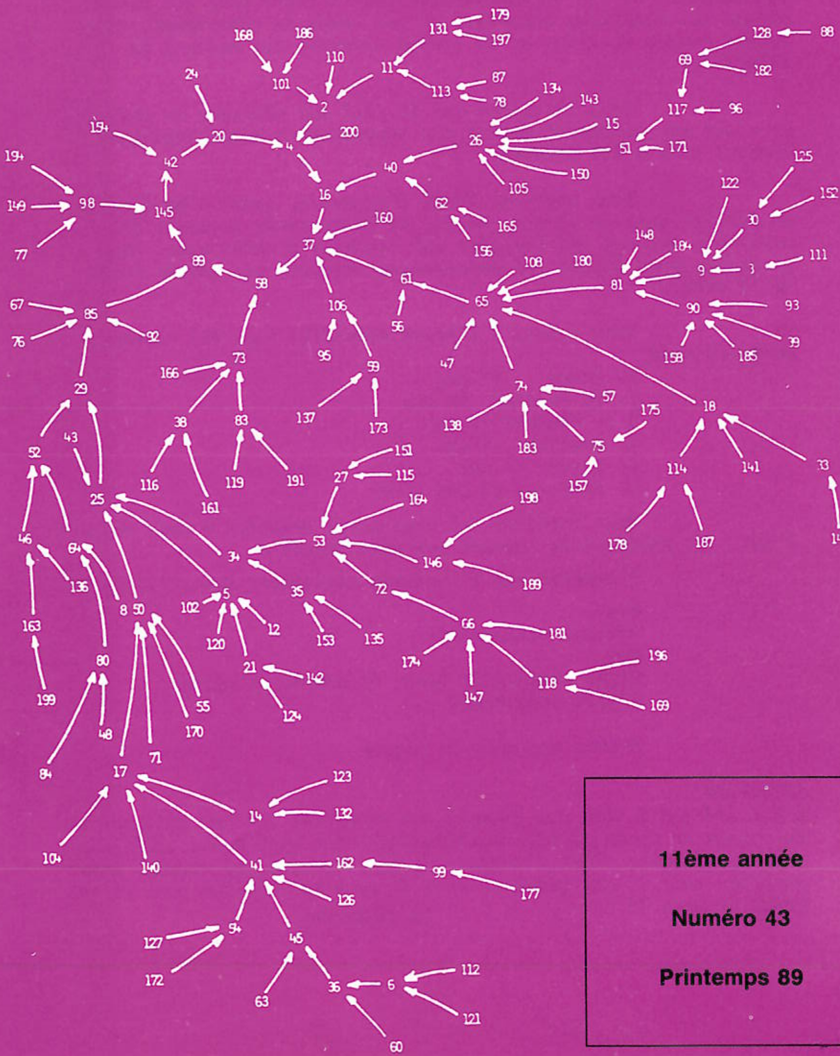
MATH-JEUNES



11ème année

Numéro 43

Printemps 89

Journal trimestriel publié par la
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française - Association Sans But Lucratif

Bureau de dépôt: Bruxelles 16

Chers amis,

Ce numéro comprend la dernière épreuve du Rallye-Problèmes. Nous vous rappelons que de beaux cadeaux dont une calculatrice HP 28S récompenseront ceux d'entre vous qui auront obtenu les meilleurs résultats et que, dans le classement, nous tenons compte de l'âge et du niveau scolaire des auteurs de solutions.

Nous insistons sur le fait que résoudre un problème ce n'est pas seulement donner une réponse mais aussi expliquer comment elle a été trouvée.

Nous espérons avoir l'occasion, comme l'an dernier, de publier dans le dernier numéro de cette année scolaire des solutions qui ont été rédigées par certains d'entre vous. Pour ce faire, nous devons obligatoirement recevoir vos envois avant le 15 avril.

Nous avons, à l'heure actuelle, reçu des réponses partielles de

E. Damme 17 ans
E. De Poorter 15 ans
J.M. Houdart 15 ans
L. Laurent 16 ans
C. Lizin 17 ans
W. Philipps 23 ans (ERM)

Nous espérons que vous serez nombreux à vous joindre à eux , en particulier courage aux plus jeunes !

N'oubliez pas d'indiquer clairement sur votre envoi

Nom
Adresse personnelle
Age
Ecole fréquentée (avec le nom de la ville)
Classe fréquentée

Bonnes vacances de Pâques

ATTENTION
L'âge indiqué à côté des énoncés des problèmes est une indication du niveau de connaissances mathématiques que nous avons utilisées pour le résoudre. Rien n'empêche de nous envoyer une réponse à un problème noté 12 ans quand on en a 17 ou à un problème noté 15 ans quand on en a 13 !

La rédaction

Savez-vous chasser et capturer les diviseurs?

1. Nombre de diviseurs d'un nombre naturel non nul.

Notre professeur nous a demandé de rechercher tous les diviseurs de 90 .

Certaines d'entre nous se sont mises courageusement au travail en essayant successivement de diviser 90 par 1, 2, 3, ...

"Chaque fois que la division "tombait juste", nous avons noté le diviseur et le quotient comme étant des diviseurs de 90 . Nous nous sommes arrêtées dès que nous avons obtenu un quotient entier plus petit que le diviseur employé. Nous avons alors fourni la liste suivante :

1, 90, 2, 45, 3, 30, 5, 18, 6, 15, 9, 10 "

D'autres ont trouvé plus intéressant de décomposer 90 en son produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

"Nous avons construit les diviseurs en effectuant tous les produits possibles de facteurs premiers choisis parmi ceux de la factorisation de 90"

En travaillant de cette manière, il y a moins de divisions à effectuer ... mais le risque d'oublier des diviseurs est plus grand !

Ne pourrait-on pas savoir à l'avance combien de diviseurs on doit trouver ? On serait ainsi beaucoup plus tranquille !

Essayons de trouver une formule.

Nous avons appris qu'à l'ordre des facteurs près, il n'existe qu'une seule décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers.

Utilisons l'opération puissance pour regrouper les facteurs égaux, nous obtenons pour 90 l'expression

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$$

La construction d'un diviseur de 90 se fera en calculant un produit de la forme $\bigcirc \cdot \Delta \cdot \square$

où

○ représente un diviseur de 2^1

△ représente un diviseur de 3^2

□ représente un diviseur de 5^1.

Nous remarquons que les diviseurs de

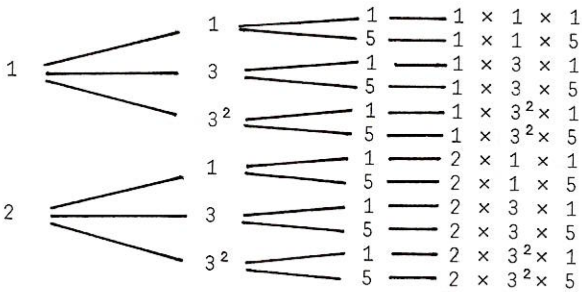
2^1	sont	1 et 2	il y en a 2
3^2	sont	1, 3 et 3	il y en a 3
5^1	sont	1 et 5	il y en a 2

Le nombre de diviseurs est, dans chaque cas, égal à l'exposant augmenté d'une unité; c'est normal :

les diviseurs de a^α sont $a^0 = 1$, a^1, a^2, ..., $a^{\alpha\ 1}$, a^α .

Pour ne pas oublier de diviseurs, construisons un arbre qui va nous donner tous les choix possibles pour nos produits

○ . △ . □



Observons qu'au choix d'un diviseur de 2 succède le choix d'un diviseur de 3 puis celui d'un diviseur de 5 .

En procédant ainsi, nous sommes certaines de ne pas en oublier et, en prime, nous pouvons affirmer que 90 a 12 diviseurs

$$(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 12$$

Généralisons la situation

Décomposons un nombre naturel non nul n en puissances de facteurs premiers distincts :

$$n = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$$

nous trouverons le nombre x de ses diviseurs par la formule

$$\boxed{x = (\alpha + 1) \times (\beta + 1) \times (\gamma + 1) \times \quad \ldots}$$

Nous pouvons donc, sans les calculer, donner le nombre de diviseurs de n ; nous voilà tranquilles !

2. Produit des diviseurs d'un nombre naturel non nul.

L'une d'entre nous s'est mis en tête de multiplier tous les diviseurs de 90 .

En groupant les diviseurs par paires, elle a obtenu 90^6.

$(1 \times 90)\times(2 \times 45)\times(3 \times 30)\times(5 \times 18)\times(6 \times 15)\times(9 \times 10) = 90^6$

Comme 6 est la moitié de 12 qui est le nombre de diviseurs nous avons aussitôt déduit la règle suivante :

$P = n^{\frac{x}{2}}$ où P désigne le produit des diviseurs d'un nombre naturel non nul

et x désigne le nombre de diviseurs de n .

