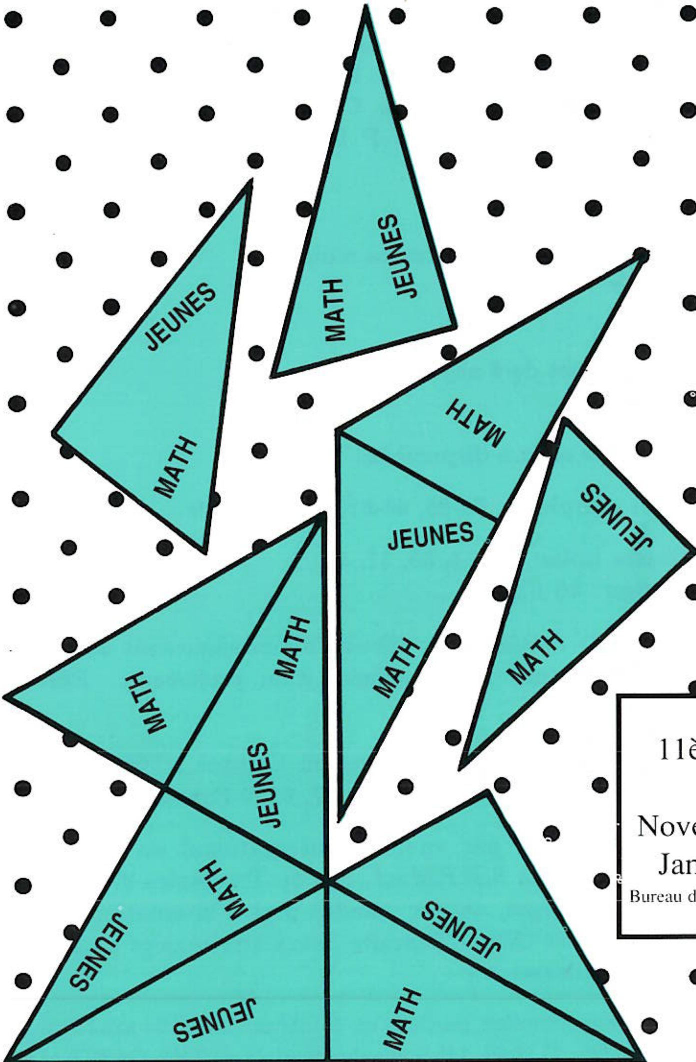
MATH - JEUNES



11ème année
N° 46
Novembre 1989
Janvier 1990
Bureau de dépôt: Mouscron 1

"Périodique trimestriel édité par la SBPMef"

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7460 CASTEAU.

Abonnements:

- Belgique:
  — Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
  — Isolés: 120 FB
- Etranger :
  — Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
  — Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

- Années complètes: 84-85, 86-87, 87-88, 88-89 Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 23, 24, 30, 31, 32, Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB)

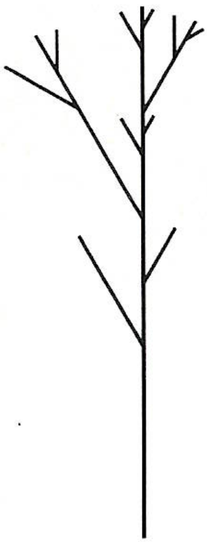
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6239 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6239 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable: G.Noël, 14bis rue des Fontaines, 7460 CASTEAU

N ° 46 Onzième année 1990

MATH-JEUNES



Sommaire

S. B. P. M.

Math-Jeunes n° 46, 34–36

Un mathématicien belge contemporain: Pierre DELIGNE

A. Valette

Pierre DELIGNE est né à Etterbeek le 3 octobre 1944. Il effectue ses études secondaires de 1956 à 1962, à l'*Athénée Adolphe Max* à Bruxelles. Il s'y montre un élève brillant dans toutes les branches, mais c'est surtout en mathématiques qu'il révèle des dons presque inquiétants. Il absorbe à toute allure les programmes des enseignements secondaire et universitaire de sorte que, dès sa cinquième, ses professeurs l'autorisent à suivre des cours à l'*Université Libre de Bruxelles* (ULB). Elève de rhétorique, il devient assidu du séminaire de troisième cycle organisé par Jacques TITS (alors qu'un tel séminaire s'adresse en principe à des licenciés en mathématiques).

De 1962 à 1966, c'est la licence en mathématique à l'ULB, mais d'une manière très personnelle: durant ses deux années de Candidature, DELIGNE fréquente surtout les séminaires de troisième cycle; à partir de sa première licence, ses professeurs de l'ULB, conscients de ce qu'ils n'ont plus rien à apprendre à ce phénomène, l'encouragent à suivre les cours de l'*Ecole Normale Supérieure* à Paris. Dès lors, Deligne ne reviendra plus à Bruxelles que pour y passer ses examens; en juillet 1966, il termine ses études avec un Mémoire de Licence entièrement original, en logique intuitionniste.

Après la parenthèse obligée du service militaire (il enseigne à l'Athénée de Rösrath, dans les Forces Belges en Allemagne), il poursuit, en 1967-68, ses séjours à Paris, grâce à une bourse d'Aspirant du *Fonds National belge de la Recherche Scientifique* (FNRS). En 1968, bref passage à Bruxelles, pour y défendre sa thèse de doctorat, en géométrie algébrique. Après quoi, il s'installe à l'*Institut des Hautes Etudes Scientifiques* (IHES) de Bures-sur-Yvette, au sud de Paris. En 1972, il soutient encore une thèse de Doctorat d'Etat à l'Université de Paris-Sud. Il quitte l'IHES en 1984, pour l'*Institute for Advanced Study de Princeton*, où il est nommé professeur (Un de ses prédécesseurs dans cette célèbre institution s'appelait...Albert Einstein).

Cette carrière s'accompagne d'une série de distinctions prestigieuses, citons: en 1974, le prix François Deruyts de l'Académie Royale belge des Sciences et le prix Henri Poincaré de l'Académie des Sciences de Paris; en 1975, le prix quinquennal De Leeuw-Damry-Bourlart du FNRS; en 1978, la **Médaille Fields**, qui lui est décernée au Congrès International des Mathématiciens à Helsinki (la Médaille est la plus haute distinction pour les mathématiciens; on dit communément que c'est l'équivalent du Prix Nobel pour les mathématiques). En 1978 encore, DELIGNE est élu membre associé de l'Académie des Sciences de Paris et "Foreign Honorary Member" de l'American Academy of Arts and Sciences. En 1988, il est lauréat du Prix Crafoord de l'Académie Suédoise des Sciences. En mai 1989, il a aussi reçu les insignes de Docteur Honoris Causa de la Vrije Universiteit Brussel.

Pierre DELIGNE est marié; sa femme, Elena, est d'origine russe (je me rappelle avoir entendu DELIGNE raconter que, pour "décompresser" après une dure journée de mathématiques, il aimait que sa femme lui lise des poèmes de Pouchkine). Le couple a une fille, Natalia (7 ans), et un fils, Alexis (3 ans).

DELIGNE est connu parmi les matheux pour son goût du vélo. Il répondit un jour à une invitation au Palais Royal de Bruxelles en s'y rendant à bicyclette, alors que le Palais mettait à sa disposition limousine et chauffeur. Par les beaux jours à l'IHES, c'était bien sympathique de voir apparaître DELIGNE en short, à vélo, suivi de son cartable à bretelles et précédé de la barbe fleurie qu'il portait alors.

Signalons enfin que sa brillante carrière n'a en rien entamé la modestie et la gentillesse caractéristiques de DELIGNE.

Parlons un peu de l'oeuvre scientifique de DELIGNE. Malgré d'importantes contributions à la théorie des équations différentielles et à la théorie des groupes, c'est en géométrie algébrique que DELIGNE a réussi ses plus beaux "coups". A l'origine, la géométrie algébrique est l'étude des "variétés algébriques", c'est-à-dire des objets définis par des équations polynomiales (ou des systèmes d'équations polynomiales) à plusieurs variables. Ces objets sont des courbes, des surfaces, etc... (on en verra des exemples dans le prochain numéro). Depuis les années 1930, la géométrie algébrique a radicalement évolué, sous l'action de trois des mathématiciens les plus originaux de ce siècle, l'américain d'origine russe Oscar ZARISKI (1899-1986), et les français André WEIL (né en 1906) et Alexandre GROTHENDIECK (médaille Fields en 1966). La géométrie algébrique est aujourd'hui une théorie extrêmement complexe et abstraite, qui exige pour s'y frotter des connaissances approfondies en algèbre et en théorie des nombres.

Dès son arrivée à Paris en 1965, DELIGNE avait été adopté par le groupe de géomètres algébristes animé par GROTHENDIECK. Il devient rapidement une des figures de proue du séminaire de GROTHENDIECK à l'IHES. C'est dans cet environnement qu'il démontre en 1973 la dernière des conjectures de WEIL, qui remontaient à 1949. On considère que cette preuve est le plus bel exploit de DELIGNE.

Les conjectures de WEIL concernent essentiellement le nombre de points des variétés algébriques sur un corps fini. Dans le prochain numéro, j'essayerai d'être plus explicite; ce n'est pas facile. Mais à cette occasion, nous rencontrerons un phénomène assez fréquent en mathématique: au départ, on essaye de résoudre un problème dont l'énoncé est assez simple: chercher les solutions entières d'un système d'équations à coefficients entiers. La résolution du problème apparaissant difficile, les mathématiciens mettent en œuvre des techniques de plus en plus sophistiquées, de plus en plus abstraites. Le problème prend progressivement un aspect différent, il devient plus général. L'énoncé initial n'apparaît plus que comme un des aspects de la situation étudiée. Quand celle-ci a suffisamment mûri, les difficultés fondamentales, les points restant à éclaircir sont mis en évidence. Dans notre cas, ce sont les conjectures de WEIL. Un temps indéterminé s'écoule alors avant qu'un chercheur, qui par cela même se classe dans la catégorie des grands mathématiciens, vienne apporter les réponses attendues (et souvent poser de nouveaux problèmes).

