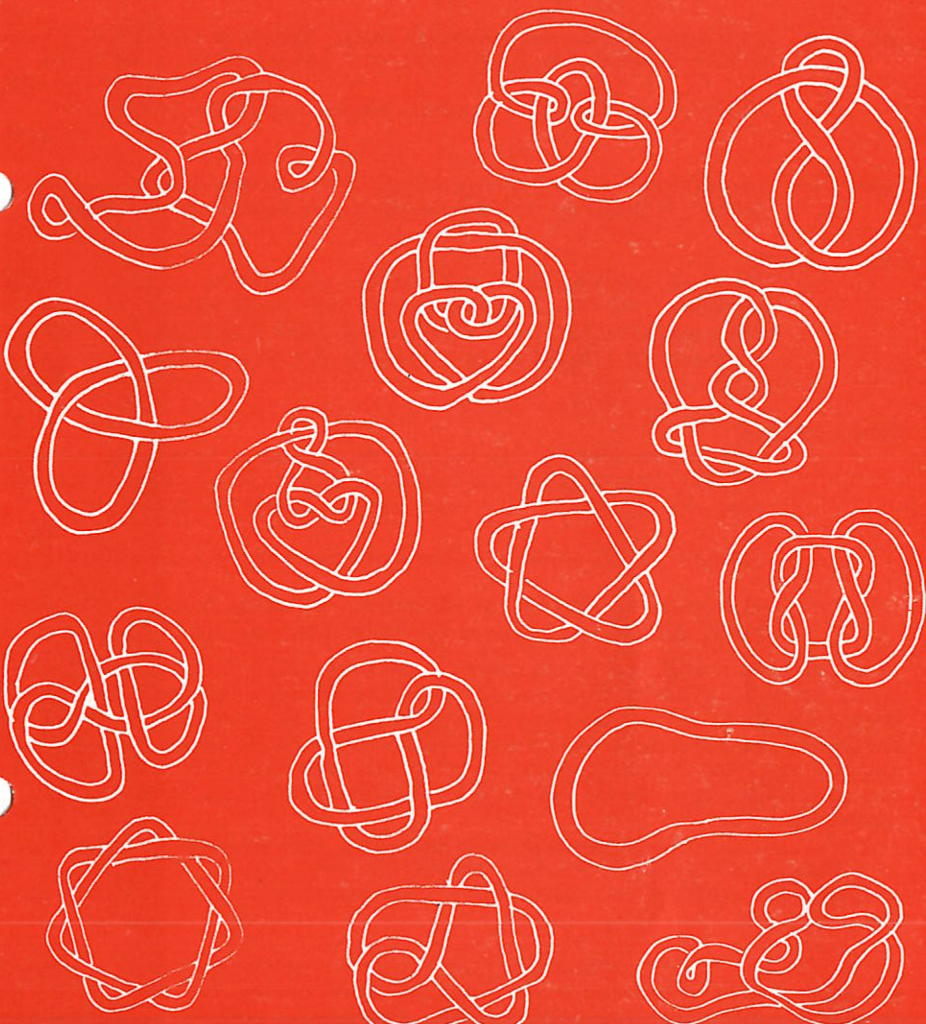
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française — Association Sans But Lucratif

MATH-JEUNES



Journal Trimestriel

10ème année Numéro 40 Eté 1988

Chers amis,

Voici les résultats du Rallye Problème . Un grand bravo à tous ceux qui ont participé. Ils recevront un prix dans le courant du mois de juin.

Ont obtenu un

1er prix *Catherine ABSIL*, de l'athénée Royal Vauban à Charleroi (17 ans)
Didier BOUSMAR, de l'Institut de l'Enfant Jésus à Nivelles (15 ans)
Philippe MASSON, de l'athénée Robert Catteau à Bruxelles (16 ans)

2ème prix *Luc BERTHE*, du collège St Michel à Bruxelles (16 ans)
Renaud SIZAIR, du collège St Michel à Bruxelles (17 ans)

1er accessit
Stéphane DUPONT, de l'institut Ste Marie à La louvière(15 ans)
Frédéric PONCIN, du collège St Michel à Gosselies (16 ans)
Vincent LEPOUTRE, du collège Notre Dame à Tournai (15 ans)
Emmanuel DE SMACKERS, de l'athénée Fernand Blum à Bruxelles (14 ans)

2ème accessit
Christophe GOSSEYE, du collège Notre Dame à Tournai (17 ans)
Olivier DEBAUCHE, du collège St Pie X à Chatelineau (16 ans)
Severine DELCOURT, de l'institut St Joseph de Carlsbourg (16 ans)
Laurent CHRISTIAENS, de l'athénée Fernand Blum à Bruxelles (13 ans)
Pierre-Marie RENARD, de l'institut St Louis à Namur (16 ans)
Nancy DEROEY, du collège St Pie X à Chatelineau (16 ans)

Le classement a été établi en tenant compte de l'âge de chaque participant. Certains d'entre vous seront peut-être étonnés par leur classement. Nous demandions de nous envoyer des solutions aux problèmes posés et pas seulement des réponses; nous avons malheureusement du tenir compte de cette distinction dans la correction. Quand la réponse reçue était bonne mais non justifiée, nous avons attribué un dixième des points prévus pour la question.

Nous voudrions féliciter tout spécialement Catherine pour la présentation particulièrement soignée de son travail. Chaque problème traité a été examiné en profondeur et, ce qui ne gâte rien, son orthographe est bonne !

Nous vous souhaitons à tous de bonnes vacances. Signalons à ceux qui quittent cette année l'enseignement secondaire que s'ils désirent continuer à recevoir MATH-JEUNES, ils peuvent prendre un abonnement individuel. Quant aux autres : dès la rentrée, rappelez à vos professeurs l'existence du journal, signalez votre désir d'être abonnés ... et n'hésitez pas à revenir à la charge.

A l'année scolaire prochaine

La Rédaction

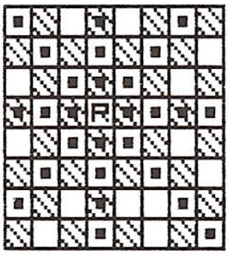
Problème des Reines

Nous allons examiner un problème qui intrigua longtemps les mathématiciens, savants et curieux. L'informatique permet maintenant de le résoudre en quelques secondes.

C'est le jeu des échecs qui donna naissance à cette "énigme". Il arriva en effet que l'on se questionna un jour sur la possibilité de ranger 8 Reines sur un échiquier sans qu'aucune d'elles n'ait emprise sur une autre.

Pour ceux qui ne sont pas amateurs d'échecs, nous rappelons qu'un échiquier comporte 64 cases (8 x 8) et que les Reines se déplacent selon les verticales, horizontales ou diagonales d'un nombre quelconque de cases.

Par exemple, si R est une Reine, toutes les cases pointées désignent celles sur lesquelles elle peut se rendre et où on ne peut donc pas en placer une autre dans le cas de notre problème.



Donc, ici, en ayant placé une seule Reine, on ne dispose déjà plus que de 36 cases, sur les 64 au départ, pour en placer d'autres. La difficulté du problème est évidente lorsqu'on essaie de placer encore 7 Reines.

Un ordinateur a donné les 92 échiquiers possibles en moins de 2 secondes avec un programme en langage machine et en une dizaine de minutes avec un autre en Basic.

Pour étudier la question, nous allons généraliser au cas où les "échiquiers" sont des rectangles et non plus des carrés. Une grille b x h sera donc un "échiquier" de base b et de hauteur h et sera constituée de b colonnes de h cases. Cela ne modifiant en rien le problème, nous ne représenterons plus, pour des raisons de clarté, les cases noires de l'échiquier par la suite.

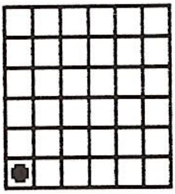
Le nombre maximum de Reines qu'il est envisageable de placer sur une grille quelconque est forcément égal à la plus petite de ses 2 mesures. En effet, dans une grille 8 x 5, il est impossible de placer plus de 5 Reines car il y en aurait nécessairement plus d'une par ligne puisqu'il n'y a que 5 lignes.

Par la suite, nous n'utiliserons plus que des grilles dont la mesure de la base est inférieure ou égale à celle de la hauteur. Nous pourrons néanmoins représenter ainsi n'importe quel "échiquier"; en effet, une grille dont les mesures sont 8 x 5 est la même, après une rotation, que celle dont la base vaut 5 et la hauteur 8.

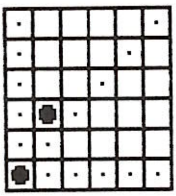
Dès lors, puisqu'on est certain que b est la plus petite mesure, nous tenterons à chaque essai de placer b Reines.

Comment procédera-t-on pour rechercher les différentes possibilités ?

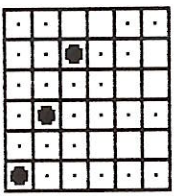
Nous allons pour ce faire adopter une certaine logique de progression. Voici le début du raisonnement pour une grille 6 x 6.



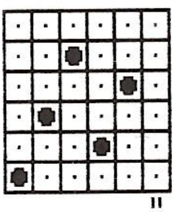
Nous allons placer un pion au premier emplacement autorisé de la première colonne. Il s'agit naturellement de la première case. Pour cette colonne, les emplacements seront toujours tous permis puisque l'on a encore placé aucun pion qui pourrait contrôler l'une de ces cases.



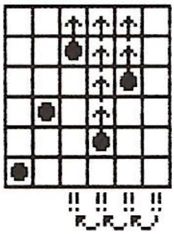
On va répéter ce travail pour la seconde colonne. Dans celle-ci, la première et la seconde cases ne sont pas autorisées. On placera par conséquent une Reine sur la $3^{\text{ème}}$ case.



