAC et MBD sont égaux:

En effet: - CA = BD;
- AM = BM;
- CM = DM.

Par conséquent, les angles correspondants sont égaux, et on a:

- $M\hat{A}C = M\hat{B}D$

De plus, $M\hat{A}B = M\hat{B}A$ car M appartient à la médiatrice de [AB].

Donc, $91° = B\hat{A}C = A\hat{B}D = 90°$!

Mais où donc est l'erreur ?...

Introduction au PASCAL U.C.S.D.

INTRODUCTION:

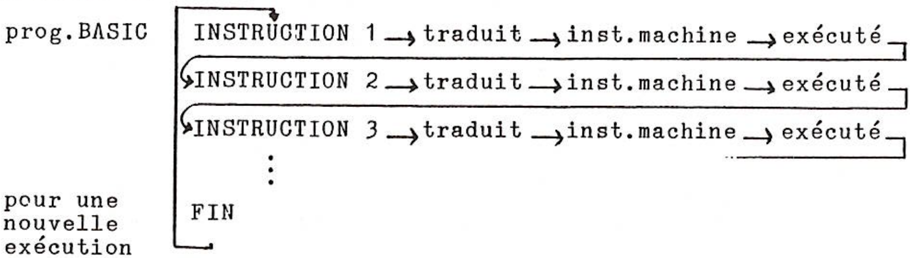
Afin de présenter le langage PASCAL, je voudrais tout d'abord le situer par rapport à d'autres langages.

L'itinéraire habituel du débutant en informatique passe inévitablement par le BASIC. Or, le BASIC est un langage INTERPRETE et non lié à un SYSTÉME D'EXPLOITATION particulier. Voilà déjà de nombreux termes incompréhensibles pour un néophite.

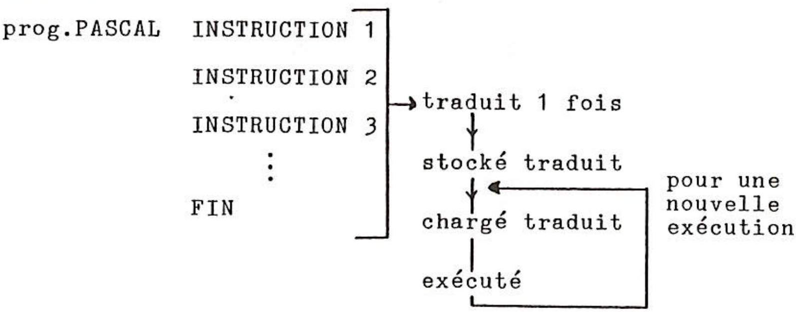
Par INTERPRETE, je veux dire que chaque fois que le programme en BASIC est utilisé, il est TRADUIT instruction par instruction, ligne par ligne, en une série d'actes élémentaires: les instructions machine.

Le PASCAL, par contre, est un langage COMPILE, c'est-à-dire, qu'une fois terminé, le programme en PASCAL est traduit par un compilateur en une série d'instructions machine et cette série constitue un programme en langage machine qui est stocké dans un fichier séparé. C'est ce programme qui sera exécuté par après et le programme en PASCAL de base peut être effacé, oublié.

INTERPRETE:



COMPILE:



QUELS SONT LES AVANTAGES DE L'UNE OU L'AUTRE TECHNIQUE ?

1) Un langage compilé n'est traduit qu'une fois et celà pour toutes les exécutions.
   On observe donc un gain de temps considérable par rapport au langage interprété qui est traduit à chaque exécution et cela durant l'exécution même.
2) Un langage compilé est stocké sous sa forme traduite or cette forme est beaucoup plus condensée et donc moins gourmande en place mémoire.
3) Un langage interprété peut être modifié et testé sans appel aux mémoires de masses. (disquettes, cassettes,...)