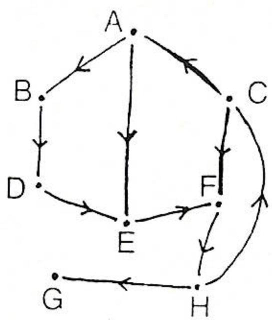
Dans la deuxième partie de cet article, intitulée "Les conjectures de WEIL", qui paraîtra dans le prochain *Math-Jeunes*, je te parlerai donc des travaux qui partant du problème de la résolution des équations "diophantiennes" ont débouché, via la géométrie algébrique, à la démonstration des conjectures de WEIL par Pierre DELIGNE. Pour préparer ta lecture, demande à ton professeur de te rappeler ce qu'est une "congruence modulo p".

Graphe, Jeu et Stratégie (1)

P. Trefois

Athénée Royal de Mons

Nul besoin d'un matériel compliqué pour créer un jeu. Une feuille de papier et un crayon nous suffiront.



Marquer plusieurs points et les relier par quelques flèches.

On décide d'un point de départ (par exemple A) et chaque joueur à son tour déplace un pion — posé en A au départ— d'un point vers un autre auquel le mène une flèche.

Le perdant est celui qui ne peut plus se déplacer, c'est-à-dire doit jouer à partir d'un point d'où ne part aucune flèche. (Avant de commencer, il vaut mieux s'assurer qu'un tel point existe).

Exemple de partie. (Nous nous limiterons toujours à deux joueurs).

Joueur 1	Joueur 2
A → B	B → D
D → E	E → F
F → H	H → G : gagné

Une question vient à l'esprit: l'un des deux joueurs peut-il être certain de gagner? Autrement dit, existe-t-il une stratégie gagnante? (Question intéressante: il est parfois bien agréable de battre régulièrement sa petite soeur!). Regardez bien le dessin (appelé graphe) du jeu et essayez de répondre à cette question.

Solution: le joueur 2 est toujours gagnant, s'il ne commet pas d'erreur. Voici le déroulement de la partie:

$$A \begin{array}{l} \overset{J_1}{\nearrow} \quad B \xrightarrow{J_2} D \xrightarrow{J_1} E \xrightarrow{J_2} F \xrightarrow{J_1} H \\ ou \\ \overset{J_1}{\searrow} \quad E \xrightarrow{J_2} F \xrightarrow{J_1} H \end{array}$$

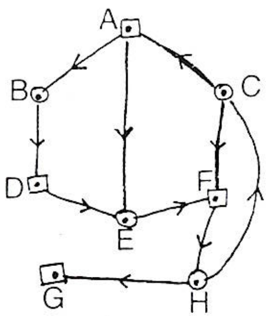
A ce moment de la partie, J_2 joue G et gagne, mais s'il joue C, J_1 joue F, J_2 joue H et J_1:G gagne (sauf s'il commet la même erreur et joue C auquel cas J_2 gagne, sauf ...) (Vous laisserez donc à votre soeur le soin de commencer).

Nous voici amené à définir ce qu'est un noyau d'un graphe:

Un noyau est un ensemble de points du graphe tel que:

- *Tout point hors de ce noyau a au moins un successeur qui appartient à ce noyau.*
- *Un point de ce noyau ne peut avoir de successeur(s'il en a) qu'en dehors de ce noyau.*

En suivant cette définition, la détermination d'une stratégie gagnante peut être simplifiée.



Construisons un noyau N.

$G \in N$ ($\square$)

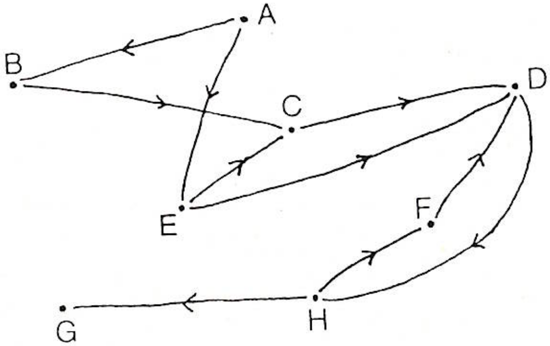
Donc $H \notin N$ ($\bigcirc$) Pour C, on ne peut pas encore se décider (on ne sait rien de ses successeurs et l'indication sur son prédécesseur est insuffisante).

Mais $F \in N$ et dès lors:

$$C \notin N$$
$$E \notin N$$
$$D \in N$$
$$B \notin N$$
$$A \in N.$$

Ce qui signifie que, en partant de A, **on ne peut que sortir du noyau** et l'adversaire **peut alors toujours y entrer** (relisez bien les définitions). Cette situation peut se répéter plusieurs fois (sortie—entrée) jusqu'au moment où le deuxième joueur arrive en G et a gagné.

A vous de jouer. **Déterminez un noyau du graphe suivant:**



Solution: on a, dans l'ordre de découverte (les éléments du noyau sont indiqués en gras):**G**,H,**D**,F,C,E,**B**,A. Ici, le joueur 1 est gagnant (mais qu'il ne joue surtout pas E).

En compliquant un peu —pour brouiller les cartes— voilà un jeu d'où vous avez toutes les chances de sortir gagnant, même contre des adversaires plus coriaces que votre petite soeur. Mais ... ce n'est pas aussi simple.

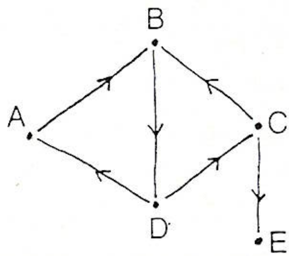
Trois questions:

1. Un graphe possède-t-il toujours un noyau?
2. Comment le déterminer, s'il existe?
3. Quel rapport avec les vrais jeux?

1. La réponse est non. Le graphe ci-contre n'a pas de noyau.

   En effet, si le noyau existe: $E \in N$ et $C \notin N$,

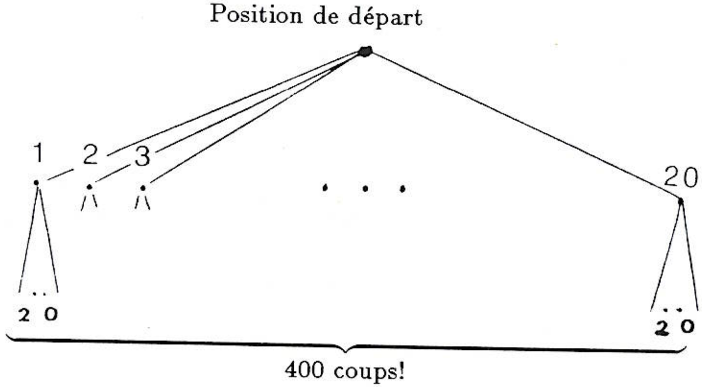
   - si $D \in N$, $A \notin N$ et il n'y a plus de possibilité pour B;
   - si $D \notin N$, $B \in N$ et il n'y a plus de possibilité pour A.



   (Voir: petites notes).

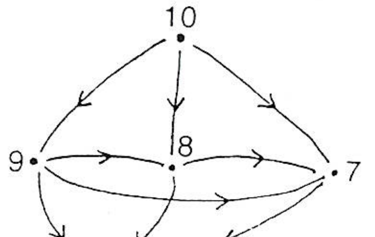
2. Il existe des méthodes plus ou moins compliquées qui permettent de déterminer le noyau d'un graphe. Nous nous contenterons de la méthode artisanale déjà utilisée: "commencer par la fin".

3. Beaucoup de jeux connus pourraient (théoriquement) être représentés par un graphe. Voici le début du graphe d'un jeu très connu:



Les adversaires ont chacun joué un coup et nous avons déjà dessiné 400 flèches! Inutile de continuer. Il est vrai que nous avons choisi un jeu particulièrement difficile: les échecs. En voici un autre: on pose 10 allumettes sur la table.

Chaque joueur à son tour peut retirer 1, 2 ou 3 allumettes. Gagne celui qui enlève la dernière.Voici le début du graphe

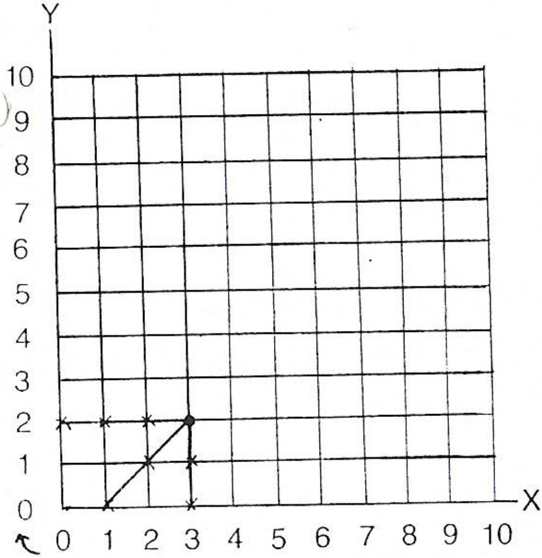


Un petit calcul nous montre qu'il comprendrait 27 flèches. En effet,
de 10 partent 3 flèches,
de 9 partent 3 flèches,
de 8 partent 3 flèches,
⋮
de 2 partent 2 flèches,
de 1 part 1 flèche.

