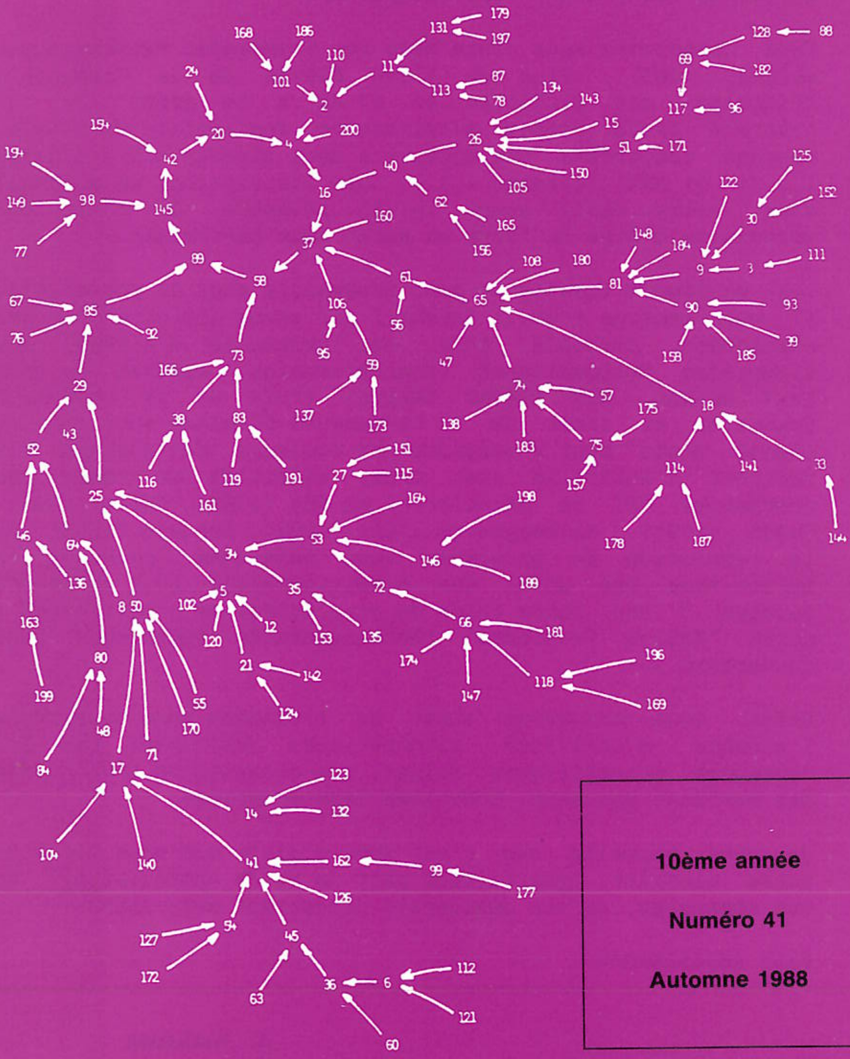
MATH-JEUNES



10ème année

Numéro 41

Automne 1988

Journal trimestriel publié par la
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française - Association Sans But Lucratif

Bureau de dépôt: Bruxelles 16

Chers amis,

Vous vous êtes abonnés à **MATH-JEUNES**, bravo ! J'en deduis que la mathematique a pour vous quelques attraits, aussi je me permets d'attirer votre attention sur certaines activités qui peuvent vous intéresser.

Vous connaissez sans doute déjà les Olympiades Mathématiques Belges (OMB). Plus de 17000 élèves de la Communauté française ont participé en 87-88 à ce grand jeu. Il comprend trois étapes: éliminatoire, demi-finale et finale, chacune comportant une épreuve à deux niveaux MINI (classes 1,2,3) et MAXI (classes 4,5,6). Les inscriptions se prennent dans votre école avant le 15 novembre. Il n'est pas necessaire d'être un "fort en math" pour participer.

Les meilleurs finalistes sont pressentis pour la préparation (7 week-ends de travail intensif par année scolaire dans une atmosphère cordiale pour une quinzaine d'élèves) aux Olympiades Mathématiques Internationales, épreuve de très haut niveau. Six élèves belges, trois de la Communauté française et trois de la Communauté flamande sont choisis chaque année pour y défendre nos couleurs. Cette année, ils rentrent d'Australie avec trois médailles de bronze. Les prochaines OMI se dérouleront en RFA (1989), Chine (1990), Suède (1991), Allemagne de l'Est (1992), Turquie (1993). Si la résolution de problèmes vous passionne, pourquoi ne seriez-vous pas un(e) des sélectionné(e)s pour un de ces voyages ? Une bonne façon de vous entraîner : participez à notre "Rallye Problèmes" (Renseignements techniques page couverture 3).

Enfin, vous trouverez aussi en troisième page couverture l'annonce d'activités mathématiques organisées par les Jeunesses Scientifiques Belges, une occasion de vous ouvrir des horizons nouveaux. Consultez leur programme.

Je vous rappelle que c'est avec plaisir que nous recevons votre courrier, nous faisant part de votre appréciation , de vos remarques, de vos desiderata concernant MATH-JEUNES.

Bien amicalement

J. Vanhamme

Les constructions à la règle et au compas et les polygones réguliers

Les géomètres de l'antiquité, PYTHAGORE en particulier, se sont intéressés aux constructions de figures géométriques n'utilisant que la règle (non graduée) et le compas (tout autre instrument, équerre, rapporteur, ... étant interdit).

Pourquoi la règle et le compas seulement ? Sans doute parce qu'ils symbolisent la droite et le cercle qui sont deux figures fondamentales de la géométrie.

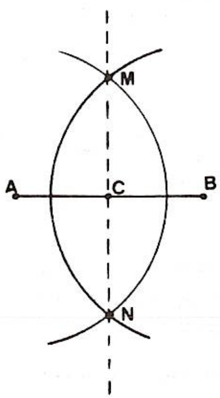
Trois problèmes traités par les mathématiciens grecs sont restés célèbres :

- la _quadrature du cercle,_ c'est-à-dire la construction du côté d'un carré d'aire égale à celle d'un disque donné;
- la _duplication du cube,_ c'est-à-dire la construction d'un cube de volume double de celui d'un cube donné;
- la _trisection de l'angle,_ c'est-à-dire la construction d'un angle tiers d'un angle donné.

Ce n'est qu'au 19ème siècle que l'on a démontré que ces trois constructions étaient impossibles au moyen de la règle et du compas. Il n'empêche que les recherches sur ces trois problèmes, bien qu'infructueuses en elles-mêmes ont amené à bien d'autres découvertes et ont ainsi, au cours des siècles, fait progresser la géométrie.

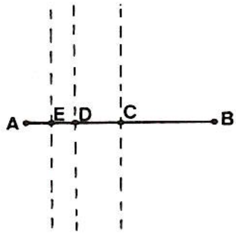
Que peut-on faire avec seulement la règle et le compas ? Examinons quelques petits problèmes, davantage à notre portée que les trois grands problèmes évoqués ci-dessus.

1. Construire la médiatrice d'un segment [AB] donné.



On trace un cercle de centre A , un cercle de centre B et qui a le même rayon; les deux cercles se coupent en M et N ; la droite MN est la médiatrice du segment [AB]. Il est en effet facile de démontrer que MN est l'axe de la symétrie orthogonale qui applique A sur B (et B sur A). (Si les deux cercles ne se coupent pas, c'est que le rayon choisi est trop petit; il suffit de recommencer avec un rayon plus grand).