On comprend ici qu'un langage compilé nécessite des accès fréquents aux mémoires de masse . On en arrive ainsi à l'explication du terme SYSTEME D'EXPLOITATION.
Celui-ci se charge de la gestion des fichiers sur un support (mémoire de masse) et des échanges entre la mémoire de masse et la mémoire centrale de l'ordinateur.

Le système d'exploitation est en fait un programme en langage machine par lequel passent toutes les données qui entrent ou sortent de l'ordinateur.

Par conséquent, le langage PASCAL, vu ses accès répétés au mémoires de masse est plus dépendant du système d'exploitation que le BASIC.

C'est pourquoi les différentes formes du PASCAL ne diffèrent en fait que par leur système d'exploitation.

Le PASCAL UCSD est une des formes les plus répandues de langage PASCAL. UCSD signifie "UNIVERSITY OF CALIFORNIA SAN DIEGO", université où ce PASCAL a été mis au point.

Notre langage PASCAL, langage compilé, se détache donc du BASIC dans son fonctionnement. Le programme stocké en instructions machine acquiert la rapidité du langage machine Cependant, ce programme en langage machine n'est pas optimisé. (c'est-à-dire, n'utilise pas toujours un minimum de places mémoire).
En effet, analysons la situation suivante:

En PASCAL:	A:=A+1	A:=A+2
	(A incrémenté de 1)	(A incrémenté de 2)

En PASCAL compilé et donc traduit en langage machine, on a:

ADD A,1	ADD A,2

instructions qui occupent
2 octets de mémoire

Mais en langage machine optimisé par un programmeur:

INC A	ADD A,2
occupe un seul octet	occupe toujours 2 places

On voit que dans certains cas, le langage perd de la place en mémoire. Cet exemple est le plus simple et un des moins graves en perte de temps et de mémoire.
La vitesse demeure cependant toujours plus rapide que celle du programme correspondant rédigé en BASIC.

Le PASCAL se situe donc, autant en vitesse qu'en espace mémoire occupé entre les langages interprétés tels que le BASIC et le langage machine.

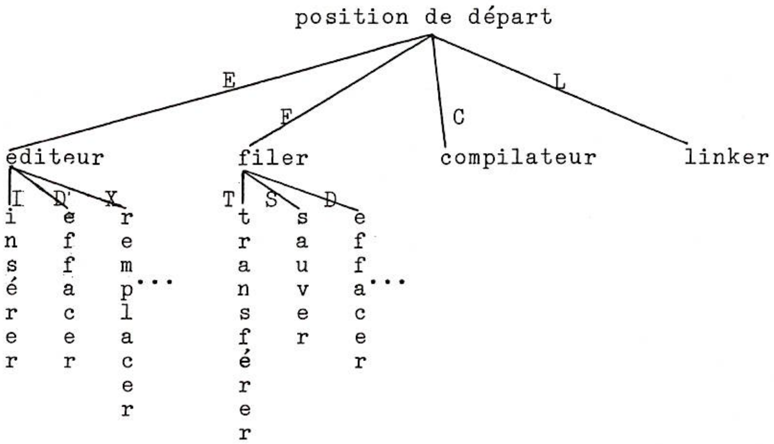
LE SYSTEME D'EXPLOITATION UCSD:

Celui-ci se distingue par le fait que l'utilisateur n'est jamais perdu. La première ligne lui présente constamment la liste des options disponibles à un moment donné.

Le système d'exploitation comprend principalement:

- l'éditeur — qui sert à écrire les programmes et à les corriger;
- le filer — qui sert à la gestion des fichiers (copie, transfert, effacement);
- le compilateur — qui traduit le programme en langage machine;
- le linker — qui permet d'intégrer des programmes précédemment écrits (et stockés dans la librairie) dans de nouveaux programmes;
- la librairie.

La structure du système d'exploitation est arborescente:



Chaque branche peut-être parcourue dans les deux sens et on peut facilement passer de la fonction "insérer" de l'éditeur au linker par exemple.

