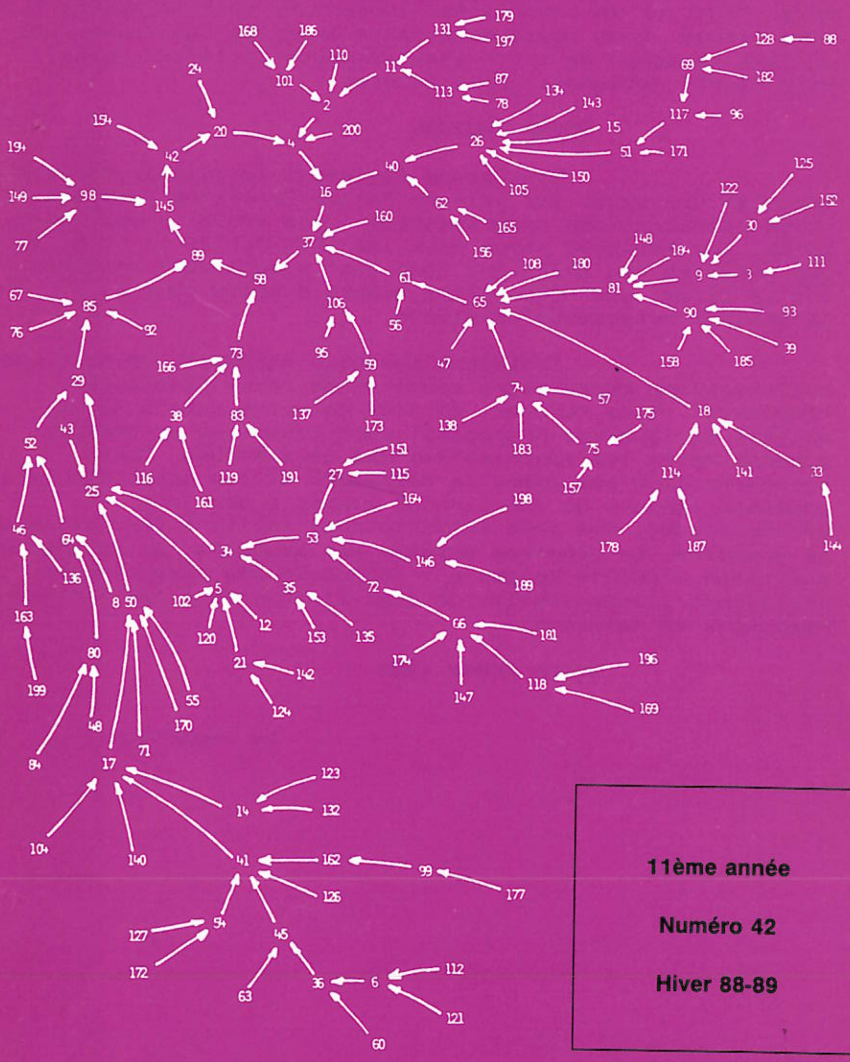
MATH-JEUNES



11ème année

Numéro 42

Hiver 88-89

Journal trimestriel publié par la
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française - Association Sans But Lucratif

Bureau de dépôt: Bruxelles 16

Chers amis,

Nous sommes heureux de vous présenter un numéro de MATH-JEUNES qui, dans sa presque totalité, a été réalisé par des professeurs et élèves de l'athénée royal de Mons. Nous les en remercions vivement et vous engageons à vous lancer, vous aussi dans cette aventure, un numéro qui portera le sceau de votre établissement scolaire. Ainsi, MATH-JEUNES deviendra, plus encore,

VOTRE JOURNAL

Nous avons également le plaisir de vous annoncer que parmi les prix du Rallye Problèmes figurent trois calculatrices programmables : une HP28S, voyez, à ce sujet, les articles parus dans les MATH-JEUNES nî 37 et 41, une HP42S et une HP32S qui nous sont aimablement offertes par la firme. Que ceci incite nombre d'entre vous à participer activement au rallye.

Troisième nouvelle agréable, celle d'une collaboration entre notre revue et la revue française "TANGENTE". Vous recevez, en plus de votre numéro 42 un extrait de la revue française; ceci constitue un premier échange entre les responsables des deux revues. Vous trouverez dans ces pages le règlement et les questions de la première épreuve du championnat français des jeux mathématiques. Nos amis français vous invite à participer à ce concours. La première épreuve est gratuite. Si un nombre suffisant d'écoles belges s'y intéresse les responsables envisagent l'organisation de demi-finales dans des centres régionaux en Belgique.

Bonne année 1989

La Rédaction

La personnalité des nombres

"Les nombres naturels, comme les gens, ont une personnalité."

Et oui, les propriétés des nombres naturels leur donnent une personnalité. Ainsi, de même qu'il y a des hommes et des femmes, il y a aussi des nombres pairs et des nombres impairs, deux nombres et leurs diviseurs communs forment une famille, ...
Examinons quelques caractéristiques de certains nombres qui permettent de leur donner un nom commun:

Voici d'abord les nombres triangulaires qu'au temps du comptage avec des cailloux on aurait pu représenter comme ceci

```
o                                         o
o o                                      o o
o o o              ou                   o o o
o o o o                                o o o o
.                                         .
.                                         .
.                                         .
```

en se limitant à l'une quelconque des lignes on obtient la somme de n premiers nombres naturels consécutifs non nuls. On les appelle "nombres triangulaires". Dans le pays des nombres triangulaires nous trouvons

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
3 &= 1 + 2\\
6 &= 1 + 2 + 3\\
10 &= 1 + 2 + 3 + 4\\
&\;\vdots\\
55 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10\\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

On montre facilement que si n est le dernier terme de la somme, le nombre triangulaire correspondant vaut $n(n+1)/2$.
Regardez:

$$
\begin{array}{lllllll}
S = & 1 & + \;2 & + \;3 & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (n-2)+(n-1)+ & n\\
S = & n & +(n-1) & +(n-2) & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \;+\; 2 & +\; 1\\
\hline
2S = & (n+1) & +(n+1) & +(n+1)+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (n+1)+(n+1)+ & (n+1)\\
= & n(n+1) & & & & &
\end{array}
$$

Une anecdote raconte que souhaitant maintenir sa classe en activité pendant qu'il exécutait un travail, l'instituteur de Gauss avait demandé à ses élèves de calculer la somme des 100 premiers nombres entiers et que, moins d'une minute après, Gauss lui avait apporté la solution, ayant procédé comme ci-dessus!

