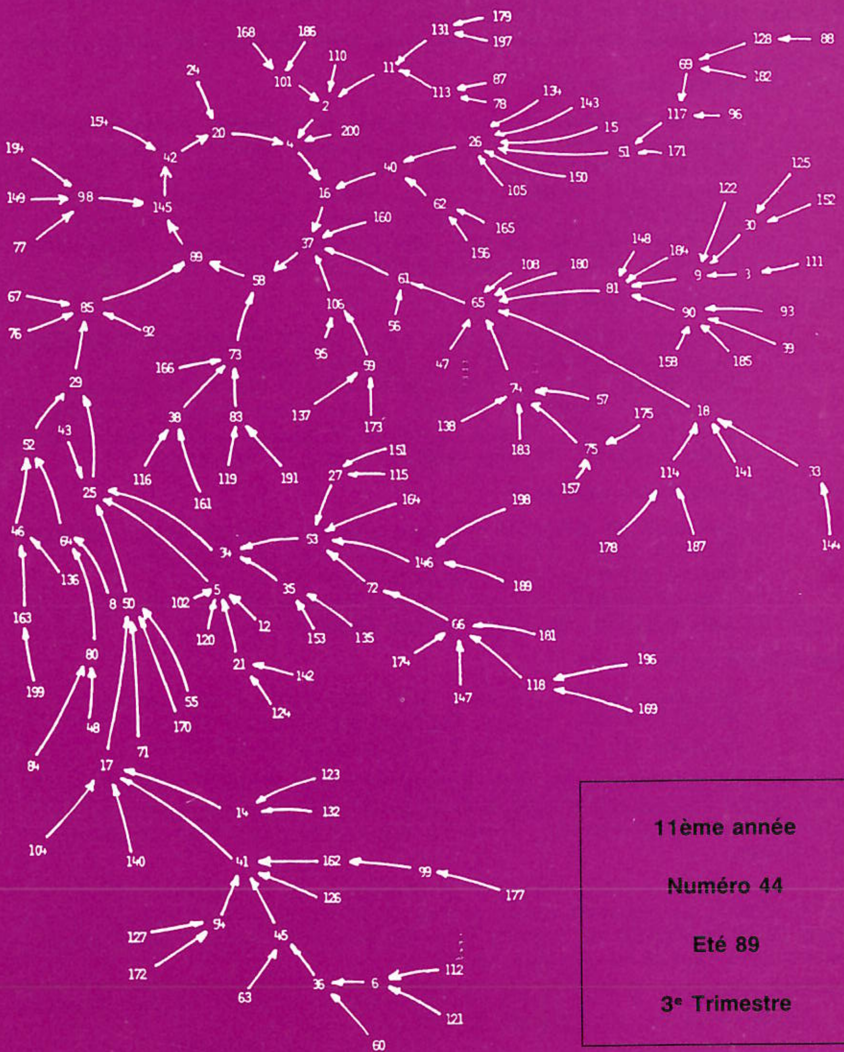
MATH-JEUNES



11ème année

Numéro 44

Eté 89

3e Trimestre

Journal trimestriel publié par la
SOCIETE BELGE des PROFESSEURS de MATHEMATIQUE
d'expression française - Association Sans But Lucratif

Bureau de dépôt: Bruxelles 16

Chers ami(e)s,

Voici les résurtats du RALLYE PROBLEMES. Ils sont encourageants. Beaucoup de copies contenaient d'excellentes solutions. Un effort a été fait dans la rédaction et la présentation. A tous qui ont participé, bravo et merci. Aux tenants d'un accessit, je conseille de persévérer dans leurs efforts. Que ceux qui ont obtenu un prix n'en déduisent pas qu'ils ont atteint leur top-niveau. Chacun d'entre vous peut encore s'améliorer.
Dans chaque catégorie de prix, les noms sont classés par ordre alphabétique.

Ont obtenu un premier prix

Didier BOUSMAR, 16 ans, Institut de l'Enfant Jésus à Nivelles
Marc CHRISTOPH, 15 ans, Inst. St Jean Baptiste à Wavre
Olivier CUISENAIRE, 16 ans, Inst. de l'Enfant Jésus à Nivelles
Jean-Michel HOUDART, 15 ans, Collège St Stanislas à Mons
Armand MAES, 15 ans, Athénée Robert Catteau à Bruxelles
Philippe MASSON, 18 ans, Athénée Robert Catteau à Bruxelles
Frédéric PONCIN, 17 ans, Collège St Michel à Gosselies

Ont obtenu un deuxième prix

Vincent CAUTAERTS, 15 ans, Lycée Emile Jacqmain à Bruxelles
Michael CHEVALIER, 17 ans, Athénée Royal de Ath
Eric DAMME, 17 ans, Inst. St Remacle à Marche en Famenne
Etienne DE POORTERE, 15 ans, Lycée Emile Jacqmain à Bruxelles
Benoit MASSART, 18 ans, Collège St Boniface-Parnasse à Ixelles
Cedric PARENT, 18 ans, Athénée Royal de Mouscron.

Ont obtenu un troisième prix

Emmanuel DE SMACKERS, 15 ans, Athénée Fernand Blum, Bruxelles
Olivier LEROT, 17 ans, Inst. St Joseph à Charleroi
Cedric LIZIN, 17 ans, Athénée Royal de Spa
Eric STEENHOUT, 13 ans, Athénée Fernand Blum, Bruxelles
Marc VILLANO, 16 ans, Athénée Royal de Thuin.

Ont mérité un accessit

Stephane DUPONT, 16 ans, Inst. Ste Marie à La Louvière
David FOUCART, 16 ans, Collège Notre Dame à Tournai
Laurent LO, 16 ans, Inst. Ste Marie à La Louvière.

Je voudrais remercier une fois encore la firme HEWLETT-PACKARD qui nous donne l'occasion d'offrir à trois de nos premiers prix une calculatrice programmable. J'espère que les heureux élus en feront bon usage.

J'ai demandé à ne plus avoir, l'an prochain, la responsabilité de MATH-JEUNES, un nouveau staff se met en place qui, j'en suis certaine fera de MATH-JEUNES un journal plus intéressant encore. Aussi soyez nombreux à rester de fidèles abonnés.

Je vous souhaite à tous bonne réussite en fin d'année et des vacances vivifiantes et je vous dis AU REVOIR

J. VANHAMME

Le billard et les boules fantômes

Nicolas ROUCHE

Les boules de billard vont comme on les pousse, et les bons joueurs arrivent à leur faire décrire des courbes capricieuses. Considérons, quant à nous, la boule du débutant, celle qui s'en va en droite ligne dans la direction où on l'a poussée. Qu'arrive-t-il quand elle frappe la bande, c'est-à-dire un des côtés du billard ? Elle est renvoyée en ligne droite de telle sorte que, comme on dit, son *angle d'incidence* soit égal à son *angle de réflexion* (Fig. 1) : la boule part de A et vient frapper la bande en B.

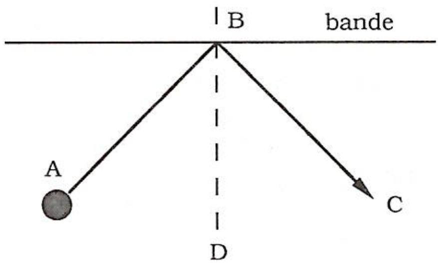


Fig.1

Soit BD la perpendiculaire à la bande en B. La boule repart suivant BC de sorte que l'angle $D\hat{B}C$ (angle de réflexion) soit égal à l'angle $A\hat{B}D$ (angle d'incidence). Tout se passe (souvenez-vous du cours d'optique) comme si la boule était un rayon lumineux et la bande un miroir.

Ceci dit, attaquons notre première partie. Soit (Fig. 2) votre boule au départ en A, et la boule que vous visez en B. Dans quelle direction frapper pour que A touche B ?

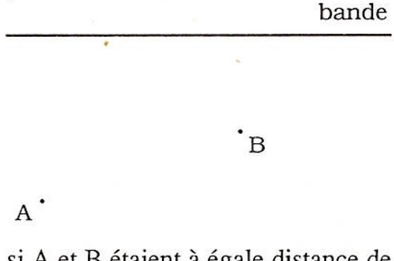


Fig. 2

Evidemment, si A et B étaient à égale distance de la bande, ce serait facile. La solution s'obtient dans ce cas et très simplement par symétrie. Mais tel n'est pas le cas.

Que faire ? Arrêtez votre lecture ici et réfléchissez

Avez vous trouvé ? Sans doute avez-vous commencé par tâtonner. Le trajet ACB donne un angle d'incidence plus grand que l'angle de

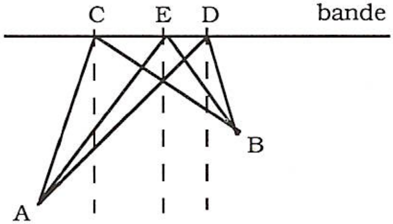


Fig. 3

réflexion. Pour le trajet ADB, c'est le contraire. Il doit donc bien y avoir un point E entre C et D qui va donner l'égalité des deux angles. Mais comment trouver ce point ? Au jugé ? Hé là ! Vous êtes ici dans Math-Jeunes. Pas de compromis : on ne travaille pas au jugé ! Que faire quand on est en contemplation depuis un moment devant une figure aussi vide que la Fig. 2 et qu'on a déjà sucé la moitié de son crayon ?

Réfléchissez à nouveau

Mais oui, vous avez trouvé : on dessine quelque chose sur la figure, et même, plus précisément, on dessine ce qui apparaîtrait sur la figure si le problème était résolu (souvenez-vous de cela, c'est un point de méthode qui vous resservira dans votre apprentissage des maths). Donc, les choses doivent se passer comme sur la Fig. 4. Le point E doit bien avoir une

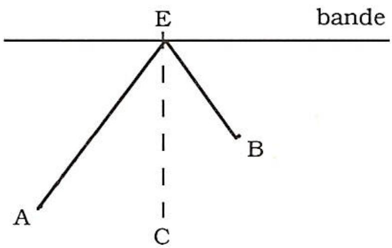


Fig. 4

propriété, autre que celle de rendre égaux AEC et CEB, qui permette de déterminer sa position sur la bande.

Réfléchissez

Tant que le point E est tout seul sur la droite qui représente la bande, on se demande par rapport à quoi on le situerait ? Il serait bon de rajouter l'un ou l'autre point sur la bande, moins pour la meubler que pour y mettre des repères. Deux repères naturels sont les pieds des perpendiculaires abaissées de A et B sur la bande : c'est le long de ces deux droites qu'on pourrait mesurer les distances respectives de A et B à la bande. Nous voici donc arrivés à la Fig. 5. Notre problème pourrait maintenant s'énoncer : comment situer E entre A' et B' ? (En effet, si A et B nous sont donnés, nous pouvons immédiatement trouver A' et B').