J'espère que cette courte introduction au PASCAL vous permettra de comprendre l'esprit du PASCAL, ses avantages, ses différences, et surtout... vous donnera l'envie d'apprendre à programmer en PASCAL.

Emmanuel Bàrtholomé

Le coin des problèmes

*** 162**

Dans le village Duranpont vivent deux familles:

- les Dupont qui disent toujours vrai,
- et les Duran qui mentent toujours.

Un touriste en visite dans ce village pour le moins original rencontre 3 habitants et pose les questions suivantes à deux d'entre eux:

Au premier: tes deux camarades sont-ils de la même famille ?

Réponse: oui

Au deuxième: le premier est-il de ta famille ?

Réponse: non

Combien y a-t-il de Dupont ?
De quelle famille est le premier ? *(12 ans)*

*** 163**

Quelle est la somme de tous les nombres de 9 chiffres différents ne contenant pas le chiffre 0 ? *(15 ans)*

*** 164**

Une balance mal équilibrée donne comme poids à un objet 1 kg dans un sens et 1,1 kg dans l'autre sens. Quel est le poids de l'objet ? *(15 ans)*

*** 165**

Un piéton s'en va d'une ville A à une ville B à la vitesse de 4 km/h. Après avoir parcouru 1 km 2/3, il est dépassé par une diligence allant elle-même de A à B et qui a quitté A un quart d'heure après lui.
13 km plus loin, il croise cette diligence qui retourne vers A. Sachant qu'elle est restée une demi-heure en B, quelle est la distance entre A et B ? *(13 ans)*

*** 166**

Ecrivez $(9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$ sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c désignent des nombres rationnels. *(16 ans)*

*** 167**

Existe-t-il un nombre entier positif n tel que, si on lui supprime son premier chiffre, on en obtient

1) la $57^{\text{ème}}$ partie
2) la $58^{\text{ème}}$ partie. *(16 ans)*

*** 168**

7 écoliers ont ensemble 100 pièces de monnaie. Aucun n'a le même nombre de pièces qu'un autre. Montrez qu'il y a 3 écoliers qui ont au moins 50 pièces ensemble. *(12 ans)*

La notation polonaise

Faire un programme qui calcule l'expression

((1 + 23) x 5 + 14 x 3 + 5) / 4

ou toute autre expression deu même genre est assez complexe car il faut tenir compte de l'expression entière pour savoir quelles sont les opérations à effectuer.

Le Polonais LUKASIEWICZ trouvant lacomplexité de cette notation inutile, invente une nouvelle symbolique arithmétique.

Cette notation part du principe suivant:

- au lieu d'écrire a + b, on écrit a, b+

Ceci peut paraître banal mais il n'en est rien car cette notation ne nécessite aucune parenthèse. L'exemple ci-dessus devient:

1, 23 + 5 x 14, 3 x + 5 + 4 /

et on peut traiter cette expression en une seule lecture:

- lorsque l'on voit une virgule, on envoie le nombre qui le précède dans une "salle d'attente" appelée pile.
- lorsque l'on voit un opérateur, on le fait opérer sur le dernier nombre rentré dans la pile et le nombre qui précède le signe.

Ainsi, pour l'expression ci-dessus, on a:

	Pile	
1,	(1)	
23+	1 + 23	(24)
5x	24 x 5	(120)
14,	(120,14)	
3x	14 x 3	(120,42)
+	(162)	
5+	162 + 5	(167)
4/	167 / 4	(41,75)

Cette méthode peut paraître déroutante au début, mais le côté pratique de cette notation a poussé certains fabricants de machines à calculer à l'adopter et souvent, les utilisateurs en sont satisfaits.

Pour les intéressés, j'ajouterai que cette notation intervient dans le langage FORTH, mais c'est une autre histoire!

Et si le temps est couvert?