Ayant examiné le pays des nombres triangulaires, nous pouvons immédiatement penser à un autre pays dont les citoyens sont, non plus la somme, mais le produit des n premiers nombres consécutifs non nuls. Appartiennent à ce pays:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 \\
6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
720 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\
5040 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\
40320 &+ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\
362880 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \\
3628800 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Le pays de ces nombres est le pays des "factorielles". Comme vous pouvez le remarquer ces nombres deviennent vite très grands. Il ne faudrait pas continuer la liste très longtemps pour ne plus pouvoir les écrire sur une seule ligne de votre cahier, ni même sur une seule page. Il n'existe malheureusement pas une formule qui permet de donner le résultat directement. L'instituteur de Gauss aurait été mieux inspiré en lui demandant de calculer le produit, fut-ce des 10 premiers nombres entiers !Les férus d'informatique peuvent essayer de construire un logiciel donnant avec tous les chiffres significatifs exacts des nombres du pays des factorielles.

Vous remarquerez que dans notre monde des nombres naturels nous venons de créer des êtres ayant une double nationalité. Ainsi 6 est à la fois citoyen du pays des triangulaires mais aussi de celui des factorielles. D'autres sont apatrides! Nous allons maintenant effectuer des classements de notre population oú un individu n'appartient jamais à deux régions différentes et oú chacun est citoyen d'une région. Nous allons d'abord choisir un individu qui va être responsable du nombre de régions de notre univers ainsi que de la répartition des nombres dans chaque région. Vous pouvez choisir celui que vous voulez; nous le désignerons d'une manière générale par n . Pour effectuer notre classement nous allons comparer chaque nombre à n de la manière suivante :
Soit a un nombre naturel, nous le divisons par n , nous obtenons un quotient entier par défaut q et un reste r . Vous connaissez tous les relations qui définissent cette opération :

$$a = n \cdot q + r \qquad \text{avec} \qquad r < n \quad .$$

Il y a donc n restes possibles, à savoir

$$0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ (n-2) \ , \ (n-1)$$

ces n nombres seront les numéros de nos régions et chaque individu appartiendra à la région désignée par le reste de sa division par n . On dit que l'on a classé les nombres "modulo n".

Je peux évidemment donner un nom à chacune de mes régions. Supposons, par exemple que j'aie pris pour n le nombre 7. En donnant à la classe numéro 0 le nom "samedi", à la classe numéro 1 le nom "dimanche", à la classe numéro 2 le nom "lundi", ... à la classe numéro 6 le nom "vendredi", j'obtiendrai pour les 31 premiers nombres entiers non nuls le classement suivant qui n'est rien d'autre que le calendrier du mois de janvier 1989 . Je profite de cette occasion pour vous souhaiter une bonne année.

samedi		7	14	21	28
dimanche	1	8	15	22	29
lundi	2	9	16	23	30
mardi	3	10	17	24	31
mercredi	4	11	18	25	
jeudi	5	12	19	26	
vendredi	6	13	20	27	

Supposons maintenant que deux individus habitant une même région ou des régions différentes décident de s'unir et donnent naissance à un rejeton qui sera leur somme. Quelle sera la nationalité du rejeton ?
Dans ce drôle d'univers ce ne sera pas nécessairement celle de l'un de ses géniteurs mais sa nationalité sera déterminée uniquement par la nationalité de ses deux parents.

Prenons un exemple en regardant le calendrier ci-dessus que nous supposerons éventuellement prolongé au delà de 31. Marions par exemple le nombre 5 dont la nationalité est "jeudi" avec le nombre 10 dont la nationalité est "mardi" . Leur progéniture 15 appartiendra au pays "dimanche". Il en sera de même pour tout autre mariage d'un individu du pays jeudi et du pays mardi et vous remarquerez qu'en particulier on trouve la nationalité de l'enfant en mariant les numéros des pays concernés. La recherche de la nationalité de l'enfant s'appelle une "addition modulo n" et l'on peut construire une table de Pythagore de cette opération

+	sam	dim	lun	mar	mer	jeu	ven
sam	sam	dim	lun	mar	mer	jeu	ven
dim	dim	lun	mar	mer	jeu	ven	sam
lun	lun	mar	mer	jeu	ven	sam	dim
mar	mar	mer	jeu	ven	sam	dim	lun
mer	mer	jeu	ven	sam	dim	lun	mar
jeu	jeu	ven	sam	dim	lun	mar	mer
ven	ven	sam	dim	lun	mar	mer	jeu

Tant que nous sommes dans le monde de la fiction, nous pouvons supposer que dans cet univers les individus peuvent avoir des modes de reproduction différents et qu'ils peuvent choisir d'avoir comme rejeton non plus leur somme mais leur produit. La nationalité de l'enfant sera à nouveau régie par la nationalité des géniteurs et l'on pourra encore déterminer l'appartenance à une classe en opérant sur les numéros des classes. Ainsi le produit modulo 7 nous donnera la table de Pythagore suivante . Nous utiliserons cette fois les numéros des classes pour rendre plus visibles les propriétés:

.	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Vous remarquerez que pour ce tableau, les propriétés de la multiplication modulo n sont presque les mêmes que celles de la multiplication des naturels. En particulier 1 est élément neutre, 0 est élément absorbant, l'opération est commutative et associative, le produit de deux éléments n'est nul que si l'un des deux est nul. Mais il y a quelque chose de plus : tout élément a un symétrique pour la multiplication. Ces propriétés vont elles se retrouver quel que soit le nombre n . Construisons par exemple la table pour n = 6. On trouve

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Nous voyons qu'il n'en est rien. Non seulement chaque élément n'a plus un symétrique mais le produit modulo 6 peut être nul sans qu'aucun des deux facteurs ne le soit ! Nous ne pourrons donc pas affirmer que

$$ab = ac \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{entraîne} \quad b = c \quad .$$

D'oú provient cette possibilité d'obtenir 0 comme produit de deux éléments non nuls. Remarquons que les nombres qui figurent dans la classe de numéro 0 sont les multiples de n . Si donc le produit de deux numéros (nombres plus petits que n) est le numéro 0 , c'est que ce produit est un multiple de n . Cela se passera chaque fois que n aura des diviseurs autres que lui-même ou 1 . Un tel nombre sera dit "composé". Voici une nouvelle caractéristique de certains nombres naturels. Les nombres naturels qui ne sont pas composés sont 1 et les nombres dont l'ensemble des diviseurs est une paire formée de 1 et du nombre lui-même. Vous les avez peut-être reconnus; ce sont les "nombres premiers".
Les nombres premiers portent bien leur nom. Ils ont été et sont encore à la base d'un grand nombre de sujets d'études mathématiques dans le cadre de la théorie des nombres.
Il est, par exemple, assez simple de montrer qu'il n'existe pas un nombre premier plus grand que tous les autres mais un problème qui reste ouvert est la découverte d'une loi permettant d'établir leur répartition dans l'ensemble des naturels. (voir page 44)

Les caractéristiques des nombres que nous venons d'évoquer sont indépendantes des systèmes de numération utilisés pour les écrire, ce sont des propriétés intrinsèques. Mais, si l'adage "l'habit ne fait pas le moine" est souvent pertinent, il n'en reste pas moins que la toilette d'une personne contribue elle aussi à sa personnalité et que la même personne peut apparaître fort différente suivant son habillement. Pour les nombres également certaines propriétés sont liées au mode de numération utilisé.