Notre professeur nous propose d'essayer avec le nombre 36.

Appliquant notre formule, nous obtenons

$P = 36^{\frac{9}{2}}$ ... bizarre :

Nous ne savons pas calculer ce nombre, l'exposant n'est pas un nombre naturel.

Reprenons la liste des diviseurs de 36 pour calculer le produit en les groupant 2 par 2 comme pour 90 :

$$P = (1 \times 36)\times(2 \times 18)\times(3 \times 12)\times(4 \times 9) \times 6$$
$$= 36^4 \times 6$$

le responsable est le 6 qui reste tout seul parce que 36 est un carré parfait.

Essayons de tout écrire avec 36. Nous avons $6 = \sqrt{36}$, par conséquent,

$$P = 36^4 \times \sqrt{36} = \sqrt{36^8 \times 36} = \sqrt{36^9}$$

Ces calculs nous amènent à écrire

$$\boxed{P = \sqrt{n^x}}$$

Cette formule-ci est-elle toujours valable? Nous sommes devenues méfiantes aussi allons nous essayer de la démontrer.

Soit n un nombre naturel non nul qui possède x diviseurs. Désignons les par $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{x-1}, d_x$ cités par ordre croissant donc

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{x-1} < d_x = n \quad ;$$

effectuant les divisions nous obtenons

Nous avons

$$\begin{aligned} n &= d_1 \times q_1 \\ n &= d_2 \times q_2 \\ &\vdots \\ n &= d_x \times q_x \end{aligned} \qquad (1)$$

où les quotients q_1, q_2, ..., q_x sont également les diviseurs de n mais cités cette fois par ordre décroissant.

On peut donc écrire que

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_x = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_x \qquad (2)$$

En multipliant membre à membre les égalités écrites en (1), on obtient :

$$n = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_x) \times (q_1 \times q_2 \times \dots \times q_x)$$

ou, en vertu de l'égalité (2)

$$n = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_x)^2 = P^2$$

et donc

$$\sqrt{n^x} = P$$

Remarquons que si x est pair ce qui arrive toujours quand n n'est pas un carré parfait, on a

$$\sqrt{n^x} = n^{\frac{x}{2}}$$

Pourquoi ne pas généraliser et dire que l'on a toujours cette égalité. Nous définissons ainsi de nouvelles puissances de n. Notre professeur nous explique qu'effectivement nous utiliserons cette notation dans la suite de nos études.

3. Somme des diviseurs d'un nombre naturel non nul

Et si on calculait la somme des diviseurs de 90 ...

$$1 + 90 + 2 + 45 + 3 + 30 + 5 + 18 + 6 + 15 + 9 + 10 = 234$$

Essayons de nouveau de trouver une formule.

Commençons par regarder ce qui se passe quand le nombre est une puissance d'un seul nombre premier.

Nous cherchons donc la somme des diviseurs d'un nombre qui peut s'écrire a^α (avec $a, \alpha \in \mathbb{N}$ et $a > 1$)

Ses diviseurs sont

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{\alpha-1}, a^\alpha.$$

Remarquons que l'on passe d'un diviseur au suivant en le multipliant par a. Désignons la somme à chercher par S, on a

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{\alpha-1} + a^\alpha$$

et

$$a.S = \quad a + a^2 + a^3 + \dots + a^{\alpha-1} + a^\alpha + a^{\alpha+1}$$

En soustrayant la première égalité de la seconde nous trouvons

$$(a - 1).\ S = a^{\alpha+1} - 1$$

d'où

$$s = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \qquad (3)$$

Passons maintenant au cas d'un nombre qui se décompose en le produit de puissances de deux nombres premiers différents.

$$n = a^\alpha \times b^\beta$$

Nous savons que pour trouver les diviseurs de n nous faisons le produit de chaque diviseur de a^α successivement par chaque diviseur de b^β. Cela nous donne le tableau de diviseurs ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
1 & b & b^2 & \dots & b^\beta \\
a & ab & ab^2 & \dots & ab^\beta \\
a^2 & a^2b & a^2b^2 & \dots & a^2b^\beta \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a^\alpha & a^\alpha b & a^\alpha b^2 & \dots & a^\alpha b^\beta
\end{array}$$

Additionnons les facteurs ligne par ligne en remarquant que nous pouvons chaque fois mettre une puissance de a en évidence

$$\begin{aligned}
S &= a^0(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) \\
&\quad + a^1(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) \\
&\quad + a^2(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + a^\alpha(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta)
\end{aligned}$$

Mettant à nouveau le facteur $(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta)$ en évidence nous obtenons

$$S = (1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta)$$

et en tenant compte de la formule (3)

$$\boxed{S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}}$$

La généralisation au cas de plus de deux facteurs premiers est immédiate.

Bonne chasse et bonnes captures

La 2A4 de l'Institut
du Sacré-Coeur de Profondeville

Les nombres parfaits

On dit d'un nombre naturel qu'il est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (c'est-à-dire plus petits que lui). Un nombre parfait n est donc tel que

$$S(n) = 2n$$

où $S(n)$ désigne la somme des diviseurs de n.
Les deux premiers nombres parfaits dans la liste des naturels sont 6 et 28 . Ce fait a contribué dans l'antiquité à leur attirer l'intérêt des mystiques car 6 est le nombre de jours de la création et 28 celui des jours du mois lunaire ! Trouver les nombres parfaits suivants nous conduit très rapidement à de fort grands nombres. Voici les trois suivants : 496, 8128, 3355036.

Euclide prouve que tous les nombres de la forme

$$2^{p-1}(2^p - 1) \text{ où } 2^p - 1 \text{ est un nombre premier}$$

sont parfaits. Pour un tel nombre n on a, en effet

$$S(n) = (2^p - 1)(1 + 2^p - 1) = 2^p(2^p - 1) = 2n$$

Au XVIIIè siècle Euler démontre que tous les nombres <u>pairs</u> parfaits sont de cette forme. Une démonstration très simple en est donnée en 1911 par Léonard Eugène Dickson. La voici:
soit n un nombre pair donc de la forme $2^{p-1}q$ où q est impair et $p > 1$. La somme de ses diviseurs est

$$S(n) = (2^{p-1} - 1)S(q) = (2^p - 1)(q + d)$$

où d est la somme des diviseurs propres de q
Supposons n parfait. Nous avons alors

$$2^p q = (2^p - 1)(q + d)$$

donc $$d = \frac{q}{2^p - 1}$$

Sachant que d et q sont des nombres naturels, nous en déduisons que

a) q est multiple de $2^p - 1$

b) d divise q et est plus petit que lui

mais alors d qui est la somme des diviseurs propres de q est égal à l'un de ses termes, il en est donc le terme unique. Par suite q est premier et l'on a

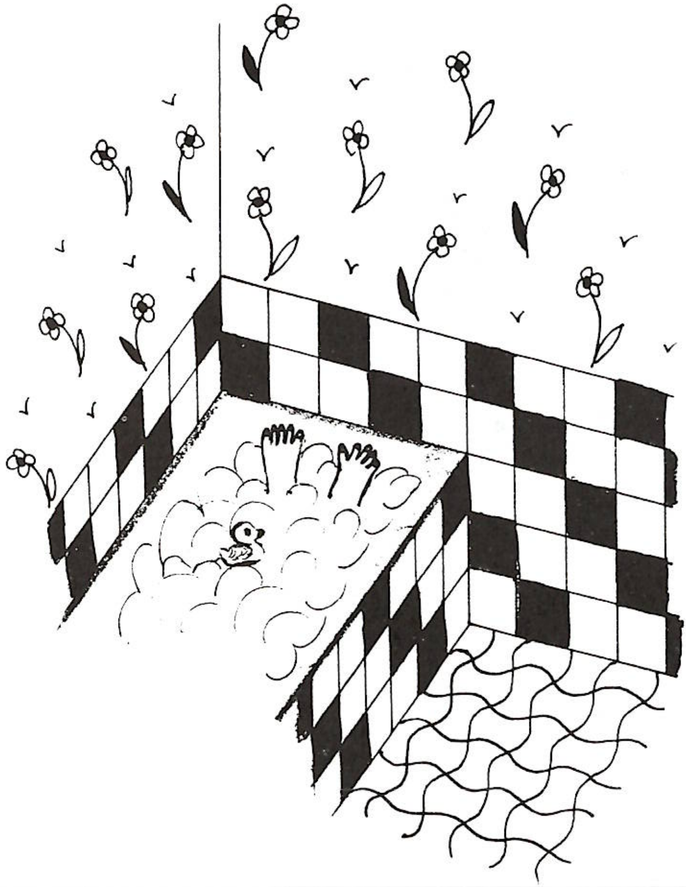
$$d = 1 \quad \text{et} \quad q = 2^p - 1 \text{ premier}$$

n est donc bien de la forme prévue.