Dans beaucoup de livres, on explique comment déterminer la hauteur d'un pylone sans monter jusqu'à son sommet: on mesure son ombre, puis on mesure l'ombre d'un bâton de 1 mètre (par exemple) tenu verticalement.
Soit ℓ la longueur de l'ombre du bâton,

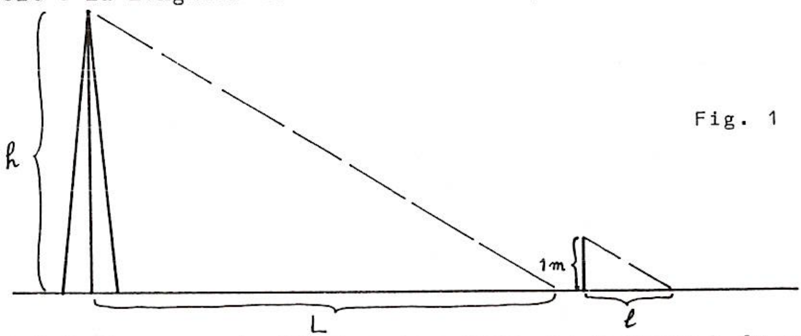


Fig. 1

et L la longueur de l'ombre du pylone. La hauteur h du pylone s'obtient en observant la similitude des deux triangles (fig. 1) qui donne

$\frac{h}{L} = \frac{1}{\ell}$ et donc $h = L/\ell$.

C'est bien beau tout ça. Mais moi, je suis sorti par un jour sans soleil et j'ai quand même trouvé la hauteur du pylone. Comment ai-je fait ? J'ajoute toujours plein de choses dans mes poches, et ce jour-là, un petit miroir se trouvait dans mon bric-à-brac.

Solution

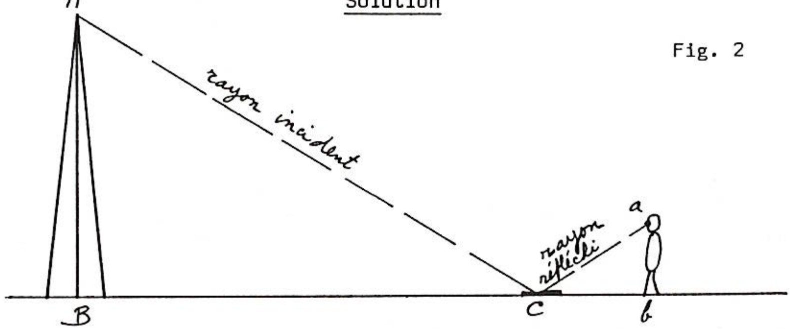


Fig. 2

J'ai posé mon miroir par terre à quelque distance du pylone, puis je me suis reculé jusqu'à apercevoir le sommet du pylone dans le miroir.

Comme le rayon réfléchi fait avec le miroir le même angle que le rayon incident, le triangle ABC (rectangle en B) est semblable au triangle abC (rectangle en b). A cause de cette similitude, on a donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bC}$$

où AB est la hauteur du pylone, BC la distance du miroir au pylone, bC la distance de mes pieds au miroir et ab la hauteur de mon oeil (car j'ai un oeil à la hauteur !)

D'où $h = AB = \frac{BC}{bC}\, ab.$ (1)

Tout bien réfléchi, je me suis dit que si j'avais encore un jour à faire une mesure comme ça, j'emporterais un niveau d'eau. En effet, je ne suis pas sûr d'avoir posé mon miroir bien horizontal. Et alors ? me direz-vous. Et bien oui, et alors ? Je vous relance la balle: pourriez-vous calculer l'erreur que vous feriez sur la hauteur d'un pylone de 100 mètres de haut si votre miroir est incliné de 10° sur l'horizontale ?