Nous nous limiterons ici à la numération de position, c'est-à-dire celle que vous avez l'habitude d'utiliser. Vous avez tous manié des caractères de divisibilité par 2, 3, 5, ... et vous n'avez jamais éprouvé le besoin de préciser la base de numération que vous utilisiez et pourtant .....

Plaçons nous par exemple en base trois; nous disposons donc des chiffres 0, 1, 2 . Pensez-vous qu'un nombre terminé par 0 est nécessairement divisible par 2, ou que 12 par exemple n'est pas multiple de cinq ou est multiple de 3 ? Les caractères de divisibilité que vous avez eu l'habitude d'utiliser ne sont valables que dans la base décimale. Ils sont caractéristiques de certains nombres habillés d'une certaine manière.

De même le graphe de la couverture est lié à la numération décimale des nombres parce que la définition de la transformation utilisée fait appel aux chiffres des nombres. Regardez bien : pour chaque nombre faites la somme des carrés de chacun de ses chiffres. Le nouveau nombre que vous obtenez est l'image du nombre choisi. Le graphe de la couverture nous montre que certains nombres naturels par la répétition de cette opération sont amenés dans une boucle infernale dont ils ne sortiront plus jamais. Ce graphe peut évidemment se prolonger pour des nombres plus grands que 200 mais remarquez que tous les nombres inférieurs à 200 n'y figurent pas; que font les autres? En les repérant et en effectuant les calculs, vous constaterez que quatre d'entre eux viendront se raccrocher à la nébuleuse de notre couverture tandis que les autres par opérations répetées, convergent vers 1. Je vous laisse le plaisir de découvrir ce bouquet.
Les nombres qui s'engouffrent dans la boucle infernale sont appelés "nombres tristes" et ceux du bouquet "nombres joyeux". Mais des questions se posent: les nombres plus grands vont-ils tous entrer dans une de ces deux familles; n'allons-nous pas rencontrer d'autres boucles infernales ou d'autres points fixes; comment vont se comporter ces mêmes nombres si la base de numération n'est plus dix? Allons-nous chaque fois trouver soit une convergence vers 1 soit entrer dans une boucle infernale? Jusqu'oú devons-nous aller pour être certains d'avoir trouvé toutes les boucles possibles ou les points fixes de la transformation et cela quelle que soit la base?
De quoi vous distraire pendant les longues soirées d'hiver. Si vous commencez à explorer la situation, je gage que vous oublierez de regarder la télévision ! Et comme je n'en sais pas beaucoup plus que vous sur le sujet, je serais bien heureuse de recevoir vos découvertes.
Je termine en vous signalant que Arnaud MAES de Bruxelles m'a envoyé un programme, tournant sur Commodore, qui calcule les images successives de tout nombre inférieur à 200 ,en numération décimale, et peut également remonter les flèches à partir d'un nombre donné pour calculer ses antécédents inférieurs à 200 .Il est facilement adaptable pour des nombres plus grands.

J. Vanhamme

Partages astucieux

(Comment obtenir plus que la part qu'on espère !)

Les mathématiciens ont un moyen pratique de représenter le quotient exact de la division du nombre a par le nombre b, c'est d'écrire a/b (et encore !!!).
Mais les problèmes réels de répartitions équitables posent souvent des questions génantes. Ainsi, si trois amis reçoivent une gratification globale de 1 000 fr alors ils seront confrontés au problème de la répartition en parts égales. Il est pratiquement acquis qu'il prendront chacun 333 fr et qu'ils "oublieront" le dernier franc disponible.
Mais, comment procéder lorsqu'il s'agit de se répartir des objets dont les valeurs et les quantités sont différentes ? Servons-nous d'un exemple .
Quatre amis, A, B, C, D sont associés et désirent mettre fin à l'entreprise commune. Ils doivent se partager le matériel de l'association qui comporte un micro-ordinateur (MO), une photo-copieuse (PC) et un appareil photographique (AP). S'ils sont d'accord, tous les quatre, sur la valeur de chacun des objets et si cela les agrée, ils les mettront en vente et se partageront la somme recueillie.
Dans le cas contraire, ils peuvent alors faire appel à un "expert" qui évaluera les objets. Cette façon de faire rencontre rarement l'unanimité des parties concernées.
Voici une autre manière de procéder qui permettra à chacun, s'il reste logique avec lui-même, d'obtenir une part plus importante que ce qu'il espérait obtenir, ce qui ne peut que contenter tout le monde.
Chacun de son côté et sans consulter les autres, attribue la valeur qu'il estime à chacun des objets. Il confie ensuite ces estimations à un arbitre.
Voici un tableau de valeurs attribuées (en fr) en ce qui concerne les objets de notre exemple.

	A	B	C	D
MO	40 000	30 000	50 000	38 000
PC	20 000	30 000	28 000	32 000
AP	10 000	12 000	8 000	4 000

L'arbitre est alors en mesure de calculer la valeur globale de l'ensemble des objets selon chacun des quatre amis ainsi que la valeur de la part que chacun d'eux estime devoir lui revenir . Si vous réalisez cela vous-même alors vous obtiendrez le tableau qui suit.
(On a additionné les sommes dans chaque colonne et on a divisé les totaux par 4).

	A	B	C	D
MO	40 000	30 000	50 000	38 000
PC	20 000	30 000	28 000	32 000
AP	10 000	12 000	08 000	04 000
Totaux	70 000	72 000	86 000	74 000
Parts	17 500	18 000	21 500	18 500

A ce moment, l'arbitre affecte chacun des objets à celui qui lui a attribué la plus grande valeur ce qui doit normalement contenter cette personne.
Dans le cas de notre exemple, le MO est attribué à C, la PC est attribuée à D et l'AP est attribué à B. A ne reçoit donc aucun objet.
L'arbitre établit alors le bilan des parts attribuées et calcule les soldes qui peuvent être positifs (si la valeur de l'objet reçu est inférieure à la part estimée) ou qui peuvent être négatifs dans le cas contraire.
Voici notre tableau complété par ces calculs.

	A	B	C	D
MO	40 000	30 000	50 000	38 000
PC	20 000	30 000	28 000	32 000
AP	10 000	12 000	08 000	04 000
Totaux	70 000	72 000	86 000	74 000
Parts	17 500	18 000	21 500	18 500
Valeurs reçues	00 000	12 000	50 000	32 000
Soldes	17 500	06 000	- 28 500	- 13 500

L'arbitre distribue les objets (comme prévu ci-avant) . Il reçoit 28 500 fr de C et 13 500 fr de D soit 42 000 fr. Sur cette somme, il donne 17 500 fr à A qui n'a éncore rien reçu et 6 000 fr à B qui n'a pas reçu la valeur qu'il espérait. Il lui reste donc 28 500 fr + 13 500 fr - 17 500 fr - 6 000 fr soit 18 500 fr qu'il répartit entre les quatre amis. Chacun d'eux reçoit donc 4 625 fr de plus que ce qu'il escomptait lui-même.