C'est encore bien compliqué. Et si nous faisions abstraction de toutes ces flèches. Réfléchissons: 0 est une position gagnante, donc 1, 2 et 3 sont des positions perdantes(lorsqu'on y arrive). Il s'ensuit que 4 est gagnant (puisque l'adversaire ne peut alors atteindre que 3, 2 ou 1). Finalement le noyau est $\{0, 4, 8\}$. Le premier joueur a une stratégie gagnante: il prend 2 allumettes et ensuite, en passant par 4, arrive

0. Mais s'il se trompe, le second joueur peut rentrer dans le noyau et gagner. Imaginez des jeux semblables en modifiant les règles (le tas d'allumettes est plus important, on peut prendre plus ou moins) et trouvez les stratégies gagnantes!

Et pour terminer... Un jeu. (Dû à R.Isaacs).

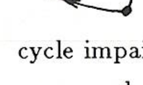


On joue sur les intersections du quadrillage. Le but à atteindre est le point (0,0). Le premier joueur choisit un point, le second commence les déplacements. On peut se déplacer (d'une distance quelconque) sur une parallèle à OX, sur une parallèle à OY ou sur une parallèle à la bissectrice de $X\widehat{O}Y$, mais toujours en se rapprochant de (0,0). Par exemple, en partant de (3,2), on peut arriver en (2,2), (1,2), (0,2), (3,1), (3,0), (2,1), (1,0).

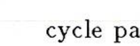
QUESTION: Déterminer le noyau. En déduire une stratégie gagnante. (Solution dans un prochain numéro)

Petites notes.

1. En fait, on sait que tout graphe qui ne contient pas de cycle impair possède au moins un noyau.



cycle impair

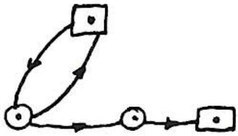


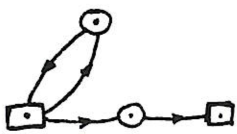
cycle pair

Attention, un graphe contenant un cycle impair peut quand même avoir un noyau (voir notre tout premier graphe).

2. Un graphe qui ne possède pas de cycle a un noyau unique.

3. Remarquons aussi qu'un graphe peut avoir plus d'un noyau





Reprenez aussi l'exercice de la page 39. En ajoutant une flèche de D vers A vous obtenez un nouveau graphe dont vous aurez peut être la curiosité de déterminer les 2 noyaux.

(A suivre)

Sources:

Ph. PACLET, Radioscopie d'un jeu, *Jeux et Stratégies*, n° 9, 1981.

Une phrase manquait dans l'article *Un peu de lumière sur l'ombre d'un cube et d'un tétraèdre* publié dans le numéro précédent. Comme c'est souvent le cas, "un rien vous manque et tout change !" Réparons donc cette omission:

A la page 19, paragraphe 4 n° 3, il fallait lire:

La projection de la figure formée de deux droites sécantes est une droite si la direction de projection est parallèle à une des deux droites ou, plus généralement, si elle est parallèle au plan des deux droites; dans les autres cas, cette projection est constituée de deux droites sécantes.

Toutes nos excuses à nos lecteurs!

Les nombres–miroirs multiples

M. Lardinois

Université de Mons, 1ère Candidature

Le problème dont je vais vous parler m'a été soumis en humanités au cours ... d'informatique. Un après-midi, en fin d'heure, notre professeur nous propose l'idée suivante: rechercher tous les nombres naturels formés de 4 chiffres différents (le premier non nul) qui, lus dans l'ordre inverse, livrent un de leurs multiples entiers. Il nous avait demandé, pour le cours suivant, de "débroussailler" le problème sur le plan mathématique. Rentré chez moi, je réfléchis quelques minutes et ... la solution m'apparaît sans même recourir à l'emploi de la machine! C'est alors que surgissent deux questions: pourquoi se borner aux naturels de 4 chiffres et se restreindre aux seuls nombres formés de chiffres différents?

Ma méthode, que je vais vous exposer ci-après, me permit de généraliser à k chiffres sans beaucoup de recherche supplémentaire car elle ne dépend pas de la taille du nombre mais en revanche si l'on supprime la condition des chiffres distincts, le problème devient beaucoup plus complexe (il est, entre autres, évident qu'il y a une infinité de solutions: la famille des naturels palindromes ([1]) est infinie), tandis que si on la garde, le nombre de solutions est fini (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers naturels dont tous les chiffres sont différents). Ceci justifie l'énoncé que j'ai finalement retenu:

Soit x un naturel non nul formé de k chiffres tous différents, le premier différent de 0. Si x s'écrit $abc\ldots pqr$, y s'écrit $rqp\ldots cba$. Trouver tous les triplets d'entiers (x, y, n) tels que $y = nx$.

On montre aisément que $1 \leqslant n \leqslant 9$. Si $k = 1$, alors $y = x$ et $n = 1$ (avec $1 \leqslant x \leqslant 9$). On obtient donc ici 9 solutions triviales.

A présent, nous allons adopter pour méthode la construction progressive des solutions par les extrêmes, c'est-à-dire que nous allons déterminer a, r,

([1]) Un naturel palindrome est un naturel tel que 121 ou 12321 qui ne change pas de valeur qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche puis b, puis ... en nous arrêtant à chaque valeur de k pour dénombrer les solutions éventuelles, et en réinjectant les conditions obtenues pour déterminer les solutions à $k+1$ chiffres, et ce jusqu'à $k = 10$ ou une valeur plus faible si l'on rencontre une autre condition d'arrêt en chemin.

Donc, si $k \geqslant 2$, on a $x = 10^{k-1}a + \cdots + r$ et $y = 10^{k-1}r + \cdots + a$. Comme $a \neq r$, on a $y \neq x$ et $n \neq 1$. Donc $2 \leqslant n \leqslant 9$ et $y = 10^{k-1}r + \cdots + a = na10^{k-1} + \cdots + nr = nx$. Alors

$$nr \equiv a \pmod{10} \ (^2)$$

Comme $y > x$ ($n \geqslant 2$) et $a \neq r$, on a aussi $r > a$. Malheureusement, ces 2 conditions, très simples, ne suffisent pas: il reste en effet pas moins de 28 triplets (a, r, n) possibles (je vous laisse le soin de les chercher!). J'ai donc cherché une troisième condition, si possible un "argument-massue" de sorte qu'il ne me reste plus que quelques triplets (a, r, n). Le voici!

On sait que

$$10^{k-1}a + 1 \leqslant x \leqslant 10^{k-1}(a+1) - 1.$$

Donc

$$10^{k-1}an + n \leqslant nx \leqslant 10^{k-1}(a+1)n - n.$$

D'autre part

$$10^{k-1}r + 1 \leqslant y \leqslant 10^{k-1}(r+1) - 1.$$

Pour que $y = nx$ (il s'agit d'une condition nécessaire), il faut que ces deux "intervalles" aient une intersection non vide, ce qui signifie que:

$$\begin{cases} 10^{k-1}an + n \leqslant 10^{k-1}(r+1) - 1 \\ 10^{k-1}r + 1 \leqslant 10^{k-1}(a+1)n - n \end{cases} \qquad (*)$$

a, r, n étant des chiffres, le système (*) est équivalent à (*') où

$$\begin{cases} an < r+1 \\ r < (a+1)n \end{cases} \qquad (*')$$

et on obtient finalement $r - n < an < r + 1$. Cette troisième condition, si elle n'est pas aussi immédiate que les 2 premières, n'en est pas moins efficace: à présent, $\{(a, r, n)\} = \{(1, 9, 9), (2, 8, 4)\}$ (là aussi, je vous laisse le soin de le vérifier).

C'est le moment de souffler ...

---

(2) Pour rappel, la formule $u \equiv v \pmod{p}$ signifie que la différence $u - v$ est divisible par p.

- Si $k=2$, on constate que $19.9 \neq 91$ et $28.4 \neq 82$

- Maintenant, $k \geqslant 3$ et on peut donc supposer $x = 10^{k-1}a + 10^{k-2}b + \cdots + r$ et $y = 10^{k-1}r + \cdots + 10 + a$.

$\boxed{\text{1er cas: } (a,r,n) = (1,9,9).}$

Comme $x = \frac{y}{9}$ et $9.10^{k-1} + 1 \leqslant y \leqslant 10^k - 1$, on a $10^{k-1} < x \leqslant \frac{10^k-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ chiffres } 1}$. Donc $b \leqslant 1$. Comme $a = 1$ et $a \neq b$, $b = 0$.

$\boxed{\text{2e cas: } (a,r,n) = (2,8,4).}$

On a $x = \frac{y}{4}$. Donc $b < 2,25$ c'est-à-dire $b \leqslant 2$. Or, $a = 2$ et $a \neq b$. Donc $b \neq 2$. De plus, si $b = 0$ alors $y \equiv 02 \pmod{100}$ n'est pas divisible par 4. Donc $b = 1$.

- Si $k = 3$, on voit que $109.9 \neq 901$ et $218.4 \neq 812$.

- A présent, on peut supposer $k \geqslant 4$, $x = 10^{k-1}a + 10^{k-2}b + \cdots + 10q + r$ et $y = 10^{k-1}r + 10^{k-2}q + \cdots + 10b + a$

$\boxed{\text{1er cas: } (a,b,r,n) = (1,0,9,9)}$

$y \equiv 01 \pmod{100}$ et $y \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow y \equiv 801 \pmod{900}$. Donc $x = \frac{y}{9} \equiv 89 \pmod{100}$ et $q = 8$.