Remarquons que cette construction nous permet d'obtenir un segment dont la longueur est la moitié de celle de [AB].



$|AC| = |CB| = 1/2\ |AB|$

Si on construit la médiatrice de [AC] , on obtient

$|AD| = 1/2\ |AC| = 1/4\ |AB|$

Et par ce procédé, on peut donc construire E, F,... tels que

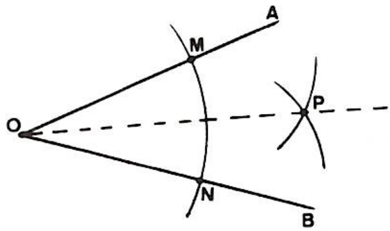
$|AE| = 1/8\ |AB|$,

$|AF| = 1/16\ |AB|$, ...

Nous retiendrons que

> Etant donné un segment, on peut construire sa moitié, son quart, son huitième, son seizième,... avec la règle et le compas.

2. Construire la bissectrice d'un angle AOB donné



On trace un cercle de centre O qui coupe les demi-droites OA et OB en M et N respectivement; un arc de cercle de centre M ; un arc de cercle de centre N et qui a le même rayon; ces deux arcs se coupent en P; la droite OP est la bissectrice de l'angle AOB. C'est l'axe de la symétrie orthogonale qui applique la demi-droite OA sur la demi-droite OB.

Nous avons ainsi construit un angle moitié de l'angle $\widehat{AOB}$:

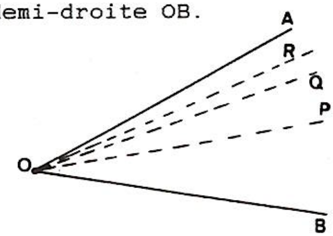
$\widehat{AOP} = 1/2\ \widehat{AOB}$.

Si maintenant, nous traçons la bissectrice de $\widehat{AOP}$, nous obtenons

$\widehat{AOQ} = 1/2\ \widehat{AOP} = 1/4\ \widehat{AOB}$

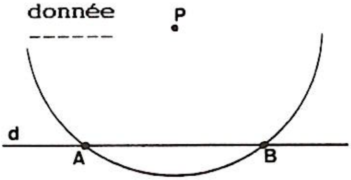
puis, par le même procédé

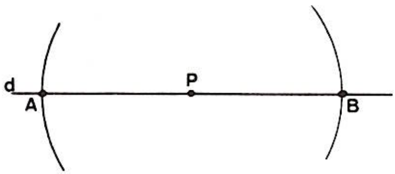
$\widehat{AOR} = 1/8\ \widehat{AOB}$ etc...



> Etant donné un angle, on peut construire un angle moitié, quart, huitième, seizième, ... avec la règle et le compas.

3. Par un point P mener la perpendiculaire à une droite d donnée

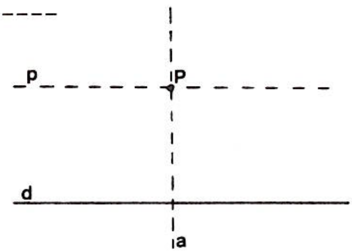




Par P, on trace un cercle qui coupe d en A et B, il suffit alors de construire la médiatrice de [AB], elle comprend P et elle est bien perpendiculaire à d.

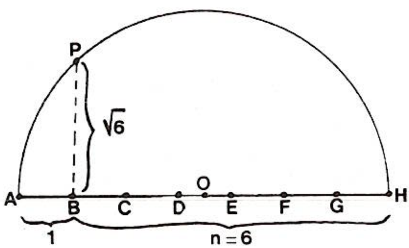
Remarquons que nous sommes maintenant capables de construire un angle de 90°, donc en vertu de ce qui précède, un angle de 45°, de 22°30', de 11°15' ...

4. Par un point P, mener la parallèle à une droite d donnée.



On mène par P, la perpendiculaire à d, soit a puis la perpendiculaire à a, soit p.
$(b \perp a \text{ et } a \perp p) \Longrightarrow b \parallel p$.

5. Etant donné un segment de longueur 1, construire un segment de longueur $\sqrt{n}$ (n étant un entier)



Décidons, par exemple, de construire $\sqrt{6}$.
Sur une droite, portons (avec le compas) [AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FG], [GH] ces segments étant tous de longueur 1.
Déterminons le milieu O de [AH] (au moyen de la médiatrice)
Traçons le cercle de centre O et de rayon
$|OA| = |OH|$.
En B, menons la perpendiculaire à AH, elle coupe le cercle en P et [BP] a comme longueur $\sqrt{6}$.

En voici la démonstration

Appliquons le théorème de Pythagore aux triangles rectangles APB et PBH :

$$|BP|^2 = |AP|^2 - |AB|^2$$
$$|BP|^2 = |PH|^2 - |BH|^2$$

en additionnant ces deux égalités, on obtient

$$2|BP|^2 = |AP|^2 + |PH|^2 - |AB|^2 - |BH|^2$$
$$= |AP|^2 + |PH|^2 - 1 - 36$$

Mais le triangle APH est aussi rectangle, et le théorème de Pythagore nous donne

$$|AP|^2 + |PH|^2 = |AH|^2 = 49 ,$$

donc $2\,|BP|^2 = 49 - 1 - 36 = 12$

$|BP|^2 = 6$

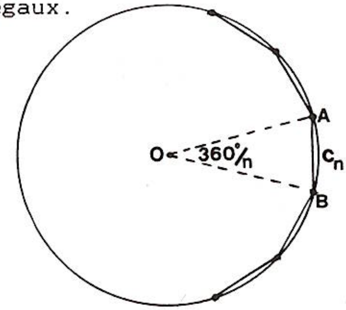
et $|BP| = \sqrt{6}$

Je pense que vous avez maintenant compris les procédés de construction à la règle et au compas. Pour vous exercer, je vous propose de résoudre les problèmes suivants :

1. Construire la tangente en un point donné à un cercle donné
2. Construire le cercle passant par trois points donnés.
3. Construire les tangentes à un cercle donné issues d'un point donné extérieur au cercle.
4. Construire les 4 tangentes communes à deux cercles donnés et extérieurs l'un à l'autre.
5. Etant donnés deux droites et un point construire un cercle passant par le point et tangent aux deux droites.

7. Construire un polygone régulier.

Passons maintenant aux polygones réguliers, c'est-à-dire aux polygones dont les côtés sont égaux et dont les angles sont égaux.



Nous savons que tout polygone régulier peut être inscrit dans un cercle, si le polygone a n côtés, l'angle au centre vaut 360°/n.

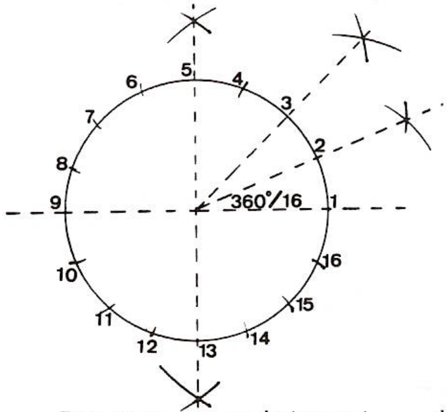
$$\widehat{AOB} = 360°/n$$

On désigne la longueur du côté [AB] par c_n.