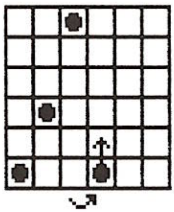
On recommence pour la $3^{\text{ème}}$ colonne. La première case qui est possible est la 5 ème; nous y plaçons par conséquent une Reine.



On effectue ce travail pour la quatrième puis pour la cinquième colonne. On obtient la grille suivante. Dans la $6^{\text{ème}}$ colonne, on va passer toutes les cases en revue sans en trouver une seule autorisée.

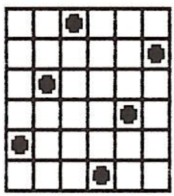


Nous allons donc revenir à la colonne précédente pour y chercher la place permise suivante. La 5ème et la 6ème cases sont interdites et on doit donc revenir d'une colonne en arrière et recommencer la recherche de la case autorisée suivante. Aucune ne se peut.
On revient donc encore d'une colonne en arrière et on regarde si la case suivante est possible... elle l'est ! On avance donc le pion de la troisième colonne d'une case.



Lorsqu'on revient en arrière, il ne faut naturellement plus tenir compte des pions des colonnes plus à droite.

Le pion de la 3ème colonne a trouvé une autre place. Il permettra donc peut-être à ceux des autres colonnes de trouver une case.
On va donc repasser à la 4ème colonne où la Dame est revenue en première position.



Et on recommence !!

Dès que nous aurons trouvé une place pour le pion de la dernière colonne, nous serons en présence de l'une des grilles possibles.

Pour trouver la solution suivante, nous continuons la recherche en avançant le pion de la dernière colonne d'une case.

Pour faciliter le travail, nous allons remplacer la grille par un tableau disposant d'une case par colonne. Dans chacune de ces cases sera codé le numéro de la ligne où se trouve le pion.

Par exemple, la grille correcte donnée ci-dessus sera codée dans le tableau par ...

2	4	6	1	3	5

Le tableau sera appelé T et la première case de celui-ci sera T(1), la seconde T(2),... ici T(5) = 3.

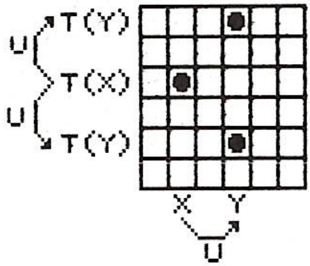
Cette représentation "simplifiée" permettra un traitement plus rapide par un ordinateur. Seulement, s'il était clair sur une grille de voir quand 2 pions étaient sur une même rangée ou diagonale, cela va être un peu plus compliqué ici.

- Quand 2 pions seront-ils sur une même ligne ?

T(x) codant le numéro de la ligne où se trouve le pion de la colonne x et T(y) celui où se trouve le pion de la colonne y, les 2 pions seront forcément sur la même ligne ssi ...

$$T(x) = T(y)$$

- Quand 2 pions seront-ils sur une même diagonale ?



Le pion B (colonne y) est sur la diagonale de A (colonne x) ssi B se trouve dans la colonne x + u et dans une des lignes T(x) + u ou T(x) - u; c'est-à-dire ssi y = x + u (1) et T(y) = T(x) $\pm$ u (2).

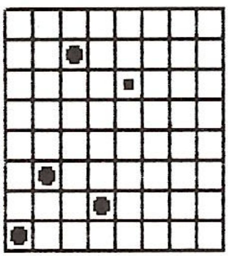
Si y = x + u alors u = y - x que nous remplaçons dans (2) pour obtenir que le pion de la colonne y est sur une diagonale celui de la colonne x ssi ...

$$T(y) = T(x) \pm (y - x)$$

Quant aux colonnes, nous sommes toujours certains de n'avoir qu'un pion dans chacune d'elles.

Exemple ...

Dans la grille suivante, quels sont les calculs à effectuer pour savoir si la case pointée (colonne 5 donc y=5) est autorisée ?



Il suffit de faire les tests suivants pour chacune des cases déjà prises...

1	3	7	2	6			

Pour colonne 1... donc x=1

Est-ce que T(x)=T(y) ?
T(5)=T(1) ?
6 = 1 ? Non

--> pas sur la même ligne

Est-ce que T(y)=T(x)+(y-x) ou T(y)=T(x)-(y-x) ?
T(5)=T(1)+(5-1) ou T(5)=T(1)-(5-1) ?
6 = 1 + 4 ou 6 = 1 - 4 ?
6 = 5 ou 6 = -3 ? Non

--> pas sur la même diagonale

Pour colonne 2... donc x=2

Est-ce que T(x)=T(y) ?
T(5)=T(2) ?
6 = 3 ? Non

--> pas sur la même ligne

Est-ce que T(y)=T(x)+(y-x) ou T(y)=T(x)-(y-x) ?
T(5)=T(2)+(5-2) ou T(5)=T(2)-(5-2) ?
6 = 3 + 3 ou 6 = 3 - 3 ?
6 = 6 ou 6 = 0 ? Oui

--> sur la même diagonale

Donc, à cause de la Reine de la colonne 2, on ne peut pas placer une autre Reine sur la case pointée.

Nous voyons donc qu'il est serait très long de rechercher toutes les possibilités sans en oublier aucune; cela est dû au grand nombre de fois que le même raisonnement est répété. C'est justement pour effectuer ce genre de travail (répétitions) qu'un ordinateur est le plus utile. Cependant, pour qu'il soit apte à effectuer une tâche aussi précise que celle-ci, il faut lui expliquer la marche à suivre; cela se fait par l'intermédiaire du programme.

Pour établir un programme, il est utile de se baser sur un plan qui schématise les démarches à effectuer : l'algorithme.

Voici donc celui relatif à notre problème suivi ensuite par le programme Basic qui en découle. Ce dernier ne peut fonctionner que sur un Apple //. Cependant, après quelques modifications, il devrait marcher sur n'importe quel ordinateur.

Pour le faire fonctionner sur un Commodore 128, veillez à remplacer la ligne 10 par celle-ci ...

```
10  PRINT CHR$(147)
```

Nous vous souhaitons une agréable programmation.

Algorithme

Algorithme	Explications
1 - Faire nettoyer l'écran	
2 - Faire lire NC lire NL	= Nombre de Colonnes = Base = Nombre de Lignes = Hauteur
3 - Faire dimensionner T() à NC	Tableau : 1 case par colonne
4 - Faire C <-- 1	On commence avec Colonne n°1
5 - Faire T(C) <-- 1	Pion placé en ligne 1
6 - Si C=1 alors faire C <-- 2 et aller en 5	Colonne 1 : toujours O.k. --> passer en colonne 2
7 - Pour CP allant de 1 à C-1 faire	Pour chacune des Colonnes qui Précédent la n°C...
7.1 - Si T(C)=T(CP) alors aller en 10	- Sur même ligne --> interdit --> changer
7.2 - Si T(C)=T(CP)+(C-CP) ou T(C)=T(CP)-(C-CP) alors aller en 10	- Sur même diagonale --> interdit --> changer
	Emplacement autorisé
8 - Si C<NC alors faire C <-- C + 1 aller en 5	Si C n'est pas la dernière colonne alors passer à la suivante
9 - Pour CC allant de 1 à NC	Pour chacune des Colonnes...
9.1 - Faire écrire T(CC)	- On écrit le numéro de la ligne où est le pion
10 - Faire T(C) <-- T(C) + 1	Pion avancé d'une ligne en colonne C
11 - Si T(C)<NL+1 alors aller en 6	Dernière ligne non dépassée --> vérifier l'emplacement Aussinon, ...
12 - Faire C <-- C - 1	Reculer d'1 colonne
13 - Si T(1)<NL+1 alors aller en 10	Si dernière ligne dépassée en colonne 1 alors...
14 - Faire écrire message + fin	C'est fini

Programme Basic

```
1      10  HOME
2      20  PRINT
       30  INPUT "Nombre de colonnes ? ";NC
       40  INPUT "Nombre de lignes ? ";NL
       50  PRINT
3      60  DIM T(NC)
4      70  C=1
5      80  T(C)=1
6      90  IF C=1 THEN C=2:GOTO 80
7      100  FOR CP=1 TO C-1
7.1    110  IF T(C)=T(CP) THEN 190
7.2    120  IF T(C)=T(CP)+(C-CP) OR T(C)=T(CP)-(C-CP) THEN 190
       130  NEXT CP
8      140  IF C<NC THEN C=C+1:GOTO 80
9      150  FOR CC=1 TO NC
9.1    160  PRINT "Colonne : ";CC,"Ligne : ";T(CC)
       170  NEXT CC
       180  PRINT
10     190  T(C)=T(C)+1
11     200  IF T(C)<NL+1 THEN 90
12     210  C=C-1
13     220  IF T(1)<NL+1 THEN 190
14     230  PRINT "Etude terminée":END
```

N.B. Les numéros soulignés ne doivent pas être entrés dans l'ordinateur; ils correspondent aux lignes de l'algorithme.

Jean-Marc Godart - Elève à l'Athénée Royal de Mons

Multiples de...

1. Introduction

Tu sais reconnaître immédiatement les multiples de 5 et de 2 parce qu'il suffit de regarder le dernier chiffre du nombre.

Tu reconnais un peu moins rapidement les multiples de 4 .

Tu connais des "critères de divisibilité" par 2, 3, 4, 5, 9.

As-tu remarqué que certains multiples de 11 sont immédiatement reconnaissables ?

Connais-tu un moyen de reconnaître un multiple de 7 sans effectuer la division ?

Nous allons aborder ces dernières questions.

Des questions te seront posées. Essaye d'y répondre avant de poursuivre, confronte ta réponse avec celle qui t'est fournie page 65 , sous le numéro donné entre parenthèses en bout de ligne.