En résumé: en fonction des estimations des quatre amis, nous constatons que

A reçoit 22 125 fr (17 500 fr + 4 625 fr)

B reçoit L'appareil photographique (qu'il évalue à 12 000 fr) et 10 625 fr (6 000 fr + 4 625 fr)

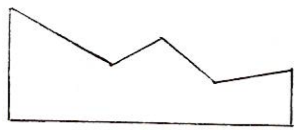
C reçoit le micro-ordinateur (qu'il évalue à 50 000 fr) mais paye 23 875 fr (28 500 fr - 4 625 fr)

D reçoit la Photo-copieuse (qu'il évalue à 32 000 fr) mais paye 8 875 fr (13 500 fr - 4625 fr)

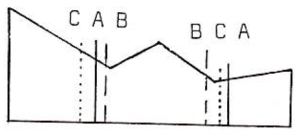
Cette technique peut être appliquée à d'autres problèmes de partage, par exemple à un partage de terrain en plusieurs parts.

On sait que la valeur des terrains peut dépendre d'autre critères que la superficie. L'emplacement, la nature du relief, ... sont des bases pouvant donner lieu à divergence d'estimation.

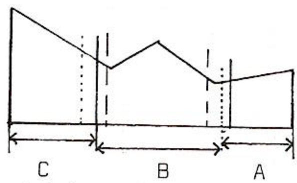
Soit, par exemple, le terrain ci-contre à partager en trois lots entre A, B et C.



On demande à chacun de tracer les lignes de partage en trois parts de même valeur (selon ses propres critères).



Il ne reste alors qu'à attribuer les lots pour que chacun reçoive au moins une part selon sa propre estimation.



Vous pouvez essayer de répartir des objets ou des terrains dans d'autres cas de choix de valeurs de la part des personnes concernées.
Voilà de quoi alimenter des recherches et des discussions, en classe ou à la maison.

Claude Villers

Source: " Mathématiques en instantanés "
de H. Steinhaus chez Flammarion (1964)

Autour des suites de Collatz

1) Construisons des suites de naturels de la façon suivante:
- On choisit un naturel n (non nul).
- Le naturel suivant sera $\begin{cases} n/2 \text{ si n est pair,} \\ 3xn+1 \text{ si n est impair.} \end{cases}$
- Et on continue (à partir du nombre trouvé).
- On s'arrête si l'on arrive à 1. (Et dans ce cas, la suite est qualifiée de finie).

Exemples: 4,2,1.
9,28,14,7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1.
25,76,38,19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1.

Toutes ces suites sont-elles finies(se ramènent-elles à 1)? Des calculs à la main nous ont parfois fait hésiter. (Essayer à partir du nombre 27.). Mais l'ordinateur est là. Parmi les programmes récoltés, retenons celui-ci:

```
10 CLS
30 INPUT N
40 IF N<>INT (N) OR N<2 THEN GOTO 10
100 IF INT(N/2)=N/2 THEN N=N/2:GOTO 150
120 N=N*3+1
150 PRINT N,
170 IF N=1 THEN END
180 GOTO 100
```

(A adapter selon les ordinateurs)

Malheureusement, ce programme ne permet de tester les nombres qu'un par un. De petites modifications permettent évidemment de le faire "boucler". Nous avons ainsi pu montrer que beaucoup de naturels donnent des suites finies. Cela suffit-il pour être certain qu'elles le sont toutes? Non, bien sûr: nous n'avons pas testé tous les naturels!

Le mathématicien allemand Lothar COLLATZ a émis la conjecture suivante: **Toutes les suites construites de cette manière sont finies (s'arrêtent à 1).**

(Rappelons qu'une conjecture est une proposition que l'on n'a pas encore pu démontrer).

2) Et si....

Et si on remplaçait le nombre 3 par un autre naturel, sans changer par ailleurs le mode de construction de la suite.

	Le terme suivant est	exemples
a)	n/2 si n est pair, **1**xn+1 sinon.	5,6,3,4,2,1. 13,14,7,8,4,2,1. 17744,8872,4436,2218,1109,1110,555,556,278,139,140,70,35,36,18,9,10,5,6,3,2,1.
b)	n/2 si n est pair, **2**xn+1 sinon.	16,8,4,2,1. 24,12,6,3,7,15,31,... 5,11,23,47,... 72,36,18,9,19,39,...
c)	n/2 si n est pair, **4**xn+1 sinon.	28,14,7,29,117,469,1877,... 64,32,16,8,4,2,1. 3,13,53,213,853,... 35,141,565,2261,...
d)	n/2 si n est pair, **5**xn+1 sinon.	7,36,18,9,46,...,7166,...,834416,... **13**,66,33,166,83,416,208,104,52,26,**13**,66,33,... **17**,86,43,216,108,54,27,136,68,34,**17**,86,... 105,...après 106 transformations:**13**,66,... 397,1986,993,4966,2483,12416,6208,3104,1552,776,388,194 97,486,243,1216,608,304,152,76,38,19,96,48,24,12,6 3,16,8,4,2,1.

<u>Quelles conclusions en tirer?</u>

a) Dans ce cas, toutes les suites arrivent à 1. En effet, si le nombre testé est pair, il est divisé par 2, s'il est impair, on lui ajoute 1 et on le divise par 2 à l'étape suivante. en fin de compte, on diminue plus que l'on augmente et on se retrouvera donc à 1. (Ceci demanderait une démonstration soigneuse).

b) et c) Certaines suites"explosent". Dès que l'on obtient un nombre impair, on est sûr que le suivant sera impair et supérieur. Remarquons que notre ordinateur nous a "joué des tours". En testant le nombre 24 on arrive à 1, ce qui est manifestement impossible! (Voyez-vous pourquoi il s'est trompé ?)

d) Les résultats sont encore plus étonnants.
   -La suite dont le premier terme est 7 "explose" apparemment (en est-on vraiment sûr ?).
   -13,17,105 "bouclent" et donne une suite infinie (mais qui n'explose pas).
   -397, par exemple, fournit une suite finie.

D'autres modifications sont évidemment possibles.
A vos plumes.

Des élèves de la classe de 2H

Q.1 Elle a 30 ans! bon anniversaire!

+ Son père est Jack Saint Clair Kilby. Elle est née en 1958. Son berceau mesurait 11mm sur 1,5mm. Apparemment, elle n'a pas fortifié -et pourtant! Elle est maintenant bien à l'aise sur un carré de 0.001mm de côté. Et ce n'est, paraît-il, qu'un début! de qui s'agit-il?