Quels sont les polygones réguliers qu'il est possible de construire avec la règle et le compas ?

Précisons le problème. Donnons-nous un cercle, de rayon 1 par exemple. Est-il possible, avec la règle et le compas de construire n'importe quel polygone régulier inscrit dans ce cercle ?

Il est clair que si je parviens à construire un angle égal à 360°/n, je connais l'angle au centre correspondant au côté du polygone régulier à n côtés (n-gone); il suffit alors de reporter n fois consécutivement ce côté sur le cercle (avec le compas) et le problème est résolu.



Or nous avons vu qu'il est possible de diviser un angle en 2, en 4, en 8, en 16,...

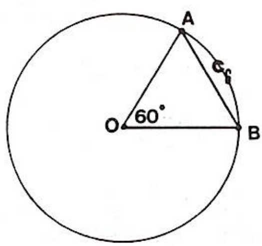
360°/4 = 180°/2
nous conduit au carré
360°/8 = 180°/4
à l'octogone
360°/16 + 180°/8
à l'hexadécagone etc

Vous avez, ci-contre, le schéma de construction pour l'hexadécagone régulier.

Essayons maintenant de construire un triangle équilatéral; pour cela, il nous faudrait pouvoir diviser un angle en trois parties égales, et nous avons vu que le problème de la trisection des angles est impossible. Nous devons donc trouver autre chose.

Remarquons alors que s'il est possible de construire un hexagone régulier (de sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6), en joignant les sommets 1-3-5-1 , nous obtenons un triangle équilatéral.

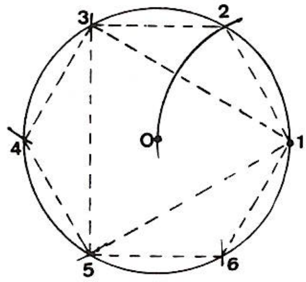
Or l'hexagone n'est pas difficile à obtenir. En effet, observons le triangle OAB où [AB] est le côté de l'hexagone, on voit que



1) AOB = 360°/6 = 60°
2) |OA| = |OB| = 1

Le triangle AOB est donc isocèle et a un angle de 60°, donc les deux autres angles valent aussi 60°; ceci signifie que ce triangle est équilatéral et que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle.

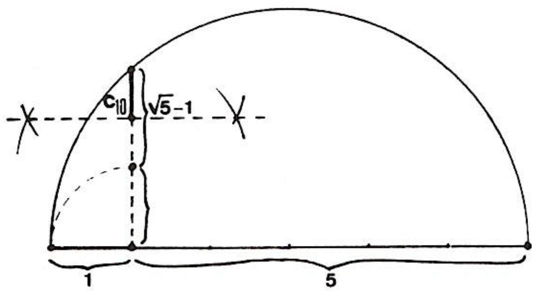
Nous sommes maintenant capables de construire avec la règle et le compas l'hexagone et le triangle réguliers et puisque l'angle de 60° peut être divisé en 2,4,8,... nous pouvons aussi construire le dodécagone (12 côtés), le 24-gone, le 48-gone, ... réguliers.



Les anciens grecs connaissaient ces constructions ainsi que celles du pentagone (5 côtés), du décagone (10 côtés), et de tous les polygones qui en découlent en divisant l'angle au centre par 2,4,8,...
Ces constructions sont un peu plus difficiles que les précédentes. On démontre (voir encadré ci-après) que le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 a comme longueur

$$c_{10} = \frac{1}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$$

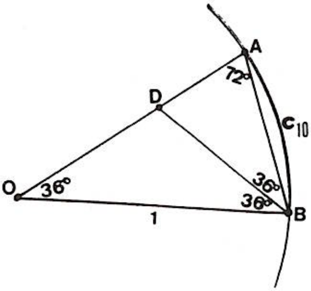
En voici la construction



A partir d'un point arbitraire du cercle, il suffit de reporter avec le compas dix fois consécutivement c , cela nous donne les sommets du décagone et si on joint les sommets 1-3-5-7-9-1, on obtient le pentagone.

Le pas suivant serait maintenant de construire un polygone régulier à 7 côtés, puis à 9 côtés, à 11 côtés,... Pendant des siècles, beaucoup s'y sont essayé et s'y sont cassé les dents.

Il a fallu atteindre la fin du 18ème siècle pour qu'un jeune homme brillant, appelé Charles Frédéric GAUSS, trouve et démontre quels sont les polygones réguliers constructibles avec la règle et le compas.



L'angle au centre, pour le décagone régulier, vaut

$$360°/10 = 36°$$

Le triangle AOB est isocèle ($[OA]=[OB]=1$), on a donc

$$OAB=OBA = \frac{180°-36°}{2} = 72°$$

Traçons AD bissectrice intérieure de l'angle.A, chacun des deux angles qu'elle détermine vaut 36°.

Dans le triangle ABD, $ADB=180°-36°-72°=72°$.

donc ce triangle est isocèle et $|BD| = c_{10}$.

Le triangle ODA est aussi isocèle, donc

$$|OD| = |BD| = c_{10}$$

Enfin le triangle AOB et le triangle ABD sont semblables, car ils ont les mêmes angles, donc leur côtés sont proportionnels

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AD|} \qquad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

(en posant $x = c_{10}$)

On en tire $\qquad x^2 = 1 - x$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Cette équation admet deux solutions

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

mais x doit être positif :

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = c_{10}$$

Avant lui, un autre grand mathématicien, Pierre FERMAT s'était intéressé aux nombres de la forme

$2^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad 2^3 + 1 = 16 + 1 = 17$

$2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$

$2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537$

$2^{32} + 1 = 4294967296 + 1 = 4294967297$

$\vdots$

Il pensait que tous ces nombres étaient des <u>nombres premiers</u> (un nombre premier admet exactement deux diviseurs distincts, lui-même et 1). C'était au 17ème siècle, difficile à vérifier directement (tout au moins pour les premiers nombres de la liste), car les moyens de calcul n'étaient pas, et de loin, ce qu'ils sont de nos jours et, en fait, FERMAT s'était trompé. Par exemple,

$$4\ 294\ 967\ 297 = 641 \ .\ 6\ 700\ 417,$$

$2^{32} + 1$ n'est pas premier, c'est un <u>nombre composé</u> .

La liste des nombres de Fermat comprend donc des nombres premiers et des nombres composés.

GAUSS démontre que la construction, avec la règle et le compas seuls, d'un polygone à un nombre <u>impair</u> de côtés n'est possible que si le nombre de côtés est un nombre de Fermat premier ou est le produit de nombres de Fermat premiers différents.

En outre, n'oublions pas que l'on peut multiplier le nombre de côtés par 2, 4, 8, 16, ...

On peut donc construire, avec la règle et le compas un polygone régulier à 30 côtés

30 = 2 . 3 . 5   3 et 5 sont des nombres de Fermat premiers et distincts

mais pas un polygone à 7 côtés (7 n'est pas un nombre de Fermat) ou à 9 côtés

9 = 3 . 3   mais les deux facteurs ne sont pas distincts.