2. Multiples de n .

a) Les nombres

473 385 121 198 891

ont des propriétés communes. Lesquelles ? (2.1)
(confronte tes idées aux réponses fournies page 65)

Ces propriétés découlent clairement de la disposition écrite d'une multiplication par 11 :

$$
\begin{array}{rrr}
 & a & b \\
\times & 1 & 1 \\
\hline
 & a & b \\
a & b & \\
\hline
a & (a+b) & b
\end{array}
$$

mais la visualisation de la propriété peut être estompée par un report éventuel

$48 \times 11 = 528$ synonyme de
4 centaines + 12 dizaines + 8 unités.

Ainsi le produit de nombre "DU" par 11 vaut
"D (D+U) U"
avec transfert de 10 dizaines en 1 centaine en cas de report de (D+U) .

b) Recherche le produit par 11 d'un nombre de 3 chiffres
Donne le chiffre des unités de "145U" pour que ce nombre soit multiple de 11 (2.2)

c) Des nombres de type "ABA" (c'est-à-dire des nombres de 3 chiffres dans lesquels le chiffre des unités égale le chiffre des centaines) sont dits nombres-palindromes
Recherche tous les nombres palindromes de 3 chiffres qui sont multiples de 11 (2.3)

3. Nombres palindromes divisibles par 3

a) Un nombre-palindrome de 3 chiffres s'écrit "ABA"
Un nombre-palindrome de 4 chiffres s'écrit "ABBA"
Comment écris-tu un nombre palindrome de 5 chiffres ? de 6 chiffres ? Comment expliquerais-tu à un camarade une manière de reconnaître un nombre-palindrome de 500 chiffres (3.1)

b) Ecris des nombres-palindromes de 3 chiffres et classe-les en multiples de 3 et non multiples de 3 .
Recherche une propriété commune à tous les multiples de 3. Vérifie que les non multiples de 3 ne vérifient pas cette propriété. Après ta recherche n'oublie pas de consulter la réponse (3.2)
Peux-tu écrire les trente nombres-palindromes qui sont multiples de 3 ? (3.3)

c) $|A - B|$ est multiple de 3 $\Longleftrightarrow$ "ABA" est multiple de 3

"ABA" est multiple de 3

$\Updownarrow$

$100A + 10B + A$ est multiple de 3

$\Updownarrow$

$99A + 9B + 2A + B$ est multiple de 3

$\Updownarrow$

$2A + B$ est multiple de 3

$\Updownarrow$

$|2A + B - 3A|$ est multiple de 3

$\Updownarrow$

$|B - A|$ est multiple de 3

$\Updownarrow$

$|A - B|$ est multiple de 3

d) Si ce paragraphe 3 t'a plu, étudie les nombres-palindromes multiples de 3 s'écrivant avec 4 chiffres
Nous te donnons quelques indications en (3.4)

4. Un critère de divisibilité par 7 .

a) Pour savoir si 31 756 est divisible par 7 , je calcule

$$3175 - 12 = 3163$$
$$316 - 6 = 310$$
$$31 - 0 = 31$$

Je sais que 31 n'est pas multiple de 7 et j'affirme que 31 756 ne l'est pas non plus.

b) on remplace donc le nombre donné par un nombre de plus en plus petit, jusqu'à ce que le nombre obtenu soit connu comme multiple de 7 ou non-multiple de 7 .
Le processus répété est le suivant :
- amputer le nombre du chiffre des unités
- soustraire du nombre obtenu le double des unités

c) Schématisons ce procédé :

x (nombre de n chiffres) est remplacé par y

Si $x = "c_1c_2\ldots c_n"$, alors $y = c_1c_2\ldots c_{n-1}" - 2c_n$

Nous devons justifier que x et y sont simultanément multiples ou non-multiples de 7
Désignons par p le nombre qui s'écrit $"c_1c_2\ldots c_{n-1}"$:
on a alors $x = 10p + c_n$ et $y = p - 2c_n$

c) x est multiple de 7 $\Longrightarrow$ y est multiple de 7

$10p + c_n$ est multiple de 7

$\Updownarrow$

$20p + 2c_n$ est multiple de 7
D'autre part $21p + 7c_n$ est multiple de 7
Donc $p + 5c_n$ est multiple de 7
ainsi que $p + 5cn - 7cn$
Donc y est multiple de 7

c) y est multiple de 7 $\Longrightarrow$ x est multiple de 7

$p - 2c_n$ est multiple de 7

$\Updownarrow$

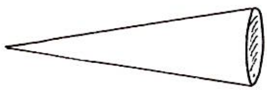
$10p - 20c_n$ est multiple de 7
D'autre part $21c_n$ est multiple de 7
Donc $10p + c_n$ est multiple de 7
Donc x est multiple de 7

d) Applique le critère pour trouver les multiples de 7 parmi les nombres
231 , 471628, 1234567 , 4965 , 1988 , 392056 , 12030405
(4.1)

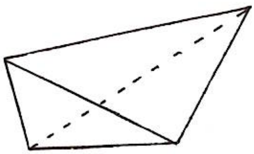
Euler-Poincaré

Hors d'oeuvres

Elève x : "Dans Math-Jeunes n°38,on explique que la relation d'Euler-Poincaré s'applique à des polyèdres.
Pourquoi faut-il que les faces soient planes?
Rien n'empèche d'imaginer qu'elles deviennent bombées.
La relation doit encore être vérifiée. D'ailleurs,j'ai essayé de l'appliquer à un cône et cela marche aussi bien que pour un tétraèdre. "



$S - A + F = 1 - 1 + 2 = 2$

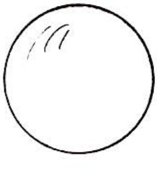


$S - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$

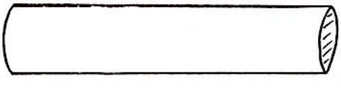
Elève y : " Pas d'accord car si tu considères une bouée, c'est à dire le corps formé de deux cônes accolés par l'arête de base alors

$S - A + F = 2 - 1 + 2 = 3$

Elève z : " Et puis pour une sphère et un cylindre, tu aurais



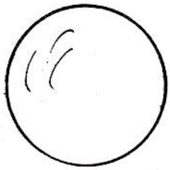
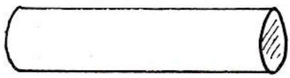
$S - A + F = 0 - 0 + 1 = 1$



$S - A + F = 0 - 2 + 3 = 1$

Elève x (obstiné): " Vous avez raison ! Mais comme vous obtenez 1 aux derniers calculs,c'est peut-être parce qu'il faut tenir compte d'un caractère supplémentaire tel le nombre

de "volumes" composant le corps examiné .
Voyons ce que cela donne pour la sphère ainsi que pour le cylindre !"

		V	S	A	F
Sphère		1	0	0	1
Cylindre		1	0	2	3

Elève z : "Tiens ! Quand on additionne et soustrait alternativement,on obtient chaque fois 0."

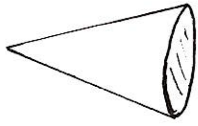
N'aurait-on pas toujours $V - S + A - F = 0$????

Elève y : " Tant qu'on y est,on pourrait mettre de l'ordre dans les caractères dénombrés et calculer $V - F + A - S$

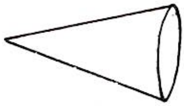
Elève x : " Après tout,c'est logique car un corps peut être composé de volumes qui sont eux-mêmes limités par des faces. Celles-ci sont , à leur tour ,limitées par des arêtes ,les arêtes sont limitées par des sommets et les sommets sont limités en quelque sorte par l'espace lui-même."

Elève y : " Donc, s'il n'y a pas d'arête,il n'y a pas de sommet ! De plus s'il n'y a pas de sommet,il n'y a pas lieu de compter l'espace."

Elève z : "J'essaye d'appliquer cette idée à différents corps et la relation $V - F + A - S + E$ donne toujours 0 .

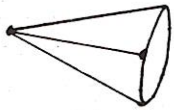
		$V - F + A - S + E$
Un cône		$1 - 2 + 1 - 0 + 0 = 0$

Un cône
sans sa base



$0 - 1 + 1 - 0 + 0 = 0$

Un cône sans
base obtenu
à partir
de son
développement

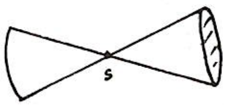


$0 - 1 + 2 - 2 + 1 = 0$

Un tore

$1 - 1 + 0 - 0 + 0 = 0$

Un "diabolo"



$2 - 4 + 2 - 0 + 0 = 0$

Elève x : " Ah oui, s n'est pas à considérer comme un sommet car il ne limite pas une arète !"

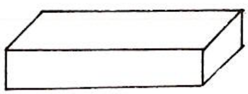
Elève y : " Moi aussi j'ai effectué quelques essais et cela continue à vérifier la relation "

$V - F + A - S + E$

Un segment

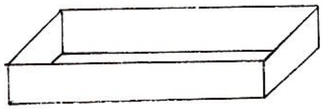
$0 - 0 + 1 - 2 + 1 = 0$

Une boite d'allumettes
(parallèlipipède)



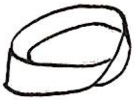
$1 - 6 + 12 - 8 + 1 = 0$

La partie qui contient
les allumettes



0 - 5 + 12 - 8 + 1 = 0

Un ruban de Môbius

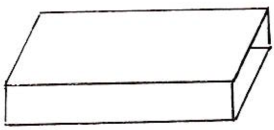


0 - 1 + 1 - 0 + 0 = 0

Elève x (qui ne doute de rien) : " On a donc trouvé une relation plus générale que celle d'Euler.C'est génial ! "

Elève z : " Pas si vite . Il faudrait effectuer un très grand nombre de vérifications. Et puis ,cela ne prouverait pas encore que ce que nous pensons est correct ".