Q.2

+ Calculer:

$$100^2 -99^2 +98^2 -97^2 ....+4^2 -3^2 +2^2 -1^2$$

Le charbon brûle-t-il à basse température?

Question absurde, n'est-il pas?

Pourtant si vous posez la question à un chimiste, il vous répondra que la réaction de combustion entre le carbone et l'oxygène a lieu, à toutes températures mais qu'aux basses températures le processus est très lent c-à-d que la vitesse de réaction est très peu élevée. (Un nombre très faible de molécules prennent part à la réaction.)
La loi qui définit la vitesse de réaction dit que pour un abaissement de température de 10° la vitesse de réaction est divisée par deux.
Admettons qu'à 600°(température de la flamme) il brûle une certaine masse de charbon par seconde.
En combien de temps cette même masse à 20° va-t-elle brûler?

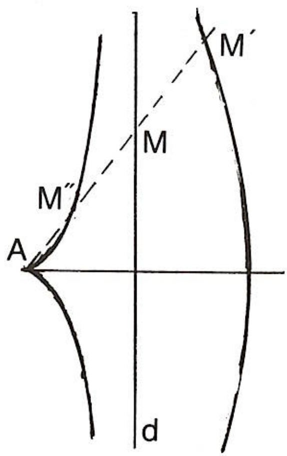
J.P. Mathieu

Référence bibliographique: Y Pérelman
L'algèbre récréative
Editions MIR

A propos de deux problèmes célèbres

En terminant son article relatif à la construction des polygones réguliers en n'utilisant que la règle et le compas (math-jeunes n° 41), Mme Festraets souhaite bon amusement aux lecteurs. A ceux qui se sont bien amusés en analysant son texte (et ils sont certainement nombreux), je propose dans le même cadre, une résolution graphique (donc approchée) des problèmes de la trisection de l'angle aigu et de la duplication du cube. Ces constructions font appel à des courbes appelées conchoïdes.
Au deuxième siècle avant J. C., le géomètre grec Nicomède s'est déja intéressé à ces courbes et au problème de la trisection de l'angle notamment.

Construction d'une conchoïde.



Dans un plan α, muni d'un mètre, on considère une droite d, un point A ($A \notin d$) et un réel k strictement positif. Une droite mobile autour de A coupe la droite d en M. De part et d'autre de M, on reporte sur AM les segments [MM'] et [MM"] de longueur k . En considérant un nombre suffisamment grand de points M'et M", il est possible de construire avec une précision fort acceptable deux courbes dont la réunion est appelée conchoïde. Celle-ci est donc définie par une droite d, un point A appelé pôle et un réel positif k appelé module.

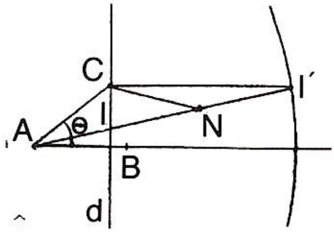
Premier problème: Trisection de l'angle aigu.

Cette construction fait appel à une conchoïde de Nicomède. Soit $\hat{\theta}$ un angle aigu donné de sommet A. Sur l'un des côtés de cet angle, portons le segment [AC] de longueur 1 et de C, abaissons la perpendiculaire d sur l'autre côté de l'angle. Construisons alors point par point la conchoïde relative à la droite d, au pôle A et pour le module 2. Seule la branche correspondant au point M' est prise en considération.
Nous nous plaçons donc dans des conditions particulières, c'est-à-dire dans les conditions de la conchoïde de Nicomède.
Cette courbe étant tracée, la parallèle au côté AB, menée par C, coupe la conchoïde en un point I' et la droite AI' coupe la droite d en I (II'=2). Le triangle ICI' est

rectangle en C et la médiane CN relative à l'hypoténuse vaut la moitié de celle-ci.

D'où: $$CN = \frac{1}{2}\, II'' = AC = 1$$

Les triangles ACN et CNI' sont donc isocèles et l'on démontre aisément que



$$\widehat{BAI} = \frac{\widehat{IAC}}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{3} = \frac{\hat{\theta}}{3}$$

Le but poursuivi est donc atteint.

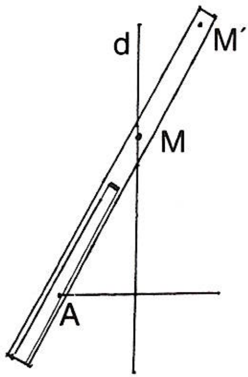
Remarques:

1) nous avons donc partagé l'angle aigu en trois parties "égales" et la précision du résultat dépend, faut-il le rappeler, du nombre de points M' construits avec les instruments pour former la courbe.
Le problème da la trisection de l'angle non aigu peut évidemment être traité semblablement. Avis aux amateurs.

2) Les fins mécaniciens pourront occuper leurs loisirs à la construction d'une réglette imaginée par le célèbre Nicomède pour tracer la conchoïde d'une manière continue. Il s'agit d'une latte munie:

a) d'une pointe sèche M
b) d'une pointe traçante M'
c) d'une fine rainure permettant à une pointe sèche fixée en A de s'y déplacer.

La pointe sèche décrit la droite d et la pointe traçante décrit la courbe.

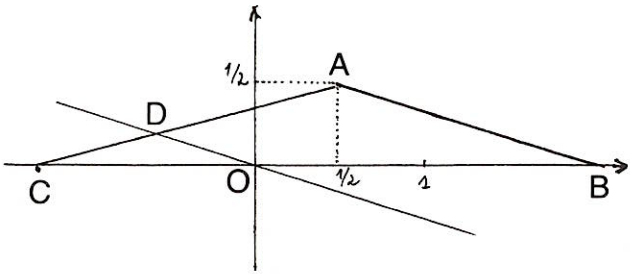


<u>Deuxième problème: Duplication du cube.</u>

Il s'agit ici de construire un cube dont le volume est double de celui d'un cube d'arête de longueur a donnée.
Le volume du cube recherché étant 2a , la longueur de son arête sera a. 2 .
Ce segment peut être construit , toujours d'une manière approximative, en faisant appel à une conchoïde définie par des éléments biens choisis évidemment.
Pour simplifier le travail, posons a = 1 et construisons le segment de longueur $\sqrt[3]{2}$.

Dans un repère orthonormé, considérons les points A (1/2,1/2) et B (2,0) et, en supposant le problème résolu, soit C le point de coordonnée $(-\sqrt[3]{2}, 0)$.

Menons par O la parallèle d à la droite AB ; elle coupe la droite CA en D.