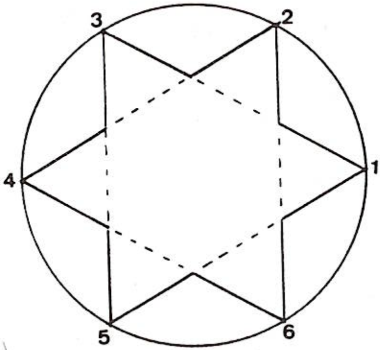
Voici le début de la liste des valeurs possibles pour le nombre de côtés

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, ...

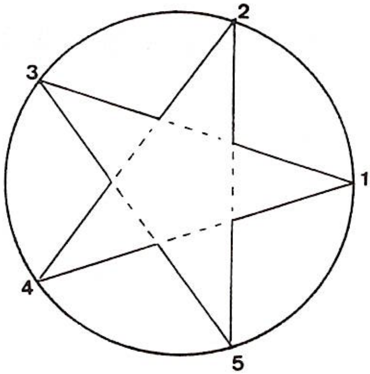
C'est le 1 juin 1796, à l'âge de 18 ans que GAUSS publia cette découverte et c'est ce qui détermina une carrière si remarquable que certains appelèrent GAUSS le prince des mathématiciens. Signalons encore que le socle de la statue de GAUSS à Göttingen est un polygone à 17 côtés.

Après ce long travail sur les polygones réguliers constructibles avec la règle et le compas, accordons-nous une petite récréation. Nous approchons des fêtes de fin d'année et il est gai de pouvoir décorer sa chambre, l'arbre de Noël ou la cheminée d'étoiles multicolores que l'on a soi-même découpées dans du carton ou du papier glacé. Comment réussir une jolie étoile ?

On peut, si l'on est patient et soigneux obtenir des étoiles en utilisant les procédés de construction de polygones réguliers dont nous avons parlé.



étoile à 6 branches

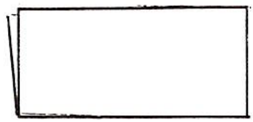


pentagone étoilé

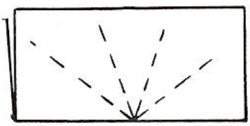
Mais voici un autre procédé qui vous demandera simplement un peu d'habileté manuelle.

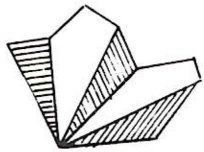
Préparez des feuilles de papier carrées de dimensions suffisantes pour y inscrire l'étoile que vous désirez obtenir.

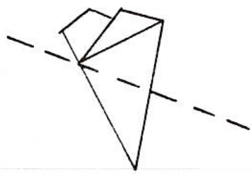
Pliez le papier en deux



Esquissez quatre droites formant entre elles et avec le bord des angles égaux, puis pliez votre papier quatre fois en suivant ces traits, en accordéon







Applatissez bien votre pliage et donnez un seul coup de ciseaux comme indiqué par le trait pointillé.

Bon amusement!

Claudine Festraets

Le Capitaine Haddock et la logique

Dans l'album: "On a marché sur la lune" des aventures de Tintin par Hergé, nous trouvons en page 18 et 19 la scène suivante :

La fusée qui emmène Tintin, le capitaine Haddock, les deux Dupondt et Tournesqol vers la lune s'apprête à se poser dans le cirque Hipparque, comme l'explique le professeur à ses amis qui ne l'ont, demble-t-il, pas tous très bien compris...

Les policiers sont lents à réagir à la taquinerie du capitaine, mais celui-ci n'a rien perdu pour attendre...

Devant la réaction des Dupondt, le capitaine est bien forcé de leur présenter ses excuses. Mais taquin et pince-sans-rire, Haddock va-t-il vraiment retirer ce qu'il a dit? Ecoutez-le donc attentivement !

Après mûre réflexion, les policiers se satisfont des excuses qu'ils ont reçues.

Et pourtant, en disant: "Le cirque Hipparque n'a pas besoin de deux clowns: vous ne pouvez donc pas faire l'affaire!", le capitaine Haddock n'est-il pas plutôt en train d'en rajouter?

Mais alors, quelle est donc la négation de: "Si le cirque Hipparque avait besoin de deux clowns, vous feriez parfaitement l'affaire!" ?

Serait-ce:
- "Si vous ne pouvez pas faire l'affaire, c'est que le cirque Hipparque n'a pas besoin de deux clowns!", ou
- "Le cirque Hipparque a besoin de deux clowns, et vous ne pouvez pas faire l'affaire, ou
- "Si vous pouvez faire l'affaire , alors le cirque Hipparque a besoin de deux clowns!", ou
- "Ou vous pouvez faire l'affaire, ou le cirque Hipparque n'a pas besoin de deux clowns!" ?

Calculer à la machine

Nous sommes tellement habitués à utiliser nos petites calculatrices électroniques, que nous n'imaginons plus pouvoir nous en passer. Et pourtant, elles ont moins de 20 ans! Quelles machines à calculer utilisait-on auparavant ?

Dans l'antiquité, on utilisait de petits objets, tels que des cailloux (le mot latin calculus signifie caillou, on le retrouve dans l'expression "des calculs au rein"). Par exemple, le nombre de cailloux enfermés dans un sac représentait le nombre de bêtes d'un troupeau. Pour effectuer une addition, il suffisait de réunir le contenu de deux sacs.

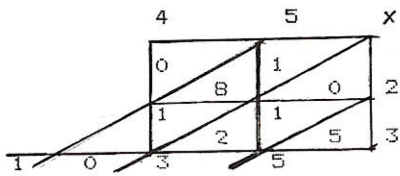
Plus tard, on apprit à effectuer les calculs en déplaçant des jetons (c'est déjà mieux que des cailloux) sur une table divisée en cases allongées : un abaque.

Enfin, pour faciliter les manipulations on remplaça les jetons à déplacer par des perles coulissant sur des tiges : le boulier compteur était né. Il a surtout été utilisé, et l'est encore, dans les pays d'Asie et d'Europe de l'Est. MATH-JEUNES vous a déjà présenté le *soroban*, boulier compteur japonais (voir le numéro 25 de 1984).

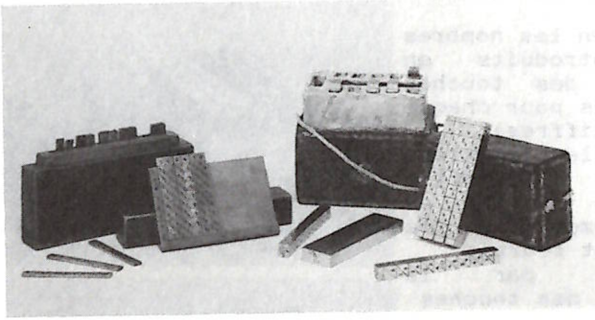
Avec le courant novateur de la renaissance, de nouvelles méthodes de calcul sont recherchées. Apparaît alors le calcul à *la plume* que l'on enseigne encore actuellement. Il mit longtemps à s'imposer. Une farouche querelle opposa au 16ème siècle les *abacistes* aux *algoristes*. Pendant longtemps, on vérifia sur l'abaque les résultats des calculs à la plume. En France, il fallut attendre la révolution pour que l'usage de l'abaque soit interdit dans les écoles et les administrations. Et si le ministre des finances anglais s'appelle encore aujourd'hui *chancelier de l'échiquier*, c'est qu'en Angleterre, les abaques utilisés par les fonctionnaires des finances jusqu'à la fin du 18ème siècle portaient le nom de *checkerboards* ou *exchequers*.