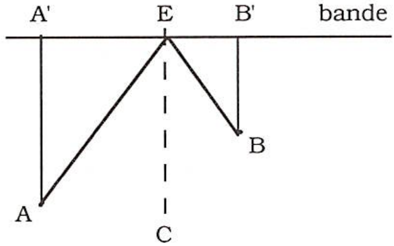


Fig. 5

Réfléchissez

Mais oui, les triangles AA'E et BB'E sont semblables. D'abord on le voit. Et ensuite on le prouve : ils ont chacun un angle droit, et ensuite A'ÊA et B'ÊB sont égaux comme complémentaires de deux angles égaux. D'où la solution du problème, puisque |A'E| est à |EB'| comme |AA'| est à |BB'| : le point E divise le segment A'B' dans le rapport des distances de A et B à la bande. Pour *construire* la solution, on se souviendra de Thalès qui nous a appris à tous à diviser un segment dans un rapport donné.

Essayez avant de regarder la Fig. 6.

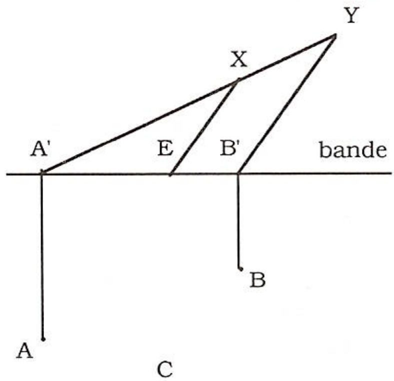


Fig. 6

On peut, par exemple, dessiner, dans une direction quelconque, AX de même longueur que AA' et dans le prolongement, XY de même longueur que BB'. Puis on trace YB', puis par X la parallèle à YB'. Elle va tout droit sur le point E cherché.

Ici, vous soufflez un peu

Maintenant que vous avez soufflé, revenons sur la solution trouvée. La construction de la Fig. 6 n'est pas mal. Néanmoins, la droite AXY a été dessinée dans une direction assez arbitraire. Les segments rajoutés à la figure arrivent là comme de gros patauds venus d'ailleurs pour faire leur travail. N'y aurait-il pas moyen de trouver une construction moins arbitraire, comportant moins de traits, utilisant davantage d'éléments déjà présents sur la figure ? Bref, une construction plus économe et plus élégante ?

Réfléchissez

On peut par exemple (Fig. 7) prolonger A'A par AD de longueur

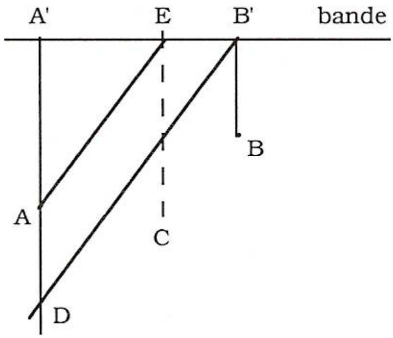


Fig. 7

égale à B'B, et le reste va de soi. Pas mal. Mais on peut encore rêver un peu au problème, tâcher de penser "à côté". Penser à côté, laisser doucement dériver son imagination, c'est souvent une bonne façon de s'apercevoir de nouvelles choses. Et tiens, par exemple, nous avons dit en commençant que la boule se réfléchissait sur la bande comme un rayon de lumière sur un miroir. Et si la bande était un miroir ?

Prenez seulement le temps de rêver.

Et oui, si la bande était un miroir, la boule B aurait son image en B". Et si le joueur vise B", alors ... mais oui, il arrive en E, comme le montre la Fig. 8, puisque |A'E| est à |EB'| comme |AA'| est à |B'B"| (qui est égal à |BB'|). Ouaw ! Ca, c'est <u>la</u> solution. Super ! Il suffit d'imaginer une boule fantôme en B" et de la viser. Ca a l'air aussi bien plus facile pour un joueur d'imaginer la boule fantôme que de rechercher l'égalité des angles au jugé, pour ne pas parler d'essayer d'appliquer à l'oeil le théorème de Thalès.

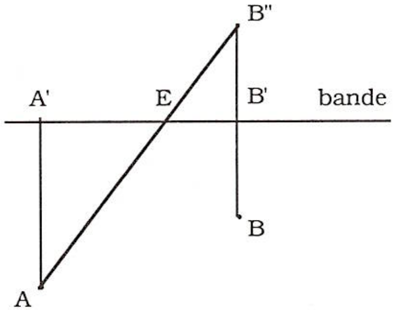


Fig. 8

Ici, vous soufflez une deuxième fois ... puis nous essayons de calculer un coup de billard un peu plus compliqué. Si une bille parasite se trouve sur le trajet AEB souhaité, on cherche à atteindre B après avoir frappé deux bandes orthogonales du billard. La situation est représentée sur la Fig. 9. On veut que la balle A frappe successivement les bandes 2 et 1, puis arrive à la balle B. Comment faire ?

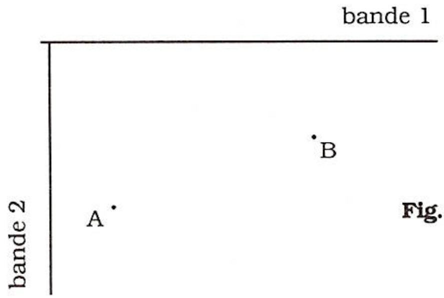


Fig. 9

Réfléchissez

Peut-être la première fois n'avez-vous pas pensé tout seul au coup du miroir. Mais ce qui apparaissait à la première rencontre comme un trait de génie revient à la mémoire à la deuxième rencontre. (Nous vivons ainsi avec la tête remplie des bonnes idées que d'autres nous ont refilées.) Alors, mais oui, on peut appliquer deux fois le coup du miroir, comme le montre la Fig. 10. On construit l'image B_1 de B dans la bande-miroir 1, puis l'image B_2 de B_1 dans la bande-miroir 2 (ou plutôt dans sa prolongation : souvenez-vous, il est utile de penser "à côté"). La boule A touche les bandes 2 et 1 successivement en E_2 et E_1. Et maintenant, vous pouvez continuer à vous poser des questions.

Posez-vous des questions

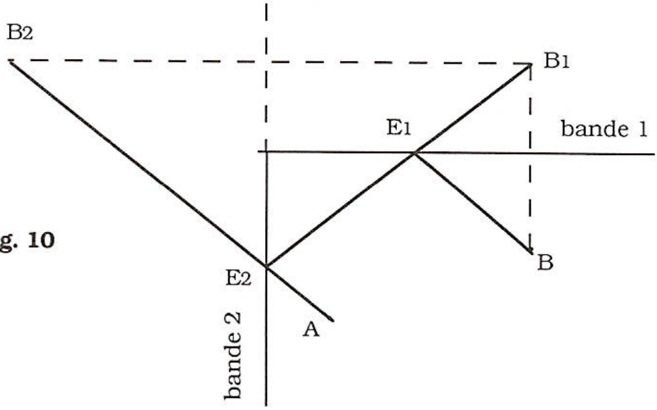


Fig. 10

Voici quelques questions que l'auteur de ces lignes s'est posées (mais sûrement, à vous tous, vous en avez trouvé bien d'autres ...)

- E_2A et E_1B ont l'air parallèles ? Le sont-elles ? Si oui, c'est peut-être une indication pratique utile au joueur.

- Et si les bandes étaient remplacées par de vrais miroirs ? Sûrement on verrait B_1 qui est l'image de B, mais verrait-on B_2 qui n'est après tout que l'image d'une image ? Et quelles autres images verrait-on ? Et si les quatre bandes du billard étaient des miroirs, quel serait le paysage de toutes les images ?

- Et si on voulait frapper successivement trois bandes, quatre bandes, etc. ?

- Et si le billard était triangulaire, pentagonal, circulaire, elliptique, ..., elliptique avec les deux boules aux foyers, ... ,

- Et si ? Et si ? Et si ? ... (à vous).

Quelle est la morale de cette simple histoire de boules fantômes ? A mon avis, la morale principale n'a rien à voir avec les boules fantômes, le billard ou les rayons lumineux. Elle est plutôt que ça rapporte de :
- supposer le problème résolu,
- penser à côté,
- chercher la simplicité, l'élégance,
- réfléchir tout seul avant de continuer à lire.

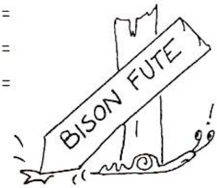
Sentir qu'on devient de plus en plus capable de penser en mathématiques, là est l'essentiel. Et absolument tout le monde peut faire dans ce domaine des progrès substantiels, peut faire beaucoup mieux que ce qu'il fait.

Ceci dit, on vous promet beaucoup de plaisir et un jaillissement de questions nouvelles si, en outre, vous essayez des choses avec de vrais miroirs et un vrai billard. Pourquoi ne le demanderiez-vous pas à votre professeur ?

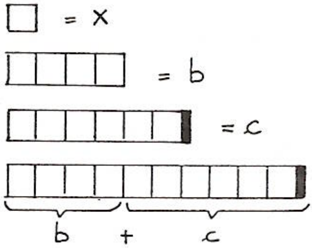
Savez-vous calculer le p.g.c.d. à la mode de chez nous?

Le calcul du p.g.c.d. de deux nombres est assez fastidieux surtout si tu n'as pas d'autres procédés à ta disposition que la décomposition en facteurs premiers des nombres suivie de la recherche des facteurs premiers communs.
Nous sommes élèves en deuxième Rénové et, généralement, nous cherchons tous les moyens possibles de nous simplifier la tâche!
Voici quelques exemples. Observe bien les nombres et essaie de trouver leur p.g.c.d. sans passer par la décomposition en facteurs premiers.

1) p.g.c.d. (37; 29) =	5) p.g.c.d. (34; 102) =
2) p.g.c.d. (24; 96) =	6) p.g.c.d. (124;125) =
3) p.g.c.d. (63; 64) =	7) p.g.c.d. (162;180) =
4) p.g.c.d. (11;101) =	8) p.g.c.d. (108;135) =



Tu as certainement repéré les paires formées d'un nombre et d'un de ses multiples non nuls. (ex.2-5).
Le p.g.c.d. est le plus petit des deux. C'est facile.
Tu as sans doute reconnu les paires de nombres premiers distincts. (ex. 1-4). Leur p.g.c.d. est 1. C'est encore plus facile.
Ton attention a dû être attirée par les paires de nombres consécutifs. (ex. 3-6) . Leur cas est très facile à règler. Leur p.g.c.d. est également 1. Sais-tu pourquoi ?
Cette propriété est une application directe du théorème suivant :
Si un nombre en divise un deuxième mais pas un troisième, ce nombre n'en divise pas la somme.
Le schéma qui suit rend ce théorème évident.



x divise b.

x ne divise pas c. Il y a un reste. Ce reste est inférieur à x.

x ne divise pas la somme b+c.