Elève y : " Je peux vous dire que c'est faux ! Je viens de vérifier pour le couvercle de la boite d'allumettes et la relation n'est plus correcte "



V - F + A - S + E

0 - 4 + 12 - 8 + 1 = 1 ?

Elève z : "C'était trop beau ! Mais,cela ne fait rien.C'était intéressant !

Maintenant,un peu d'histoire

Soient α_0 , α_1 , α_2 , respectivement,le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre (fini) homéomorphe (*) à la sphère (dans R^3),à faces homéomorphes au disque et arêtes homéomorphes au segment.

La relation d'Euler (1752) nous donne $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$.

En fait,Descartes,dans une étude sur la somme des angles solides d'un polyèdre (préfigurant quelque peu ce qu'imaginerait Gauss comme courbure totale d'une surface), avait déjà obtenu $2\,\alpha_2 + 2\,\alpha_0 - 4$ comme nombre total d'angles plans.

Plus loin,implicitement,il constatait aussi que ce nombre est $2\,\alpha_1$, ... sous certaines hypothèses mal ou non formulées.

Le raisonnement d'Euler lui-même manque encore de rigueur. Il repose sur certaines formes d'induction,ainsi que de réductions,visant à obtenir,après des suppressions successives de faces,des figures simples pour lesquelles le théorème est évident.

Une généralisation importante est due à Listing,élève de Gauss,qui travaille dans R^n .

Signalons que le même Listing avait déjà découvert le ruban de "Möbius",mais ne l'avait guère exploité .

Poincaré donnera à cette généralisation une forme encore plus universelle et puissante.

Tâchons de l'expliquer quelque peu.

Soit K un polyèdre de R^n (vérifiant une série d'homéomorphismes analogues à ceux imposés dans R^3).
On le dit alors cellulaire.
Les r-cellules,au nombre de α_r ,sont les analogues des sommets,arêtes,.....

(*) c'est à dire,en quelque sorte,équivalents,à une déformation continue près .

La caractéristique "d'Euler-Poincaré" est

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \alpha_n .$$

On la note en général $\chi(K)$.

Le théorème fondamental de Poincaré nous affirme que χ (K) est un invariant topologique de K .

On peut aussi noter que

$$\chi(K) = b_0(K) - b_1(K) + b_2(K) \ldots\ldots + (-1)^n b_n(K)$$

où les b_i (K) sont les "nombres de Betti " de K. Il s'agit

des ordres de certains groupes abéliens liés à K et comptant, en quelque sorte ,les "trous i-dimensionnels" de K .

Quelle est l'importance de cette caractéristique ?

Convenablement généralisée (encore !) à certaines variétés différentiables ,son annulation est,par exemple,une condition nécessaire et suffisante pour l'existence ,sur ces variétés , de champs vectoriels continus sans point singulier.

Que de tels champs puissent exister par exemple sur un tore , mais non sur une sphère , n'est pas sans conséquence sur ... la physique des plasmas et sur les recherches en matière de confinement d'une réaction de fusion thermonucléaire !

Le caractère de plus en plus abstrait des généralisations de la relation initiale d'Euler m'a forcé ,bien malgré moi,à devenir de plus en plus vague.

Je terminerai donc dans un clair- obscur même pas artistique en signalant qu'il existe une super-généralisation de χ(K), à savoir le nombre de Lefschetz .

Ce nombre permet de prévoir l'existence de points fixes d'applications continues de K dans K .

Un cas particulier du théorème de Lefschetz était déjà connu de Brouwer .

Citons l'une de ses conséquences facile à comprendre (mais non à démontrer !) pour des jeunes .

Toute application continue d'un convexe dans lui-même admet au moins un point fixe .

Poincaré et Birkhoff, en 1912 et 1913, ont étendu le champ d'application du théorème de Lefschetz à des fonctions continues qui lui échappaient.

Poincaré espérait appliquer son résultat, l'un des derniers précédant sa mort, au problème " des trois corps ".

Quel singulier raccourci : la caractéristique d'Euler-Poincaré nous aura mené des solides platoniciens à l'astronomie, en passant par l'analyse.

Le ciment de toute cette théorie s'appelle évidemment ...

..... **TOPOLOGIE** .....

C. Radoux , C. Villers

Réponses aux questions de l'article Multiples de ...

2.1 Le chiffre central est la somme des deux chiffres extrêmes
- Ils sont tous les trois multiples de 11

$473 = 43 \times 11$, $385 = 35 \times 11$, $121 = 11 \times 11$, $198 = 18 \times 11$
$891 = \ldots$

Peut-être as-tu pensé à d'autres propriétés. Nous ne reprenons ici que celles utilisées dans la suite.

2.2 "cdu" × 11 "c (c+d) (d+u) u" , avec reports éventuels si $c + d > 9$ et/ou $d + u > 9$
$1452 = 11 \times 132$

2.3 121, 242, 363, 484

3.1 "abcba" "abccba" : Le nombre écrit à l'envers est égal au nombre donné.

3.2 383, 727, 656, 121 ne sont pas multiples de 3
636, 141, 333, 717, 909 sont multiples de 3
Dans les nombres "aba" multiples de 3 , le nombre a − b est multiple de 3

3.3
$a - b = 9$ 909
$a - b = 6$ 606, 717, 828, 939
$a - b = 3$ 303, 414, 525, 636, 747, 858, 969
$a - b = -6$ 171, 282, 393
$a - b = -3$ 141, 252, 363, 474, 585, 696
$a - b = 0$ 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999

3.4 "abba" est multiple de 3 $\iff a + b \in \{3,6,9,12,15,18\}$.
Il existe 30 nombres palindromes de quatre chiffres qui sont multiples de 3 ... il y en a donc exactement autant que de nombres de trois chiffres !

4.1 Les multiples de 7 sont 231, 1988 et 392 056

Codons et décodons en RSA
Solutions des problèmes du Rallye

Suite à l'article de Madame Françoise Valette publié dans le numéro 37 de MATH-JEUNES, voici un programme permettant de coder et de décoder un message en utilisant le système RSA.

Bien entendu, ce programme ne travaille pas avec des nombres de 200 chiffres, les moyens techniques dont on dispose ne sont pas suffisants, de plus, générer des nombres premiers de 100 chiffres ...

Le choix s'est porté sur les nombres $p = 97$, $q = 103$, ce qui donne pour n la valeur 9991, et pour le nombre e la valeur $e = 89$. Dans ce cas précis, $\varphi(n) = 9792$ et l'inverse de 89 modulo 9792 vaut 4841.

Pour la transcription du message sous forme numérique, le code ASCII fut mis à profit. Chaque caractère s'est vu attribuer un nombre de deux chiffres égal à la valeur décimale de son code ASCII - 32 ce qui permet non seulement de transcrire les majuscules mais aussi les minuscules, les espaces, les chiffres et les caractères de ponctuation.

Les différentes manipulations sur le message et sur sa codification se font par l'intermédiaire de variables alphanumériques ce qui limite la longueur du message à 128 caractères. Cette valeur peut être améliorée moyennant certains aménagements du programme.

Programme de CODAGE.

```
 10 INPUT "Entrez le message";A$
 20 A=len(A$)
 30 FOR I=1 TO A
 40 B$=MID$(A$,I,1)
 50 B=ASC(B$)-32
 60 C$=RIGHT$(STR$(100+B),2)
 70 D$=D$+C$
 80 NEXT I
100 D=LEN(D$):E=INT(D/4):R=D-E*4
110 IF R<>0 THEN D$=D$+"00": D=D+2
120 FOR J=1 TO D STEP 4
130 C=VAL(MID$(D$,J,4))
140 F=1
150 FOR I=1 TO 89
160 Q=INT(F*C/9991)
170 F=F*C-Q*9991
180 NEXT I
190 E$=E$+RIGHT$(STR$(10000+F),4)
200 NEXT J
210 PRINT "Message codé: ";E$
220 END
```

Les lignes 10-80 transcrivent le message et le stockent dans une variable alphanumérique. La ligne 60 permet de s'assurer que chaque caractère du message est transcrit en deux chiffres.

Les lignes 100-110 complètent la transcription par 00 caractère blanc) si le message ne contient pas un nombre pair de caractères.

Les lignes 120-200 effectuent le codage proprement dit.

Programme de DECODAGE.

```
10 INPUT "Message à décoder";N$
20 N=LEN(N$)
30 FOR J=1 TO N STEP 4
40 D=VAL(MID$(N$,J,4)
50 F=1
60 FOR I=1 to 4841
70 Q=INT(F*D/9991)
80 F=F*D-9991*Q
90 NEXT I
100 G$=G$+RIGHT$(STR$(10000+F),4)
110 NEXT J
120 G=LEN(G$)
130 FOR I=1 TO G STEP 2
140 F$=MID$(G$,I,2)
150 M$=M$+CHR$(VAL(F$)+32)
160 NEXT I
170 PRINT "Message décodé"; M$
180 END
```

Le message à décoder (exprimé sous forme alphanumérique) est scindé en blocs de quatre chiffres (lignes 30 et 40). Chaque nombre ainsi formé subit l'opération de décodage (lignes 50 à 90) et le résultat est complété par des 0 placés devant pour obtenir 4 chiffres (ligne 100). On obtient ainsi le message décodé (G§) .

Les lignes 130-160 réalisent la transcription en clair.

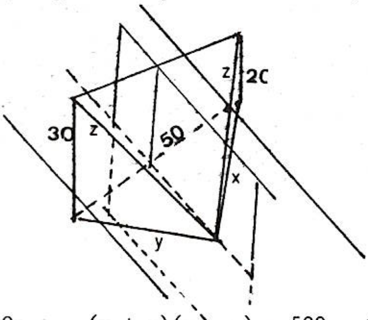
Je désire remercier mon professeur d'informatique, Monsieur Troessaert pour la recherche des nombres et pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés durant la réalisation de ce travail.