D'autres personnes s'intéressent au calcul mécanique.

Ainsi, l'anglais John NAPIER (ou Neper), l'inventeur des logarithmes, utilise en 1617 des réglettes portant chacune une colonne de la table de multiplication. En les employant, on réalise ce qu'il est convenu d'appeler une multiplication *per gelosio*.



En 1623, un certain SCHICKARD construit une machine permettant les quatre opérations et l'extraction de la racine carrée. Mais l'unique exemplaire est détruit dans un incendie un an plus tard. Vient alors la *pascaline*, (1642) du nom de son inventeur Blaise PASCAL. Elle permettait surtout les additions et les soustractions.



Un grand progrès fut réalisé par G. LEIBNIZ, (1671). Sa machine ramenait une multiplication à une addition répétée. Elle comportait une partie fixe et une partie mobile. Le multiplicande est introduit dans un "registre" de la partie mobile. Un tour de manivelle l'additionne au contenu d'un registre de la partie fixe. Si celui-ci contient 0 au départ, en trois tours de manivelle, le multiplicande a été multiplié par 3. Pour multiplier par 20, on décale la partie mobile d'un cran vers la gauche et on donne deux tours de manivelle. Pour multiplier par 23, on effectue les deux opérations consécutivement (sans remettre à zéro entretemps le registre de la partie fixe).

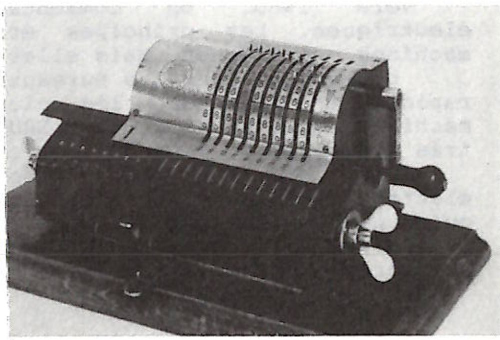
Combien de tours faut-il pour effectuer 3042 x 536 ? et pour 536 x 3042 ?

Le principe qui vient d'être décrit a été utilisé dans de nombreuses machines à calculer utilisées avant l'apparition des calculatrices électroniques. (Mais le rôle des parties fixe et mobile a été échangé: on décale alors vers la droite plutôt que vers la gauche). Les variantes ont porté surtout sur la façon d'introduire les nombres dans les registres.

Deux grands types de machine existent :

- ou bien les nombres sont introduits à l'aide de curseurs se déplaçant au long d'une graduation gravée sur un morceau de cylindre

<u>Exemple</u> : la BRUNSVIGA, construite dès 1892 d'après un brevet de ODHNER



- ou bien les nombres sont introduits en pressant des touches (9 touches pour chaque rang de chiffres).

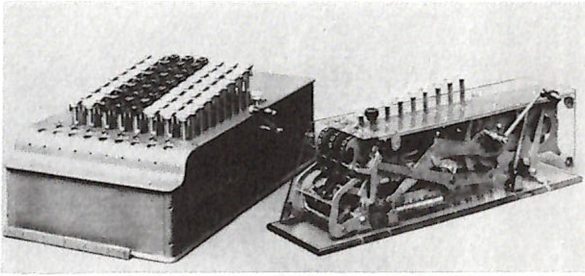
Dans le deuxième cas, l'énergie nécessaire au fonctionnement de la machine est fournie

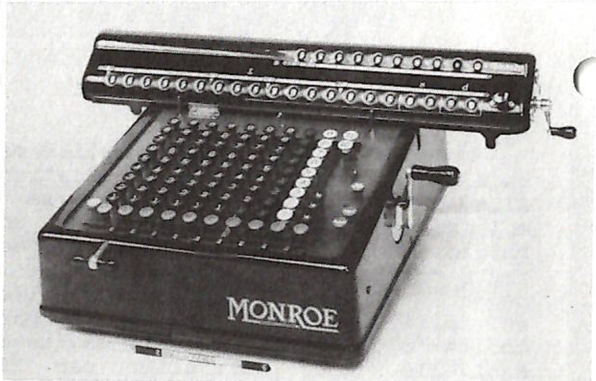
- soit par la dépression des touches

<u>Exemple</u> : le comptomètre de D.E. FELT (1911)

- soit par la manipulation d'un levier

<u>Exemple</u> ; la machine MONROE (1925)





Le principe de deux parties, une fixe et une mobile est conservé dans la machine de BOLLEE (1887). Mais dans celle-ci, la multiplication n'est plus une addition répetée; un seul tour de manivelle suffit pour chaque chiffre du multiplicateur.

Notons au passage que, la division étant l'opération inverse de la multiplication, si celle-ci se fait par additions répétées, la division s'effectue alors par *soustractions* répétées.

Vers 1900, on commença à fabriquer des machines électriques. Les principes étaient les mêmes que ceux des machines mécaniques. Mais elles étaient plus rapides et plus ... bruyantes. Dans les bureaux, les machines à clavier sont rapidement devenues les plus utilisées. Cependant les machines à curseurs du type BRUNSVIGA sont restées utilisées très longtemps vu leur moindre coût.

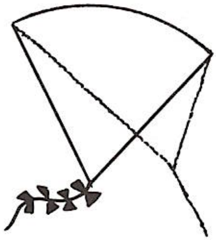
Plus tard apparurent les ordinateurs, les calculatrices électroniques ... de sorte qu'on calcule actuellement plus qu'on ne l'a jamais fait.

A propos, savez-vous quand ont été inventées les premières machines à écrire ?

Guy NOEL

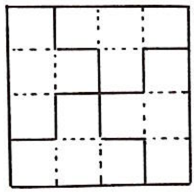
Le coin des problèmes

***169** Les longueurs des côtés d'un rectangle (mesurés en cm) sont des nombres entiers. Quels sont ces nombres sachant que la mesure (en cm) du périmètre du rectangle est égale à la mesure (en cm^2) de son aire ? (12 ans)

***170** 

Un cerf-volant a la forme d'un secteur circulaire. Son périmètre ne peut dépasser 4m. Quelles doivent être ses dimensions pour que son aire soit maximum ? (12 ans)

171 On considère un damier de 4 sur 4. De combien de manières peut-on le partager en quatre figures isométriques (tous les traits doivent être situés sur le quadrillage, comme l'indique l'exemple ci-contre). Même problème de partage en 4 figures isométriques avec un damier de 6 sur 6 (12 ans)



172 Pierre parie que s'il lance quatre fois de suite un dé, le "six" apparaîtra au moins une fois. Jean parie que le "six" n'apparaîtra pas du tout ou apparaîtra plus d'une fois. Qui a le plus de chances de gagner ? (12 ans)

***173** On considère un parallélogramme ABCD tel que la longueur de [AB] est 1, celle de [BC] est 2 et l'angle ABC est obtus. Par B et par D, on mène deux droites, l'une perpendiculaire à AB, l'autre perpendiculaire à BC. Ces quatre droites déterminent un second parallélogramme BMDN. Sachant que les parallélogrammes ABCD et BMDN sont semblables, trouver l'aire de ABCD. (15 ans)

174 Regardez bien le graphe qui se trouve sur la couverture. Tous les nombres qui y figurent sont inférieurs à 200, mais ils n'y figurent pas tous.

a) Essayez de déterminer la loi qui régit une transformation dans l'ensemble des naturels telle que le dessin de la couverture soit une partie de son graphe.

b) Essayez de structurer, pour cette même loi, l'ensemble des autres nombres inférieurs à 200. Que constatez-vous? (12 ans).