Quant aux nombres impairs, il semble bien qu'aucun ne soit parfait, mais je n'ai pas connaissance que ce soit démontré.

Pavages du plan et de l'espace

Qui d'entre nous, confortablement installé dans sa baignoire, n'a jamais rêvé en regardant les murs (papier peint, carrelage) ou le sol (carrelage, parquet)?

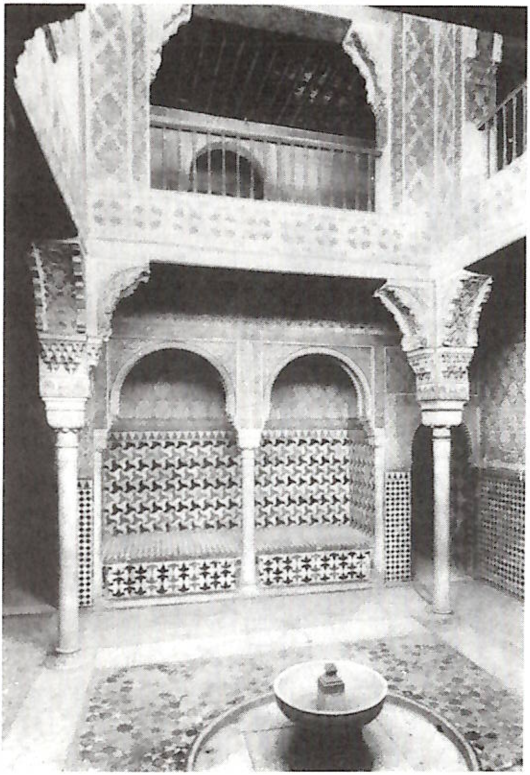


On se laisse fasciner par la répétition des motifs que l'on contemple et on se prend à les imaginer reproduits à l'infini... On obtient ainsi des pavages du plan, c'est-à-dire des recouvrements du plan par un ou plusieurs motifs de base sans trou ni chevauchement.

Les figures à motifs répétés fascinent les hommes depuis bien longtemps. Dès qu'ils se sont mis à construire en utilisant des pierres pour les sols, les murs ou les toits de leurs maisons, ils se sont trouvés confrontés à un problème de pavage d'un morceau de plan ou, si l'on préfère, à la réalisation d'un puzzle. Puis ils ont sélectionné les formes et les couleurs des pierres pour obtenir un résultat plus harmonieux.

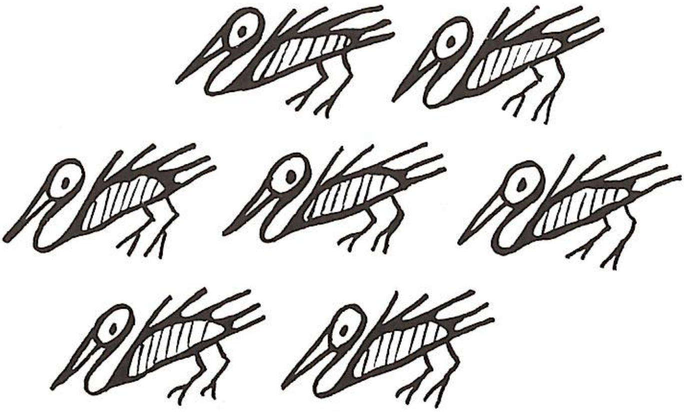
Toutes les sociétés humaines ont fait largement usage de pavages (construction, carrelage, mosaïque, tissage, tapis,...).

Les Arabes et les Maures partaient de quelques figures simples pour arriver à des décorations géométriques bien complexes dans des mosquées notamment. Ne nous ont-ils pas d'ailleurs laissé le mot "arabesque"?



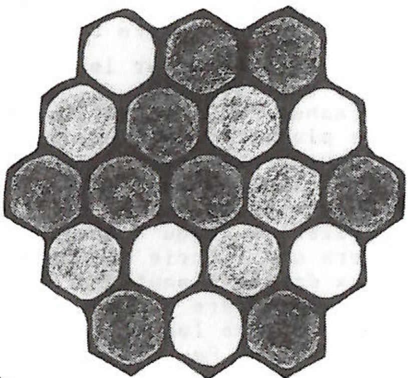
Alhambra de Grenade, Espagne (Art Maure)

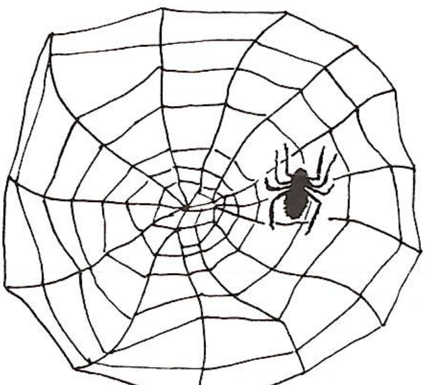
Et voici un exemple de pavage retrouvé sur un fragment de poterie indienne en Arizona (Etats-Unis):



Les exemples de pavages au cours des siècles, dans l'art de la décoration de tous les peuples, sont innombrables. La nature nous offre également quelques très beaux exemples de pavages, entre autres:

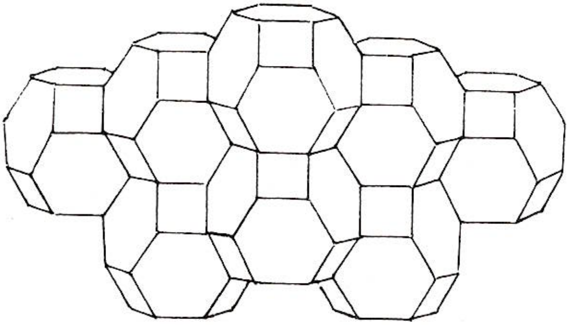
les rayonnages d'une ruche,





les toiles d'araignées,

les cristaux.

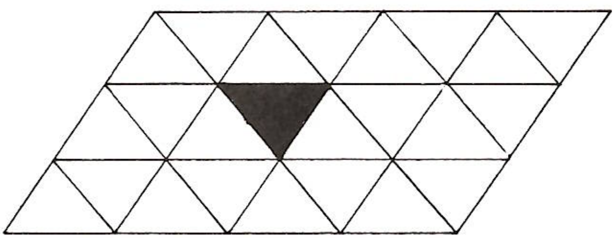


Et vous-même, n'avez-vous jamais eu à découper des morceaux (pas nécessairement identiques) dans un carton? Tout naturellement, vous les placez de la manière la plus économique possible. C'est ainsi que, sans y penser, vous réalisez (ou tentez de réaliser...) un pavage d'un morceau de plan. Ceci a évidemment de nombreuses applications industrielles. Ainsi une fabrique de pièces métalliques à découper à l'emporte-pièce dans de grandes tôles les disposera autant que possible de manière à éviter les pertes.

La littérature sur les pavages est impressionnante: on note des contributions d'ingénieurs, d'architectes, de cristallographes, de mathématiciens et de profanes travaillant pour le plaisir esthétique et intellectuel. Kepler, plus connu pour ses travaux d'astronomie, a été le premier mathématicien à publier un article sur les pavages dans son livre "Les Harmonies du Monde" en 1619. Ensuite le sujet est tombé aux oubliettes jusqu'à la fin du 19ème siècle. Mais depuis s'élabore une théorie mathématique des pavages, avec de nombreux écrits d'amateurs n'ayant aucune formation mathématique particulière et séduits par la beauté des pavages et la facilité avec laquelle s'énoncent de nombreux problèmes encore ouverts. Peut-être, après la lecture de cet article, serez-vous le prochain?

Pavages polygonaux:

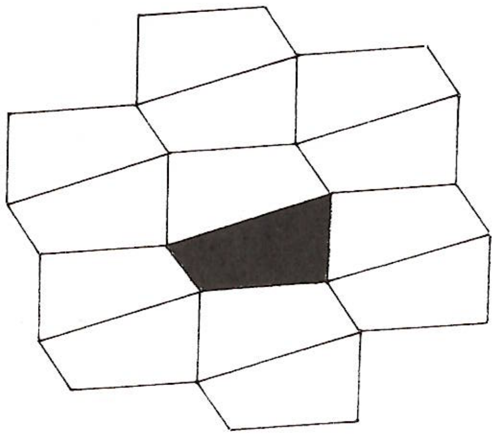
Imaginons que vous disposiez à volonté d'une ou de plusieurs sortes de pavés polygonaux, et que vous soyez chargés d'en paver la Grand-Place de Bruxelles (considérée comme un modèle de plan illimité).