$\boxed{\text{2e cas: } (a,b,r,n) = (2,1,8,4).}$

$y \equiv 12 \pmod{100}$. Donc $x = \frac{y}{4} \equiv 3 \pmod{25}$. Comme $x \equiv 8 \pmod{10}$, $x \equiv 28 \pmod{50}$. Or, $q \neq a$. Donc $x \equiv 78 \pmod{100}$ et $q = 7$.

- Si $k = 4$, on obtient les 2 premières solutions non triviales: $1089.9 = 9801$ et $2178.4 = 8712$

- Si $k \geqslant 5$, $x = 10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c + \cdots + 10q + r$ et $y = 10^{k-1}r + 10^{k-2}q + \cdots + 100c + 10b + a$.

$\boxed{\text{1er cas: } (a,b,q,r,n) = (1,0,8,9,9).}$

Il faut $c \leqslant 7$ car $q = 8$ et $r = 9$. Or, $c \leqslant 7 \Rightarrow x < 108.10^{k-3}$. Alors $y = 9x < 972.10^{k-3}$. Comme $r = 9$ et $q = 8$, $y \geqslant 98.10^{k-2}$ et on a donc une contradiction sur y qui montre l'impossibilité de construire des solutions de plus de 4 chiffres avec $a \neq 2$.

$\boxed{\text{2e cas: } (a, b, q, r, n) = (2, 1, 7, 8, 4).}$

Si $c \leqslant 6$, alors $x < 217.10^{k-3}$. Donc $y = 4x < 868.10^{k-3}$. Comme $r = 8$ et $q = 7$, $y \geqslant 87.10^{k-2}$. Donc $c \geqslant 7$. Comme $q = 7$ et $r = 8$, $c = 9$.

- Si $k = 5$, on obtient la solution $21978.4 = 87912$.
- Si $k \geqslant 6$, on peut supposer $x = 2.10^{k-1} + 10^{k-2} + 9.10^{k-3} + \cdots + 100p + 70 + 8$ et $y = 4x = 8.10^{k-1} + 7.10^{k-2} + p.10^{k-3} + \cdots + 900 + 10 + 2$. Si $p \leqslant 5$, $y < 876.10^{k-3}$. Alors $x = \frac{y}{4} < 219.10^{k-3}$. Donc $p \geqslant 6$. Comme $c = 9$, $r = 8$ et $q = 7$, on a $p = 6$. Mais alors $x \equiv 678 \pmod{100} \Rightarrow y = 4x \equiv 712 \pmod{1000}$, ce qui est absurde car $y \equiv 912 \pmod{1000}$. Il n'y a dès lors plus de solution.

Conclusion

L'ensemble des triplets cherchés est

$$\{(k, k, 1) | 1 \leqslant k \leqslant 9\} \cup \{(1089, 9801, 9), (2178, 8912, 4), (21978, 87912, 4)\}$$

mais je crois qu'au-delà de la réponse c'est la démarche de recherche (car au fond il doit exister d'autres façons de parvenir au même résultat (ne serait-ce qu'en substituant d'autres conditions à la condition $r - n < an < r + 1$)) qui permet la généralisation qui mérite que l'on s'y attarde, car c'est vrai qu'un ordinateur livre la réponse assez vite pour autant que l'on "*débroussaille*" un peu le problème.

Quatrième championnat international de France des jeux mathématiques et logiques

Dans les pages suivantes, nous reproduisons les questions des éliminatoires *collectives* de ce championnat, pour les catégories *Collège* (C_1 = 1ère année en Belgique, C_2 = 2ème et 3ème année) et *Lycée* (en Belgique: de la 4ème à la 6ème année), ainsi que les bulletins–réponse.

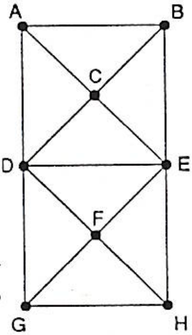
La demi-finale se déroulera à Mouscron le samedi 28 avril 1990 de 14h à 17h, la finale le 7 juillet à la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris.

Pour obtenir des renseignements complémentaires ainsi qu'un dossier de participation, envoie une enveloppe préadressée et affranchie (dimensions 11,5cm sur 23cm) à l'adresse suivante: F.F.J.M., PARENT André, BP 157, 7700 MOUSCRON.

ELIMINATOIRES COLLECTIVES DES CATEGORIES COLLEGES

1 CHEMIN DE FER A DEFAIRE COEF.1

La figure représente le réseau ferré de la ville de Stadt-City. Par souci d'économie, le maire décide d'abandonner l'entretien d'un certain nombre de voies.



Deux impératifs doivent être respectés
- Deux gares quelconques parmi les huit de la ville doivent toujours être reliées, quitte pour le voyageur à emprunter une correspondance.
- Le coût d'entretien, proportionnel à la longueur totale des voies, doit être minimisé.

■ **Repassez au feutre épais les voies restantes après exécution de la décision du maire.**

2 LE CHIFFRE DE NAISSANCE COEF.2

On appelle chiffre de naissance d'une personne, le chiffre obtenu en additionnant son jour et son mois de naissance puis en additionnant les 2 chiffres éventuels du nombre obtenu, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un seul chiffre, le chiffre de naissance.
- Exemple : le 27 décembre : $27 + 12 = 39$ puis $3 + 9 = 12$ et enfin $1 + 2 = 3$

■ **Au cours d'une année non bissextile quelconque, quels sont les 2 chiffres de naissance les plus fréquents?**

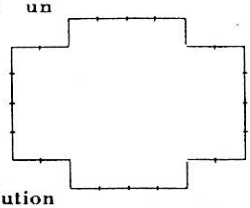
3 LE CARRE INCOMPLET COEF.3

■ **Remplissez ce tableau de sorte qu'il ne comporte que des entiers strictement positifs, et que pour chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, le nombre du milieu soit la moyenne des deux nombres qui l'encadrent. On indiquera le nombre de solutions possibles.**

	12	
		8

4 L'ARCHITECTE COEF 4

L'architecte Alain Térieur doit partager le lotissement ci-dessous en huit parcelles, superposables à un retournement près. Ces parcelles, d'un seul tenant, doivent être constituées de carreaux entiers.



■ **Donnez une solution sur la figure.**

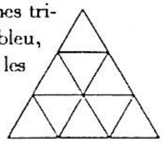
5 LE MATRICULE COEF.5

Dans ce pays totalitaire, tous les habitants ont un matricule composé de 5 chiffres.
Les policiers se reconnaissent au fait que le premier chiffre de leur matricule est strictement supérieur à la somme des 4 autres.

■ **Combien y a-t-il (au plus) de policiers ?**

6 TRIANGLE PATRIOTIQUE COEF.6

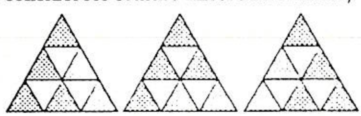
On veut colorier les petites zones triangulaires de cette figure, en bleu, blanc ou rouge, en respectant les règles suivantes :



- Une couleur par zone,
- Deux zones ayant un côté commun ne peuvent avoir la même couleur.
- Il doit y avoir 3 zones de chaque couleur.

■ **Combien de figures différentes peut-on obtenir ?**

ATTENTION : des figures obtenues en tournant ou retournant la figure initiale ne sont pas considérées comme différentes. Ainsi,



comptent pour une seule figure.

ELIMINATOIRES COLLECTIVES DE LA CATEGORIE LY

1 MON QUARTIER COEF.1

Mon quartier a la forme d'un rectangle. Il est découpé en 4 pâtés de maison, de forme également rectangulaires, par deux rues transversales, perpendiculaires, de telle sorte que :

- lorsque je fais le tour de chacun des 4 rectangles obtenus en réunissant deux pâtés de maison contigus, je parcours respectivement 600 m, 700 m, 800 m et 900 m.

■ **Quel est le périmètre de mon quartier?**

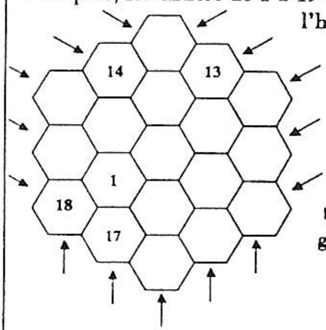
Précision : on ne tient pas compte de la largeur des rues.

Pâté	Pâté
Pâté	Pâté

2 L'HEXAGONE MAGIQUE COEF.2

L'hexagone présenté sur la figure est magique.

- Si on fait la somme de chacune des rangées appartenant aux 15 directions indiquées par les flèches, on trouve le même nombre.
- De plus, les entiers de 1 à 19 figurent dans l'hexagone. Par mégarde, des cases ont été effacées.

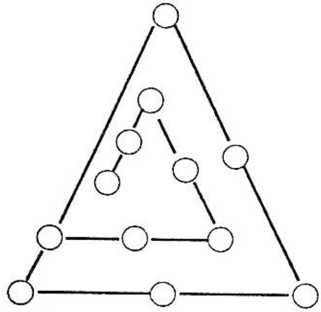


■ **Reconstituez l'hexagone.**

3 LA PLANETE KRYPTON COEF.3

Sur la planète Krypton, les habitants qui veulent devenir de Grands Initiés doivent accéder au centre du Grand Temple, dont le plan est donné ci-contre. Pour ce faire, il doivent, à chaque étape, donner un nombre entier strictement positif, de telle sorte que

- ces nombres soient tous différents
- la somme des carrés des nombres situés sur un même segment soit égale à 1990.