Il y a un reste inférieur à x.

Revenons au p.g.c.d. de deux nombres consécutifs.

Prenons a et (a + 1), deux naturels consécutifs différents de 1 et appliquons le théorème précédent.

Si $\begin{cases} a \mid a \\ a \nmid 1 \end{cases}$ alors $a \nmid (a + 1)$

Si $\begin{cases} x \mid a \\ x \nmid 1 \end{cases}$ alors $x \nmid (a + 1)$

Donc, a ne divise pas son suivant. De plus, aucun diviseur de a sauf 1 ne divise (a + 1). Les deux nombres sont premiers entre eux. Leur p.g.c.d. est bien 1.

Pour traiter les deux derniers exercices, Cécile, notre compagne de classe nous a donné un truc de plus:

Si tu remarques que la différence des deux nombres proposés divise l'un d'entre eux, alors tu as leur p.g.c.d.!

p.g.c.d. (162; 180) = 18 car 18 = 180 - 162
et 18 divise 180.

p.g.c.d. (108; 135) = 27 car 27 = 135 - 108
et 27 divise 108.

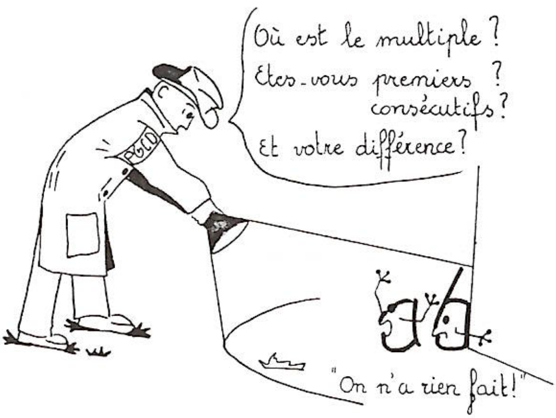
C'est bon à savoir.

Mais pourquoi est-ce vrai ? Nous en donnons les raisons suivantes :

Prenons deux naturels a et b avec a plus grand que b tels que (a - b) divise b.

$$(a-b) \mid b \Leftrightarrow (a-b)\,.\,q = b \qquad \text{avec } q \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow a.q - b.q = b$$
$$\Leftrightarrow a.q = b + b.q$$
$$\Leftrightarrow a.q = b.(1+q)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{q+1} = \frac{b}{q}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{q+1} = \frac{b}{q} = \frac{a-b}{\cancel{q}+1-\cancel{q}}$$

Ces dernières égalités signifient que (a - b) divise b et aussi a. Donc, (a - b) est un diviseur commun aux deux nombres. Les quotients sont q et (q + 1). Ils sont exacts.
Ce sont deux nombres consécutifs, premiers entre eux.
Par conséquent, (a - b) est le plus grand commun diviseur aux deux nombres.



La 2A4 Institut du Sacré-Coeur à Profondeville.

... Quelques propos au sujet du barycentre ... (suite)

Quand l'équilibre n'est plus lié à la masse.

Nous avons dans la première partie de cet article montré comment la notion de barycentre était introduite dans le contexte de la pesanteur et appris à rechercher dans des cas particuliers la position de ce point d'équilibre.

Remarquons que les propriétés 4, 5 et 6 obtenues aux pages 71 et 72 ne font plus aucune référence directe à la notion de poids. Elles peuvent se généraliser à tout espace vectoriel de points affectés d'un coefficient d'importance.

5. Barycentre d'un nuage de points pondérés dans un espace E quelconque

Les définitions équivalentes (4) et (5) se prêtent à une généralisation immédiate, tout en tenant compte des poids affectés aux différents points. Par exemple, c'est ce qui vous a conduit à la relation (6) ci-dessus.
Soit l'ensemble des points $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ affectés respectivement des nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (appelés ici *coefficients* des points considérés) tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

Par définition, *le barycentre du nuage* est le point unique G déterminé par l'une des relations équivalentes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \qquad (7)$$

$$\forall\, 0 \in E : \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \cdot \overrightarrow{0A_i} \qquad (8)$$

6. Problème du géographe

De ce qui précède, vous avez constaté que la stabilité d'un édifice ou qe l'équilibre d'un corps est liée à la position de son barycentre.
Mais celui-ci joue un rôle important dans bien d'autres situations que celles liées à la gravitation. En voici un exemple.
Le problème suivant nous a été posé par un professeur de géographie :

"On considère un certain nombre de villes assez éloignées les unes des autres.

On souhaite construire un centre commercial en un lieu qui se rapproche le plus possible de ces villes, l'éloignement de ce centre étant en raison inverse de l'effectif de la population de chacune des villes".
C'est-à-dire que plus il y a d'habitants dans une des villes, plus le centre commercial en sera rapproché ... tout en ne perdant pas de vue l'importance des populations des autres villes.
On perçoit là une question d'équilibre (sur le plan économique), ... et comme pour le problème de la Tour de Pise, la solution nécessite la recherche d'un *barycentre.*

6.1. Cas général

A partir des définitions équivalentes (7) et (8), le problème du géographe se résout immédiatement.
On peut même le généraliser comme suit et le traduire géométriquement dans le plan pointé Π_0.
Les villes considérées sont représentées par n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pondérés respectivement par les nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui traduisent les éléments que l'on souhaite prendre en considération. Par exemple α_i est affecté à la ville A_i et il mesure soit l'effectif de sa population, soit son potentiel industriel ou économique, etc.
Dans ce cas le point à la fois *"le plus proche"* des n villes, compte tenu de leurs pondérations, est le barycentre de l'ensemble des couples (A_i, α_i); il est défini par l'une des relations équivalentes (7) et (8).

6.2. Résolution du problème dans le cas particulier où les villes sont au nombre de 5 et de même importance, c'est-à-dire affectées de coefficients égaux.

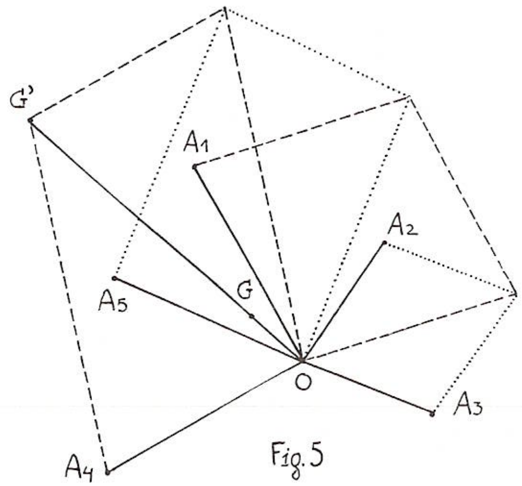


Fig. 5

Remarques
1°) On peut simplifier les constructions en choisissant l'origine 0 en un des points A_i;
2°) G est en fait le centre de gravité du pentagone A_1, A_2, ... A_5.

On peut choisir chacun de ces coefficients comme unité; auquel cas, en vertu de (8), le barycentre G peut se construire au moyen de la formule :

$$\overrightarrow{0G} = (1/5).(\overrightarrow{0A_1} + \overrightarrow{0A_2} + \overrightarrow{0A_3} + \overrightarrow{0A_4} + \overrightarrow{0A_5}) \qquad (9)$$

en choisissant le point 0 où l'on veut, et en additionnant les vecteurs $\overrightarrow{0A_i}$ dans l'ordre qui nous convient le mieux; cf. Fig. 5 où

$$\overrightarrow{0G'} = 5.\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{0A_i}$$

6.3. Cas où le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, x^1, x^2)$. Si l'on désigne par (x_i^1, x_i^2) les coordonnées de A_i et par (y^1, y^2) celles du barycentre, on déduit de la formule (8) que

$$y^k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i^k \qquad (k = 1; 2) \qquad (10)$$

Considérons à nouveau le cas particulier du n° 5.2 en choisissant l'origine 0 au point A_4 (Fig. 6). En vertu de (10) :

$$y^1 = (1/5).(-1 + 9 + 13 + 0 - 4) = 3,4$$

$$y^2 = (1/5).(14 + 12 + 4 + 0 + 8) = 7,6$$

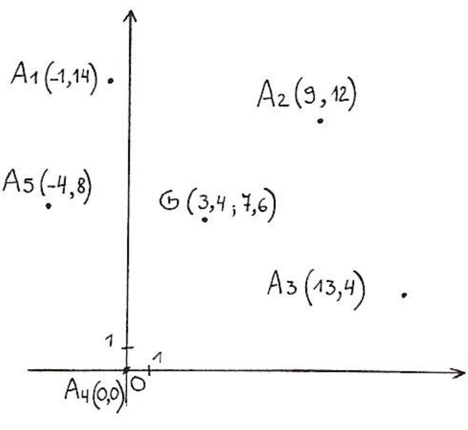


Fig. 6

6.4. Retour à la source de nos déductions, c'est-à-dire à l'équilibre du levier (Fig.7).

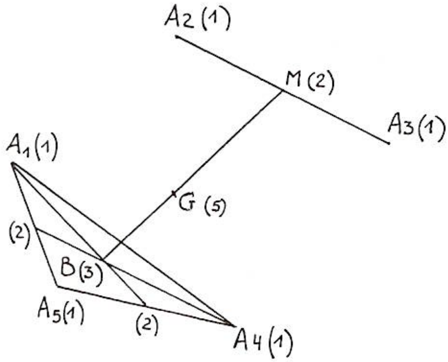


Fig. 7

1°) Nous cherchons le centre de gravité du triple $\{A_1, A_4, A_5\}$, soit B affecté du coefficient 3.

2°) Le barycentre du segment $[A_2\ A_3]$ est son milieu M affecté du coefficient 2.

3°) En comparant [BM] au levier du n° 2, nous constatons que le barycentre cherché est le point G tel que

$$3.\overrightarrow{GB} + 2.\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$$

G est donc aux 2/5 de [BM] à partir de B.

Le géographe dispose ainsi de différentes méthodes pour résoudre son problème. Mais ne vous semble-t-il pas que le procédé ci-dessus (n° 5.4) est le plus simple et le plus séduisant tout en étant le plus rigoureux, les constructions, les mesures et les calculs y étant fort réduits.