Fabrice BALON
4ème rénovée Athénée d'Arlon

Qui décodera mon message ?

11442559451521302823404304085021

R 151 *Ce problème n'a été résolu correctement que par Didier Bousmar. Tous les autres n'ont donné qu'une partie de la solution se limitant au plan des deux palmiers.*
Solution de Didier :
(Longueurs exprimées en aunes).



Le poisson est à la même distance des sommets des palmiers, il est donc dans le plan perpendiculaire au segment joignant les deux sommets, en son milieu. De plus il est dans le fleuve. Il est donc sur la droite d'intersection de ces deux plans.

On a $x^2 + 20^2 = z^2 = y^2 + 30^2$

d'où $x^2 - y^2 = 500$

Le lieu de la collision des deux oiseaux est tout point répondant à cette condition et étant dans le plan du fleuve. Recherchons les valeurs entières possibles de x et y

On a $(x + y)(x - y) = 500$ et $x + y \geqslant 50$ donc $x - y$ divise 500 et $x - y \leqslant 10$

Les différentes possibilités sont

$x - y = 1$, $x + y = 500$ pas de solution entière

$x - y = 2$, $x + y = 250$: $x = 126$, $y = 124$

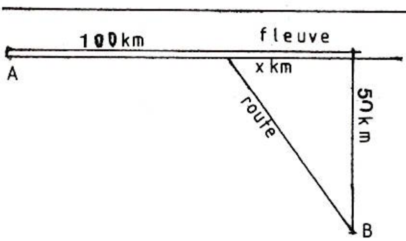
$x - y = 4$, $x + y = 125$ pas de solution entière

$x - y = 5$, $x + y = 100$ pas de solution entière

$x - y = 10$, $x + y = 50$: $x = 30$, $y = 20$

Il y a 3 positions possibles pour le poisson :
dans le plan des deux palmiers $x = 30$, $y = 20$
en amont et en aval de ceux-ci $x = 126$, $y = 124$.

R 152 *Le problème a été correctement résolu par Luc Berthe, Catherine Absil, Frédéric Poncin, Renaud Sieaire, Philippe Masson, Didier Bousmar. Voici les solutions de Catherine qui utilise les dérivées et de Didier qui ne les utilise pas.*



Soit P la fonction prix total et z le prix d'une tonne de marchandise par Km par fleuve. On a

$$P = (100-x).z + \sqrt{x^2 + 2500}\,.\,2z$$
$$= z.(100 - x + 2\sqrt{x^2 + 2500})$$

Annulons la dérivée

$$P' = z\left(-1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2500}}\right)$$

$P' = 0$ si $-\sqrt{x^2 + 2500} + 2x = 0$

si $x^2 + 2500 = 4x^2$

si $x = \pm \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$

mais la solution négative est à rejeter

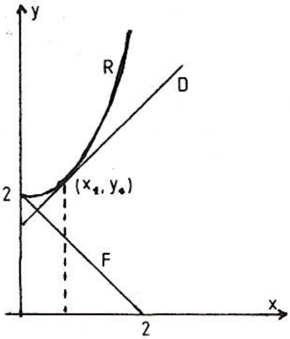
$P' = 0$ ssi $x = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ La fonction admet-elle bien un minimum en ce point ?

x		$\frac{50\sqrt{3}}{3}$	
P'	−	0	+
P	↘	n	↗

en zéro; P' est négative
en 100 ; P' est positive

Il s'agit bien d'un minimum.
Le prix du transport d'une tonne de marchandise est minimum lorsque l'on fait (100 - 50/ 3) km par fleuve et 57,735 km par route.

Solution de Didier



Pour simplifier un peu nos écritures prenons comme unité de distance (50km)
Désignons par z la distance à parcourir par route
par $2 - x$ celle à parcourir par fleuve. On a
Prix du transport par fleuve : $2 - x$
Prix du transport par route : $2z$
Or $z = \sqrt{x^2 + 1}$
Soit F $y = -x + 2$
R $y = 2\sqrt{x^2 + 1}$
T $y = -x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 1}$
T est la fonction à minimiser.
sur T : si $x = 0$, $y = 4$
si $x = 1$, $y = 1 + 2\sqrt{2} \simeq 3,83$
si $x = 2$, $y = 2\sqrt{5} \simeq 4,47$
T atteint donc un minimum entre 0 et 2

Au point x où T passe par un minimum, la tangente est horizontale. Donc, en ce point x les tangentes à F et à R ont des coefficients angulaires opposés (car leur somme est nulle). Or F étant une droite le coefficient angulaire de la tangente est celui de la droite, ici -1.
Recherchons donc la tangente à R de coefficient angulaire 1.

Soit $D \equiv y = 1.x + b$ avec $0 \leqslant b \leqslant 2$
et soit $\{(x_1,y_1)\} = R \cap D$
On a $y_1 = x_1 + b$
$y_1 = 2\sqrt{x_1^2 + 1}$ $x_1 + b = 2\sqrt{x_1^2 + 1}$
Elevons au carré $x_1^2 + 2bx_1 + b^2 = 4x_1^2 + 4$
$3x_1^2 - 2bx_1 + 4 - b^2 = 0$

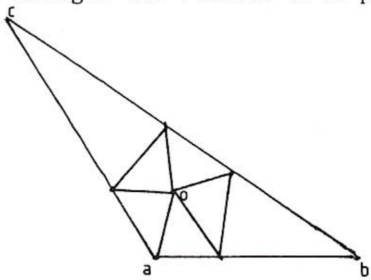
dont la racine doit être double (D tangente à R). Il faut donc que
$$= 4b^2 - 12(4 - b^2) = 0$$
$$b^2 = 3$$
$$b = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad b = -\sqrt{3} \text{ (à rejeter)}$$
avec $b = \sqrt{3}$ l'équation à résoudre devient
$$3x_1^2 - 2\sqrt{3}\,x_1 + 4 - 3 = 0$$
$$(\sqrt{3}\,x_1 - 1)^2 = 0$$
Le minimum est donc atteint pour $x = 1/\sqrt{3}$
En km la valeur de x est $50/\sqrt{3} \simeq 28,87$
On doit construire la route en quittant le fleuve à $100 - 50/\sqrt{3} \simeq 71,13$ kilomètres de Atchi.

Philippe Masson et Frédéric Poncin ont remarqué que dans sa bonne position la route fait un angle de 60° avec le fleuve car $tg\ \alpha = \sqrt{3}$. Petite question supplémentaire : si l'on change les distances (100km et 50km) obtiendra-t-on toujours que la route et le fleuve font un angle de 60° ?

R 103 *Bonnes solutions, bien justifiées de Frédéric Poncin et Philippe Masson qui donnent une solution particulière intéressante et de Didier Bousmar qui donne un ensemble de solutions.*

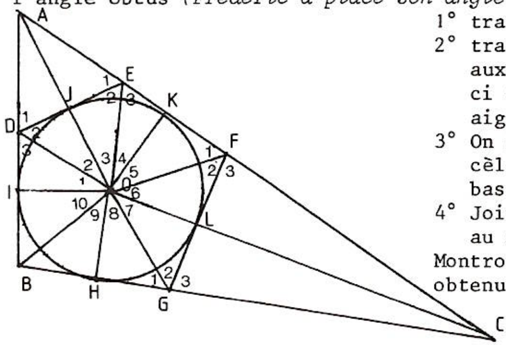
Justification du nombre minimum de triangles par Philippe

Prenons un triangle abc obtusangle en a . Il est évident que l'angle obtus bac doit être partagé donc un segment doit partir de a .
Il ne peut aboutir sur bc car il déterminerait 2 angles dont au moins un ne serait pas aigu ce qui ramènerait au problème initial.
Le segment qui part de a doit donc aboutir en un point intérieur au triangle abc . Autour de ce point, o dans ma construction, il y a 360°, à partager en angles aigus ce qui entraine qu'il faut au moins 5 angles, c'est-à-dire 4 segments différents de ao . Ces quatre segments peuvent arriver sur les côtés du triangle abc à condition que l'angle obtus que chacun détermine soit partagé par un côté des nouveaux triangles que l'on construit. Il est évidemment impossible de partager ces quatre angles avec un seul segment. Avec deux c'est possible et l'on obtient ainsi un nombre minimum de 7 triangles.



Justification de la solution particulière par Frédéric

J'ai trouvé une méthode simple pour décomposer le triangle en 7 triangles acutangles et elle est toujours valable quelle que soit l'amplitude de l'angle obtus *(Frédéric a placé son angle obtus en B)*



1° tracer le cercle inscrit
2° tracer les tangentes aux cercles aux points d'intersection de celui-ci avec les bissectrices des angles aigus
3° On forme ainsi deux triangles isocèles. Joindre les sommets de leur base au centre du cercle inscrit.
4° Joindre le sommet de l'angle obtus au centre du cercle inscrit.

Montrons que tous les triangles ainsi obtenus sont acutangles.

. CGF est un triangle isocèle donc G_3 et F_3 sont inférieurs à 90°
. Les triangles OHG, OGL, OLF, OFK sont isométriques car
  - $|OH| = |OL| = |OK|$ = rayon du cercle inscrit
  - $|OG| = |OF|$ par raison de symétrie
  - les triangles sont rectangles.