Les théorèmes de Thalès et de Pythagore nous permettent d'écrire ce qui suit:

$$\frac{CD}{CO} = \frac{CA}{CB} \quad (1) \qquad \text{posons} \quad k = \sqrt[3]{2} \qquad \text{ou } k^3 = 2$$

$$CO = k \qquad CB = k + 2$$

$$CA = \sqrt{(k+1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{k^2 + k + 1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2k^4 + 2k^3 + k^2}{2k^2}} = \sqrt{\frac{4k + 4 + k^2}{2k^2}}$$

$$= \frac{k + 2}{k.\sqrt{2}}$$

La relation (1) donne alors:

$$CD = \frac{CO \,.\, CA}{CB} = \frac{k \cdot \frac{k+2}{k\sqrt{2}}}{k + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les segments [CD] et [OA] sont donc isométriques.

En conclusion, le point C recherché peut être considéré comme étant le point d'intersection de l'axe OX avec la conchoïde définie par le point A, la droite OD et

le module $\sqrt{2}/2$

Remarque: le segment [CO] de longueur $\sqrt[3]{2}$ étant obtenu, on construira facilement l'arête du cube recherché. A vous de jouer.

Pierre Degouys

Les Problèmes du Rallye

1. On considère le tableau de nombres :

1	2	3	...	n
n+1	n+2	n+3	...	2n
2n+1	2n+2	2n+3	...	3n
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	
(n-1)n+1	(n-1)n+2	(n-&)n+3	...	n^2

On y choisit arbitrairement un nombre, soit a , et on le supprime du tableau, ainsi que la ligne et la colonne qui le contiennent. Dans le nouveau tableau ainsi formé, on choisit arbitrairement un deuxième nombre soit a , et on le supprime ainsi que la ligne et la colonne qui le contiennent. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un tableau contenant un seul nombre, soit a . Que vaut la somme

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ ?$$

(14-15 ans)

2. Ecrivons la suite de tous les multiples entiers positifs de 9

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, ...(1)

et pour chacun de ces nombres, la somme de leurs chiffres

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, 9, ... (2)

Qans la suite (2), à quelle place apparaît pour la première fois 81 ? Quel est le nombre qui suit immédiatement ? Trouve-t-on, dans la suite (2), quatre fois consécutivement 27? Si oui, à quels nombres de la suite (1) correspondent-ils lors de leur première apparition?

(12 ans)

3. Les 6 chevaliers de la Table Ronde sont réunis à la cour du roi Arthur. Chacun d'eux a au plus 2 ennemis parmi les 5 autres chevaliers. Montrer que Merlin (conseiller du roi) peut les asseoir autour d'une table de manière à ce qu'aucun chevalier ne soit assis à co9té de son ennemi. *(12 ans).* Généraliser au cas de 2n chevaliers ayant chacun au plus n - 1 ennemis. (Remarque: si le chevalier A est ennemi du chevalier B, alors B est aussi ennemi de A) .

(14-15 ans).

4. Deux cercles C_1 et C_2 sont tangents intérieurement, A est leur point de contact et C_2 est intérieur à C_1 . Par A , on mène une droite arbitraire qui coupe C_2 en B. Par B , on mène la tangente à C_2 qui coupe C_1 en D et en E. Démontrer que AB est bissectrice de l'angle DAE.

(13-14 ans)

C. FESTRAETS

Quelques problèmes sur les rotations

Le but de ces quelques problèmes est de montrer que l'on peut se servir des rotations dans certaines situations intéressantes.

Problème 1

Le triangle ABC rectangle en B est donné. ([BC] ≤ [AB])
Construire D [BC] tel que |AB| = |BD| .
Construire E [AB tel que |BC| = |BE| .
Démontrer que AC ⊥ DE.
Démontrer que AD ⊥ EC.

Problème 2

Le cercle C(O,r) ainsi que [AB] et [CD] 2 diamètres perpendiculaires, R milieu de [OA] et S milieu de [OD] sont donnés
Démontrer que AS ⊥ CR.

Problème 3

Même énoncé que le 2 avec P intersection de C et CR
et Q intersection de C et AS.
Démontrer que OP ⊥ OQ.

Problème 4

Même énoncé que le 2 avec T intersection de CR et AS.
Démontrer que O,R,T,S appartiennent à un cercle C'dont on précisera le centre O' et dont on calculera le rayon r' en fonction de r; de plus aire de C = 8 x aire de C'.

Problème 5

Même énoncé que le 1.
Démontrer que les médianes relatives aux hypoténuses des triangles rectangles ABC et BDE sont perpendiculaires.

Problème 6

Le triangle ABC est donné.
Construire D image de B par la rotation R (A,+90°)
Construire F image de C par la rotation R (A,-90°)
Démontrer que BF ⊥ CD.

Problème 7

Même énoncé que le 6.
Soit P milieu de [CF].
Démontrer que la rotation (P,+90°) transforme C en A
A en F
Ensuite construire les parallélogrammes CABR et FADS.
Démontrer que la rotation (P,+90°) transforme [CR] en [AD]
[AB] en [FS] .
Démontrer que AS est médiane dans le triangle ADF et hauteur dans le triangle ABC. (Idem pour AR médiane dans le triangle ABC et hauteur dans le triangle ADF.)

Problème 8

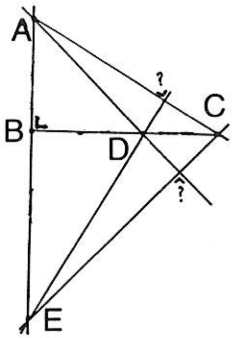
ABCD est un parallélogramme, x étant l'un des angles formés par ses diagonales.
Construire un rectangle dont les sommets appartiennent aux côtés du parallélogramme et tel que les diagonales forment entre-elles un angle égal à x.

J.P. Mathieu

Sources utilisées: Herman et Georges
Mathématique 3
Editions Dagis.

Solutions.

Problème 1
Considérons la rotation R (B,-90°).



a) R transforme B en B
A en D
C en E

R transforme AC en DE

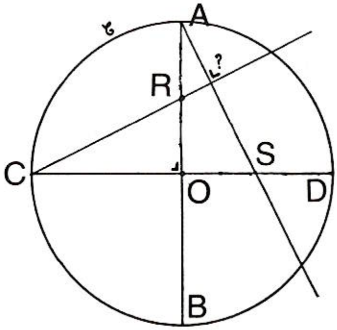
et AC $\perp$ DE

(car un des angles formé par une droite et son image dans une rotation a même amplitude que l'angle de la rotation.) (1)

b) Il suffit de remarquer que D est l'orthocentre du triangle ACE.