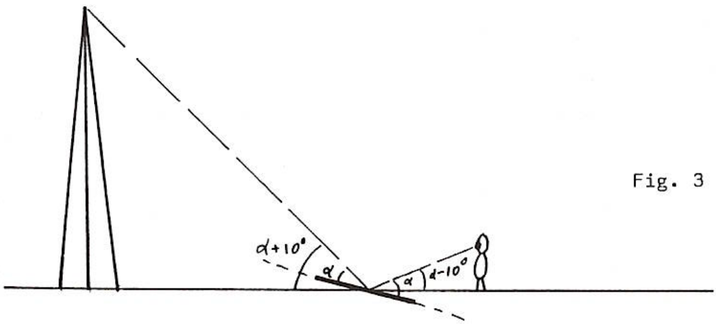


Fig. 3

La situation se présente comme sur la Fig.3. Mais comme je n'ai pas remarqué la mauvaise position du miroir, j'applique la formule (1). Mais sur la Fig.3, je vois que

$$BC = \frac{AB}{tg(\alpha+10°)} \quad \text{et que} \quad bC = \frac{aB}{tg(\alpha-10°)} .$$

Je reporte cela dans (1), ce qui donne

$$h = \frac{\dfrac{AB}{tg(\alpha+10°)}}{\dfrac{ab}{tg(\alpha-10°)}}\, ab = AB\, \frac{tg(\alpha-10°)}{tg(\alpha+10°)} .$$

Alors voilà, tout dépend de α. Mais si par exemple j'avais α = 45°, il vient

$$h = 100\, \frac{tg\ 35°}{tg\ 55°} = 100\, \frac{0,7}{1,428} \simeq 50.$$

Catastrophe, je me suis trompé d'environ la moitié !
Conclusion: ne faites pas toujours confiance à la première parole de MATH-JEUNES. Lisez les articles jusqu'au bout.

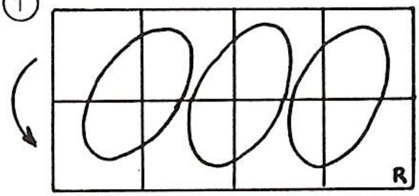
N. ROUCHE

Le nouveau jeu de RUBIK: «Les Anneaux»

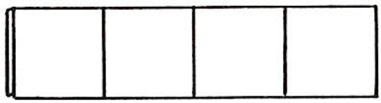
Comment transformer la figure initiale, celle qui se trouve dans la boîte lorsque vous achetez ce jeu et qui est aussi la première figure esquissée ci-dessous en une figure cohérente construite avec les anneaux (brisés) figurant alors au verso ?

Voici un procédé assez simple. Le "R" des dessins désigne la position repère de la signature "Rubik".
Les flèches indiquent les pliages ou les rotations à effectuer. Plusieurs traits juxtaposés donnent le nombre de couches superposées. Un trait plus épais marque la charnière d'une rotation.