■ **Montrez, en complétant la figure ci-contre, que vous seriez digne de devenir un Grand Initié.**

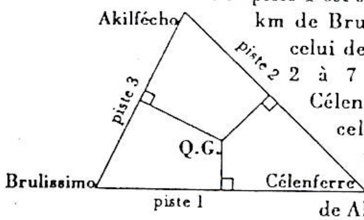
4 LE NUMÉRO MANQUANT COEF.4

Dans la longue avenue de cette ville, les maisons sont numérotées : 1, 2, 3, ... sans trou, de la première à la dernière, jusqu'au jour où un promoteur fait abattre l'une entre elles. La moyenne des numéros restants devient alors 995,8.

■ **Quel est le numéro de la maison abattue ?**

5 LE RAVITAILLEMENT COEF.5

Dans le désert des Tartares, trois pistes forment un triangle équilatéral. Sur chaque piste, le poste de ravitaillement est le point le plus proche du QG, situé à l'intérieur de ce triangle. Ainsi, le poste de ravitaillement de la piste 1 est située à 4 km de Brulissimo, celui de la piste 2 à 7 km de Célenferre, et celui de la piste 3 à 1 km de Akilfécho.



■ **Quelle est la somme des distances du QG aux 3 postes de ravitaillement ? (arrondir au mètre le plus proche)**

6 CARRE DE SIX COEF.6

L'écriture décimale d'un nombre est composé de 1990 fois le chiffre 6.

■ **Quelle est la somme des chiffres du carré de ce nombre ?**

4è Championnat International de France

NE RIEN ECRIRE DANS CETTE ZONE	

BULLETIN REPONSE COLLECTIF COLLEGES

à retourner* avant le 20 février1990 à : FFJM , 31 av des Gobelins 75013 Paris

CATEGORIE : Cochez impérativement ☐ C1 ☐ C2

Classe : .... Nombre d'élèves participant** : .... sur ....

Etablissement scolaire : Collège ....

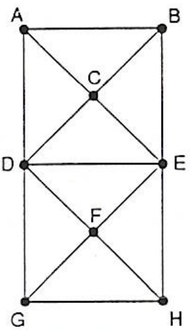
....

.... Code postal : ....Ville :..

Centre de demi-finale souhaité. Inscrivez le code du centre (3 caractères). Liste des centres en page 4 et sur minitel 3615 TOPJ ::premier choix : .... deuxième choix : ....

Nombre de représentants	Elèves élus pour représenter la classe : Nom et adresse des représentants, numéro FFJM éventuel
De 5 élèves à 50% de la classe : 1	--
Plus de 50% de la classe : 2	--

1



2

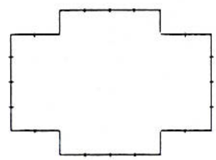
.... et ....

3

Nombre de solutions :........

	12	
		8

4



5

....

6

....

*Attention : s'il y a un organisateur de quarts de finale dans votre établissement, ce bulletin n'est pas à retourner à la FFJM.

**5 minimum, sinon répondez en utilisant les modalités de participation individuelle

4è Championnat International de France

NE RIEN ECRIRE
DANS CETTE ZONE

BULLETIN REPONSE COLLECTIF LYCEES

à retourner* avant le 20 février1990 à : FFJM , 31 av des Gobelins 75013 Paris

Classe : .... Nombre d'élèves participant : .... sur ....**

Etablissement scolaire : Lycée ....

..

.... Code postal : ....Ville :...

Centre de demi-finale souhaité. Inscrivez le code du centre (3 caractères). Liste consultable p 4, complément sur 3615 TOPJ(15/1/90) : premier choix ....deuxième choix : ....

Nombre de représentants	Elèves élus pour représenter la classe Nom et adresse des représentants, numéro FFJM éventuel
De 5 élèves à 50% de la classe : 1	--
Plus de 50% de la classe : 2	--

REPONSES

4

Nombre de solutions ....

Solution 1 ....

Solution 2 ....

5

Nombre de solutions ....

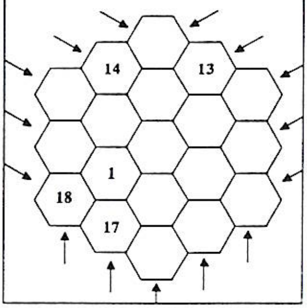
Solution 1 ....

Solution 2 ....

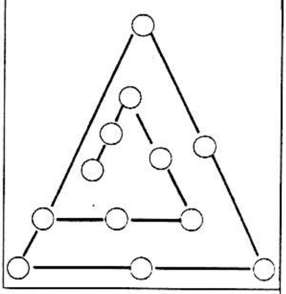
1

....
....

2



3



6

....
....

*Attention : s'il y a un organisateur de quarts de finale dans votre établissement, ce bulletin n'est pas à retourner à la FFJM. Adressez-vous à lui.

**5 minimum, sinon répondez en utilisant les modalités de participation individuelle

Un peu d'histoire: les paradoxes des indivisibles

M. Schneider

Calculer l'aire d'une surface délimitée par des courbes ou le volume d'un solide délimité par des surfaces courbes: c'est là un des grands thèmes qui ont nourri les mathématiques depuis l'Antiquité. Au IIIème siècle av. J.-C., Archimède y consacre plusieurs ouvrages dont "La Méthode". De nos jours, le calcul intégral fournit pour ces calculs un cadre théorique satisfaisant.

Mais avant d'aboutir à cette théorie, le calcul de telles aires et de tels volumes causa sans doute plus d'un cheveu blanc aux mathématiciens qui s'y frottèrent. Les difficultés rencontrées furent nombreuses au fil des siècles; l'ambiance des discussions évolua fortement au cours du temps. Nous voulons te montrer ici un instantané de cette évolution, à savoir les paradoxes soulevés au XVIIème siècle par le concept d'*indivisible*.

Qu'est ce qu'un indivisible? Disons, en première approximation et avant de préciser davantage, qu'un indivisible d'une surface est un segment ou un arc de courbe découpé dans cette surface et qu'un indivisible d'un solide est une surface éventuellement courbe découpée dans ce solide.

Quel est le rôle des indivisibles? Imaginons la situation favorable que voici : les deux surfaces de la Figure 1 sont décomposées chacune en une infinité de segments indivisibles; de plus on peut associer deux par deux leurs indivisibles respectifs de manière que chaque indivisible de la surface du dessus ait même longueur que l'indivisible qu'on lui fait correspondre juste au-dessous dans la seconde surface. Peut-on en conclure que les deux surfaces ont même aire? Oui et c'est ce qu'affirme CAVALIERI en énonçant un premier principe:

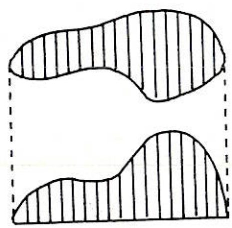


Figure 1

"Les figures planes, placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques, parallèles aux premières découpent des segments —(appelés *indivisibles*)— soit égaux, soit proportionnels sont soit égales soit proportionnelles".

Ainsi en comparant des longueurs de segments indivisibles on en arrive à comparer des aires de surfaces.

De même on peut imaginer que l'on puisse comparer des volumes de solides rien qu'en comparant les aires de leurs surfaces indivisibles. C'est le deuxième principe de CAVALIERI:

"Si deux solides sont compris entre des mêmes plans parallèles et si les sections —(appelées *indivisibles*)— déterminées dans l'un et l'autre parallèlement à ces plans sont soit égales, soit toujours dans un même rapport, alors les volumes de ces solides sont soit égaux, soit dans ce même rapport".

Une belle illustration de ce dernier principe est la procédure qu'utilisa Luca VALERIO, mathématicien du XVIIème siècle, pour déterminer le volume d'une sphère. Ce dernier suppose connus le volume du cylindre et celui du cône et s'inspire de la Figure 2 où sont emboîtés un hémisphère, un cylindre et un cône. Il compare deux solides: d'un côté le cône, de l'autre le solide en forme d'écuelle obtenu en ôtant l'hémisphère du cylindre. Il décompose le premier en disques —hachurés sur la Figure 3— et le second en couronnes circulaires, —hachurées elles aussi— et montre que chaque couronne a la même aire que le disque qui lui est coplanaire.

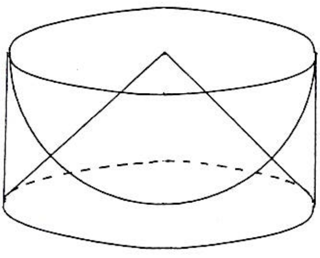


Figure 2

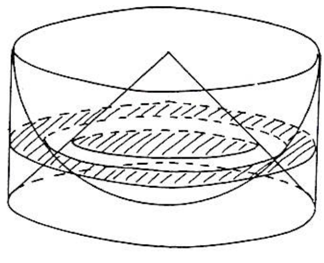


Figure 3

(Comment ? A toi d'essayer). VALERIO en conclut, conformément au principe de CAVALIERI, que le volume de l'écuelle vaut celui du cône. Le volume de l'hémisphère de rayon r s'obtient donc en retranchant celui du cône de celui du cylindre, ce qui donne pour le volume V d'une sphère entière:

$$V = 2(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

CAVALIERI ne justifie pas la validité de ses principes —auquel il octroye donc le statut d'axiome— sinon par l'une ou l'autre image telle que: *"Ainsi il est manifeste que nous devons concevoir les figures planes à la manière d'un tissu composé de fils parallèles"* ou encore: *"Quant aux solides, nous devons les concevoir à la manière de livres qui sont un agrégat de feuilles parallèles"*. Mais il est prudent. Pour lui le mode de découpage des grandeurs en indivisibles doit obéir à des règles strictes: les indivisibles de solides doivent être parallèles à un plan fixe, ceux de surfaces à une droite fixe (appelée "regula"). De plus les grandeurs seront placées côte à côte de sorte qu'elles puissent faire l'objet d'un découpage commun, c'est-à-dire que leurs indivisibles homologues soient déterminés par une même droite ou un même plan. Etant donné ces précautions, les indivisibles tels qu'ils sont conçus par CAVALIERI sont d'office "rectilignes": ce sont des segments ou des surfaces planes.