Pour participer au " rallye problèmes ", doté de prix intéressants, vos réponses aux problèmes doivent nous parvenir avant la fin des vacances de Pâques.

Quand et où sont apparus les signes mathématiques

1. Les chiffres et l'écriture des nombres

Il n'est pas facile de trouver des preuves irréfutables de la connaissance de nos notations chez des auteurs très anciens car les recopies et les traductions des siècles postérieurs ont transformé l'écriture originelle.

Il semble cependant établi, à l'heure actuelle, que notre numération positionnelle, décimale, avec emploi du zéro était utilisée au 6ème siècle en Inde et nous a été transmise par les Arabes.

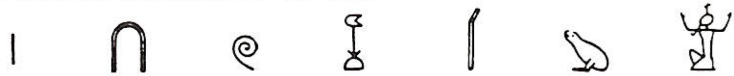
Mais le plus ancien manuscrit réellement authentifié oú on la trouve date de 876.

Il faut rappeler que la découverte hindoue n'est pas complète et que les Chinois, les Babyloniens et les Mayas donnaient, bien longtemps avant eux, une valeur différente à un symbole numérique suivant sa position dans le nombre.

La forme des chiffres a beaucoup varié depuis les Hindoux et ne s'est fixée en Occident qu'à l'apparition de l'imprimerie.

D'autres types de numération ont existé et nous en avons encore des traces à l'heure actuelle. Citons en deux :

Les égyptiens avaient des hiéroglyphes pour représenter différentes puissances de dix



1 10 100 1000 10.000 100.000 1.000.000.

L'écriture d'un nombre se faisait par juxtaposition de ces sigles leurs valeurs s'additionnant

Vous avez probablement rencontré dans le cadre de vos cours la numération romaine. Les romains avaient assigné des valeurs numériques à certaines lettres de l'alphabet

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

le nombre se construit par juxtaposition des lettres avec la convention : tout nombre placé à la gauche d'un plus grand est soustrait de celui-ci, placé à la droite d'un nombre plus grand ou égal il s'additionne.

Il faut avoir essayé de multiplier deux nombres pour se rendre compte de l'importance de nos systèmes actuels de numération.

Prenez par exemple le cas du produit de 1988 par 32 et jouez le jeu: écrivez ces nombres dans un des systèmes de numération égyptienne ou romaine et essayez de trouver ce produit sans passer par notre système de numération; vous comprendrez pourquoi l'arithmétique n'a pu faire de grands progrès avant la notation indo-arabe!

Dans le cadre des développements techniques actuels n'oublions pas de signaler que d'autres bases que la décimale jouent un rôle important. Tous les calculs effectués par l'ordinateur se font dans le cadre de la numération binaire (base deux) et les informaticiens qui travaillent en langage machine emploient presque uniquement la numération hexadécimale (base seize).

2. Les signes opératoires

Si l'écriture actuelle des nombres trouve son origine dans le premier millénaire de notre ère, il faut attendre les dernières années du 15ème siècle pour trouver en Allemagne l'utilisation des signes + et − . On les trouve dans des manuscrits conservés dans la bibliothèque de Dresden. J. Widmann (1489) qui avait étudié certains de ces manuscrits fut le premier à les faire imprimer. D'après un manuscrit latin de 1417 une abréviation pour "et" ressemble fort à notre signe + : ce pourrait être son origine. Quant à celle du signe − il y a plusieurs hypothèses. Certains pensent que c'est une simple barre utilisée par les marchands pour séparer l'indication de la tare de celle de la marchandise, mais un autre auteur le fait dériver d'un signe hiératique égyptien tandis qu'un autre encore le fait remonter, sous une forme proche, à Diophante (fin 2ème siècle, début 3ème siècle). Mais aucune de ces hypothèses n'est étayée par des preuves irréfutables.

Au début du 16ème siècle, ces signes deviennent d'un usage courant dans les algèbres allemandes. On en trouve trace en Angleterre au 16ème siècle, en Italie et en Hollande au 17ème siècle. Mais d'autres signes restent en compétition avec ceux-là, notamment p̂ m̂ (pensons à la facilité d'utiliser les ressources des caractères d'imprimerie usuels) et de multiples variétés de croix : grecque, romaine, de Malte, etc pour le + . Le signe − a été très difficilement généralisé, peut-être en raison de son emploi dans des sens trop variés. On voit beaucoup ÷ , $\frac{\cdot}{\cdot\,\cdot}$ par exemple. Au début du 17ème siècle, ÷ apparaît plus fréquemment mais, semble-t-il, seulement en Allemagne, Suisse et Hollande. C'est cependant en Suisse que Rahn (1659), commença à utiliser ÷ pour la division, puisqu'il n'y avait pas de signe fixé pour celle-ci et qu'il y en avait deux pour la soustraction. Il ne fit pas école dans son pays, mais bien en Angleterre. Durant tout le 18ème siècle, la compétition entre - et ÷ continue. Il paraît qu'au début du 20ème siècle on trouve encore occasionnellement ÷ pour - dans la littérature mathématique scandinave.

Et pour la multiplication ? La croix de Saint André, X , est le symbole de la multiplication dans Clavis Mathematicae de W. Oughtred (1631). Les historiens des mathématiques ne sont pas tous d'accord pour accepter cette apparition comme étant la première. Au cours du 17ème siècle, un grand nombre d'autres désignations de la multiplication furent proposées parmi lesquelles $\sqcap$, * , la lettre hébraïque mem $\sqsubset$, une virgule, des guillemets, **S** .
Le point fut introduit par Leibniz. Dans une lettre à Bernouilli, en 1698, il écrit : "Je n'aime pas le symbole **X** comme symbole de la multiplication, car on le confond aisément avec x ; souvent je relie simplement les quantités à multiplier par un point." Ce symbole fut généralement adopté en Europe au 18ème siècle: on le trouve chez Euler en Allemagne, chez Sterling en Grande Bretagne.

La première apparition d'une barre de fraction remonte au 12ème siècle chez les Arabes. Léonard de Pise l'emploie dans son Liber Abacci en 1202. Le Suisse Rahn, nous l'avons dit plus haut, publie une algèbre dans laquelle il introduit comme signe de division. La traduction de son livre fut favorablement reçue. En Europe, c'est la notation de Leibnitz : qui prévalut. A l'heure actuelle, encore, les deux subsistent. En gros, la Grande Bretagne, ses anciennes colonies, les Etats-Unis enseignent ÷ , tandis que l'Europe continentale et les pays d'Amérique latine ont choisi :.

3. Vers d'autres nombres

L'invention des fractions décimales est habituellement attribuée à Simon Stevin dans la Disme (1585). Mais ses notations étaient peu pratiques et l'oeuvre n'eut pas un retentissement immédiat (Certains historiens lui trouvent des prédécesseurs).

François Viète (1540,1603) s'approche beaucoup de la notation actuelle en séparant la partie entière de la partie décimale par un trait vertical. Beaucoup d'autres signes furent employés. Il n'y a toujours pas de consensus universel sur la question. Les Anglais préfèrent le point décimal et le continent la virgule.