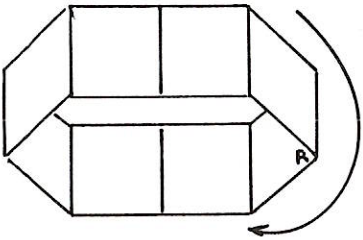
1



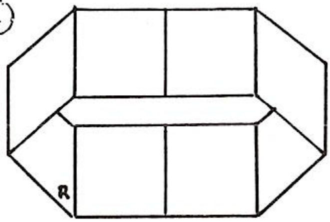
2



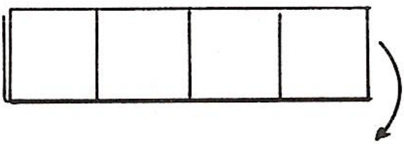
3



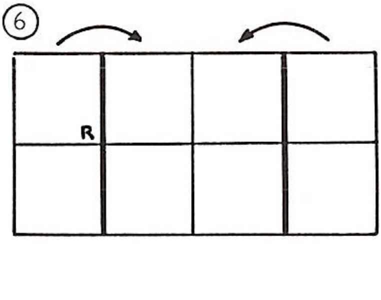
4



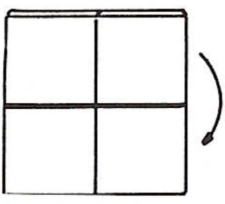
5



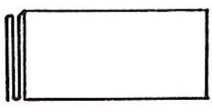
6

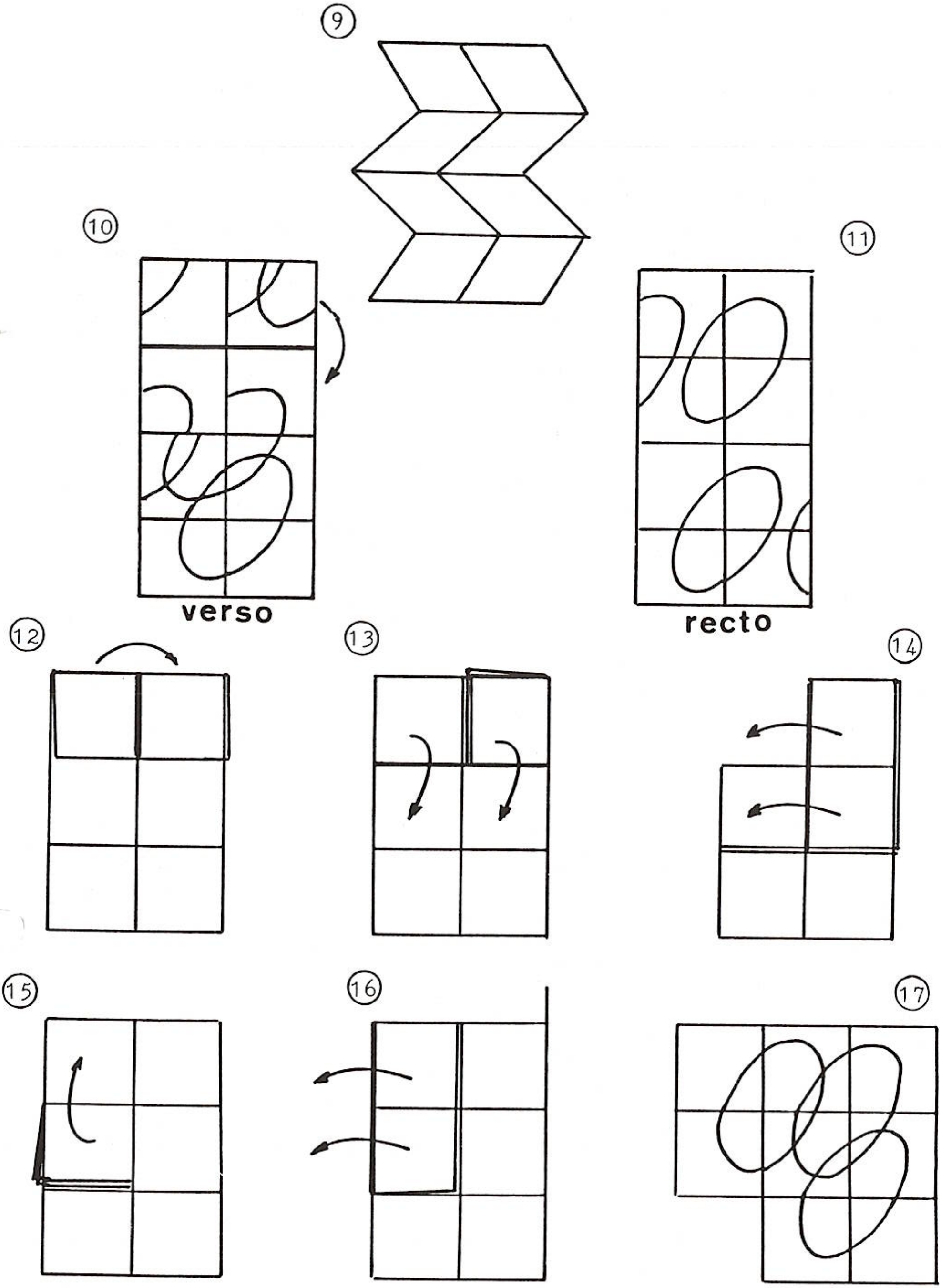


7



8





VICTOIRE !