  On en déduit que $G_1 = G_2 = F_1 = F_2$
  $O_5 = O_6 = O_7 = O_8$
. $G < 90°$ car $G_1 + G_2 + G_3 = 2G_1 + G_3 = 180°$ donc $G_1 = \dfrac{180° - G_3}{2}$ et $G_3 \neq 0°$
. $O_5 < 45°$ car $O_5 + O_6 + O_7 + O_8 < 180°$, sinon plus de triangle initial)
. Un raisonnement analogue sur les triangles IOD , DOJ, JOE, EOK conduit à $D_2 = D_3 = E_2 = E_3 < 90°$ et $O_1 = O_2 = O_3 = O_4 < 45°$

. $B_1 = B_2$ et $90° < B_1 + B_2 < 180°$ donc $45° < B_1 = B_2 < 90°$
d'où $O_9 < 45°$ car OBK est rectangle et $O_{10} < 45°$ car OBI est rect.

Les 7 triangles sont donc bien acutangles.
ADE et CGF car isocèles
DOE car $D_2 < 90°$, $E_2 < 90°$ et $O_3 + O_2 < 90°$
DOG car $D_3 < 90°$, $G_1 < 90°$ et $O_4 + O_5 < 90°$
GOF car $G_2 < 90°$, $F_2 < 90°$ et $O_6 + O_7 < 90°$
FOB car $F_1 < 90°$, $B_2 < 90°$ et $O_9 + O_8 < 90°$
EOB car $E_3 < 90°$, $B_1 < 90°$ et $O_{10} + O_1 < 90°$

Didier choisit également comme point intérieur au triangle le centre du cercle inscrit et considère des perpendiculaires DE et GF aux bissectrices mais ne leur impose pas d'être tangentes au cercle inscrit. Il examine les différents triangles formés et déduit des conditions à remplir par les angles DOE et GOF pour avoir tous des triangles acutangles. Désignant par α , β , γ les mesures en degré des angles du triangle de départ (avec $\beta > 90$) et par x et y les mesures des angles DOE et GOF , il obtient les conditions

$$90 > x > \gamma \quad , \quad 90 > y > \alpha \quad , \quad x + y > \beta$$

Ces conditions pouvant être remplies pour différentes positions des droites DE et FG , il obtient un ensemble de solutions; la solution donnée par Philippe et Frédéric appartient évidemment à cet ensemble.

R 154 *Ont donné la solution avec une justification correcte : Stéphane Dupont, Emmanuel De Smackers, Luc Berthe, Philippe Masson, Didier Bousmar, Catherine Absil, Renaud Sizaire, Frédéric Poncin.*
Solution d'Emmanuel :
Emmanuel, qui a probablement l'habitude de manipuler des calculettes commence par déterminer le taux par encadrements en calculant numériquement la valeur acquise par un capital de 100F après chaque année pendant 10 ans. Par des encadrements successifs il approche le taux de 7,18%. Puis, ayant réalisé ce qui se passait, il retraite le problème en établissant la formule calculant la valeur acquise par son capital après n années. Voici sa solution

Soit a la population de départ
x le taux pour 1 de l'intérêt

Années	Capital acquis
0	a
1	$a + ax = a(1 + x)$
2	$a(1 + x) + a(1 + x).x$ $= a(1 + x)^2$
3	$a(1 + x)^2 + a(1 + x)^2 .x$ $= a(1 + x)^3$
.	.
.	.
.	.
n	$a(1 + x)^n$

Après n années la valeur acquise est donc
$$a(1 + x)^n$$
On a par conséquent l'équation $a.(1 + x)^{10} = 2a$
et
$$x = \sqrt[10]{2} - 1 = 0.0717735..$$
Le poureentage est 7.18%

R 156 *Le problème posé vous a permis de donner libre cours à votre imagination et le jury a été mis de bonne humeur par la lecture de certaines de vos réponses; la présence de nuages, de brouillard, le fait de se tourner le dos, de ne pas regarder dans la direction de l'autre, etc sont évidemment des éléments occasionnels et nous aurions mieux fait de poser la question en disant : les personnes placées sur les deux montagnes peuvent-elles avoir l'occasion de se voir. Une des réponses les plus complètes est celle de Catherine que voici*

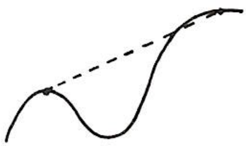
Considérons deux cas : 1) les deux montagnes sont à même altitude
2) les deux montagnes sont à des altitudes différentes

Je considère des sommets arrondis par l'érosion

1)

A et B se voient pour autant que
- ils ne sont pas trop éloignés
- ils regardent dans la direction l'un de l'autre
- qu'il n'y a pas de nuages, de brouillard

2)



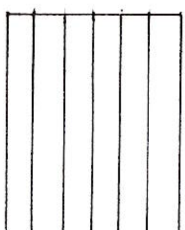
Tout ce que peut voir B (à gauche) correspond à la partie supérieure à D, c'est-à-dire au dessus de D ce qui entraine que si A n'appartient pas à cette partie B et A ne se voient pas

D est en fait une demi-droite issue de B et qui suit au maximum le sommet de la montagne.

Il eut évidemment été plus élégant de dire que l'on considère l'ensemble des demi-droites issues de l'oeil de B tangentes à sa montagne et que cet ensemble forme une surface séparatrice de l'espace en deux régions, l'une visible à partir de B et l'autre non atteignable par le regard de B .

R 157 *Solution correctement justifiée par Frédéric Poncin, Catherine Absil, Didier Bousmar, Philippe Masson*

Solution de Frédéric Poncin



1° Si on plie la feuille en 6 bandes de largeur $b/6$

la hauteur $= b/6$

la largeur $= b/3$

la longueur $= a - 2b/6$

d'où $$V_1 = \frac{b^2(a - b/3)}{18}$$

2° Si on plie la feuille en 6 bandes de largeur $a/6$

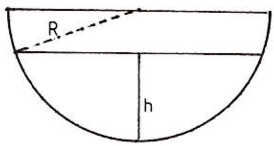
$h = a/6$, $l = a/3$, $L = b - a/3$

d'où $$V_2 = \frac{a^2(b - a/3)}{18}$$

On a donc $V_1 - V_2 = \frac{1}{54}(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = \frac{(a-b)^3}{54}$

et comme $a > b$ on a $V_1 > V_2$. Pour avoir le volume maximum, il faut donc plier parallèlement au côté le plus long.

R 160 *Solutions avec justifications correctes de Renaud Sizaire, Catherine Absil, Didier Bousmar, Philippe Masson.*
Solution de Renaud Sieaire :



La partie contenante du verre est formée par une demi sphère de rayon R
Son volume est donc
$$\frac{2}{3}\pi R^3$$
Soit h la hauteur du liquide contenu (à partir du fond du verre) et V le volume qui y est associé
$$V'(h) = \pi(R^2 - (R^2 - h^2))$$
$$= 2\pi Rh - \pi h^2 .$$
(aire de la surface du liquide)
d'où
$$V(h) = \pi Rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$
Le verre sera plein à moitié si ce volume vaut
$$\frac{1}{3}\pi R^3$$

On obtient l'équation $\pi Rh^2 - \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{1}{3}\pi R^3$

Posant $x = h/R$ donc $Rx = h$ elle se transforme en
$$x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$$
$$3x^2 - x^3 - 1 = 0$$

En recherchant numériquement les valeurs des racines on trouve :
$x_1 \simeq 0,6527037$ $x_2 \simeq 2,8793852$ $x_3 \simeq -0,5320889$
Seule la première racine est valable, on a donc
$$h = 0,6527037\ R$$

R 161 *Ont bien répondu Renaud Sizaire, Frédéric Poncin, Catherine Absil, Didier Bousmar, Philippe Masson, Luc Berthe, Emmanuel De Smackers, Stéphane Dupont, Christophe Gosseye*
Solution de Christophe

Ce nombre peut s'écrire "abcabc" soit 1001(100a + 10b + c). Or 1001 est divisible par 7, 11 et 13 (quotients : 143, 91, 77) et donc le nombre "abcabc " est divisible par 7, 11 et 13.

R 162 *Justifications correctes de Renaus Sizaire, Catherine Absil, Didier Bousmar, Philippe Masson, Luc Berthe, Vincent Lepoutre, Stéphane Dupont*
Solution de Vincent
Pour résoudre ce problème, j'ai envisagé plusieurs cas :
1)Supposons que le premier habitant soit un Dupont. Nous avons :
 1. Dupont 2 ? 3 ?
Comme c'est un Dupont, il dit la vérité, donc les deux autres habitants sont de la même famille.
a) Le deuxième habitant est un membre de la famille Dupont, donc
 1. Dupont 2. Dupont 3. Dupont
Mais c'est impossible car la deuxième personne est un Dupont, il dit vrai, d'où le premier n'est pas de la même famille que lui. Ce qui n'est pas le cas ici. Donc éliminons cette hypothèse.

b) Le deuxième habitant est un membre de la famille Duran, donc

1. Dupont 2. Duran 3. Duran

C'est aussi impossible car si le deuxième est un Duran, il ment, d'où le premier habitant est de sa famille. Ce qui n'est pas le cas non plus ici. Donc, éliminons

2. Supposons que le premier habitant soit un Duran. Nous avons

1. Duran 2. ? 3. ?

Comme c'est un membre de la famille Duran, il ment, donc les deux autres habitants sont de familles différentes.

a) Le deuxième habitant est un Dupont, donc

1. Duran 2. Dupont 3. Duran

Comme le deuxième est un Dupont, il dit la vérité, d'où le premier et le deuxième ne sont pas de la même famille. Donc cette disposition est bonne

b) Le deuxième habitant est un Duran :

1. Duran 2. Duran 3. Dupont

Si le deuxième est un Duran, il ment, donc le premier est de sa famille, ce qui est exact dans le cas présent.

Nous avons donc deux solutions possibles

1. Duran 2. Dupont 3. Duran
1. Duran 2. Duran 3. Dupont

Les réponses sont : 1) il y a 1 Dupont
2) le premier est de la famille Duran.

R 163 *Bonnes solutions de Luc Berthe, Didier Bousmar, Catherine Absil*

Solution de Catherine

Combien y a-t-il de nombres composés de 9 chiffres différents non nuls?