Problème 2

Considérons la rotation R (O , - 90°)



R transforme O en O

C en A

A en D

[OA] en [OD]

R en S

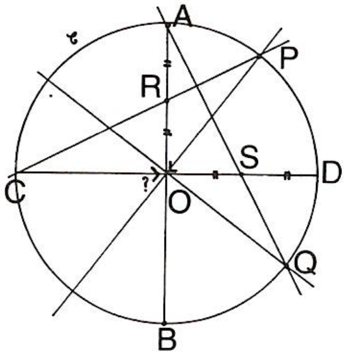
(conservation du milieu)

CR en AS

et CR $\perp$ AS
(1)

Problème 3

Considérons la rotation R (O,-90°).R transforme O en O
CR en AS
R conserve le cercle C



R transformera P en Q

(Le point d'intersection de 2 figures est transformé en le point d'intersection de l'image de ces figures) (2)

R transforme OP en OQ

et OP ⊥ OQ
(1)

Problème 4

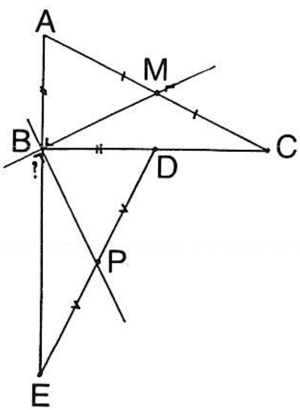
Quelques suggestions pour y parvenir:

1° Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un demi-cercle.

2° Le théorème de Pythagore

3° Relation exprimant l'aire d'un cercle.

Problème 5



On a M milieu de [AC]

P milieu de [DE]

Soit R rotation(B,-90°)

R transforme [AC] en [DE]

M en P

(conservation du milieu)

BM en BP

et BM ⊥ BP
(1)

La distribution des nombres premiers

Rappelons qu'un nombre premier est un nombre naturel dont l'ensemble des diviseurs (positifs) est une paire. Ainsi, 2, 17, 89 sont premiers alors que 1, 14, 57 ne le sont pas. Existe-t-il une loi permettant de construire l'ensemble des nombres premiers? Jusqu'à présent les résultats sont partiels. On sait depuis EUCLIDE (3ème siècle avant J-C) que la suite des nombres premiers est illimitée. FERMAT (1601-1665) pensa avoir trouvé une formule qui ne donnait que des nombres premiers (sans les donner tous) :

$$\boxed{2^{(2^n)}+1} \qquad (n \in N).$$

Par exemple, $2^{(2^0)}+1=3$ $\quad 2^{(2^1)}+1=5$ $\quad 2^{(2^2)}+1=17$

Hélas, n=5 ne fournit déjà plus un nombre premier;en effet,

$2^{32}+1$ est divisible par ..? (Réponse à la fin de l'article)

Encore FERMAT: x^2+x+41 donne quarante nombres premiers si x varie de 0 à 39.
Mais venons-en à notre propos: comment sont distribués les nombres premiers dans l'ensemble des nombres naturels? Cette distribution est étonnante. On peut trouver certains nombres premiers séparés seulement par deux unités: 1000000009649 et 1000000009651, par exemple. Par contre, il est possible de construire une suite de naturels aussi longue que l'on veut, dans laquelle ne figure aucun nombre premier. Par exemple, construisons une suite de 999 naturels consécutifs non premiers.
Soit le nombre 1000! (1000! se lit "factorielle 1000" et vaut 1000x999x998x997x.......x3x2x1).
Je dis qu'aucun des nombres 1000!+2, 1000!+3,...1000!+1000 n'est premier.
En effet,

1000!+2=1000x999x...x3x2x1 + 2
=2x(1000x999x...x3x1+1)
et 1000!+2 est divisible par 2

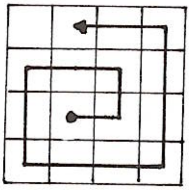
1000!+3=1000x999x...x3x2x1 + 3
=3x(1000x999x...x2x1+1)
et 1000!+3 est divisible par 3

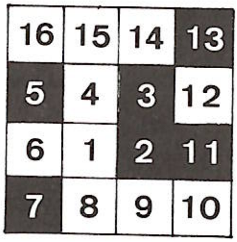
.
.
.

1000!+1000=1000x999x...x3x2x1 + 1000
=1000x(999x...x3x2x1+1)
et 1000!+1000 est divisible par 1000.

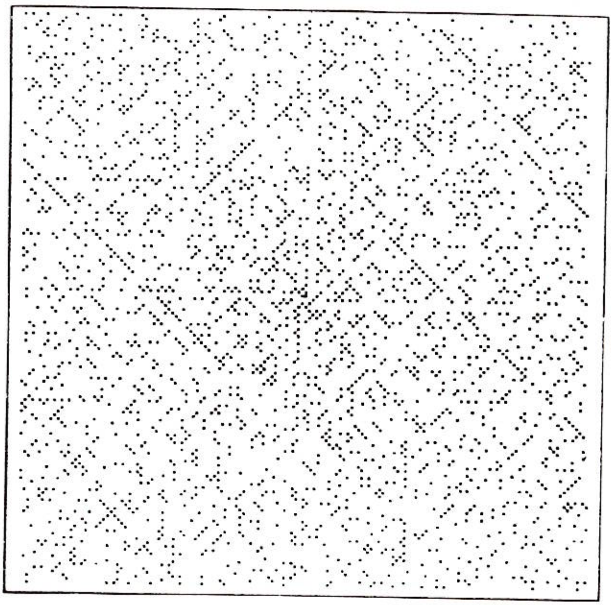
Voici donc 999 naturels consécutifs non premiers. on voit que l'on peut aisément extrapoler.

Pourquoi ne pas inscrire les naturels dans une "spirale" et y repérer les nombres premiers? Le mathématicien Ulam eut cette idée saugrenue:





Si on prend le temps de "noircir" beaucoup de cases, le résultat est assez étonnant:



Qui expliquera les "symétries", les "alignements" qui apparaissent?

Patrick Tréfois.

Réponse à la question posée: $2^{32}+1$ est divisible par 641

Curieuse proportionnalité

Le 9 octobre dernier, tous les citoyens belges ayant le droit de vote se sont rendus aux urnes à l'occasion des élections communales.
A cette occasion, chaque électeur peut accorder une et une seule voix à la liste de son choix, cette liste représentant un parti ou (rarement) un groupement de partis.

Lors du dépouillement de ce vote, on détermine le chiffre électoral de chaque liste: c'est le nombre de votes valables qui lui sont attribués. Ensuite, un nombre de sièges déterminé est réparti entre les listes.
Mais savez-vous comment se passe cette répartition?

Le système électoral belge prévoit une distribution "à la proportionnelle": chaque liste reçoit un nombre de sièges proportionnel à son chiffre électoral.
Malheureusement, il n'est pas possible de respecter exactement les proportions: on ne coupe pas un siège en deux ou trois ou...!
Une "méthode" a donc été mise au point, permettant de répartir les sièges en restant le plus équitable possible.
Il n'est pas toujours facile de comprendre cette méthode uniquement grâce aux journaux, à la télévision ou à la radio. C'est pourquoi nous allons vous l'expliquer.