Claudine Festraets

Les études en sciences mathématiques à l'Université de Liège

(Extrait du fascicule de même intitulé édité par la Faculté des Sciences).

L'article de MM. G. NOEL et P. DUFOUR sur les mathématiques à l'Université de Mons paru dans le Math-Jeunes n° 36, a très bien dit ce qu'il faut savoir sur la mathématique et le mathématicien d'aujourd'hui.

On s'imagine souvent, à tort, que choisir les études de mathématiques, c'est se destiner à l'enseignement. C'est ainsi que beaucoup d'étudiants de dernière année du cycle secondaire, intéressés par les mathématiques, renoncent à s'inscrire à la licence en mathématiques parce que celle-ci est considérée comme débouchant de façon inéluctable sur la carrière d'enseignant que l'on croit d'ailleurs encombrée à jamais. Pour cette seule raison, ils choisissent alors des études qui ne correspondent pas nécessairement à leurs aptitudes ou à leurs aspirations profondes et qui ne leur apportent pas les satisfactions attendues au niveau mathématique.

Il est vrai que l'enseignement a été longtemps le débouché principal pour les mathématiciens et continuera à leur offrir bon nombre d'emplois. Il faut d'ailleurs savoir qu'il n'existe aujourd'hui pratiquement pas de licenciés-agrégés en mathématiques qui soient demandeurs d'emploi. Mieux, on prévoit pour les prochaines années une pénurie de professeurs de mathématiques, comme c'est déjà le cas actuellement en France (cf. "Le Monde", 10/12/87).

Néanmoins, il existe bien d'autres possibilités que l'enseignement, les grands organismes financiers, les compagnies d'assurances, les institutions nationales (*Cour des Comptes, Institut de Statistique, Institut de Météorologie, ...*), les entreprises privées, l'industrie emploient des mathématiciens. L'importance croissante des applications des mathématiques aux sciences de gestion, à l'économie, à l'informatique, ..., provoque, depuis quelques années, un développement appréciable des possibilités d'emploi tant en nombre qu'en qualité, pour les mathématiciens qui ont acquis une formation suffisante dans ces disciplines. Les brillants succès professionnels d'un certain nombre d'anciens en témoignent. (cf. aussi "La Recherche" N° 194 - déc.87 - p.1528 à 1530).

Comment préparer au mieux les mathématiciens à des activités aussi variées ? Faut-il les engager très tôt dans une spécialisation poussée ou privilégier une formation générale solide ? L'Université de Liège a choisi une formule souple et personnalisée : sur quatre ans d'études, deux ans et demi (les deux candidatures et le 1er semestre de la 1ère licence) sont consacrés à une formation générale commune, jugée indispensable à tous les mathématiciens. Pendant les trois derniers semestres, les étudiants se construisent eux-mêmes le programme qui les intéresse le plus en choisissant dans une gamme de cours à option. Selon leurs goûts et leurs objectifs, ils pourront aussi bien s'orienter vers une spécialisation poussée dans un domaine précis des mathématiques que s'initier aux aspects variés des mathématiques pures ou appliquées.

A un moment où les qualités des mathématiciens sont de plus en plus appréciées par de nombreux organismes publics et entreprises privées, la possibilité qui est donnée au futur licencié de s'intéresser aux mathématiques appliquées constitue un atout majeur qui lui permet soit d'entamer une spécialisation vers l'actuariat, l'économie, la gestion, l'informatique, ..., soit d'entrer de plain pied sur le marché de l'emploi.

Le grade de licencié en sciences mathématiques s'obtient au terme de quatre années d'études, réparties en deux cycles de deux ans (candidature et licence).