Il s'agit d'arrangements ; il y a 9! nombres de 9 chiffres différents c'est-à-dire 362 880 nombres

......
6 possibilités
7 possibilités
8 possibilités
9 possibilités

Parmi tous ces nombres, il y en a a autant qui se terminent par 1 que par 2, que par 3 ... que par 9

donc chaque fois $9!/9 = 8!$ nombres soit 40320 nombres

On a donc somme des unités = $40\ 320(1 + 2 + \ldots + 9) = 40\ 320 \cdot 45$
$= 1\ 814\ 400$ unités

Un raisonnement analogue sur les autres colonnes conduit à

somme des dizaines = 1 814 400 dizaines
somme des centaines = 1 814 400 centaines
....

donc la somme totale $= 1\ 814\ 400\ (1 + 10 + \ldots + 100\ 000\ 000)$
$= 1\ 814\ 400 \cdot 111\ 111\ 111$
$= 201\ 599\ 999\ 798$
(calcul fait à la main car la machine arrondit)

R 164 *Aucune des solutions données ne nous a vraiment satisfait bien que pour plusieurs d'entre vous elles aient conduit à une réponse exacte. Une petite remarque d'abord : comme nous le fait justement remarquer l'un d'entre vous il eut été plus correct de demander la masse de l'objet pesé que son poids. L'abus est fréquent dans le langage courant et nous nous en excusons. Qu'entend-on par une balance ma équilibrée ?*

On n'envisagera normalement pas d'effectuer une pesée avec une balance si, à vide, son fléau n'est pas horizontal. Il faut donc éliminer des suppositions telles que bras inégaux et supports de même musse ou bras égaux et plateaux de masses différentes. Ceci n'apparaît pas clairement dans les solutions proposées. Voici une proposition de solution

Soient M_1 et M_2 les masses des supports et L_1 et L_2 les longueurs des bras du fléau d'une balance en équilibre. On a $M_1 \times L_1 = M_2 \times L_2$.
Soit P la masse de l'objet à peser.
Lors de la première pesée

$$(M_1 + P) \times L_1 = (M_2 + 1) \times L_2$$

Lors de la deuxième pesée

$$(M_1 + 1,1) \times L_1 = (M_2 + P) \times L_2$$

Comme $M_1 \times L_1 = M_2 \times L_2$ ces relations se simplifient en

$$P \times L_1 = 1 \times L_2$$
$$1,1 \times L_1 = P \times L_2$$

et par suite

$$P^2 = 1 \times 1,1 = 1,1$$

On a donc

$$P = \sqrt{1,1} = 1,048...$$

R 165 *Solutions correctes et bien justifiées de Renaud Sizaire, Catherine Absil, Didier Bousmar, Luc Berthe, Vincent Lepoutre*
Voici la solution de Vincent
Nous savons que la vitesse du piéton est de 4km/h, il est donc facile de calculer le temps qu'il met pour parcourir 1km 2/3

1km 1/4h

5/3km 5/3 . 1/4h = 25 min

Nous découvrons ainsi le temps mis par la diligence pour parcourir la même distance : 25min - 15min = 10 min
Nous pouvons donc calculer la vitesse de la diligence :

5/3km 1/6 h

30/3km = 10 km 1 h

Pour arriver au km 14 + 2/3 , le piéton a mis :

1 km 1/4 h
13 km 13/4 H = 3h 15min
3h15min + 25 min = 3h 40min

La diligence roule donc pendant :

3h40min - 15min - 30 min = 2h55min.

Calculons le nombre de km parcourus par la diligence en ce temps :

1km 1/10 h

29km1/6 2h55min =(2 + 55/60) h

La distance du km 14 + 2/3 à B est donc

$$\frac{29\text{km}1/6 - 14\text{km}2/3}{2} = \frac{14\text{km}1/2}{2} = 7\text{km}1/4$$

Une simple addition permet alors de calculer la distance de A à B :

7km1/4 + 14km2/3 = 21km11/12

R 166 *Réponses correctes et bien justifiées de Philippe Masson et Renaud Sizaire*

Solution de Renaud

De $$a + b\sqrt{c} = (9 + 4\sqrt{5})^{1/3}$$
nous déduisons $$(a + b\sqrt{c})^3 = 9 + 4\sqrt{5}$$
$$(a^3 + 3ab^2c) + (3a^2b + b^3c)\sqrt{c} = 9 + 4\sqrt{5}$$
On peut supposer que $c = 5$, on a alors
$$(a^3 + 15ab^2) + (3a^2b + 5b^3)\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}$$
qui se décompose en $a^3 + 15ab^2 = 9$ et $3a^2b + 5b^3 = 4$

Posons $a = xb$ avec x rationnel
$$x^3b^3 + 5xb^3 = 9$$
$$3x^2b^3 + 5b^3 = 4$$
et en égalant les valeurs de $1/b^3$ tirées des deux équations on obtient l'équation en x
$$4(x^3 + 15x) = 9(3x^2 + 5)$$
$$4x^3 - 27x^2 + 60x - 45 = 0$$
dont les racines sont $$x = 3$$
$$x = \frac{15 + i\sqrt{15}}{2}$$
$$x = \frac{15 - i\sqrt{15}}{2}$$

On ne retient que la première racine . Lpremière équation du système donne alors
$$27b^3 + 45b^3 = 9$$
d'où $$b = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{3}{2} \quad .$$

On a donc $$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^{1/3}$$

Signalons une solution plus astucieuse de ce problème. Il est souvent utile d'utiliser cette astuce lorsque l'on a affaire à des binômes irrationnels ou complexes

Posons $x_1 = (9 + 4\sqrt{5})^{1/3}$ et $x_2 = (9 - 4\sqrt{5})^{1/3}$. Le produit $x_1x_2 = 1$

Soit alors $s = x_1 + x_2$, on a
$$s^3 = x_1^3 + 3x_1^2\,x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = 18 + 3s$$
s est donc solution de l'équation $s^3 - 3s - 18 = 0$ qui se décompose en $$(s - 3)(s^2 + 3s + 6) = 0$$
et admet comme seule racine réelle $s = 3$

x_1 et x_2 sont donc racines de l'équation du second degré
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
c'est-à dire $$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
Comme on sait par l'énoncé que $x_1 > 1$, la seule racine à retenir est
$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

R 167 *Solutions correctes de Catherine Absil, Didier Bousmar, Renaud Sizaire*

Voici celle de Didier

Soit a le premier chiffre de n (1   a   9)

Soit b , le nombre n dont on a effacé le premier chiffre (b $\mathbb{N}$)

On a

$$n = a.10^k + b$$

(k est le nombre de chiffres de b)

1) Il faut $57b = a.10^k + b$

$56b = a.10^k$

$7 . 8 . b = a.10^k$

Il faut donner à a une valeur qui permette de simplifier l'expression. Il faut lui donner la valeur 7 car 7 est premier avec 10^k .

Si a = 7 , $8b = 10^k$

On peut alors donner à b toute valeur telle que $8b = 10^k$, par exemple 125 ou 125.10^{k-3}

Le nombre 7125 remplit la condition posée ainsi que 7125 multiplié par une puissance quelconque de 10 .

2) Il faut $58b = a.10^k + b$

$57b = a.10^k$

57 = 3   19 . 3 et 19 étant premiers avec 10^k , il faudrait que 57 divise a , Or 1   a   9 donc a n'est pas divisible par 57. Il est donc impossible de trouver un nombre répondant à la condition.

R 168 *La seule solution vraiment convaincante nous est donnée par Philippe Masson. Plusieurs d'entre vous ont basé leur raisonnement sur la construction d'une séquence autour de 14 , quotient par défaut de 100 par 7 mais sans nous montrer qu'une telle séquence allait fournir la somme la plus petite possible pour les trois plus grandes parts.*

Solution de Philippe

Appelons n le nombre de pièces de l'écolier qui en a le plus.
n doit être supérieur (strictement) à 17, sinon les écoliers n'auraient pas 100 pièces ensemble. En effet si l'écolier qui en a le plus en a au maximum 17, le suivant (par ordre décroissant du nombre de pièces) en a au maximum 16, ... jusqu'au dernier qui en a au maximum 11. Sonc ensemble ils en ont au maximum 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17, ce qui fait 98 pièces. Ils ne pourraient donc pas en avoir 100.

Procédons par l'absurde. Supposons qu'il n'y ait aucun groupe de 3 écoliers qui a 50 pièces au moins. Dès lors, aucun groupe de deux écoliers (différents de celui qui a n) ne peut posséder 50 - n pièces ou plus. Donc le troisième écolier (le premier étant celui qui a n pièces, le second celui qui en a le plus après le premier, ... , c'est donc un classement selon le nombre décroissant de pièces)

a) en aura donc au maximum $\frac{50 - n}{2} - 1$, si n est pair.

En effet, s'il en avait $\frac{50 - n}{2}$ ou plus, le second en aurait au minimum $\frac{50 - n}{2} + 1$.

Et donc les trois premiers étudiants auraient au minimum 51 pièces.

Comme le troisième a au maximum $\frac{50-n}{2} - 1$ pièces, la quatrième en a au maximum $\frac{50-n}{2} - 2$, le cinquième $\frac{50-n}{2} - 3$, ...
Le deuxième et le troisième en ont ensemble <u>moins de</u> $50 - n$. Comme le premier en a n , les 7 écoliers auront ensemble <u>moins de</u>

$$n + 50 - n + \frac{50-n}{2} - 2 + \frac{50-n}{2} - 3 + \frac{50-n}{2} - 4 + \frac{50-n}{2} - 5$$

$= 136 - 2n$ pièces

Or $n \geqslant 18$, donc les écoliers auront ensemble moins de 100 pièces.

b) le troisième écolier en aura au maximum $\frac{50-n}{2} - \frac{1}{2}$, si n est impair
Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que le quatrième en a au maximum $\frac{50-n}{2} - \frac{3}{2}$, le cinquième $\frac{50-n}{2} - \frac{5}{2}$
....
Les 7 écoliers auront ensemble moins de $138 - 2n$ pièces.
Or $n \geqslant 19$ (car n est impair) donc les écoliers auront ensemble moins de 100 pièces.