6.5. Vous êtes maintenant à même de repérer des barycentres dans différents types de situations.
Nous vous proposons à ce sujet deux problèmes.

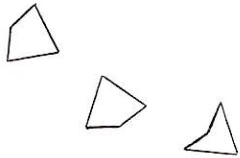
1°) Vous reprenez la question du géographe mais en sachant cette fois que les populations des villes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont évaluées respectivement à 1000, 2000, 3000, 5000 et 4000 habitants.

2°) Après avoir construit le centre de gravité d'un quadruple de points (sommets d'un tétraèdre) pondérés tous par le même coefficient, prouvez que :

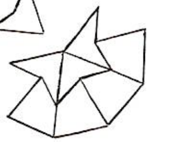
a) les 4 médianes d'un tétraèdre sont concourantes en un point $\mathcal{G}$ situé aux 3/4 de chacune d'elles à partir du sommet;

b) que $\mathcal{G}$ est également le point de concours des 3 segments qui joignent les milieux des arêtes opposées du tétraèdre.

Pavages de Penrose



CONSTRUISONS QUELQUES PUZZLES
AUX PROPRIETES EPOUSTOUFLANTES !

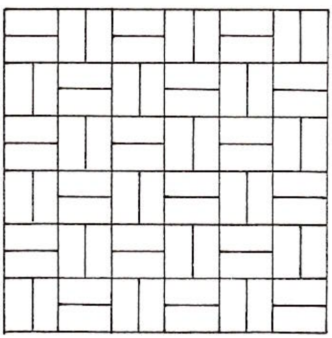


Dans le numéro précédent de Math-Jeunes, nous avons vu l'importance des pavages dans la vie quotidienne (décoration, construction, art, ...). Ensuite, nous avons étudié dans quels cas un polygone pave le plan.

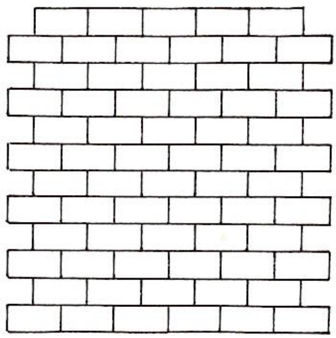
Nous allons maintenant décrire un genre très particulier de pavages: les pavages de Penrose. Récemment découverts, et d'abord curiosités mathématiques de par leurs propriétés surprenantes, ils ont trouvé des applications inattendues dans l'industrie.

Commençons par remarquer qu'avec une seule sorte de pavés, nous pouvons réaliser des pavages

périodiques:

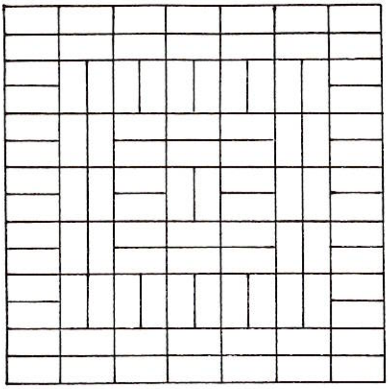


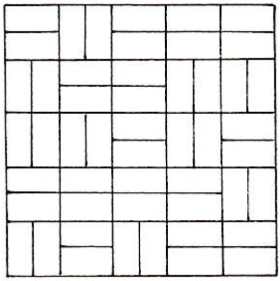
(certains parquets,...)



(un mur de briques,...)

ou non périodiques:



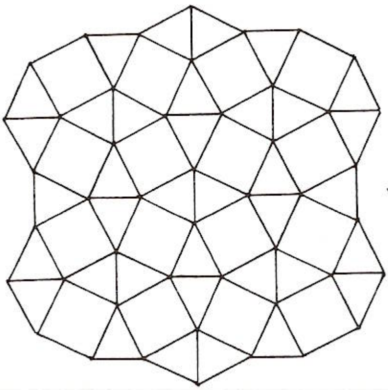


(disposition aléatoire des pavés)

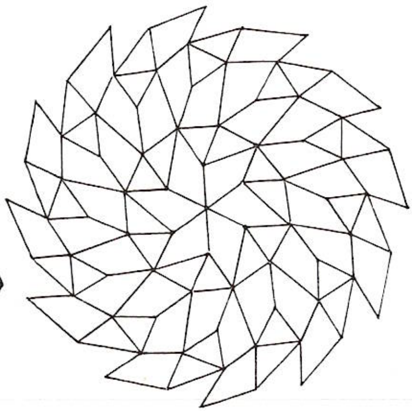
Un pavage est dit périodique s'il existe deux translations du plan de directions différentes qui transforment le pavage en lui-même. Peut-être, le mathématicien qui sommeille en vous, s'amusera-t-il à déterminer les isométries autres que des translations (rotations, symétries et symétries glissées) qui transforment les pavages que nous avons vus en eux-mêmes? L'étude des pavages non périodiques est toute récente (années 60).

Avec plusieurs sortes de pavés, nous pouvons aussi imaginer des pavages

périodiques ou non périodiques



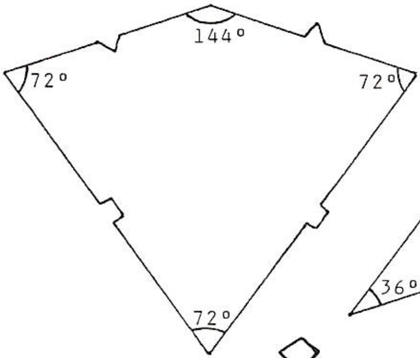
(2 pavés de base)

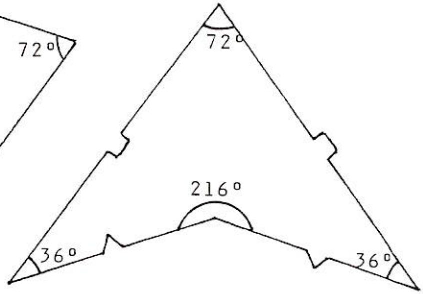


(3 pavés de base)

Pavages de Penrose:

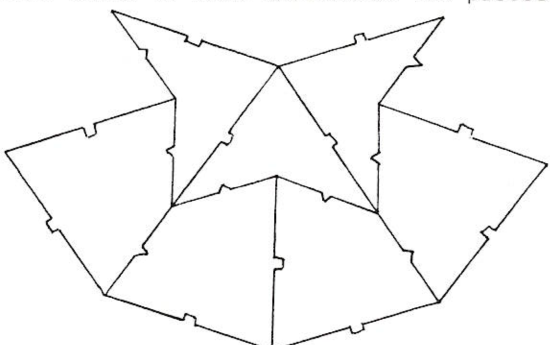
En 1974, le mathématicien anglais R. Penrose a présenté 2 pavés de base aux propriétés remarquables:



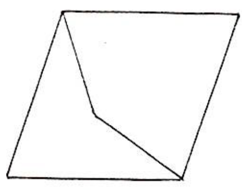


le cerf-volant  et la fléchette  .
La longueur des côtés avec découpe rectangulaire (…… …) vaut $(1+\sqrt{5})/2 \simeq 1,62$ fois la longueur des côtés avec découpe triangulaire (…… …).

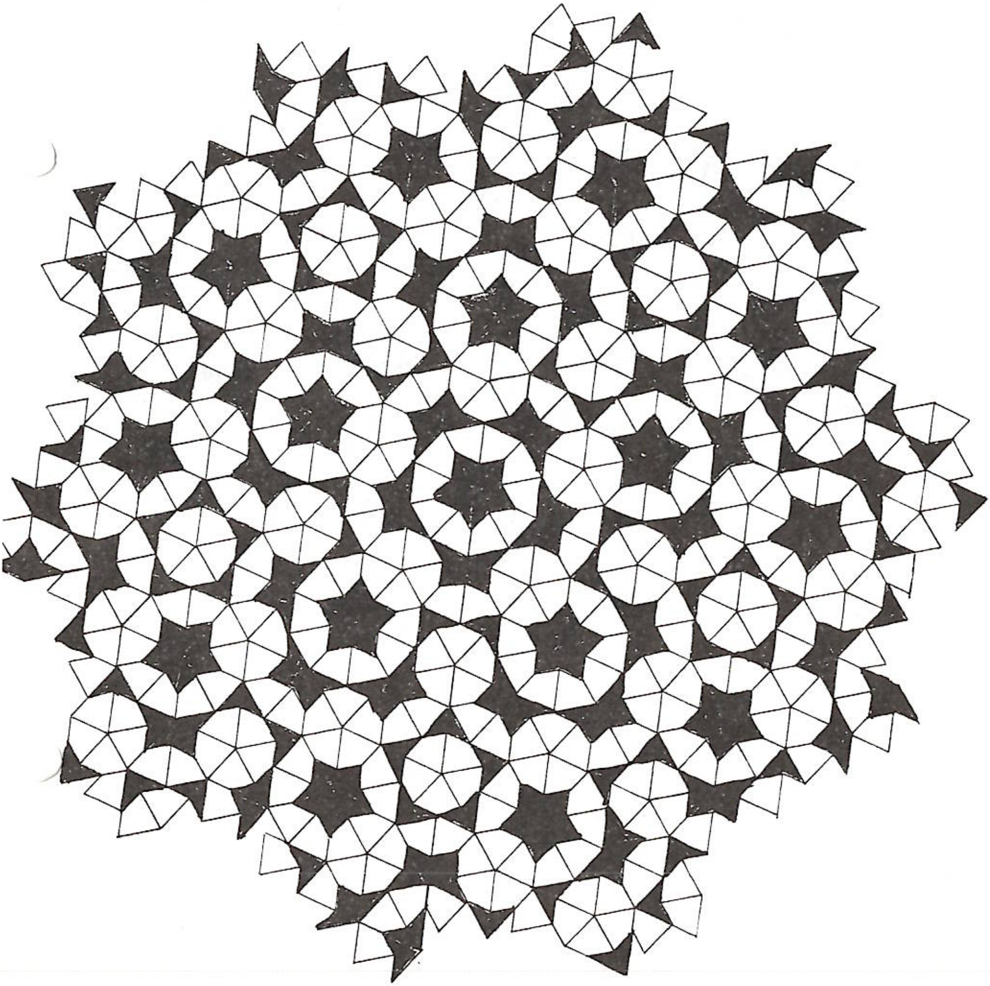
Math-Jeunes vous suggère de découper dans un carton beaucoup d'exemplaires de ces deux pavés de base et de vous amuser à imaginer quelques assemblages mêlant fléchettes et cerfs-volants comme si vous assembliez les pièces d'un puzzle:

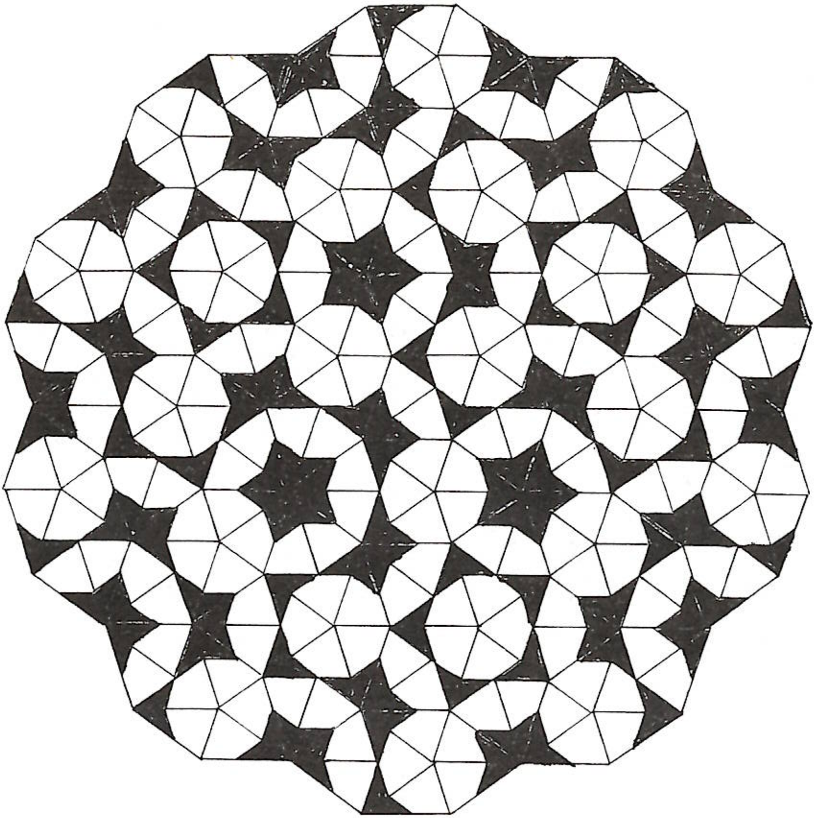


Remarquez que les encoches et les saillies ne sont là que pour vous interdire quelques pavages " trop simples ", par exemple à base de losanges:



Nous vous garantissons quelques réalisations très jolies dans le genre des deux suivantes (dans lesquelles les encoches et les saillies ont été prises en considération mais n'ont pas été représentées pour la facilité du dessinateur).





Les pavages de Penrose présentent quelques propriétés à rendre perplexes les amateurs et même... les mathématiciens les plus blasés! Jugez-en plutôt:

- Il existe une infinité de manières d'assembler cerfs-volants et fléchettes pour réaliser des pavages du plan.
- Mais aucun n'est périodique (et il n'existe même aucune translation non nulle du plan conservant un de ces pavages).
- Cependant, toute partie finie d'un pavage y est répétée par translation une infinité de fois (propriété de quasi-périodicité)!
- Et enfin, toute partie finie d'un pavage de Penrose se retrouve dans tout autre pavage de Penrose!

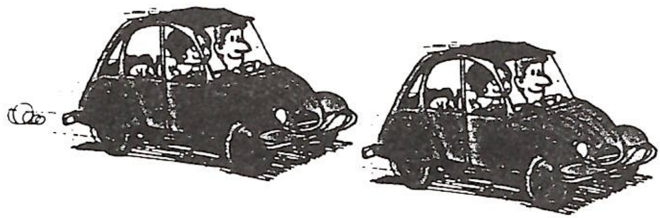
Depuis lors, un grand nombre de systèmes de pavés de base présentant les quatre propriétés énoncées ci-dessus ont été découverts. Par extension, les pavages obtenus sont également appelés pavages de Penrose. Ces propriétés spectaculaires nous amènent à vous soumettre un second problème ouvert: Nous venons de voir que les polygones de Penrose pavent le plan, mais ne peuvent le faire périodiquement. La même chose est-elle possible avec un seul polygone, c'est-à-dire existe-t-il un polygone qui pave le plan, mais ne peut le faire périodiquement? Serez-vous le premier à trancher la question? Bonne chance!

Applications des pavages de Penrose:
Bien souvent, le mathématicien effectue son travail de recherche sans beaucoup se soucier des applications éventuelles de ses découvertes; ce fut le cas de Penrose (Notons cependant que Penrose a pu arrondir ses fins de mois en commercialisant un puzzle de cerfs-volants et de fléchettes; c'est un des rares cas de mathématiciens qui se soit enrichi grâce à une de ses découvertes.). Les pavages de Penrose viennent pourtant de trouver une actualité inattendue dans le domaine de la physique des métaux. Expliquons-nous: Quand on envoie un faisceau de rayons X ou d'électrons sur un cristal, le réseau cristallin les diffracte dans certaines directions bien précises. L'analyse de ces images de diffraction permet de retrouver la structure du cristal. Au contraire, les systèmes désordonnés comme les liquides ou les verres donnent lieu à une dispersion quasi-uniforme du faisceau. En novembre 1984, des chercheurs obtiennent par refroidissement rapide d'un mélange en fusion d'aluminium et de manganèse un solide qu'ils croient être un cristal. Mais les images de diffraction obtenues bien que proches des images des cristaux n'en suivent cependant pas toutes les règles. Enfin, on s'aperçoit que des coupes dans certains plans particuliers ne donnent pas un pavage périodique du plan, mais un pavage... de Penrose! Le nouvel alliage est alors qualifié de quasi-cristal. D'autres quasi-cristaux ont été fabriqués depuis lors et rendent ainsi particulièrement intéressante l'étude des pavages quasi-périodiques. En effet, en disposant d'un modèle mathématique pour ces quasi-cristaux, nous pouvons mieux étudier ceux-ci et en comprendre les propriétés et par conséquent les applications industrielles possibles. D'ores et déjà, certains quasi-cristaux sont employés dans la construction de moules industriels pour leur dureté.

Nous espérons que vous avez pris plaisir à confectionner quelques jolis puzzles. Ce motif d'ordre esthétique n'est-il déjà pas amplement suffisant pour aborder le sujet? D'autre part, en mathématique la moindre allusion à un problème de recherche contemporain semble parfaitement inaccessible à bien des gens... Et pourtant, ne venons-nous pas d'aborder ensemble un sujet de recherche contemporain avec des applications industrielles et même de vous proposer, parmi bien d'autres, deux problèmes non encore résolus dont la formulation au moins devrait être claire à tous?

VRAOUM ... VRAOUM ... H i i i i ... BAMPS ...

Qu'est-ce que c'est ? Ben tiens ! J'accélère, je donne des gaz ... ça roule bien ... puis zut v'là le type devant moi qui freine brusquement. Il est fou ou quoi ! Tout se passe trop vite, je freine comme un dingue et puis paf ça y est, voilà mon devant dans son arrière, ça va coûter, pis voilà çui d'derrière qui me rent'dedans, j'ose plus regarder ...



Et oui, c'est comme ça que ça se passe. Et c'est quand même dommage. La prochaine fois, je resterai à distance de la voiture qui me précède. Très bien, c'est comme cela qu'il faut faire. Mais cela ne dit pas tout, car encore faut-il savoir quelle distance respecter. Et là les conseils que l'on reçoit sont divers.

On entend dire qu'entre le moment où la voiture qui vous précède passe en un point, par exemple en face d'une borne ou d'un poteau, et le moment où vous y passez, vous devez pouvoir dire tranquillement "un crocodile, deux crocodiles". Mis à part le mystère du choix de l'animal (tout autre mot à trois syllabes ferait l'affaire), le précepte est clair : comme cela prend environ une seconde pour dire "un crocodile", il faut donc, pour éviter les collisions, que les voitures se succèdent à deux secondes. On en déduit déjà, et c'est tout à fait raisonnable, que plus les voitures vont vite, et plus la distance recommandée entre elles est grande.

Monsieur Sécurité (vous savez, celui de la radio) propose une formule pour calculer la distance de freinage de la voiture, c'est-à-dire le chemin que celle-ci parcourt freins appliqués entre la vitesse v et la vitesse zéro. Il propose de diviser par 10 la vitesse de la voiture exprimée en kilomètres à l'heure (km/h) et d'élever le nombre obtenu au carré, ce qui donnerait la distance cherchée en mètres. Par exemple, vous faites 80 km/h, et vous arrivez à 8 x 8 = 64 m, ou bien 120 km/h, et vous arrivez à 12 x 12 = 144 m. Première remarque : le truc des crocodiles est plus facile à appliquer, car je peux compter (évaluer le temps qui passe) au volant de ma voiture avec plus de précision que je ne peux estimer une distance devant moi le long de la route. Deuxième remarque : Monsieur Sécurité en prend à son aise avec les unités. Sûr que le prof de physique rirait jaune de voir une vitesse au carré s'exprimer en mètres (fut-ce après qu'on l'ait divisée par 10 ...).

Quoiqu'il en soit, comment ces deux façons de calculer s'accordent-elles ? Est-ce que, sous des dehors assez différents, elles disent à peu près la même chose (ce qu'on irait jusqu'à espérer ...) ? Impossible de trancher à vue.

Et alors ? Et alors, que fait le lecteur de Math-Jeunes quand on essaye de lui refiler des trucs peut-être pas très catholiques, sans explications suffisantes ? C'est tout simple : il s'écrie d'une voix forte : "voyons voir !", il respire une grande bouffée d'esprit critique et il ouvre la prestigieuse trousse d'outils mathématiques qu'on lui a fournie à l'école. Voici à peu près ce que ça donne (pour un maximum de stimulation, vous arrêtez votre lecture ici ... and you do it your self).