Une bonne connaissance du programme de mathématiques moyen (5h/sem) de l'enseignement secondaire constitue en principe une préparation suffisante pour entreprendre ces études. Il est certain que le programme fort (7h/sem) facilite les premiers contacts avec les cours universitaires et que le programme faible (3h/sem) demande à être complété par une étude personnelle.

Des cours préparatoires, organisés en septembre, peuvent aider les futurs étudiants à faire le point de leurs connaissances, à juger de leur degré de préparation et à prendre un premier contact avec l'enseignement universitaire.

Les deux années de candidature dispensent une formation solide dans les disciplines de base (Algèbre, Analyse, Géométrie) et un certain nombre de cours d'initiation (Probabilités, Statistique, Informatique, Physique générale, Astronomie) et d'application des mathématiques (Mécanique, Physique mathématique).

Pendant l'année, des interrogations sont organisées sur les différents cours (en moyenne une interrogation par semaine). Elles permettent aux étudiants d'évaluer leurs connaissances et la qualité de leur travail.

Des interrogations facultatives (avec dispense de matière en cas de réussite) permettent à ceux qui le souhaitent d'alléger les sessions d'examens.

Le premier semestre de la 1ère licence est occupé par six cours obligatoires (Analyse supérieure, Géométrie différentielle, Mécanique analytique, Probabilités et Statistique, Physique mathématique et Astronomie).

Les cours du second semestre et ceux de la seconde licence sont tous à option. L'étudiant choisit parmi des cours orientés aussi bien vers les mathématiques pures que vers les mathématiques appliquées. Pour en citer quelques-uns, mentionnons

- Analyse, Géométrie, Algèbre, Logique, Topologie,
- Physique mathématique, Mécanique analytique, Astronomie,
- Probabilités, Statistique, Analyse numérique, Théorie des algorithmes, Recherche opérationnelle, Méthodes mathématiques en économie et en gestion.

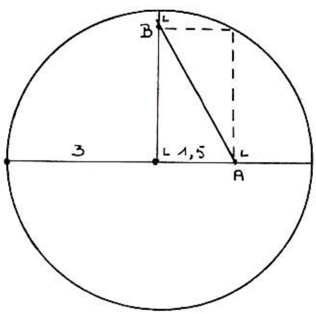
En seconde licence, l'étudiant peut aussi inscrire à son programme un cours relevant d'une autre discipline pour compléter la formation qu'il s'est choisie.

Si vous aimez les math., en acquérant une formation de mathématicien, vous vous préparez un avenir riche en possibilités.

Pour tous renseignements complémentaires ou conseils, n'hésitez pas à vous adresser à l'Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, 4000 LIEGE - Tél. 041/52.01.80, Ext. 466.

J. GOBERT

E6



Que vaut $|AB|$?

SOMMAIRE

Responsables de l'édition : Cl. FESTRAETS et J. VANHAMME

Comité de rédaction du numéro :
Ph. ALPHONSE, E. BARTHOLOME, O. DUCARME, Cl. FESTRAETS, N. ROUCHE, J. WILMET, N. JOELANTS

Le courrier doit être adressé à
J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2, 1160 Bruxelles
tél : 02/6727571

Prix des abonnements :

Belgique :	*groupés (5 au minimum)*	*80 FB*
	isolés	*120 FB*
Etranger :	*y compris Pays-Bas et Luxembourg*	
	par paquet de 5 abonnements	*800 FB*
	isolé	*240 FB*

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Anciens numéros : sont encore disponibles
Années 81-82, 82-83, 83-84, 84-85, 85-86(sauf n°29), 86-87

Belgique : 81-82 à 85-86 : 50 FB l'année ; 86-87 : 80 FB
Etranger : 81-82 à 85-86 :100 FB l'année ; 86-87 :160 FB

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14bis
7460 - CASTEAU
Pour l'étranger : Cpte 000-078014-29 (compte chèque postal)
SBPMEF, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 CASTEAU , par virement postal

ou par mandat poste international

En cas d'intervention bancaire, à partir de l'étranger, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement. Pas de chèque.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.