4. Les signes relationnels

L'impression du signe = remonte à Robert Recorde, en 1557, et se perd ensuite pendant 60 ans. On le trouve dans certains manuscrits mais dans les livres de Galilée, Képler, Pascal, Fermat l'égalité est encore exprimée par des mots ou parfois par l'abréviation **aeq** . Il faut remarquer qu'il y avait danger à l'utiliser car = désignait aussi d'autres relations. Ainsi Viète l'emploie pour la différence, Descartes pour le + ou − .

De plus, d'autres symboles étaient nés à la même époque : par C. de J Buteo (1559), un moine français; en 1571 un auteur allemand connu sous le nom de Xylander emploie $\parallel$. Il fut suivi par quelques mathématiciens hollandais et français. On trouve aussi $\setminus$, $\sqcup$, $\sqcap$. Mais le rival le plus important a été le signe de Descartes $\propto$ (qui apparaît dans sa Géométrie de 1637). Comme il avait vécu en Hollande, il a influencé Huygens et, par lui, les Hollandais. Ce symbole s'est répandu aussi en Angleterre. Il faudra attendre le début du 18ème siècle pour le voir disparaître, ainsi que les autres au profit du symbole = de Recorde qui subsiste seul, en partie grâce au choix de Newton et de Leibniz.

Au signe d'égalité, Thomas Harriot (1631) adjoint les signes < et > .

5. Les expressions algébriques

Un algorithme algébrique s'est développé assez tôt dans le cadre de la théorie des équations. Cela commence déjà avec Diophante. Les Indiens employaient des noms de couleur pour des inconnues diverses. Les termes utilisés en Arabe pour l'inconnue, qui signifient chose et racine, et le nom du carré de l'inconnue ont donné naissance aux termes en usage au Moyen-Age chrétien : res, radix, causa, census. Chez Regiomontanus (1470) et l'anonyme des manuscrits de Munich (1455,1461), des abréviations de res et de census apparaissent dans des formules; chez Rudolff (1525) un système de notations pour l'inconnue et ses puissances se trouve développé. S. Stevin indiquait la nème puissance de l'inconnue par n . La plus importante innovation avant Viète est celle de J. Butéon (1559) : l'usage des lettres A, B, C pour les inconnues.

Le grand mérite de Viète est d'avoir, en algèbre, indiqué par des lettres non seulement les inconnues mais aussi les indéterminées, ce qu'on avait fait en géométrie depuis l'antiquité et, d'autre part, d'avoir formé des "mots" avec ces lettres, c'est-à-dire des expressions algébriques avec lesquelles il faisait les opérations.

Descartes, dans sa Géométrie, fixe nos notations actuelles : des lettres minuscules dont les premières de l'alphabet signifient des quantités connues et x, y, z remplacent les inconnues. La notation exponentielle des puissances est également due à Descartes.

Le signe radical $\sqrt{}$ apparaît en Allemagne dans le Coss de Christoff Rudolff (1525). Il désigne la racine cubique par $\wedge\wedge\surd$ et la racine quatrième par $\wedge\surd$. Ces dernières notations sont améliorées par Michael Stifel (1545).

Le symbole allemand $\sqrt{}$ pour la racine se propage au 16ème siècle en France, en Angleterre et en Espagne, au 17ème siècle en Italie.

Stevin rendit plus clairs les symboles de racines supérieures à 2 en écrivant $\sqrt{}(3)$ pour la racine cubique, par exemple. Wallis supprime le cercle et, finalement Albert Girard, en 1619 nous donne $\sqrt[3]{}$. Cette habitude se généralisa au 18ème siècle, mais jusqu'au 19ème siècle, il y a des variantes.

Nous vous avons ainsi très brièvement esquissé un historique de quelques-unes de nos notations parmi les plus importantes. Il va sans dire que cette simplification excessive ne rend pas justice à des précurseurs isolés, grands hommes que leurs contemporains n'ont pas suivis. Il est probable aussi que des découvertes futures démentiront certaines affirmations actuelles.

Si le sujet vous intéresse et que vous vous posez des questions, faîtes-le nous savoir. Nous essaierons de vous procurer une bibliographie et de faire une recherche pour vous si les livres ne vous sont pas accessibles.

Simone Trompler

Nous avons évoqué dans ce numéro de votre revue pas mal de mathématiciens. Nombre d'entre eux sont répertoriés sur le POSTER HISTORIQUE qui a été publié par MATH-JEUNES. Si vous voulez ces mathématiciens dans le contexte de leur époque, vous pouvez en obtenir un (voir page couverture 4.

Problème express E1

On divise un bloc de bois de 1 m^3 en petits blocs de 1 mm^3 . Si on place ces petits blocs les uns au-dessus des autres, atteindra-t-on la hauteur de la Tour Eiffel ?

Dessiner des courbes sur une HP28

1. Programmation de la "tortue".

Le système utilisé pour dessiner ressemble fortement à la tortue LOGO : on imagine une tortue (lente!) se déplaçant sur l'écran en laissant une trace (la courbe). Pour cela, on lui donne des ordres tels que nGO pour avancer de n pixels sur l'écran et aTN pour tourner d'un angle a .

On garde constamment en mémoire sa position et son orientation : X contient l'abscisse, Y l'ordonnée et A l'angle d'orientation compté dans le sens trigonométrique. On peut initialiser ces valeurs par la fonction STO ou par les programmes donnés ci-dessous.

L'écran de la HP28 est un rectangle de 32 x 137 pixels se prêtant bien au graphisme. Pour repérer un point on fixe un système de coordonnées tel que le point inférieur gauche est en (1,1) et le point supérieur droit en (137,32) ; on ne dessine pas les axes.

La procédure 'INIT' installe ce système :

```
INIT
« (1,1) PMIN
(137,32) PMAX (0,0)
AXES
»
```

Pour dessiner un point, on doit donner ses coordonnées à la fonction 'PIXEL'. La procédure 'PR' dessine le point (X,Y) :

```
PR
« X Y R→C PIXEL
»
```

A chaque point, on va associer une orientation sous forme d'un angle A qui fixe la direction que va prendre la "tortue" qui va laisser sa trace sur l'écran. La procédure 'PT' place les coordonnées d'un point en mémoire et remet l'angle à zéro :

```
PT
« 'Y' STO 'X' STO 0
'A' STO
»
```

Pour commencer le dessin au milieu de l'écran on utilisera la procédure 'CL' qui efface le contenu et place la tortue en (68,16) à l'aide de 'PT' :

```
CL
« CLLCD 68 16 PT
»
```

On remarque la méthode très modulaire utilisée pour programmer la HP28.

Les mouvements sont commandés par 'GO' et 'TN' ; 'GO' avance la tortue d'une distance donnée dans la direction A :
Les accroissements de X et de Y sont calculés par

X = d cosA
Y = d sinA

oú d est la valeur qui se trouve dans le stack à l'appel de la procédure.

```
GO
« DUP A SIN * SWAP A
COS * 'X' STO+ 'Y'
STO+ PR
»
```

'TN' opère une rotation amenant la tortue dans la direction donnée par A : l'angle trouvé dans le stack est additionné modulo 360 à la valeur courante A .

```
TN
« A + 360 MOD 'A'
STO
»
```

Cet ensemble de procédures <u>primitives</u> suffit pour dessiner à peu près tout ce qu'on désire sur l'écran.