Qu'arrive-t-il dans le cas de découpages plus audacieux: soit que les surfaces (ou lignes) indivisibles ne soient pas parallèles à un même plan (ou une même droite), soit encore qu'elles soient courbes? Voici deux exemples qui conduisent le premier à un résultat correct, le second à un résultat erroné.

1. Comparons un disque de rayon r à un triangle dont la base vaut $2\pi r$ et dont la hauteur égale r (Figure 4). On peut considérer le disque comme un assemblage de cercles concentriques dont les rayons s'échelonnent de 0 à r. Le triangle serait, lui, composé des segments de droite obtenus en déroulant chacun de ces cercles. Dès lors, les deux surfaces sont composées de lignes de même longueur deux à deux. L'aire du disque vaut celle du triangle, c'est-à-dire:

$$2\pi r.\frac{r}{2} = \pi r^2$$

Figure 4

2. Considérons la surface d'un cône droit de rayon r comme l'assemblage des cercles qu'y découpent des plans parallèles à sa base (Figure 5).

Associons à chacun de ces cercles sa projection sur la base du cône (Figure 6). Les cercles ainsi projetés composent le disque de base. Par conséquent, la surface latérale du cône et la surface de sa base sont composés de cercles de même longueur deux à deux. Elles auraient donc même aire, soit πr^2, ce qui est faux!

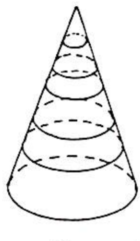


Figure 5

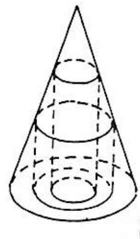


Figure 6

Comment réfuterais-tu le second raisonnement? Voici quelques réflexions proposées par des élèves d'humanités:

- "Il y a plus de points sur l'arête que sur le rayon et donc plus de cercles sur la surface latérale".

- "Ce raisonnement ne tient pas compte d'une certaine notion d'"épaisseur" des indivisibles circulaires".

- "L'espacement des cercles sur le cône est $\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}$ fois plus large que l'espacement sur la base... Chaque cercle sur le cône correspond donc à une surface $\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}$ fois plus grande que celle qui correspond au cercle de la base. La somme de ces surfaces sur le cône vaut donc $\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}$ fois celle des surfaces sur la base.

  La surface du cône vaut donc $\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}$ fois celle de la base, donc vaut $\frac{\pi r^2\sqrt{h^2+r^2}}{r} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$ (Figure 7)" (ce qui est le résultat correct).

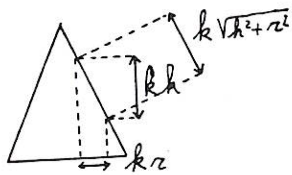


Figure 7

Mais est-ce bien sérieux d'évoquer un plus grand nombre de points là où il y en a une infinité, ou bien l'épaisseur de cercles, ou encore l'espacement entre deux cercles contigus? Il fut une époque en tout cas, le XVIIème siècle en l'occurrence, où l'on ne disposait pas d'autre regard sur des situations semblables, qui faisaient figure de paradoxes. C'est ainsi que, s'interrogeant sur l'usage abusif des indivisibles, TORRICELLI et CAVALIERI ont mis en évidence un certain nombre de paradoxes flagrants auxquels celui-ci peut conduire. En voici deux:

1. *"Dans le parallélogramme ABC (Figure 8), où le côté AB est plus grand que le côté BC, on trace le diamètre BD [le mot diamètre signifie ici diagonale] et à partir d'un point quelconque E de ce diamètre, on mène EF et EG parallèles à AB et BC; alors EF est plus grand que EG, et il en est de même pour toutes les parallèles de la même sorte, prises une à une; par conséquent toutes les EF prises ensemble dans le triangle ABD sont plus grandes que toutes les EG prises ensemble dans le triangle CDB, et le triangle ABD est plus grand que le triangle CDB; ce qui est faux. En effet, le diamètre découpe le parallélogramme par le milieu; par conséquent on raisonne faussement en procédant de cette manière".*

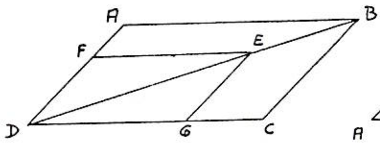


Figure 8

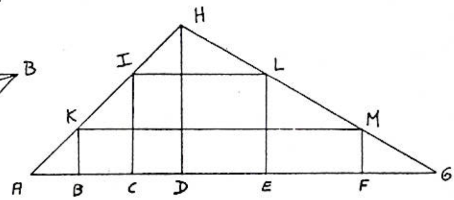


Figure 9

2. *"Voilà en quoi consiste la difficulté. Soit HD perpendiculaire à AG (Figure 9) et AD est plus petit, et DG plus grand que DH. On joint HG et HA, et HD sert de règle. Et parmi toutes les lignes du triangle HAD, on en prend autant que l'on veut comme KB et IC, et par K et I on tire KM et IL parallèles à AG, puis on trace LE et MF parallèles à HD. Il est donc manifeste que KB est égal à MF, et IC à LE; et par conséquent, aux lignes aussi nombreuses que l'on voudra prendre de cette manière dans le triangle HAD, ou encore (dira mon objecteur) à toutes les lignes du triangle HAD, nous trouverons que sont égales toutes les lignes du triangle HDG; aussi ces triangles sont-ils égaux; et pourtant ils sont inégaux. Donc, etc...".*

Voici, à quelques modifications de terminologie près, en quels termes TORRICELLI résout le paradoxe du parallélogramme partagé par sa diagonale en deux triangles inégaux:

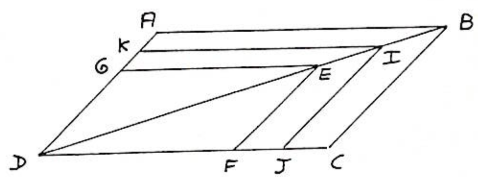


Figure 10

"Dans le parallélogramme précédent ABCD, si nous prenons sur la diagonale BD un point quelconque E, le trapèze EBCF sera égal au trapèze EBAG (Figure 10). Mais si nous divisons EB en son milieu, au point I, le trapèze divisé ou aminci IBCJ sera égal au

trapèze aminci IBAK; et si cette division est faite, ou supposée faite, une infinité de fois, nous en viendrons à avoir, au lieu des trapèzes, une ligne BC égale à la ligne BA. Je dis égale en aire, et non en longueur, parce que, bien qu'elles soient indivisibles toutes les deux, BC sera, par rapport à BA, d'autant plus large que cette dernière est plus longue".

Comme on le voit, TORRICELLI réduit le paradoxe en adoptant une conception de l'indivisible distincte de celle de CAVALIERI. Pour ce dernier, un indivisible de surface est un segment au sens géométrique du terme, c'est-à-dire, comme dirait Euclide, une "longueur sans largeur" (de même, un indivisible de volume est, à ses yeux, une surface). TORRICELLI n'hésite pas, lui, à attribuer deux dimensions aux indivisibles de surface tout comme aux surfaces elles-mêmes. Ces indivisibles sont, dans ses propos, considérés comme les vestiges des trapèzes : leur longueur est ce vers quoi tendent les deux bases de ces trapèzes lorsque ceux-ci s'amincissent; leur épaisseur est la trace de la hauteur de ces mêmes trapèzes. Tout comme les trapèzes dont ils sont les résidus, les indivisibles du triangle DBC seront plus épais que ceux du triangle ABD et ce, en raison inverse de leur longueur: ils sont ainsi égaux en "grandeur" (en aire) comme dit TORRICELLI. Et c'est ce qui explique, d'après lui, que les deux triangles aient même aire.

La position de CAVALIERI est différente et variable. Alors que TORRICELLI parlera d'un même nombre d'indivisibles d'une surface à l'autre dès que leurs indivisibles respectifs peuvent être mis en bijection, CAVALIERI distingue, dans ce cas, plusieurs ordres d'infinis, du moins dans certaines des explications du paradoxe qu'il propose.

Ainsi, utilisant une comparaison suggestive avec le tissage des étoffes, il souligne le fait qu'il y a une plus "grande infinité" de lignes MF dans le triangle HDG que de lignes KB dans le triangle HDA, DG étant supérieur à DA (Figure 11):

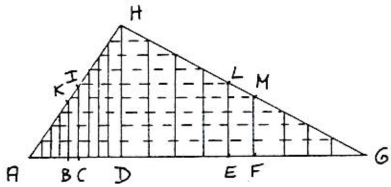


Figure 11

"Il me semble que cela peut se faire comprendre par une certaine analogie avec le tissu. Puisqu'en supposant que HAG est fait de tissu, AG est la règle de la chaîne et HD la règle de la trame, s'il y a dans le triangle HAD cent fils de trame, il y aura de même cent points marqués [segnati] sur HA, à partir desquels s'étendent cent fils de chaîne qui désigneront cent points sur HG, et cent parallèles à HD dans la trame du triangle HDG. Mais la trame de HDG porte beaucoup plus de fils, c'est-à-dire, s'il y en a trois cents, DG étant

triple de DA, on ne prend donc que cent de ces trois cents fils, et il en va de même dans les infinis, selon leur mode".