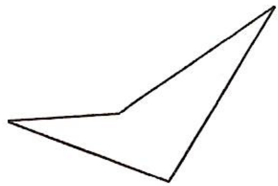


<u>Avec une seule sorte de pavés</u>, tâchez de déterminer quels sont les polygones qui pavent le plan.

1) Le dessin précédent montre que tout triangle pave le plan.

2) Tout quadrilatère pave le plan:

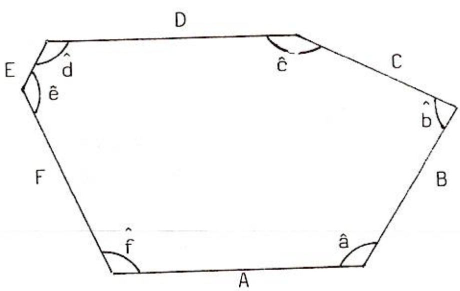


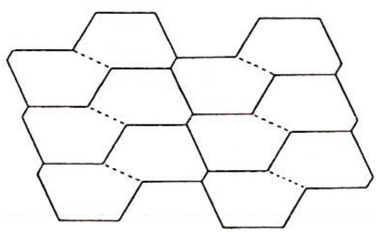


Le dessin ci-dessus a été réalisé avec un quadrilatère convexe (c'est-à-dire sans angle rentrant); à vous d'imaginer un pavage avec un quadrilatère non convexe.

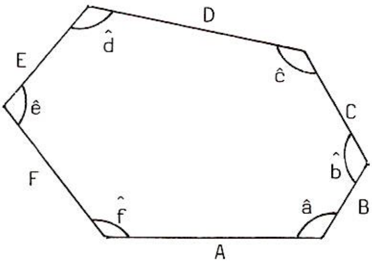
3) Un hexagone convexe pave le plan si et seulement s'il est de l'un (au moins) des trois types suivants (ce résultat date de 1918):

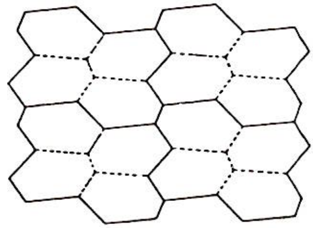
a) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2\pi$ et $A = D$



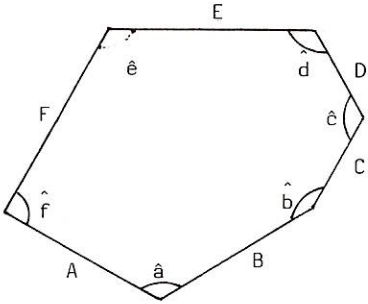


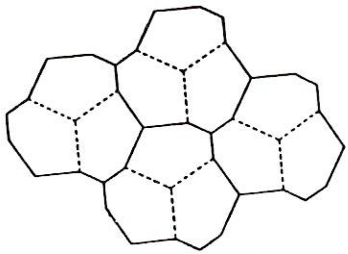
b) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{d} = 2\pi$, A = D et C = E



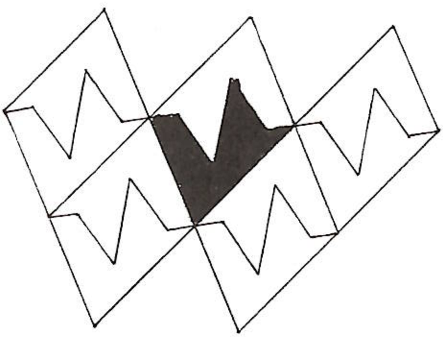


c) $\hat{a} = \hat{c} = \hat{e} = 2\pi/3$, A = B , C = D et E = F

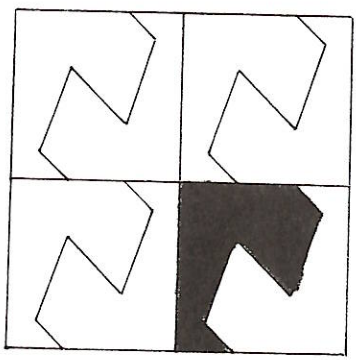




4) Un polygone convexe à au moins sept côtés ne pave jamais le plan. Cependant, pour tout nombre naturel n supérieur ou égal à 4, il existe une infinité de polygones non convexes à n côtés qui pavent le plan... En voici deux exemples très simples:

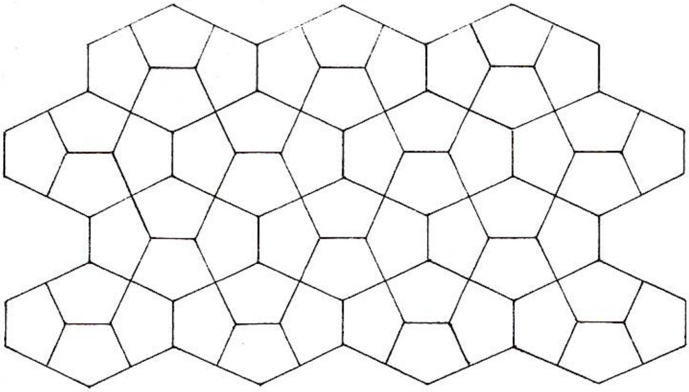


n = 7

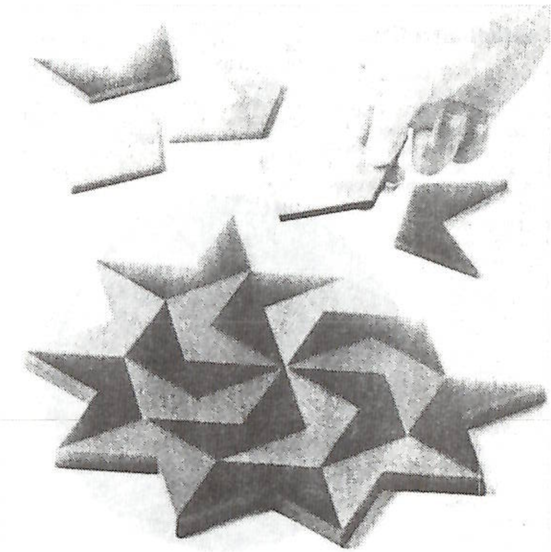


n = 8

5) Problème encore ouvert:
Il est surprenant de constater que le cas des pentagones est le seul à n'être pas encore résolu. Il est facile d'exhiber des pentagones convexes qui ne pavent pas le plan (par exemple tout pentagone régulier) et d'autres qui pavent:



(Ce type de pavage se rencontre dans certaines rues du Caire.)
Mais pouvez-vous imaginer des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un pentagone convexe pave le plan?
Si vous résolvez ce problème, faites-vous connaître; vous serez le premier à y parvenir! Bon travail!



Voici un autre exemple de pavage réalisé avec des pentagones .

Pouvez-vous à la vue de cette photo extraite de la revue Pythagoras, l'homologue de MATH-JEUNES aux Pays-Bas, déterminer le rapport des longueurs des côtés et l'amplitude des angles ?

Tous les pentagones sont isométriques.

Françoise Valette

M.C. ESCHER
OU L'ART MATHEMATIQUE

EXTRAIT DE
TANGENTE N°6

L'œuvre de Maurits C. Escher est à contrecourant de l'art du XX^e siècle. C'est un dessinateur exceptionnel alors que la technique du dessin n'est plus de mise, il est cérébral mais non abstrait, ses univers vont au-delà du réel mais il n'est pas surréaliste. Son œuvre est d'essence mathématique et incroyablement belle.

Une définition à tiroirs.

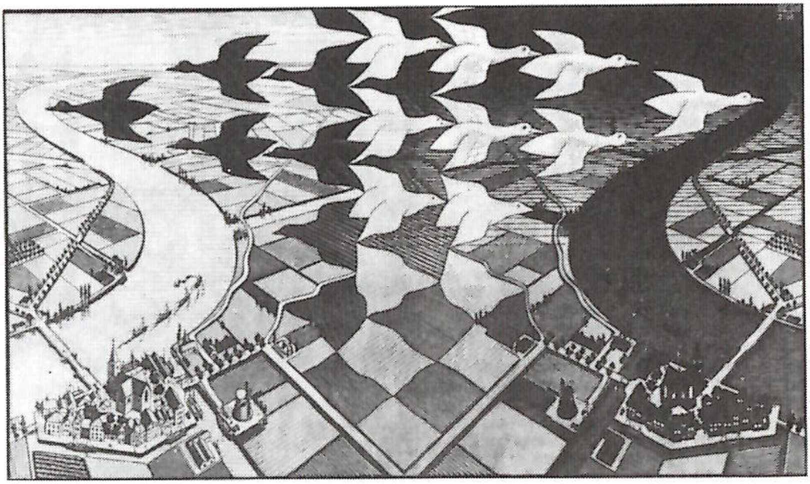
Le géomètre H. M. S. Coxeter a pu considérer une déclaration du professeur G. H. Hardy selon laquelle "le véritable mathématicien doit combiner un très haut degré d'imprévu avec la persuasion et l'économie" comme une bonne description de l'œuvre d'Escher. Laisson sur ce point la parole à Escher lui-même : "En ouvrant mes sens aux mystères qui m'entourent et en analysant mes perceptions, je me rapproche du domaine des mathématiques. Bien qu'entièrement dépourvu de connaissances et de pratique scientifiques, je me sens souvent plus proche des mathématiciens que de mes confrères".