Supposons que dans une commune, 5000 votes valables aient été enregistrés, répartis entre 5 listes A,B,C,D et E, de la manière suivante :

A	B	C	D	E
980	1890	1224	261	645

Le pourcentage des votes obtenus par ces listes est de:

A	B	C	D	E
19,6	37,8	24,48	5,22	12,9

Si 16 sièges sont disponibles, et qu'on les répartisse vraiment proportionnellement, ces listes **auraient**:

A	B	C	D	E	
3,136	6,048	3,916	0,835	2,064	(siège(s))

Bien sûr, il n'est pas possible de donner à chacun le nombre exact de sièges qui lui revient.
On pourrait donc, par exemple, attribuer les deux derniers sièges aux parties décimales les plus élevées.
De cette façon, la lista A recevrait 3 sièges, la liste B

en recevrait 6, la liste C en aurait 4, la liste D en recevrait 1 et la liste E hériterait de 2 sièges.
Dans la réalité, pour calculer la "part" de chaque liste, on divise son chiffre électoral successivement par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... etc, jusqu'à ce que les 16 quotients les plus importants apparaissent nettement.
Ces quotients attribuent chacun un siège à leur liste, le numéro de ce siège correspondant à l'importance du quotient.
Dans notre exemple, cela donne le tableau suivant: (les nombres ont été arrondis).

	A	B	C	D	E
/2	<u>490</u>	<u>945</u>	<u>612</u>	130	<u>322</u>
/3	<u>327</u>	<u>630</u>	<u>408</u>	87	<u>215</u>
/4	<u>245</u>	<u>472</u>	<u>306</u>	65	161
/5	196	<u>378</u>	<u>245</u>	52	129
/6	163	<u>315</u>	204	43	107
/7	140	<u>270</u>	175	37	92
/8	122	<u>236</u>	153	33	81
/9	109	210	136	29	72

Les 16 quotients soulignés sont les plus importants. La répartition des sièges se fera comme suit:
A: 3s. n° 4, 8, 13

B: 7s. n° 1, 2, 5, 7, 10, 12, 15

C: 4s. n° 3, 6, 11, 14

D: 0s.

E: 2s. n° 9, 16

Bien sûr, cette répartition ne saurait <u>pas</u> être tout à fait "proportionnelle". Par exemple, la liste D ne sera pas représentée, malgré qu'elle totalise 261 votes. Pourtant, il n'existe pas de système qui soit vraiment meilleur (on le saurait!), et cette méthode est la plus proche de la véritable proportionnalité.
De toute façon, il n'est pas possible de satisfaire tout le monde!
Problème: Dans le cas de l'exemple utilisé, combien de votes en sa faveur une liste doit-elle obtenir pour emporter tous les sièges?
François Delporte - Nicolas Dufour

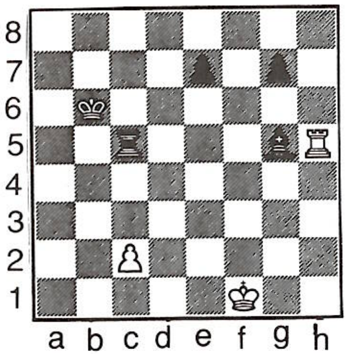
Elèves de quatrième

L'analyse rétrograde

AUX AMATEURS DU JEU D'ECHECS:

Plutôt que de vous intéresser au "futur" de la partie, aspiration normale et habituelle, avez-vous déjà pensé qu'un exercice de logique consiste à se poser des questions sur son passé? Au moins, en retrouver des traces. C'est ce que l'on appelle l'analyse rétrograde.Un exemple pour fixer les idées:

Noirs 5

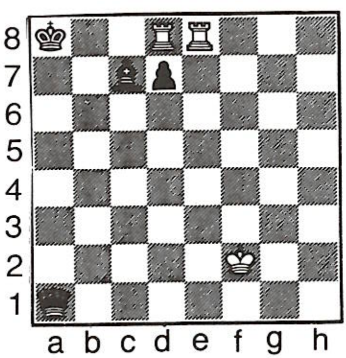


Blancs 3

Démontrer qu'un pion noir a été promu

Solution: comment un fou noir sur case noire peut-il se trouver en g5 s'il n'a pu sortir de sa case de départ f8? Un pion noir a donc été promu en fou (un pion peut être promu en une dame, une tour, un fou ou un cavalier).
Un problème très simple:

Noirs 3



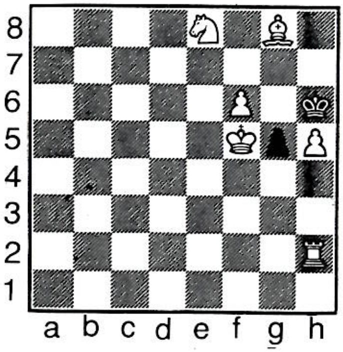
Blancs 3

Quel a été le dernier coup joué?

Dans ce genre d'exercice, rien ne dit que les joueurs ont exécuté le meilleur coup. Simplement, ils jouent selon les règles.

Apparemment plus classique:

Noirs 2

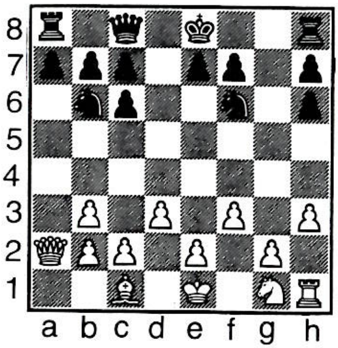


Blancs 6

On sait qu'au coup précédent les blancs ont joué leur tour. Ils ont le trait et font mat en un coup.

Moins facile:

Noirs 14



Blancs 13

Sur quelle case la tour manquante a-t-elle été prise?

Un peu d'aide?: Quelles sont les deux pièces blanches prises en c6 et h6? Qu'a pris le pion b3? Qui a pris d'abord: le pion b3 ou le pion c6? Après quelle capture la tour blanche a-t-elle pu sortir?

(Cette dernière énigme est inspirée d'un problème semblable posé par R.Smullyan dans son merveilleux livre "Mystères sur échiquier avec Sherlock Holmes", aux éditions DUNOD).

Patrick Tréfois.

SOMMAIRE PAGE

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2
1160 - Bruxelles
tél : 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

C. Festraets, P. Degougs, J.P. Mathieu, P. Tréfois, C. Villers

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme

Prix des abonnements :

Belgique : groupés (5 au moins) 80 FB
isolés 120 FB

Etranger : y compris Pays-Bas et Luxembourg
par paquet de 5 abonnements 800 FB
isolé 240 FB

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)
Anciens numéros encore disponibles :
Années complètes : 84-85, 87-88; prix par année 50 FB

Numéros isolés : 21, 22, 23, 30, 32, 33, 34 ; le numéro 10 FB
pour l'étranger, doubler les prix.

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte N° 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14bis
7460 - CASTEAU
Pour l'étranger : Cpte N° 000-0728014-29
SBPM, chemin des Fontaines, 14 bis
B-7460 CASTEAU, à partir d'un compte postal
ou par mandat postal international
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 200 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves du secondaire, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.