A d'autres moments, évoquant le même paradoxe, CAVALIERI insiste plutôt sur le fait qu'à nombre égal d'indivisibles, ceux du triangle HDG forment un réseau moins serré, moins dense du triangle HDA, cette différence de densité des indivisibles se mesurant à leur espacement relatif:

> *" [...] les lignes KB et IC n'ont pas entre elles une distance égale à celle qui sépare les deux lignes MF et LE qui leur correspondent [...]" (Figure 11).*

Or, pour pouvoir comparer deux surfaces, il importe de:

> *"prendre les agrégats de tous les indivisibles des figures à comparer selon une proportion uniforme, c'est-à-dire selon un degré d'épaisseur ou de condensation déterminé".*

Invoquant cette idée d'espacement relatif entre indivisibles, là où TORRICELLI aurait parlé d'indivisibles plus ou moins épais, CAVALIERI peut ainsi expliquer le paradoxe des deux triangles en maintenant tout à la fois l'intuition d'un même nombre d'indivisibles d'un triangle à l'autre et sa conception de l'indivisible de surface comme segment.

Par ailleurs, on pressent évidemment toute l'ambiguïté qu'il y a à parler d'un "même nombre d'indivisibles" entre deux grandeurs lorsque ce nombre est infini. Cette ambiguïté est particulièrement patente lorsqu'on compare, au lieu d'aires et de volumes, des longueurs d'arcs de courbe. Si l'on considère que les indivisibles d'arcs de courbe sont des points, on peut penser qu'un arc sera d'autant plus long qu'il est composé de plus de points. Or, il est facile de trouver des arcs de courbe d'inégale longueur entre les points desquels on peut établir une correspondance bi-univoque. C'est le cas de deux circonférences concentriques de longueur différente: il suffit d'associer les points appartenant à un même rayon. On peut donc difficilement conclure quoi que ce soit sur les longueurs d'arcs de courbe entre les points desquels on peut établir une bijection.

Que des considérations sur le fini ne s'étendent pas sans problèmes à l'infini se manifeste également lorsqu'on parle, non de grandeurs et de parties d'une grandeur mais d'ensembles et d'éléments d'un ensemble. Comme pour les ensembles finis, on est tenté de dire que deux ensembles infinis ont le même nombre d'éléments dès qu'il y a moyen d'établir une bijection entre ceux-ci. D'un autre côté, on pense volontiers qu'un ensemble A —même infini— strictement inclus dans un ensemble B, a moins d'éléments que ce dernier. Or, il arrive que l'on puisse établir une bijection entre deux ensembles infinis dont l'un est strictement inclus dans l'autre. Ainsi, la relation qui, à un nombre naturel n, fait correspondre le nombre naturel $2n$ constitue une correspondance bi-univoque entre l'ensemble des naturels et l'ensemble des nombres pairs ... et cependant il existe des nombres naturels qui ne sont pas pairs! Une mise au clair de ces questions viendra de ce que, au XIXème siècle, CANTOR et DEDEKIND caractériseront un ensemble infini précisément par le fait qu'il peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propres.

Une grande prudence s'impose donc lorsqu'on veut comparer des mesures de grandeurs par le biais de leurs indivisibles respectifs. On a vu que les longueurs échappent à ce type de comparaison. Quant aux aires et volumes, il y a plusieurs manières —dont celle préconisée par CAVALIERI— de mettre leurs indivisibles respectifs en correspondance; toutes ne sont pas probantes ... L'égalité d'espacement des indivisibles, celle de leur épaisseur ou de leur nombre sont des notions intuitives mais néanmoins des critères utiles pour juger de la valeur de tels découpages en indivisibles. Si les principes de CAVALIERI sont corrects, c'est que la mise en correspondance s'y fait selon une projection parallèle qui conserve cet espacement d'indivisibles.

Le calcul intégral, déjà évoqué plus haut fournit désormais un éclaircissement théorique à ce paradoxe. Tu apprendras cette théorie en dernière année d'humanités.

Bibliographie

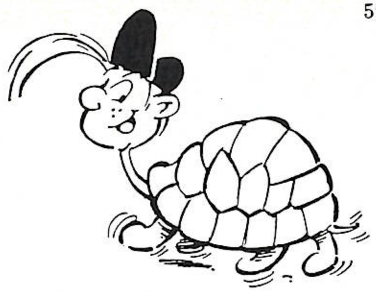
[1] ARCHIMEDE,*tomes II et III*, trad. Ch. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

[2] C. BOYER,*The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, New York, 1949.

[3] B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae Sex*, Bonomiae Typis Iacobi Montij, 1647.

[4] B. CAVALIERI, *Geometria degli indivisibili*, Tipografia Torinese S.p.A., Torino, 1966.

[5] F. DE GANDT, Les indivisibles de Torricelli, *Cahier n ° 17, Torricelli–II, du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences*, Université de Nice, sans date, aux environs de 1983.



Le coin de la tortue

Le napperon publié dans le numéro 45 de *Math-Jeunes* n'a pas inspiré grand monde. Le LOGO est-il si peu connu? Piloter une tortue n'est pourtant pas très difficile: il suffit de lui dire de combien elle doit avancer (AV), reculer (RE) ou tourner (GA et DR). Epinglons quand même la solution qui nous est envoyée par Philippe TAMIGNIAUX (14 ans) de La Louvière. Voici son programme:

```
POUR EXEC
JE
FIN

POUR JE
TE DA GA 60 LO
FIN

POUR TE
REPETE 6 [ES DR 10]
REPETE 30 [AV 100 RE 100 DR 10]
FIN

POUR ES
AV 100 GA 60 REPETE 6 [GA 60 AV
100] DR 60 RE 100
FIN

POUR DA
REPETE 6 [DR 10 FE]
FIN

POUR FE
AV 66 GA 60 REPETE 6 [GA 60 AV
66] DR 60 RE 66
FIN

POUR LO
REPETE 6 [DR 10 GE]
FIN

POUR GE
AV 33 GA 60 REPETE 6 [GA 60 AV
33] DR 60 RE 33
FIN
```

La première chose qui nous frappe dans ce programme est qu'il est constitué de routines courtes, faciles à mettre au point et ayant chacune pour objet de réaliser un élément du dessin. C'est là une bonne méthode de programmation. Autre qualité: le dessin est bien le napperon attendu. Analysons-le d'un peu plus près le programme. Pour l'exécuter, nous dit Philippe, on frappe EXEC. Comme cette routine se contente d'en exécuter une autre (JE), on pourrait frapper directement JE. Voyons donc ce que fait JE:

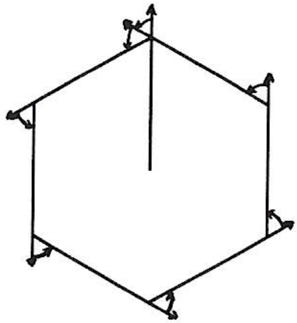
TE DA GA 60 LO

Il faut donc d'abord savoir ce que fait la routine TE. Elle commence par

REPETE 6[ES DR 10]

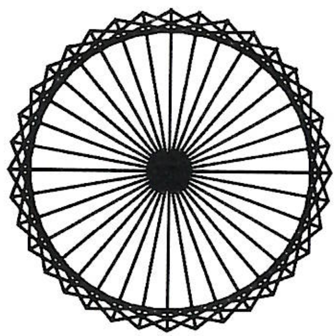
Comme ES est tout à fait explicite (ES: AV 100 GA 60 REPETE 6 [GA 60 AV 100] DR 60 RE 100), nous allons pouvoir réellement démarrer.

- La tortue AVance de 100, puis tourne à GAuche de 60 °,
- elle exécute 6 fois l'opération "tourner à GAuche de 60 ° et AVancer de 100",
- elle tourne à DRoite de 60 ° et REcule de 100.



Ainsi ES a pour effet de dessiner un hexagone régulier de côté 100, agrémenté d'un rayon du cercle circonscrit. Après avoir exécuté ES, la tortue est revenue à son point de départ, avec l'orientation de départ.

Ayant compris l'effet de ES, nous voyons maintenant que la routine TE dessine un niveau complet du napperon: ES est exécuté à 6 reprises, avec chaque fois un décalage de 10 ° vers la droite, ensuite la tortue effectue 30 fois un petit pas de danse: AV 100 RE 100 DR 10. Elle dessine ainsi les 30 rayons qui manquaient encore. A l'issue de TE, la tortue est revenue à son point de départ, elle a tourné de 60 ° vers la droite et le dessin est le suivant:



A partir de là, tout devient simple. Après avoir exécuté TE, la routine JE exécute DA GA 60 LO. Mais les routines DA et LO sont analogues à la première ligne de TE:

```
DA: REPETE 6 [DR 10 FE] ...
LO: REPETE 6 [DR 10 GE] ...
TE: REPETE 6 [DR 10 ES] ...
```

De plus FE et GE ne diffèrent de la première ligne de ES que par le remplacement de la longueur 100 du côté de l'hexagone par 66 ou 33. DA dessine donc le niveau intermédiaire du napperon, alors que LO en dessine le niveau intérieur. Et le napperon est complet.