Les débuts anonymes d'un cancre.

Maurits Cornelis Escher naquit, en 1898, à Loeuwarden (Pays-Bas).
Il n'entra qu'à l'âge de quatorze ans au lycée d'Arnhem.
Sa scolarité fut d'une consternante médiocrité et se termina par un échec retentissant au baccalauréat.
Engagé dans des études d'architecture, il y renonce rapidement pour se tourner vers les beaux-arts.
Même là, il ne brille guère et ses professeurs portent sur lui un jugement réservé : "... Il est trop conservateur, trop littéraire et philosophe, trop peu un jeune homme d'humeurs et d'états d'âme, il n'est pas assez un artiste."

Autoportrait, desin gratté, 1943.

Le graveur et dessinateur M. C. ESCHER est méconnu chez les artistes et célèbre chez les scientifiques. Pénétrez dans ses univers où l'infini, les paradoxes et la géométrie se fondent dans un étonnant ballet.



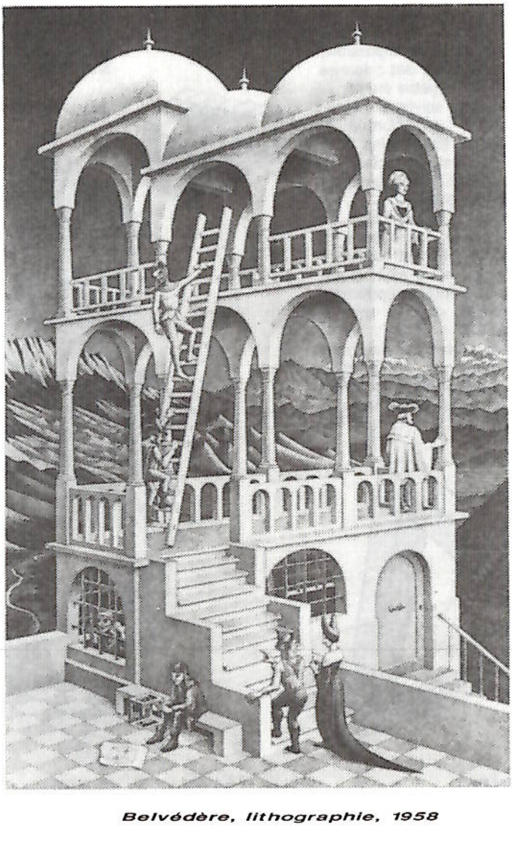
Jour et Nuit 1939

■ *Voyages*

A sa sortie de l'école, en 1922, Escher entrepend de nombreux voyages en Italie, Suisse, Espagne où il connait la prison. Il finit par s'installer à Baarn à partir de 1941, mais il ne renonce pas aux voyages.
Jusqu'à la deuxième guerre mondiale son œuvre reste très classique même si elle laisse entrevoir les grandes lignes qui marqueront la suite.
Le tournant se situe en 1939 avec l'estampe "Jour et Nuit".
Nombres des thèmes "eschériens" y sont présents.
La symétrie, le clivage noir/blanc, les remplissages périodiques du plan, la dualité arrière-plan/premier plan, les déformations progressives, la confusion plan/espace.
De cette date à la date de sa mort le 27 mars 1971, son œuvre va sortir résolument des sentiers battus.
Nous vous proposons un survol rapide des pièces maitresses de cette période.

■ *Les mondes impossibles*

Regardez dans le dessin intitulé "Belvédère" le personnage assis tenant un étrange cube. Une telle construction est-elle possible dans notre monde tridimentionnel ? Un début d'explication se trouve sur la feuille aux pieds de notre homme.
Reproduisons ce dessin (page suivante).
Avec un petit effort de concentration, en regardant ce cube



Belvédère, lithographie, 1958

représenté en perspective cavalière, on voit apparaitre **deux** cubes suivant que l'arête (23) se trouve sur le devant de la scène ou à l'arrière-plan. En jouant sur cette confusion, on construit un cube impossible où l'arête (23) se trouve à la fois devant et derrière.

Regardez à nouveau le Belvédère.Sa construction est fondée sur le principe précédent. Examinez les deux personnages sur l'échelle. Celui du bas est à l'intérieur du Belvédère, celui du haut est à l'extérieur ! Pour bien voir le lien qui existe avec le modèle du cube impossible, détaillez l'entrelacement des colonnes qui soutiennent le deuxième étage.

Les deux dessins suivants "*Mouvement Perpétuel*" et "*Montée et Descente*" trouvent leur origine dans un article du mathématicien R. Penrose dans le British Journal of Psychology (février 1958).

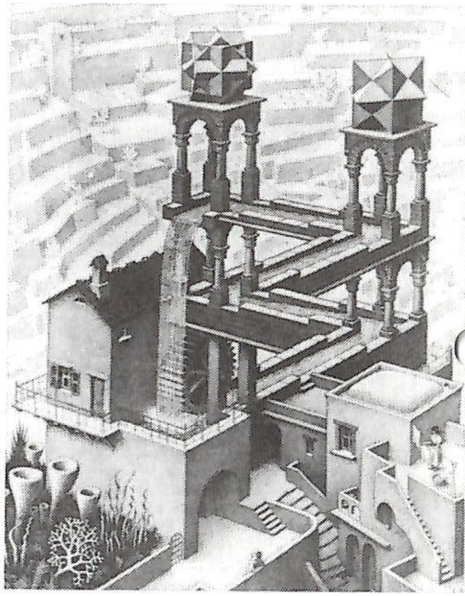
Penrose proposait un assemblage de trois parallélipipèdes connu sous le nom de "tripoutre". Un tel objet est inconcevable dans notre espace. En effet la figure de Penrose représente un pseudo-triangle dont la somme des angles vaut 270° !

Escher a utilisé cette première idée de Penrose sous la forme plus complexe d'un assemblage de trois tripoutres (ci-dessous) dans "Mouvement Perpétuel".

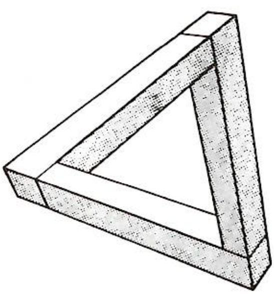
Suivez attentivement le cours de l'eau, de la cascade aux canaux en passant par la roue du moulin. L'effet est saisissant. Grâce à Escher, le problème de l'énergie est résolu.

Dans la même tonalité, Penrose a proposé une autre construction impossible : son fameux escalier.

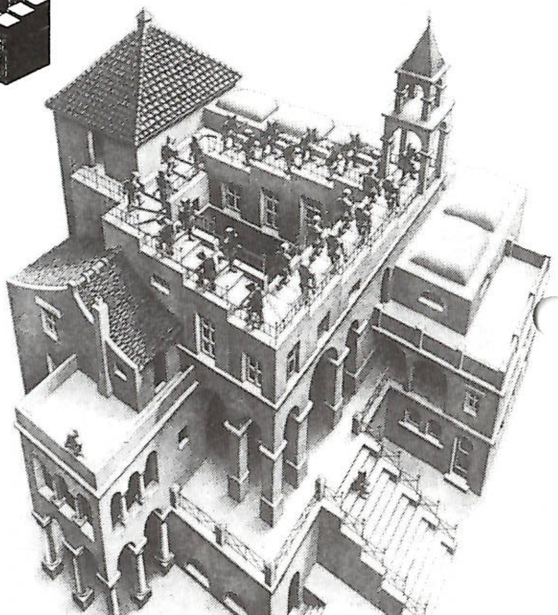
Escher a exploité l'idée dans "Montée et Descente". Suivez la ronde des moines. Un premier groupe ne cesse de monter l'escalier, l'autre groupe est condamné à poursuivre une descente infinie.