D'abord les deux crocodiles. Soit v la vitesse de la voiture en km/h. La distance d à respecter est celle que parcourt la voiture en 2 secondes. Or elle en fait v en une heure, c'est-à-dire en 3600 secondes. Donc en deux secondes, elle en fait 1800 fois moins. D'où $d = v/1800$. Mais cela se sont des km. Et donc, en mètres

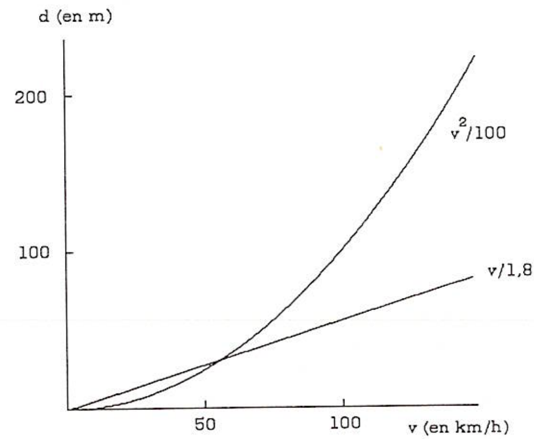
$$d = \frac{v}{1800} \times 1000 = \frac{v}{1,8}. \qquad (1)$$

Monsieur Sécurité est plus mathématisé que les crocodiles. Il s'exprime directement par une formule, à savoir, dans les notations déjà choisies

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2 = \frac{v^2}{100}. \qquad (2)$$

Pour comparer les deux formules donnant la distance en fonction de la vitesse, rien de tel que d'en superposer les graphes, ce qui est fait à la Fig. 1.

Fig. 1



Première constatation : le truc des crocodiles est plus prudent aux basses vitesses, et nettement moins aux grandes. En un certain sens, c'est déjà utile à savoir. Autant rajouter quelques crocodiles quand on enfonce le champignon.

Mais peut-on dire qu'on y voit vraiment plus clair après avoir ainsi mathématisé le problème ? Au fond pas tellement ... C'est que (et cette observation est générale) un modèle mathématique n'est rien par lui-même : il faut toujours s'interroger sur ce qu'il représente dans la réalité. Et dans notre cas, les deux modèles représentent-ils la même chose ?

Revenons donc au problème posé. Quand je vois s'allumer le feu stop de la voiture qui me précède, cela me prend un certain temps pour appuyer moi-même sur le frein. Ce temps varie selon les personnes, leur état de fraîcheur ou de fatigue ... et le nombre de verres qu'elles ont dans le nez. Pour une personne reposée et qui n'a pas bu, ce temps fait en moyenne 0,75 secondes.

A partir du moment où la voiture freine, on peut considérer qu'elle est mise en état de décélération (accélération négative, c'est-à-dire dirigée vers l'arrière) constante [1]. On estime que 4 m/sec^2 est une valeur raisonnable de cette décélération. Le moment est venu de se souvenir de la formule qu'on démontre au cours de physique en 4ème et qui donne, pour un mouvement à accélération constante a, l'espace parcouru e en fonction du temps t et de la vitesse initiale v_0, en supposant que l'espace e est mesuré à partir de la position où le mobile se trouve au temps 0 :

$$e(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \qquad (3)$$

Quant à la distance e qui nous intéresse, c'est celle que le mobile parcourt jusqu'à ce qu'il arrive au repos, c'est-à-dire à la vitesse nulle. Or la vitesse est donnée en fonction du temps par l'expression $v_0 + at$. L'instant où la vitesse est nulle est donc solution de $v_0 + at = 0$. Il vaut $t^* = -\frac{v_0}{a}$. En remplaçant t par t* dans (3), on obtient la distance cherchée :

$$v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} .$$

Cette distance est bien celle qui est parcourue pendant que le conducteur freine. Ajoutons-y la distance parcourue (à la vitesse v_0) pendant le temps que le chauffeur met à passer de la pédale de gaz au frein, à savoir 0,75 v_0. Nous obtenons ainsi pour la distance d :

1 Ceci s'explique pour l'essentiel par le fait que le freinage est dû à un frottement de Coulomb (frottement d'un solide sur un solide dans le tambour du frein) et que la force d'un tel frottement est indépendante de la vitesse. Et comme l'accélération est proportionnelle à la force ...

$$d = 0{,}75\ v_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

ou encore, puisque nous avons adopté a = - 4 (en m/sec^2) :

$$d = 0{,}75\ v_0 + 0{,}125\ v_0^2. \qquad (4)$$

Mais ici v_0 est exprimée en m/sec, alors que nous souhaitons utiliser la vitesse v déjà considérée ci-dessus, et qui était exprimée en km/h. On a

$$v_0 = \frac{1.000}{3.600}\,v = \frac{1}{3{,}6}\,v\,.$$

En remplaçant v_0 par cette valeur dans (4), on obtient :

$$\begin{aligned} d &= \frac{0{,}75}{3{,}6}\,v + \frac{0{,}125}{(3{,}6)^2}\,v^2 \\ &= 0{,}21\ v + 0{,}0097\ v^2. \qquad (5) \end{aligned}$$

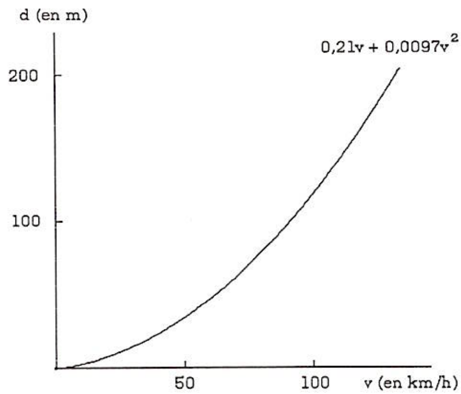


Fig. 2

La Fig. 2 donne le graphe de la fonction (5). Nous savons exactement ce que cette fonction représente : c'est la distance franchie par la voiture entre l'instant où le conducteur s'aperçoit qu'il va devoir freiner (et qui n'est pas celui où il commence à le faire) et l'instant où la voiture s'arrête. C'est donc la distance à laquelle il faudrait se tenir de le voiture précédente si on fait l'hypothèse que celle-ci est susceptible de s'arrêter brusquement. *En général*, évidemment, cette voiture aussi va continuer son chemin un moment en freinant. (Encore que, si elle bute sur un amas de voitures à l'entrée d'une nappe de brouillard ... imaginez la scène !)

Mais que représente exactement la fonction (2) ? D'après Monsieur Sécurité, c'est la distance de freinage. Pour la comparer à (5), il faut donc lui ajouter le terme 0,21 v correspondant au temps de réaction du conducteur, ce qui donne

$$d = 0{,}21\ v + \frac{v^2}{100}. \qquad (6)$$

Quant à la fonction (1), qu'est-ce qu'elle représente ? On ne sait trop. Elle représente ce qu'on entend souvent dire sur la question. On a superposé sur la Fig. 3 les graphes des fonctions (1), (6) et (5) (les deux dernières sont superposées). On y a rajouté le graphe de la fonction

$$d = 0{,}2\ v + 6{,}5$$

qui exprime en mètres la moyenne des distances que les automobilistes maintiennent réellement entre eux sur les autoroutes. La comparaison est éloquente. Il y a des faits divers qui ne devraient plus trop nous étonner.

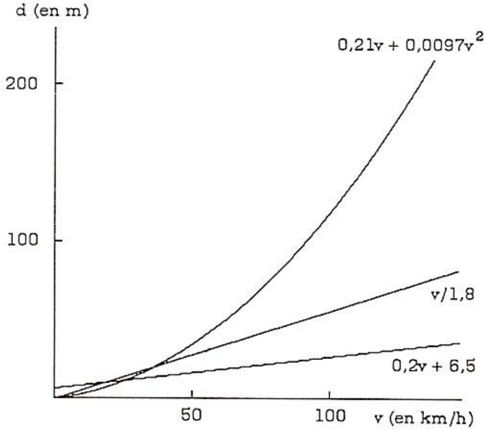


Fig. 3

Pour votre information, la Fig. 4 donne en fonction de v en km/h, les distances parcourues pendant le temps de réaction et les distances de freinage pour des décélérations respectives de 5,2 m/sec^2, 4,5 m/sec^2 et 4 m/sec^2. Ce document vient du Service de Sécurité routière néerlandais.

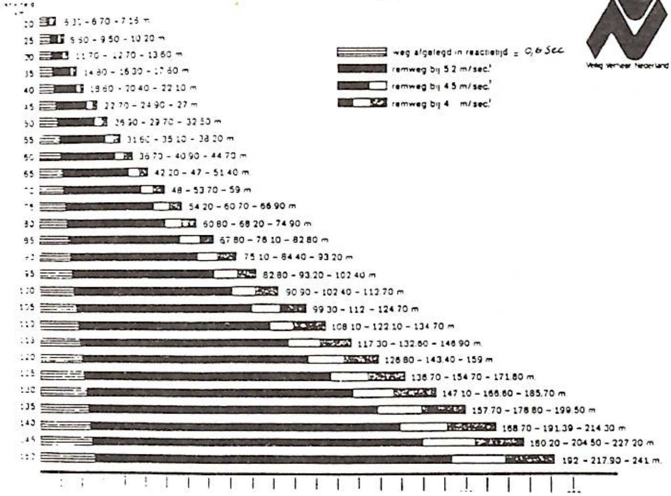


Fig. 4

Conclusions

1) Soyez prudent : plus vous mettez de tigres dans votre moteur, plus il vous faut mettre de crocodiles dans votre cervelle.

2) Il serait vraiment intéressant qu'un jour, sur une route tout à fait tranquille, vous transposiez cet article pour votre vélo-moteur en mesurant vous même votre temps de réaction, votre décélération, votre distance de freinage, etc.

3) Pour que le cours de physique, le cours de math et les leçons de vie sociale (la prudence sur la route) deviennent les plus intéressants possible, il faut les mettre ensemble. A quoi ça sert de savoir remplacer t par sa valeur dans $e = x_0 + v_0t + at^2/2$? de changer d'unité ? de dessiner des graphes ? etc. Et bien, à répondre à des questions qu'on se pose et à mettre un peu de clarté là où il n'y en avait pas.

Isabelle HAMAL et Nicolas ROUCHE

Solutions des problèmes du Rallye.

Les solutions ci-dessous ont été sélectionnées parmi les nombreuses bonnes solutions que nous avons reçues, en fonction de leur élégance ou de la grande simplicité des outils utilisés.