Il est donc absurde de supposer que les trois premiers ont ensemble moins de 50 pièces.

La démonstration de Philippe est convaincante, mais pas très élégante. Partant de la même idée que lui, en voici une plus directe.
Rangeons les élèves par ordre décroissant des pièces, et a_1 , a_2 , a_3, a_4 , a_5 , a_6 , a_7 le nombre de pièces de chacun d'eux. Il est évident que pour que tout groupe de trois élèves ait moins de 50 pièces il faut

que $\quad a_1 + a_2 + a_3 < 50$

et donc $\quad a_4 + a_5 + a_6 + a_7 > 50$

Or $\quad 14 + 13 + 12 + 11 = 50$

On a donc nécessairement $\quad a_4 \geqslant 15$

et par suite $\quad a_3 \geqslant 16$, $a_2 \geqslant 17$, $a_1 \geqslant 18$ $\qquad a_1 + a_2 + a_3$ ne sera pas inférieur à 50. La construction d'un tel triple est donc impossible.

* * *

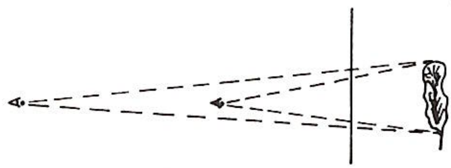
Réponses aux autres problèmes

La place nous manque pour vous donner des solutions détaillées. Voici simplement les réponses.

R 152

```
  285
   39
 ----
 2565
 855
 ----
11115
```

R 155 Voici un schéma qui décrit la situation.



Seconde position de l'observateur **Première position de l'observateur**

R 158 Le verre a la forme d'un cône

$V_1/V_2 = 1/2 \Longrightarrow H_1/H_2 = 1/\sqrt[3]{2}$
$= 0.793700$

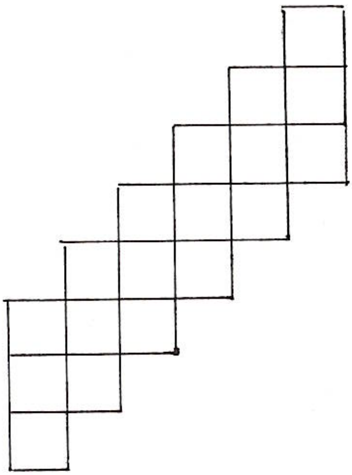
R 159

$S = 1 + 3 + \ldots + 2n-3 + 2n-1$

$S = 2n-1 + 2n-3 + \ldots + 3 + 1$

$2s = 2n \times n \Longrightarrow S = n^2$

Un petit jeu pour vos vacances



Remplir cette grille de "nombres croisés (un chiffre par case) en n'utilisant que des nombres premiers (horizontalement et verticalement).

Essayez de construire une "grille-marathon" beaucoup plus longue en utilisant le même principe : rien que des nombres premiers .

Yolande Noël

et de petits problèmes de vacances

Quel est le plus grand nombre que l'on peut écrire avec trois chiffres 9 ?

Quelle est l'épaisseur obtenue en pliant en deux, 20 fois successivement, une feuille de papier de 0,2 mm d'épaisseur

Pierre-Marie RENARD

Déterminer le nombre N s'écrivant en numération décimale abcd , tel que l'addition suivante soit vérifiée

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & a & b \\ c & d & a \\ b & c & d \\ \hline a & b & c & d \end{array}$$

Ce dernier problème a été posé lors de l'épreuve éliminatoire du deuxième championnat de France des jeux mathématiques et logiques (catégorie collèges (11 à 15 ans)) .

Les Enseignements du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles

LES DEBOUCHES.

Les aptitudes développées lors des études organisées par le Département de Mathématique de l'U.L.B. trouvent à s'employer dans tous les secteurs d'activité; les débouchés suivants figurent cependant parmi les principaux consommateurs de mathématiciens et d'informaticiens.

Banques, Assurances, Organismes financiers.

Les banques et les compagnies d'assurances engagent des mathématiciens orientés, principalement, vers le calcul des probabilités, la statistique, la recherche opérationnelle. Un diplôme complémentaire (actuariat, licences et certificats délivrés par l'Institut de Statistique) peut être un atout important dans ces domaines (voir détails plus loin). La demande en diplômés dans ces orientations dépasse l'offre depuis plusieurs années, et continuera très vraisemblablement à connaître un développement important avec l'élargissement des marchés prévu pour 1992. Elles engagent également des informaticiens spécialisés dans les options système, matériel et numérique.

Entreprises commerciales et industrielles.

Les débouchés pour les licenciés en informatique sont extrêmement nombreux et diversifiés. Dans la plupart des entreprises importantes la présence d'un ou de plusieurs licenciés en informatique est indispensable; la formation particulièrement soignée qu'ils ont reçue leur permet d'accéder très rapidement à des postes fort intéressants. Il importe de ne pas confondre les mathématiciens ayant des connaissances de programmation, et les informaticiens, chacun d'eux trouvant sa place dans des créneaux fort larges mais distincts.

Enseignement.

Durant leur dernière année d'études, les étudiants peuvent présenter les épreuves de l'agrégation de l'enseignement secondaire. Après plusieurs années de blocage des recrutements, la situation s'est maintenant inversée et dès cette année les mathématiciens peuvent trouver rapidement un poste de professeur.

Recherche.

La recherche s'effectue dans deux directions.

La recherche pure s'exerce dans les universités et au Fonds National de la Recher he Scientifique ainsi que dans le cadre de projets européens. En général, ce sont les meilleurs étudiants qui trouvent de la place dans ce cadre.

Une première étape est alors la réalisation d'une thèse de doctorat (environ 5 ans).

La recherche appliquée à d'autres domaines fournit également des possibilités de débouchés dans des organismes d'état ou privés : sciences biomédicales ou pharmaceutiques, bureaux d'études, informatique, météorologie.

L'université propose dans ces directions des Licences Spéciales en géophysique et en physique théorique, accessibles aux licenciés en mathématique.

Informatique.

Il s'agit évidemment du débouché type pour les informaticiens. Le marché est en pleine expansion; de plus il n'est pas rare de voir des informaticiens monter leur propre entreprise. Certaines firmes d'informatique engagent également des mathématiciens: l'essentiel est à nouveau de faire preuve d'initiative et de capacité d'adaptation.

LES ETUDES.

Les études conduisant au grade de Licencié en sciences mathématiques durent quatre ans. Moyennant des compléments, les candidats en mathématique peuvent passer directement en licence informatique.

Parallèlement à la licence en mathématique, l'U.L.B. offre une licence en informatique également répartie sur quatre années. Cinq orientations y sont proposées, gestion, système,matériel, numérique, fondamentale.

Dans chacune des deux licences existe une Agrégation de l'Enseignement secondaire supérieur.

De plus, les licenciés en mathématiques ont la possibilité d'obtenir après une année d'études un Certificat d'aptitude à l'enseignement de l'informatique. Ce certificat, comme son nom l'indique, les met dans les meilleures conditions pour enseigner l'informatique au niveau secondaire. Dans le cas où ils mènent parallèlement une activité profesionnelle, ils peuvent étaler ces études sur deux ans.

La Licence en Sciences actuarielles s'obtient après 3 années d'études. Toutefois la première année s'effectue généralement au cours de la licence en mathématique. De plus dès la deuxième année beaucoup d'étudiants sont déja employés par des compagnies et combinent harmonieusement études et travail.

. A partir de 1988-89, le programme d'études est rénové, largement ouvert sur les différents aspects (économiques, commerciaux, de gestion,...) de la profession, et donnant accès, notamment, à une formation approfondie en finances.

Enfin l'Institut de Statistique offre la Licence spéciale en Statistique ainsi que la Licence spéciale en Mathématiques appliquées à la gestion.

Pour tout renseignement: Secrétariat du Département de Mathématique
Université Libre de Bruxelles Campus Plaine C.P.213 1050 Bruxelles
Tél: (02)640.00.15 ext. 5864 (Mathématique) - ext.5614 (Informatique)

SOMMAIRE PAGES

Responsables de l'édition : Cl. FESTRAETS et J. VANHAMME

Comité de rédaction du numéro :
F. BALON, J.-M. GODART, G. et Y. NOEL, C. RADOUX, C. VILLERS.

Le courrier doit être adressé à
J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2, 1160 Bruxelles
tél : 02/6727571

Prix des abonnements :

Belgique :	groupés (5 au minimum)	80 FB
	isolés	120 FB
Etranger :	y compris Pays-Bas et Luxembourg	
	par paquet de 5 abonnements	800 FB
	isolé	240 FB

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Anciens numéros : sont encore disponibles
Années 81-82, 82-83, 83-84, 84-85, 85-86 (sauf n°29), 86-87

Belgique : 81-82 à 85-86 : 50 FB l'année ; 86-87 : 80 FB
Etranger : 81-82 à 85-86 : 100 FB l'année ; 86-87 : 160 FB

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14bis
7460 - CASTEAU
Pour l'étranger : Cpte 000-078014-29 (compte chèque postal)
SBPMEF, chemin des Fontaines, 14 bis
7460 CASTEAU , par virement postal

ou par mandat poste international
En cas d'intervention bancaire, à partir de l'étranger, majorer d'une somme de 100 FB pour frais d'encaissement. Pas de chèque.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.