Mouvement perpetuel, lithographie, 1961



"tripoutre"

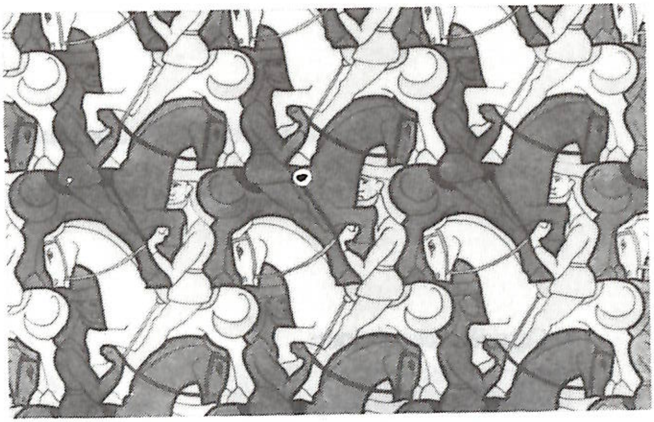


Montée et descente

Autres curiosités.

Escher s'est intéressé à tous les domaines des mathématiques qui peuvent être illustrés.
La topologie, par exemple, avec différentes études sur le ruban de Möbius : "*Cavaliers*" et "*Le Ruban de Möbius II*".

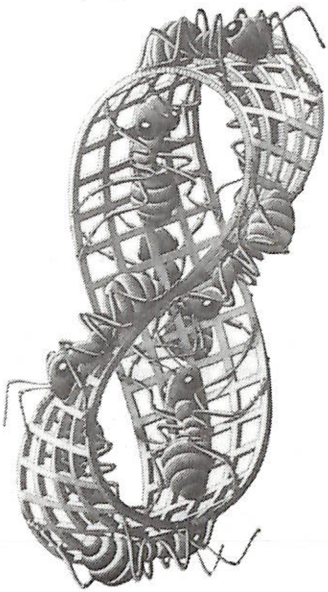
En examinant le parcours des fourmis, on découvre une propriété remarquable de ce ruban : celle d'être une surface non-orientable. Comment les fourmis peuvent-elles passer de ce qui semble être l'intérieur du ruban à ce qui semble être l'extérieur ?



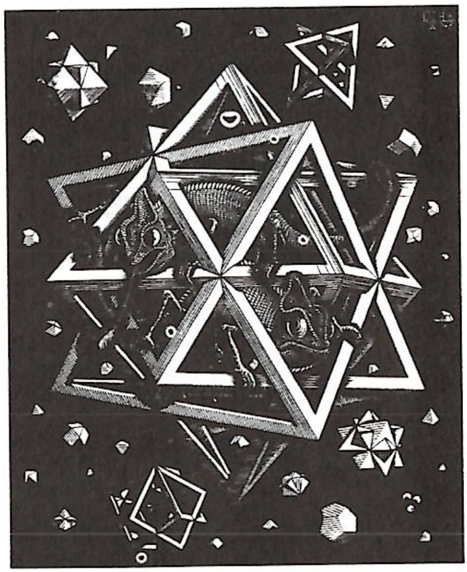
Cavaliers

Dans "Cavaliers", Escher réalise le tour de force d'allier cette propriété du ruban à un remplissage périodique du plan.
Admirez la parfaite imbrication des cavaliers.
Les deux motifs symétriques peuvent paver une surface plane infinie.

Le ruban de Mobius xylogravure, 1963



Escher a éprouvé une grande fascination pour les polyèdres réguliers que l'on retrouve par exemple dans la gravure sur bois "Etoiles" où le motif central est une combinaison de trois octaèdres concentriques flottant parmi, entre autres, des tétraèdres, des hexaèdres, des octaèdres, des dodécaèdres, des isocaèdres, des étoiles de Képler.



Etoiles, gravure sur bois, 1948

Nous ne pouvons pas évoquer ici toutes les richesses de l'univers d'Escher.
Nous repoussons à de prochains dossiers à paraître dans "Tangente" l'étude des remplissages périodiques du plan et des 17 groupes de pavage de Féderov, ainsi que les fascinants jeux sur la perspective classique et les différentes représentations de notre monde tridimentionnel sur une surface plane sans oublier les géométries non-euclidiennes illustrées par Escher pour le modèle circulaire de Poincaré du plan hyperbolique dans l'estampe "Limite circulaire IV".

F. Casiro

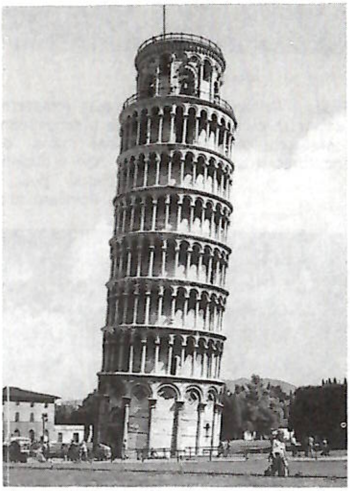
Bibliographie :
Le Miroir Magique de M. C. Escher de Bruno Ernst chez Médéa. (remarquable étude).
Le Monde de M. C. Escher chez Chêne. (un peu snob).

Et pourquoi la tour de Pise ne tombe-t-elle pas ?

... Quelques propos au sujet du barycentre ...

Georges Delande

1. Considérations générales

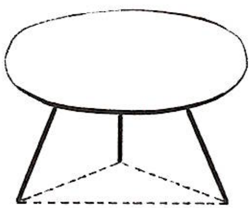


Peut-être avez-vous eu l'occasion de voir la tour de Pise au cours d'un voyage en Italie ? Ci-contre, la reproduction d'une photo vous donne une image de cet édifice.
Il y a quelques années, des experts ont craint de la voir s'écrouler dans un avenir plus ou moins éloigné. Pourquoi cette crainte et comment prévoir un tel désastre ? Et tout d'abord ... pourquoi ne bascule-t-elle pas ?

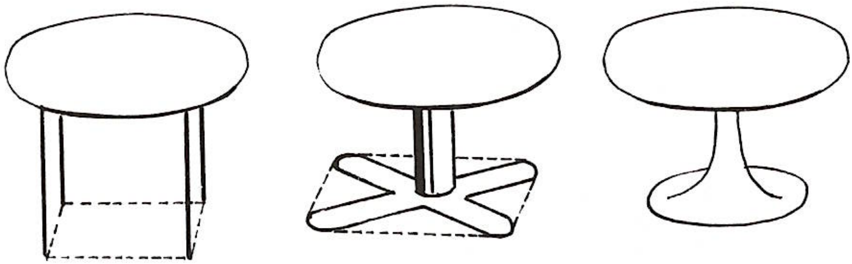
Les physiciens vous diront :
"La tour de Pise ne bascule pas car la verticale menée par son *barycentre* tombe à l'intérieur de sa *base de sustentation.*"
Mais que sont la *base de sustentation* et le *barycentre* ?

1.1. La base de sustentation ou base d'appui d'un solide est la surface délimitée par la ligne fermée la plus courte possible qui englobe tous les points d'appui du solide.

Pensez par exemple à un petit tabouret circulaire à trois pieds posé sur le sol; utilisez une corde pour entourer les points d'appui des trois pieds; vous tendez bien la corde et vous obtenez ainsi le contour de la base de sustentation du tabouret (en traits interrompus sur la figure ci-contre). Vous constatez qu'elle est triangulaire.



Pour ce qui est des tables dessinées ci-dessous, la base de sustentation est tantôt un rectangle (...   avec coins parfois légèrement arrondis), tantôt un disque.



Et quelle est la base de sustentation d'une bouteille posée sur la table, d'une chaise à quatre pieds, de vous-même lorsque vous êtes debout sur le sol ?

1.2. Et qu'est-ce que le barycentre d'un corps ?
Le mot vient du grec *barus* = lourd; poids; le préfixe est employé dans *barymétrie* = mesure des poids, dans *barycentre* = centre des poids.
Les différents vecteurs forces (pour l'instant nous pensons à la gravitation) qui sollicitent un corps solide ont une somme vectorielle appelée *résultante*. Appliquée en un point particulier du solide, cette résultante a le même effet que toutes les forces qui agissent sur le solide. Ce point particulier s'appelle le *barycentre* du solide.
Le barycentre est donc un point invariablement lié au solide considéré.
C'est à Archimède que l'on doit les premières considérations relatives au barycentre; il a déterminé sa position dans un grand nombre de cas.
Voici à ce propos des expériences que vous pouvez aisément réaliser (elles sont sans doute faites au cours de physique).