R 169 *Solution de Arnaud MAES , 15 ans.*

Soient a la longueur du rectangle, b sa largeur. On a

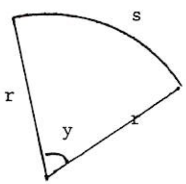
$$2a + 2b = a.b \iff 2a = b(a-2) \iff b = 2 + \frac{4}{a-2}$$

Mais $b \in \mathbb{N}_0 \implies (a-2)$ est un diviseur de 4
$\implies a - 2 = \pm 1$, ± 2 ou ± 4
d'où $a,b \in \mathbb{N}_0 \implies a - 2 = 1$, 2 ou 4
On obtient les solutions

$$a = 3 \text{ et } b = 6 \quad , \quad a = 4 \text{ et } b = 4 \quad , \quad a = 6 \text{ et } b = 3$$

Le rectangle mesure donc soit 3 cm de large et 6 cm de long
soit 4 cm de large et 4 cm de long

R 170 *Solutions de Olivier CUISENAIRE, 5è année, faisant appel à une propriété des maximas et une autre de Marc VILLANO , 16 ans qui fait appel à un minimum de moyens.*



Soit s la longueur de l'arc et r celle du rayon. Le périmètre $P = 2x + s \leq 4$
L'aire, proportionnelle à l'arc vaut

$$A = \pi r^2 . \frac{s}{2\pi r} = \frac{rs}{2} \qquad \text{et}$$

est maximale avec P . Donc $2r + s = 4$
$2r + s$ étant fixé, $r + s/2$ est fixé ce qui entraine

$r.\frac{s}{2}$ est maximum pour $r = \frac{s}{2}$

$$2r + s = 4 \implies r = 1 \text{ et } s = 2$$

La propriété utilisée par Olivier est souvent utile: si deux nombres variables a et b ont une somme constante, leur produit est maximum quand les nombres sont égaux.

Marc constate, comme Olivier que l'aire est maximum seulement quand le périmètre l'est et détaille la suite du raisonnement

Soit y l'amplitude de l'angle $\hat{C}$ exprimée en radian . On a

$$P = r(2 + y) \leq 4 \quad \text{et} \quad A = \frac{r^2 y}{2} \quad .$$

Pour obtenir une aire maximum il faut prendre le périmètre maximum donc $P = 4$

$$P = r(2 + y) = 4 \implies r = \frac{4}{2 + y}$$

$$\implies A = \frac{8y}{4+4y+y^2}$$

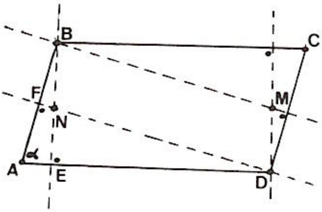
La valeur maximale de A est 1m^2 car si $y = 2$ alors $A = 1$ et A ne peut être plus grand que 1 car, dans ce cas

$$8y > 4 + 4y + y^2$$
$$y^2 + 4 - 4y < 0$$
$$(y - 2)^2 < 0$$

ce qui est impossible.
On obtient donc $\quad P = 4m \quad A = 1m \quad C = 2$ radians

$$|AC| = |BC| = 1m$$

R 173 *Nous avons retenu, pour ce problème la solution de Didier BOUSMAR de 5ème année.*



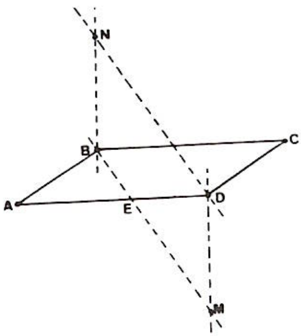
On a $\measuredangle ADN = \measuredangle MDC$ et $\measuredangle MDC = \measuredangle ABN$
$\implies \measuredangle ADN = \measuredangle ABN$

Or $\left|\dfrac{AB}{AD}\right| = \dfrac{1}{2} = \left|\dfrac{BN}{DN}\right|$ (par hypothèse)

Par suite, les triangles ABN et ADN sont semblables
Il faudrait donc que

$$\left|\frac{AN}{AN}\right| = \left|\frac{AB}{AD}\right| = \frac{1}{2}$$

ce qui est manifestement impossible. Il doit donc exister une autre figure menant, elle, à la solution. Pour obtenir cette figure diminuons la valeur de l'angle en A pour que la perpendiculaire à AB rencontre le coté AD entre A et D .



On a $\measuredangle BDM > \measuredangle ADM = 90°$
$\implies |BM| > |DM|$

Par hypothèse

$$\frac{|DM|}{|BM|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{|AD|}{|BM|} = \frac{|AB|}{|DM|}$$

or

$$\measuredangle BAE = \measuredangle EMD$$

par conséquent ABD est semblable à MDB et comme BD est commun

$$\measuredangle DAB = \measuredangle MDB \quad \text{et} \quad |BE| = |DE|$$

Dans le triangle rectangle ABE

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 \quad (|BE| = |DE| = |AD| - |AE|)$$
$$= 1 + (2 - |AE|)^2$$

ce qui donne comme solution

$$|AE| = \frac{5}{4} \qquad |BE| = \frac{3}{4}$$

Soit H la projection orthogonale de B sur AD. Les triangles ABE et BHE sont semblables et

$$\frac{|BH|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|AE|} = \frac{3}{5} \quad \text{d'où} \quad |BH| = \frac{3}{5}$$

Dès lors, l'aire de ABCD vaut

$$|AD| \cdot |BH| = \frac{6}{5}$$

R 175 *(problème n°1 de M-J n° 42) Solution de Jean-Michel HOUDART 15 ans. Avec nos excuses pour les indices manquants dans l'énoncé.*

Le tableau est composé de nombres qui sont inscrits sous forme de somme (1 = 0n + 1), 2 = 0n + 2, 2n = n + n, 3n = 2n + n ...). Le premier terme de cette somme varie suivant les lignes et le deuxième terme suivant les colonnes.
Puisque l'on doit prendre un et un seul nombre dans chaque ligne et dans chaque colonne, on peut affirmer que chaque premier terme existant et chaque deuxième terme existant ne seront repris qu'une et une seule fois.

Addition de tous les premiers termes :

$$0n + 1n + 2n + \dots + (n-1)n = n\,\frac{(n-1).n}{2} = \frac{n^3 - n^2}{2}$$

Addition de tous les seconds termes :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Addition de tous les premiers et seconds termes (= addition de $a_1+a_2+.+a_n$)

$$\frac{n^3 - n^2}{2} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^3 + n}{2}$$

R176 *(problème n° 2 de M-J n° 42) Solution de Cedric PARENT 18ans*

a) Réponse à la première question.

Le premier 81 de la suite (2) correspondra à 999 999 999 dans la première suite, il sera donc à la 111 111 111 ème place.
Le nombre suivant correspondra à 1 000 000 008, et sera donc égal à 9.

b) Réponse à la deuxième question.
Etablissons la liste des multiples de 9 ayant 27 comme somme des chiffres

- nombres de trois chiffres :		999
- nombres de quatre chiffres:	commençant par 1 :	1 899
		1 989
		1 998
	commençant par 2 :	2 799
		2 979
		2 997
		2 889
		2 898
		2 988

Classons ces nombres par ordre croissant et observons leurs écarts

999 1899 1989 1998 2799 2889 2898 2979 2988 2997

900 90 9 801 90 9 81 9 9

Pour que quatre nombres soient consécutifs dans la suite (1), il faut que leurs écarts soient de 9. Il faut donc trouver 3 écarts consécutifs de 9. Nous n'y sommes pas encore parvenus, continuons donc à établir la liste :

- en quatre chiffres: commençant par 3 :

3 699
3 969
3 996
3 789
3 798
3 879
3 897
3 978
3 987
3 888

Prolongeons notre liste (3) en les rangeant par ordre croissant et observons les écarts

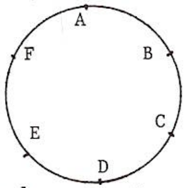
..2979 2988 2997 3699 3789 3798 3879 3888 3897 3969 3978 3987 3996

9 9 702 90 9 81 9 9 72 9 9 9

Les nombres recherchés sont: 3969, 3978, 3987 et 3996.

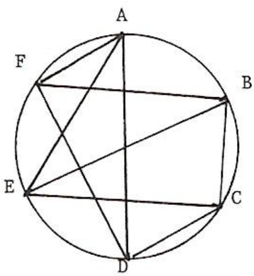
R177 *(Problème n° 3 de M-J 42) Solution particulière de Armand MAES 15ans, et généralisation de Philippe MASSON, 18 ans.*

Armand traite un exemple, et affirme, mais sans le justifier que le processus fonctionne toujours. Voici son exemple:



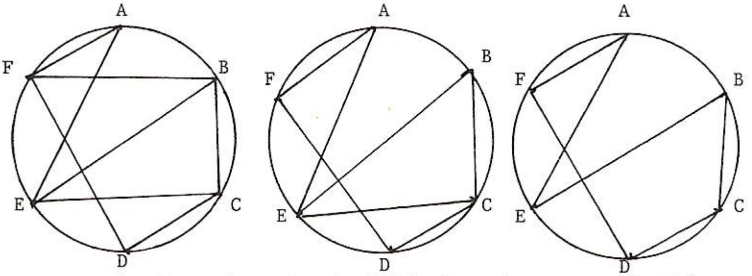
Chevaliers	Ennemis	Amis
A	BC	DEF
B	AD	CEF
C	AF	BDE
D	BE	ACF
E	DF	ABC
F	CE	ABD

On trace les segments reliant les chevaliers amis



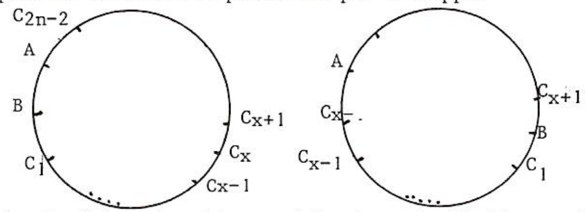
On se place alors en un sommet (arbitrairement); par exemple en A
On compte le nombre de segments partant de ce point. S'il y en a plus de 2, on retire des segments jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que deux en respectant les règles suivantes:
1) si, à l'extrémité d'un segment ne passe qu'un et un seul autre segment, alors on DOIT laisser ce segment
2) si, à l'extrémité d'un segment se trouve l'origine (ici A), on DOIT retirer ce segment (sauf s'il faut appliquer la règle 1.

On se déplace ensuite sur l'un des segments restants et on recommence à son extrémité.
Voici une suite de dessins montrant comment procéder pour l'exemple donné. On supprime successivement AD, FB, CE.
Il ne reste plus qu'à réarranger les chevaliers pour obtenir un hexagone convexe. Les places à table sont attribuées.
Ce système marchera toujours si, dans un ensemble de 2n chevaliers, chacun a au moins n amis. (voir dessins page suivante).



Le processus donné par Armand est allèchant, mais... ses directives sont-elles assez précises. Que serait-il, par exemple arrivé si, après avoir supprimé AD on se déplace vers E et que l'on supprime EC ?

Voici, à présent la solution présentée par Philippe.