2. Dessin d'une figure.

La procédure 'GO' fait avancer la tortue mais ne laisse pas de trace sauf en fin de parcours. Il faut donc créer une procédure 'GOL' qui va effectuer 1GO c'est-à-dire des avancements de longueur 1 en dessinant chaque fois un point :

```
GOL
« 1 SWAP
  START 1 GO
  NEXT
»
```

Par exemple :

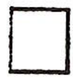
```
« CL 40 GOL
»
```

dessine

Pour dessiner un carré, on peut faire :

```
« CL 15 GOL 90 TN 15
GOL 90 TN 15 GOL 90
TN 15 GOL
»
```

et on obtient



(Il y a une légère déformation verticale à l'impression)

On écrira plutôt :

```
« CL 1 4
  START 15 GOL 90 TN
  NEXT
»
```

3. Récursivité.

Le langage HP28 autorise l'appel d'une procédure par la procédure elle-même. Cela facilite la programmation de certains algorithmes dits récursifs. Par exemple :

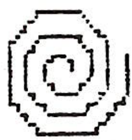
La procédure 'SPI' s'appelle elle-même. Ici il s'agit en fait d'une itération qu'on aurait pu écrire autrement, mais nous verrons d'autres exemples plus complexes dans la suite.

Remarquons qu'il faut séparer le programme principal 'DSPI' de la procédure itérative pour éviter de refaire l'initialisation à chaque rappel de 'SPI'.

```
DSPI
« CL 1 'L' STO SPI
»

SPI
« .5 'L' STO+ 45 'A'
STO+ L GOL SPI
»
```

Et voici le dessin obtenu



4. Fractals.

Nous sommes maintenant outillés pour attaquer le vif du sujet. Considérons le "flocon de neige" l'exemple le plus classique de courbe fractale :

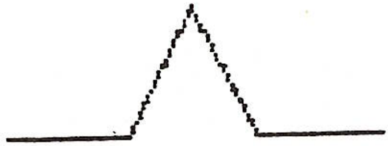
```
'DFLO'

DFLO
« CL 1 1 PT FLOC
»
```

```
FLOC
« → S L
  «
    IF L 0 ==
    THEN S GOL
    ELSE S 3 / L 1 -
FLOC 60 TN S 3 / L 1
- FLOC -120 TN S 3 /
L 1 - FLOC 60 TN S 3
/ L 1 - FLOC
    END
  »
»
```

« 99 1 DFLO »

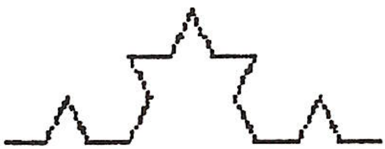
Avec les paramètres 99 1 ce programme dessine :



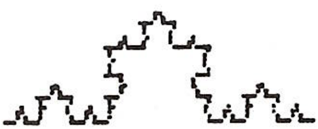
Au premier appel, L = 0 , il va donc diviser S par 3 , soustraire 1 à L et réappeler FLOC ; à ce moment L = 0 et il dessinera une droite de longueur 30 . Il tourne ensuite de 60î et recommence, puis de -120î et à nouveau de 60î pour obtenir la figure reproduite ci-dessus.

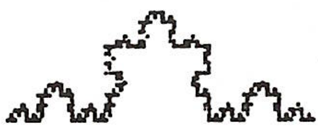
« 99 2 DFLO »

Pour L= 2 il va faire un double appel à FLOC avant de dessiner et on aura alors chaque ligne du dessin précédent remplacée par la même figure à l'échelle 1/3 .



On trouvera pour L = 3 et 4 les lignes suivantes :





On peut facilement, par des procédés analogues, écrire les programmes qui permettent d'obtenir le graphisme d'autres courbes fractales telles, par exemple, la courbe du dragon ou celle de Hilbert.

F. Michel

Solution E1

1 m³ = 1 000 000 000 mm³ et une colonne dont la hauteur est un milliard de mm (soit 1 000 km) dépasse de loin la Tour Eiffel.

RALLYE PROBLEMES

Les énoncés des problèmes qui interviennent dans le rallye sont précédés d'un astérisque. Les meilleures réponses aux différents problèmes para°tront dans le dernier numéro de l'année scolaire, ainsi que le classement final. Des prix seront attribués.

Vous pouvez envoyer des solutions partielles, les dernières réponses doivent nous parvenir avant la fin des vacances de P$ques. Vos envois devront comporter les indications suivantes :

Nom et prénom
Age
Adresse personnelle
Ecole (y compris le nom de la ville)
Classe fréquentée

Le classement final tiendra compte de l'$ge et du niveau scolaire des candidats . Les réponses sont à adresser à Madame J. Vanhamme, adresse en couverture 4.

JEUNESSES SCIENTIFIQUES DE BELGIQUE

Association sans but lucratif

Sous le haut patronage de S.M. le Roi
Reconnue par le Ministère de l'Education Nationale et de la Culture Française

ACTIVITES 1988-1989

Les Jeunesses Scientifiques de Belgique organisent pour les élèves de l'enseignement secondaire une série d'activités en mathématique. Pour l'année scolaire 1988-1989, elles se réaliseront soit le samedi de 10H à 19H, soit le mercredi après-midi de 14.30H à 16.30H au laboratoire des Jeunesses Scientifiques à l'U.L.B. - Campus de la Plaine - Bâtiment BC, boulevard du Triomphe à Ixelles.

DATE	THEME	NIVEAU	RESPONSABLE(S) DU STAGE	PRIX
Me 26/10/88	Les fractals	4-5-6	MM. J. LEROY et L. LEMAIRE	60 FB
Me 9/11/88	Les polyèdres (1)	4-5-6	M. X. HUBAUT	60 FB
Sa 19/11/88	Les paradoxes	4-5-6	Mme. P. EVRARD	300 FB
Me 23/11/88	Les polyèdres (2)	4-5-6	M. X. HUBAUT	60 FB
Me 18/01/89	Mathématique et diététique (1)	4-5-6	M. X. HUBAUT	60 FB
Sa 28/01/89	Les petits groupes en géométrie et ailleurs	1-2-3	Mme. P. EVRARD	300 FB
Me 01/02/89	Mathématique et diététique (2)	4-5-6	M. X. HUBAUT	60 FB

RENSEIGNEMENTS COMPLEMENTAIRES : Monsieur Christian VANDERCAMMEN
Tél. 02/537 03 25 ou 02/640 00 15
ext. 5429

SOMMAIRE page

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2
1160 - Bruxelles
tél : 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

C. Festraets, F. Michel, G. Noël, S. Trompler, F. Valette

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme

Prix des abonnements :

Belgique : groupés (5 au moins) 80 FB
isolés 120 FB

Etranger : y compris Pays-Bas et Luxembourg
par paquet de 5 abonnements 800 FB
isolé 240 FB

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)
Anciens numéros encore disponibles :
Années complètes : 81-82 (4 ex.), 82-83 (4 ex.), 83-84 (3 ex),
84-85, 87-88; prix par année 50 FB
Numéros isolés : 21, 22, 23, 30, 32, 33, 34 ; le numéro 10 FB
pour l'étranger, doubler les prix.

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte N° 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14bis
7460 - CASTEAU
Pour l'étranger : Cpte N° 000-0728014-29
SBPM, chemin des Fontaines, 14 bis
B-7460 CASTEAU, à partir d'un compte postal
ou par mandat postal international
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 200 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves du secondaire, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.