1°) Vous suspendez un triangle en carton par l'un de ses sommets; vous attendez qu'il soit en position d'équilibre (c'est-à-dire à l'état de repos) et vous tracez alors sur sa surface la verticale comprenant ce sommet. Vous procédez ensuite de même pour ses deux autres sommets. Vous constatez que les trois droites sont concourantes (en un point que vous appelez G) et qu'elles coïncident avec les médianes du triangle. Celui-ci étant alors placé dans une position quelconque, vous le suspendez au moyen d'un fil attaché au point G ... et vous constatez qu'il reste en équilibre. Ce point G est donc le barycentre du triangle.

2°) Vous faites la même expérience avec un triangle creux dont les côtés sont en matériau assez lourd et de longueurs différentes les unes des autres. Vous observerez que les verticales comprenant les points de suspension (sommets du triangle) ne sont plus nécessairement les médianes. Nous reviendrons plus loin sur ce cas; nous comprendrons mieux ce qui s'y passe.

3°) Si vous disposez d'une plaque métallique à surface plane et de forme quelconque (Fig. 1), vous la suspendez à un crampon S par un fil accroché successivement à des points p_1 , p_2 , ... de la plaque. Vous constaterez à nouveau que les verticales Sp_1, Sp_2, ... sont concourantes en un point G qui est le barycentre de la plaque.
Reprenez votre plaque et suspendez-la maintenant par G .
Effectuez cette opération plusieurs fois en plaçant chaque fois la plaque dans une position différente. Que constatez-vous au sujet de son équilibre ? ...

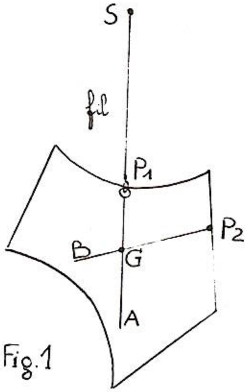


Fig.1

Il résulte de ces expériences que :
Lorsqu'un corps est suspendu, il reste en équilibre dès qu'il est soutenu par son barycentre ... ou encore lorsque la verticale passant par son barycentre passe également par le point de soutien.

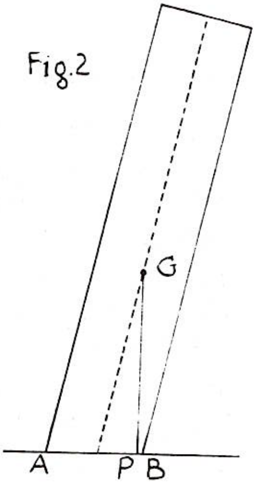
4°) Procédez enfin avec un corps *homogène* qui possède un *centre de symétrie* (*homogène* signifiant de même densité pour chacune de ses parties), par exemple un carré, un disque, un parallélogramme, ... Constatez-vous que le barycentre est précisément le centre de symétrie du corps ? Dans ce cas, de même que pour les figures géométriques simples, le barycentre s'appelle souvent *centre de gravité.*

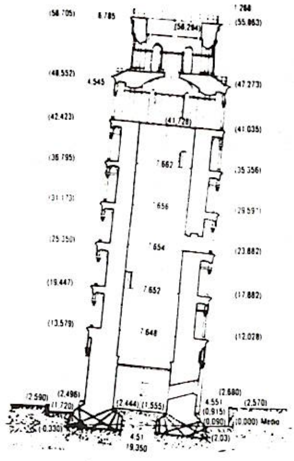
1.3. Revenons à présent à notre tour de Pise.
Rappelons le principe de physique énoncé au début de cet article :
Un corps est en équilibre lorsque la verticale passant par son barycentre traverse sa base de sustentation.
(A rapprocher de la conclusion émise ci-dessus : *"point de soutien"* étant remplacé par *"base de sustentation"*.)
Intuitivement, on comprend que la force (ou poids) appliquée au barycentre ne fait que presser le corps contre la surface d'appui.
Dans le cas de la Tour penchée (Fig. 2), G est son barycentre; sa base de sustentation est un disque de diamètre [AB]; la verticale par G coupe ce disque au point P qui lui est intérieur.

Pensez également aux voitures : leur stabilité est liée à leur mode de chargement.

Il résulte de tout cela qu'un homme n'est en équilibre sur le sol que si la verticale de son barycentre coupe la base de sustentation, celle-ci étant la surface limitée par le contour extérieur des chaussures et par les droites tangentes respectivement aux talons et aux pointes des chaussures. En position verticale, les bras le long du corps, son barycentre se situe vers le milieu du bassin.

Fig.2





plan d'une section de la tour de Pise.
Qui en trouvera le barycentre ?!!...
Sans la suspendre bien sûr !

MATHEMATICIEN
SUR LE TERRAIN

Quelle(s) question(s) vous posez-vous ?

Son équilibre est d'autant plus difficile que la base d'appui est petite; c'est pourquoi on se maintient avec peine sur la pointe des pieds, mais au contraire plus fermement en écartant les jambes(comparez à ce propos la danseuse qui fait "des pointes" à la marche du matelot sur un bateau qui tangue). L'avantage de la canne (ou du bâton en montagne) est de fournir une base triangulaire, donc plus étendue.

Assis dans un fauteuil, pour vous lever, vous penchez le corps en avant afin de ramener votre barycentre au-dessus de vos pieds ou vous placez vos pieds en arrière dans le même but.
Voyez aussi le danseur de corde: il tient généralement un grand balancier, ce qui ramène le barycentre de l'ensemble (danseur + balancier) dans les mains de l'acrobate, quels que soient les mouvements de celui-ci.

Il est donc fondamental de déterminer la position des barycentres d'un corps. C'est pourquoi nous vous proposons cette recherche d'une manière rigoureuse dans le cas de quelques figures simples.

2. Equilibre du levier

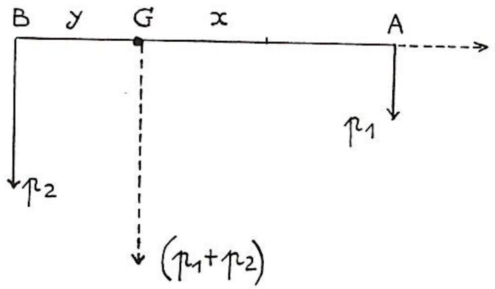


Fig.3

Deux poids p_1 et p_2 sont suspendus aux extrémités d'une barre de poids négligeable AB, mobile autour d'un point horizontal matérialisé par le point G (Fig. 3).
En vertu du principe d'Archimède relatif à *l'équilibre du levier*, la barre prend la position horizontale lorsque

$$p_1 . x = p_2 . y \quad (1)$$

où x et y sont respectivement les longueurs des bras de ce levier AG et BG.

Dans ce cas G est le *barycentre* du système.
La barre reste en équilibre si l'on remplace les deux poids par leur somme (ou résultantes) $p_1 + p_2$ appliquée en G.
Si nous orientons la droite BA, l'égalité ci-dessus entraîne :

$$p_1 \,.\, \overrightarrow{GA} + p_2 \,.\, \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \qquad (2)$$

Cette relation est à la base d'une définition très générale du barycentre.

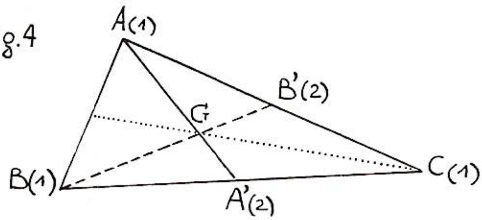
Cas particulier : $p_1 = p_2$; G est alors au milieu de la barre.
D'où : *Le centre de gravité d'un segment est son milieu.*

Terminologie et notation :
A (p_1) est le point A affecté des *poids* (ou *masse*, ou *coefficient*) p_1.
B (p_2) est le point B affecté du *poids* (ou *masse*, ou *coefficient*) p_2.
On dit également que l'ensemble {A,B} est *pondéré* ou *massique*.

3. Centre de gravité d'un triple de points (sommets d'un triangle)

Recherchons le centre de gravité du triple {A, B, C} (Fig. 4).

Fig.4



Nous affectons chacun des trois points d'un poids (ou masse) unité et nous utilisons les résultats du n° 2 (équilibre du levier).

1°) Nous savons que l'on peut remplacer les points B (1) et C (1) par leur barycentre A', milieu de [BC], affecté du poids 1 + 1 = 2.
Le centre de gravité (ou barycentre) du triangle est alors le point G, barycentre des points A (1) et A' (2). En vertu de la formule (2), il

appartient à la droite AA' (médiane) tout en satisfaisant la relation

$$1\,.\,\overrightarrow{GA} + 2\,.\,\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$$

D'où : $$\overrightarrow{A'G} = (1/2).\overrightarrow{GA} \qquad (3)$$

2°) Nous pouvons recommencer le même raisonnement en remplaçant A (1) et C (1) par B' (2), milieu de [AC]; puis A (1), B (1) et (C1) par B' (2) et B (1). D'où il résulte que G ∈ [BB'] (médiane) et

$$\overrightarrow{B'G} = (1/2).\overrightarrow{GB}$$

3°) Résultat analogue pour la troisième médiane.