Après avoir placé les chevaliers arbitrairement, Merlin va chercher à résoudre chaque problème d'inimitié un par un , tout en s'assurant qu'en en résolvant un, il n'en crée pas un autre.
Appelons A et B deux chevaliers ennemis assis l'un à côté de l'autre. Numérotons les autres chevaliers C_1, C_2,... C_{2n-2} . Le chevalier C_1 se trouvant à la droite de B qui est lui-même à la droite de A. Le chevalier C_{i+1} est à la droite du chevalier C_i .
Désignons par p_i la place occupée par C_i avant séparation des deux ennemis (p_0 est la place de B). B ayant au moins n amis parmi les chevaliers C_1 .... C_{2n-2} en aura au moins $n - 1$ parmi C_2 ...C_{2n-2}.
Supposons qu'aucun ami de A ne soit actuellement assis à la gauche d'un ami de B. Nous aurons donc au moins n-1 places interdites aux amis de A parmi les places p_1, p_2,... p_{2n-3}. Il restera donc au maximum $2n - 2 - (n-1) = n-1$ places pour caser les amis de A. Or ceux-ci sont au moins au nombre de n . Dès lors, il y a contradiction et nous pouvons affirmer qu'au moins un ami de A est assis à la gauche d'un ami de B.
Soit C_x un ami de A assis à la gauche de C_{x+1} ami de B .
Inversons la chaîne des chevaliers B, C_1,C_2,...,C_x . Donc

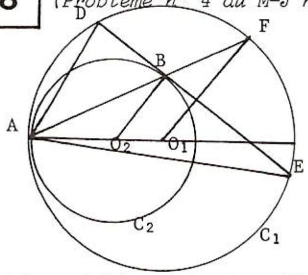
C_x viendra à la place	p_0	(ancienne place de B)
C_{x-1}	p_1	(ancienne place de C_1)
$\vdots$	$\vdots$	
C_1	p_{x-1}	(ancienne place de C_{x-1})
B	p_x	(ancienne place de C_x)

A aura donc à sa droite C_x qui est un de ses amis
B aura à sa droite C_{x+1} qui est un de ses amis et toutes les autres relations de voisinage sont conservées. La permutation ne risque donc pas d'introduire de nouveaux problèmes et elle en supprime un.

Cette méthode, subtile comme l'appelle Merlin, résout donc au moins un problème. Or le nombre de problèmes est inférieur ou égal à 2n (car il n'y a que 2n paires de voisins).

Dès lors, au bout de 2n au maximum, applications des cette méthode "subtile", on trouve une manière d'asseoir les 2n chevaliers autour de la table, telle qu'aucun d'entre eux ne soit assis à côté d'un ennemi.

R178 *(Problème n° 4 du M-J n° 42) Solution de Didier BOUSMAR)*



On sait que
$O_2 \in O_1A$
$O_2B \perp DE$
On doit montrer que
$\measuredangle DAB = \measuredangle BAE$

Soit l'homothétie h_A qui applique C_2 sur C_1 . Elle applique O_2 sur O_1 et B sur F intersection de AB et du cercle C_1
DE étant tangente à C_2 on sait que $O_2B \perp DE$
Or $h(O_2B) = O_1F$ donc $O_2B \parallel O_1F$
ce qui entraine que $O_2F \perp DE$, et par conséquent F est le mileu de DE
arc DF = arc FE
Les angles inscrits $\measuredangle DAF$ et $\measuredangle FAE$ sont donc égaux et par suite, AB est bissectrice de l'angle DAE.

R179 *Solutions de Marc CHRISTOPH 15 ans, et de Olivier GUISENAIRE 16 ans.*

La fille a 12 ans, l'homme trois fois plus soit 36 ans.
Soit x le nombre d'années à attendre pour pouvoir se marier.

$$2(12 + x) = 36 + x$$
$$x = 12$$

Il devra attendre 12 ans; elle aura alors 24 ans et lui 48.
En solutionnant le problème de cette façon, j'ai considéré que la fille avait 12 ans juste et son homme trois fois plus, mais ceci n'est certainement pas la réalité.

La fille a 12 ans + a   a étant compris entre 0/365 et 365/365
L'homme a 36 ans + b   b étant compris entre 0/365 et 365/365

$$2(12 + a + x) = 36 + b + x$$
$$x = 12 - 2a + b$$

Si $a = 364/365$ et $b = 0$, ils se marieront dans 10 ans et 2 jours
Si $a = 0$ et $b = 364/365$, ils ne pourront se marier que dans 12ans et 364 jours.

Conclusion: l'autorisation paternelle leur sera donnée dans un délai se situant entre dix et treize ans.
Mais Marc, en garçon de la fin du XXè siècle complète sa conclusion: cependant ils se marieront sûrement dans 6 ans quand la fille sera majeure!

Olivier, quant à lui généralise le problème

Soit a l'âge du jeune homme
b celui de la jeune femme
c le rapport entre leurs âges désiré par le père

On a

$$b + x = c(a + x)$$
$$b - ac = (c - 1)x$$
$$x = \frac{b - ac}{c - 1}$$

Remarquons que si le père exigeait qu'ils aient le même âge, ils ne pourraient (c'est bien évident, mais l'équation l'indique) jamais se marier.

R180 *Solution de Jean Michel HOUDART, 15 ans*

Soient a, b, c les mesures des trois angles à découvrir

$$a \leqslant b \leqslant c < 90$$
$$a + b + c = 180$$

b doit se trouver le plus éloigné possible de a et de c, c'est-à-dire que b "se trouve à mi-chemin entre a et c". Autrement dit la différence entre a et b est égale à celle entre b et c

$$a - b = b - c$$
$$a + c = 2b$$

Portant dans $a + b + c = 180$

on obtient

$$3b = 180$$
$$b = 60$$

c doit se trouver le plus éloigné possible de 60 valeur de b et de 90

Donc

$$90 - c = c - 60$$
$$2c = 150$$
$$c = 75$$

Enfin

$$a = 180 - 75 - 60 = 45$$

Le triangle ayant le plus l'apparence "quelconque" a 3 angles dont les amplitudes respectives sont 45°, 60°, 75°

Cedric Parent nous signale l'existence d'une très bonne approche du problème par Monsieur LUBCZANSKI dans son ouvrage "Comment réussir le triangle quelconque...et douze autres friandises." Jacques LUBCZANSKI recherche un triangle dont les longueurs des côtés sont le plus différentes possibles et trouve alors pour valeurs des angles 77°4', 58°31' et 44°25'.

R181 *Solution de Olivier LEROT, 17 ans*

Soient a, b, c l'âge des trois paroissiens. Nous pouvons supposer $a \leqslant b \leqslant c$

Recherchons les différentes combinaisons de a, b, c dont le produit vaut 2450 et calculons chaque fois la demi-somme

$$v = \frac{a + b + c}{2}$$

a	b	c	v
1	1	2450	1226
1	2	1225	614
1	5	490	248
1	7	350	179
1	10	245	128
1	14	175	95
1	25	98	62
1	35	70	53
1	49	50	50
2	5	245	126
2	7	175	92
2	25	49	38
2	35	35	36
5	5	98	54
5	7	70	41
5	10	49	32
5	14	35	27
7	7	50	32
7	10	35	26
7	14	25	33

L'adjoint connaît son âge et donc, s'il hésite, c'est qu'il y a au moins deux possibilités qui conduisent au même v

Effectivement, 32 apparaît deux fois dans la colonne d'âge du vicaire, le vicaire a donc 32 ans.

Il ne sait pas répondre avant que le curé lui dise: "je suis plus âgé que le plus vieux de mes paroissiens.
Etant donné qu'après la réponse il peut trancher c'est que le curé a plus de 49 ans et moins de 51 ans
Le curé a donc 50 ans et les paroissiens

5 ans
10 ans
49 ans

R 182 *Solution de Eric DE POORTERE, 15 ans*
Nous nous excusons pour une erreur de frappe qui s'est glissée dans l'énoncé. Vous avez très justement rectifié le tir, certains nous signalant que ce n'était certainement pas la faute à découvrir. Bravo!

On part de la relation : $c = a + b$,
qui est équivalente à $c - b - a = 0$
On arrive, après transformations correctes à

$$c(c - b - a) = b(c - b - a)$$

Remplaçons $c - b - a$ par sa valeur, soit 0
On obtient $c \cdot 0 = b \cdot 0$
d'où on NE PEUT DEDUIRE que $b = c$, la division par 0 n'étant pas réalisable.
De $0 = 0$, on ne peut conclure que $c = b$!!

Nous avons également reçu un travail important de Philippe MASSON sur les nombres joyeux et tristes. La place nous manque pour le publier mais voici les principaux résultats qu'il a obtenus.

1. Quelle que soit la base, tout nombre naturel de trois chiffres ou plus a une image qui lui est inférieure et se raccroche donc après un nombre fini d'itérations de f à un nombre de un ou deux chiffres.
Pour rechercher les points fixes et les boucles infernales il suffit donc de tester les naturels jusque $b^2 - 1$ où b est la base de numération.

2. Recherche des points fixes. Tous les points fixes autre que 0 ou 1 ont deux chiffres, quelle que soit la base utilisée. Le nombre de points fixes autres que 0 et 1 est nécessairement pair. Pour déterminer les points fixes, il suffit de décomposer b de toutes les manières possibles en une somme de deux naturels et de voir ensuite si le produit de ces deux naturels donne un nombre triangulaire (produit de deux nombres consécutifs). Si la réponse est affirmative il y a des points fixes

$$x(b - x) = y(y - 1) \Longrightarrow bx + y \text{ fixe.}$$

SOMMAIRE PAGES

Responsable de l'édition :

J. Vanhamme, rue Firmin Martin, 2
1160 - Bruxelles
tél : 02/6727571

Comité de rédaction du numéro :

C. Festraets, M. Cnudde, G. Delande, I. Hamal, N. Rouche, F. Valette

Le courrier doit être adressé à J. Vanhamme

Prix des abonnements:

Belgique :	*groupés (5 au moins)*	*80 FB*
	isolés	*120 FB*
Etranger:	*y compris Pays-Bas et Luxembourg*	
	par paquet de 5 abonnements	*800 FB*
	isolé	*240 FB*

Anciens numéros encore disponibles :

Années complètes : 84-85 , 87-88
Numéros isolés : 21, 22, 23, 30, 32, 33, 34
Numéro spécial : poster historique

Les payements sont à effectuer :

Pour la Belgique : Cpte n° 001-0828109-96
MATH-JEUNES, rue des Fontaines, 14 bis
7460 - CASTEAU

Pour l'étranger : Cpte n° 000-0728014-29
SBPM, rue des Fontaines, 14 bis
7460 - CASTEAU
à partir d'un compte chèque postal
ou
par mandat poste international à la même adresse.
En cas d'intervention bancaire, majorer les prix d'une somme de 200 FB pour frais d'encaissement.

Les abonnements à cette revue, destinée aux élèves du secondaire, sont, de préférence, pris par l'intermédiaire d'un professeur.