Il est rare qu'un programme informatique ne puisse être amélioré. Celui-ci comporte des répétitions: les routines **ES**, **FE** et **GE** ne diffèrent que par la valeur d'un paramètre: 100 ou 66 ou 33. Dans une telle circonstance, il s'impose d'utiliser une **variable**: rangeons la longueur du côté de l'hexagone dans une variable "L. ("L est le nom de la variable, sa valeur est notée :L.)

Les routines **ES**, **GE** et **FE** seront alors remplacées par une seule, que nous appellerons **HEXA**. (Il vaut mieux donner aux routines des noms qui évoquent ce qu'elles font.) De même, **TE**, **DA** et **LO** sont remplacées par une seule routine **HEXA6** qui effectue 6 fois **HEXA**:

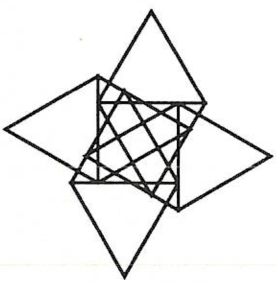
```
POUR HEXA :L
AV :L GA 60 REPETE 6 [GA 60 AV :L]
DR 60 RE :L
FIN
```

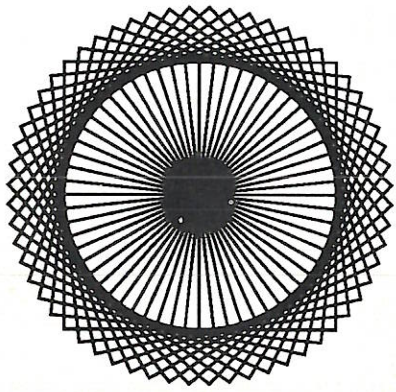
```
POUR HEXA6 :L
REPETE 6[DR 10 HEXA :L]
FIN
```

Pour exécuter la routine **HEXA** en donnant à "L la valeur 100, on écrit simplement **HEXA 100**. En utilisant une variable "L, le programme devient ainsi beaucoup plus court, plus lisible aussi: outre les routines **HEXA** et **HEXA6**, il ne comporte plus que le programme principal:

```
POUR NAPPERON
HEXA6 100 (Dessin du niveau extérieur)
REPETE 30[AV 100 RE 100 DR 10] (Dessin des rayons)
HEXA6 66 (Dessin du niveau intermédiaire)
HEXA6 33 (Dessin du niveau intérieur)
FIN
```

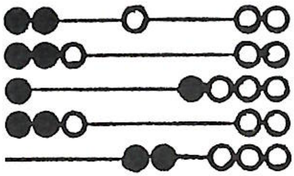
Philippe TAMIGNIAUX nous propose à son tour des dessins à réaliser. Les voici:





Envoyez vos projets à l'adresse de la rédaction.

OMB OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE



P. Van Elsuwe

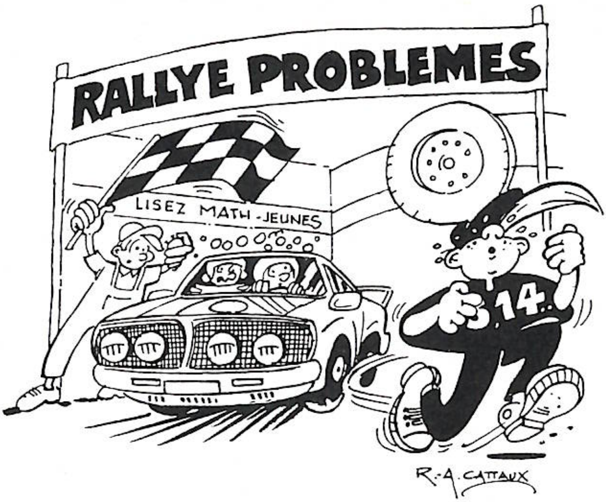
Le 24 janvier s'est déroulée l'éliminatoire de la quinzième Olympiade Mathématique Belge. Nous pouvons déjà affirmer que cette olympiade a connu un franc succès. Il est encore trop tôt, au moment où j'écris ces lignes, pour connaître le nombre exact de participants et pour faire quelques commentaires sur les résultats. De plus amples renseignements te parviendront dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

En supplément de ton *Math-Jeunes* tu as reçu les questionnaires des éliminatoires "Maxi" et "Mini" 1990. Essaie de résoudre les questions pour lesquelles tu n'as pas trouvé de solution le jour des olympiades. Tu pourras contrôler tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous.

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mini	A	C	E	E	10	C	C	E	C	A
Maxi	C	D	52	A	144	B	B	20	D	E
Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Mini	E	D	D	E	A	B	A	600	D	D
Maxi	D	52	D	C	C	E	A	A	B	D
Questions	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Mini	C	C	E	C	168	C	D	52	A	C
Maxi	C	E	C	D	E	C	E	D	E	E

Rappel des dates importantes:

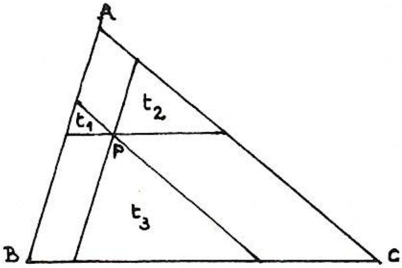
- **Mercredi 7 mars 1990** de 14h à 15h30: demi-finale dans les dix centres régionaux.
- **Mercredi 18 avril 1990** de 13h30 à 17h30: finale à Namur aux Facultés Notre-Dame de la Paix.
- **Samedi 5 mai 1990:** proclamation des résultats à Namur.

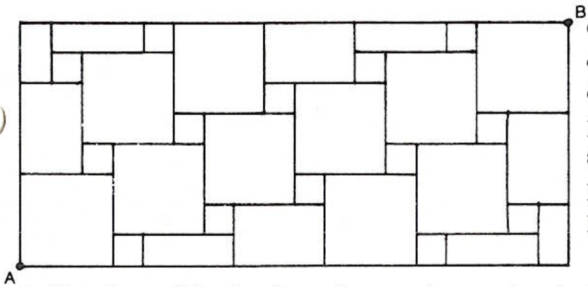


C. Festraets

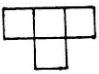
Les solutions de ces problèmes doivent parvenir à Claudine Festraets, 36 Rue Vandercammen, 1160 Bruxelles avant le 25 mars 1990.

1. On choisit un point P à l'intérieur du triangle ABC de telle façon que si on trace par P des parallèles aux côtés du triangle ABC, les petits triangles t_1, t_2, t_3 (voir figure) ont comme aire respectivement 4, 9 et 49. Trouver l'aire du triangle ABC.





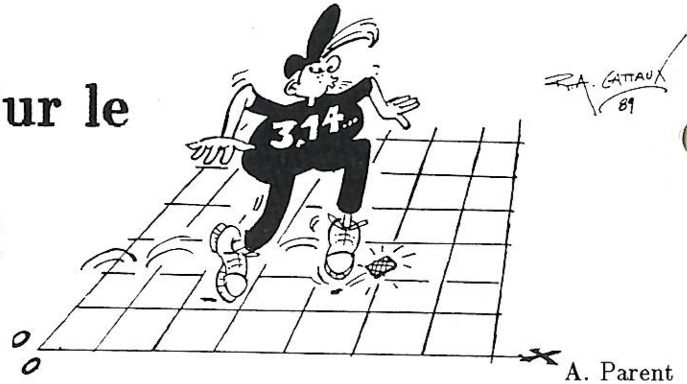
Quel est le nombre de chemins qui permettent d'aller de A en B, en se déplaçant soit vers le haut, soit vers la droite (on ne peut jamais revenir sur ses pas)?

3. Est-il possible de placer les nombres naturels de 1 à 64 dans les 64 cases d'un échiquier 8 x 8 de telle sorte que la somme des nombres figurant dans toute partie de l'échiquier ayant la forme que voici  (et n'importe quelle orientation) soit un multiple de 5?

4. Déterminer tous les triangles de côtés de longueur a, b, c et d'aire S tels que a, b, c, S soient entiers et en progression arithmétique (c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier x tel que $a + x = b, b + x = c$ et $c + x = S$.

5. Une collection de n^2 jetons est composée de n jetons marqués “1”, de n jetons marqués “2”,... et de n jetons marqués “n”. Est-il possible de disposer ces jetons en ligne droite de manière qu'entre un jeton marqué “x” et le jeton le plus proche marqué “x” il y ait exactement x jetons (dont les marques sont forcément distinctes de “x”), et ce, pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

Sur le Grill !



A. Parent

Les neuf cases de la grille 3x3 ci-dessous comportent les neuf premiers entiers naturels $1, 2, \ldots 9$. Les six produits de 3 facteurs des 3 lignes et des 3 colonnes sont indiqués. Pourrais-tu replacer les neuf nombres dans la grille?

			→ 32
			→ 70
			→ 162
↓	↓	↓	
42	144	60	

Tu as trouvé la solution, bravo; crois-tu qu'elle soit la seule possible? Invente des grilles pour tes copains; est-il possible que parmi les réponses certaines soient différentes pour un même énoncé? Si c'est le cas, essaie de découvrir pourquoi et recherche tous les types de grilles qui ne donneront pas de réponse unique.

Est-il possible que les produits de 2 lignes (ou 2 colonnes) soient égaux? Fais l'inventaire de tels produits. Et si on prend une ligne et une colonne, le dénombrement est-il le même?