<u>Conclusions</u> : 1) les trois médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité de ce triangle.
2) Il est situé aux 2/3 de chaque médiane à partir du sommet.

<u>Propriétés fondamentales du centre de gravité</u>.

1°) En vertu de (3) : $$\overrightarrow{AG} = 2.\overrightarrow{GA'} = (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA'}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA'}) = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

D'où : $$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \qquad (4)$$

2°) En vertu de (4), après avoir choisi un point 0 quelconque dans le plan (noté Π) :

$$(\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}) + (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0B}) + (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0C}) = \overrightarrow{0}$$

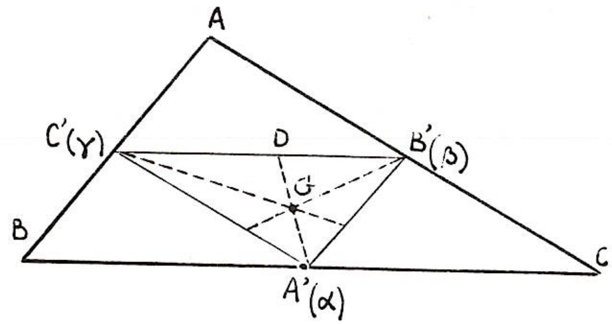
D'où : $$\forall\, 0 \in \Pi : \ \overrightarrow{0G} = (1/3).(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}) \qquad (5)$$

3°) Réciproquement : (5) ===> (4)

<u>Conclusion</u> : Il y a équivalence entre les formules (4) et (5). Le centre de gravité étant unique, il peut être défini par l'une ou l'autre de ces formules.

4. <u>Barycentre d'un triangle creux</u>

Comme au 2° au n° 1.2, nous supposons que les côtés du triangle creux ABC sont des barres homogènes en matériau lourd et de longueurs différentes les unes des autres



Nous posons $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ et nous désignons par α, β, γ les poids respectifs de ces barres.

En procédant comme dans le cas du levier, nous sommes amenés à affecter chacun des milieux des côtés (soit A', B', C') d'un poids égal à celui de la barre qui le détermine. Nous sommes ainsi ramenés à chercher le barycentre du triple {A', B', C'} pondéré par les poids α, β, γ.

On dit que A'B'C' est le triangle médian de ABC et, en vertu du "petit" théorème de Thalès :

$$\overline{B'C'} = \frac{a}{2}, \qquad \overline{C'A'} = \frac{b}{2}, \qquad \overline{A'B'} = \frac{c}{2}.$$

Si D est le barycentre des points B' (β) et C' (γ), on sait que

$$\beta . \overrightarrow{DB'} + \gamma . \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{0}$$

D'où :

$$\frac{\overline{DB'}}{\overline{DC'}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Les barres étant homogènes, leurs poids sont proportionnels à leurs longueurs :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{c}{b} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'A'}}$$

Il en résulte finalement que

$$\frac{\overline{DB'}}{\overline{DC'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'A'}}$$

relation qui prouve que A'D est bissectrice de l'angle $\widehat{A'}$ dans le triangle A'B'C'.
Vous avez vu en effet ... ou vous verrez plus tard que :
"Dans tout triangle, si une droite issue du sommet d'un angle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents, elle est bissectrice de l'angle considéré".

On sait que le barycentre G du triangle creux ABC est le barycentre des poids A' (α) et D ($\beta + \gamma$); il appartient donc à la bissectrice A'D du triangle médian.
Par un raisonnement analogue, on prouve que le barycentre G appartient également aux deux autres bissectrices de A'B'C'.
Ainsi donc, G est le centre du cercle inscrit au triangle médian ABC.
Ce qui prouve qu'*en général le barycentre d'un triangle creux n'est pas le point de concours de ses médianes.* (Résultat qui confirme celui de l'expérience réalisée au 2° du n° 1.2).
Mais que devient dans ce cas la propriété (4) du n° 3 ?
Il découle de nos constructions et de la formule (2) que

$$\beta . (\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'D}) + \gamma . (\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'D}) + \alpha . \overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$$

Vous en déduisez si G est le barycentre du triple {A' (α), B' (β), C' (γ)}, alors on a :

$$\alpha . \overrightarrow{GA'} + \beta . \overrightarrow{GB'} + \gamma . \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{0} \qquad (6)$$

Nous verrons dans un prochain article comment étendre la notion et l'utiliser pour aborder des notions d'équilibre dans d'autres domaines que la pesanteur.

Les Problèmes du Rallye

179 Ne vous mariez pas trop vite

Un jeune homme demande une très jeune fille en mariage. Voici le dialogue qui s'en suit:

- "Je regrette, Monsieur, ma fille n'a que 12 ans et vous pourriez être son père puisque vous avez trois fois son âge!"
- "Et si je n'en avais que le double ?"
- "Alors, je ne dirais pas non !"
- "Dans ce cas, Monsieur, j'attendrai !"

Combien de temps attendra-t-il avant de pouvoir refaire sa demande en mariage ? *12 ans*

180 Le triangle quelconque existe-t-il ?

Au cours de géométrie, le professeur nous demande souvent de tracer un triangle ... quelconque. Mais chaque fois que nous essayons d'en dessiner un, Madame trouve qu'il a l'air un peu trop particulier. Ainsi un triangle dont les trois angles valent 40°, 60° et 80° n'est pas mal mais il a un angle presque droit (à 10° près).
Aidez-nous à résoudre ce problème quasi quotidien. Essayez de trouver un triangle dont les angles sont tous aigus, diffèrent le plus possible de 90° tout en différant le plus possible entre eux *14 ans*

181 Test pour un nouveau vicaire

Un curé s'entretient avec son vicaire qui est nouveau dans la petite paroisse. Tout en se promenant, le curé dit au vicaire:

- " J'ai trois paroissiens en tout, et le produit de leurs âges vaut 2 450. Votre âge vaut en outre la demi-somme de leurs âges. Quel est l'âge de chacun d'eux ?"

Le vicaire réfléchit un moment et dit au curé :

- " Il me manque une donnée pour être tout à fait sûr de ma réponse."

Le curé répond :

- " Bien sûr ! Mais sachez que je suis plus âgé que le plus vieux de ces paroissiens !"

Avec tous ces renseignements, pouvez-vous trouver l'âge des cinq personnes ? *13 ans*

182 Trois pour le prix de deux !

Les dépliants d'un supermarché annoncent la vente de trois schmilbliks pour le prix de deux.Et la publicité explique la possibilité d'une telle vente par le raisonnement suivant:
" Soit b le nombre de schmillbliks que vous payez et a le nombre de schmillbliks que nous vous offrons. Vous repartez avec c schmillbliks

Vous avez donc $c = a + b$

ce qui donne

$$c(c-b) = (a+b)(c-b)$$
$$c^2 - cb = ac - ab + bc - b^2$$
$$c^2 - cb - ab = - ab + bc - b^2$$
$$c(c-b-a) = b(c-b-a) \text{ d'où } c = b$$

C'est pourquoi, chez nous, 3 = 2 ! Qu'en pensez-vous ?
13 ans

SOMMAIRE PAGE

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2
1160 - Bruxelles
tél : 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

C. Festraets, M. Cnudde, G. Delande, F. Valette

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme

Prix des abonnements :

Belgique :	groupés (5 au moins)	80 FB
	isolés	120 FB
Etranger :	y compris Pays-Bas et Luxembourg	
	par paquet de 5 abonnements	800 FB
	isolé	240 FB

Poster historique :
Belgique : 30 FB (120 FB par 5 unités)
Etranger : 60 FB (240 FB par 5 unités)

Anciens numéros encore disponibles :
Années complètes : 81-82 (4 ex.), 82-83 (4 ex.), 83-84 (3 ex), 84-85, 87-88; prix par année 50 FB
Numéros isolés : 21, 22, 23, 30, 32, 33, 34 ; le numéro 10 FB
pour l'étranger, doubler les prix.

Les payements sont à effectuer :
Pour la Belgique : Cpte N° 001-0828109-96
MATH-JEUNES, chemin des Fontaines, 14bis
7460 - CASTEAU
Pour l'étranger : Cpte N° 000-0728014-29
SBPM, chemin des Fontaines, 14 bis
B-7460 CASTEAU, à partir d'un compte postal
ou par mandat postal international
En cas d'intervention bancaire, majorer d'une somme de 200 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves du secondaire, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.