MATH - JEUNES

11ème année
N° 47
Février 1990
Avril 1990

Bureau de dépôt: Mouscron 1

Périodique trimestriel édité par la SBPMef

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7460 CASTEAU.

Abonnements:

- Belgique:
  — Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
  — Isolés: 120 FB
- Etranger :
  — Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
  — Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

- Années complètes: 84-85, 87-88, 88-89
- Numéros isolés: 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34

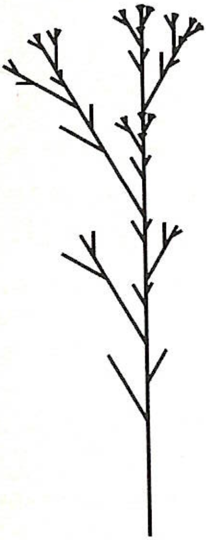
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6239 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6239 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable: G.Noël, 14bis rue des Fontaines, 7460 CASTEAU

N° 47 Onzième année 1990

MATH-JEUNES



Sommaire

S.B.P.M.

Math-Jeunes n° 47, 66–71, 1990

Il aunait, tu pèseras, nous mètrons

A.-M. Motais de Narbonne

Observatoire de Paris

Le système métrique décimal est révolutionnaire parce qu'il est né de la Révolution française mais aussi parce que son emploi généralisé a nécessité une transformation complète des mentalités. Ainsi l'histoire du système métrique décimal est exemplaire des filiations profondes et souvent mal connues entre la réflexion théorique des savants et les pratiques courantes de la vie quotidienne.

De la Toise du Chatelet à la Toise de l'Académie

L'origine de la Toise du Chatelet se perd dans la nuit des temps, c'est en effet une mesure de longueur des plus anciennes. En revanche, ses différents avatars depuis les premiers travaux de l'Académie des Sciences jusqu'à l'invention du mètre sont bien connus et marquent les avancées de la pensée savante en matière de mesure. La Toise du Chatelet tient son nom de l'emplacement public (Le Chatelet) où était fixé cet étalon officiel de la Ville de Paris, à la disposition de toute personne souhaitant l'utiliser, tant pour faire des mesures directes que pour en étalonner des copies. La Toise de Paris étant aussi la Toise du Roy, il était donc naturel que la première mesure précise du rayon terrestre ([1]) (Abbé Picard, 1669-1670) soit en premier rapportée à cette toise, puis en "pas de Boulogne" ou encore en "verges du Rhein ..." Malgré la mort de Picard, le travail fut poursuivi et les académiciens (La Hire, Cassini I et Cassini II) rattachèrent Dunkerque à Perpignan par une suite de triangles établis de part et d'autre de la *base de* Picard, faisant ainsi la première mesure de méridienne, achevée en 1718. Ces mesures semblaient montrer que la Terre était allongée aux pôles alors que les travaux de Newton (Principia ..., 1687) avaient apporté

([1]) La terre était alors supposée sphérique.

la démonstration théorique que la Terre était au contraire aplatie, plus pamplemousse qu'ananas. L'honneur national rejoignant l'honneur scientifique, l'Académie des Sciences lance deux expéditions conjointes chargées de mesurer le rayon terrestre, l'une au cercle polaire, l'autre à l'équateur. La comparaison des mesures (1737) tranche le débat: la Terre est aplatie. Certes, ce résultat valide expérimentalement la loi de NEWTON, cependant, reste à connaître pourquoi les mesures faites entre Dunkerque et Barcelone indiquaient le contraire. Décision est alors prise de les recommencer: la nouvelle mesure de la base (seule distance mesurée linéairement sur le terrain) fait alors apparaître un écart entre la longueur en toise du Chatelet mesurée par PICARD, et cette récente mesure rapportée elle aussi à la Toise du Chatelet toujours en place. La confiance dans la rigueur des travaux de PICARD pousse les académiciens à chercher, pour cet écart, d'autres causes qu'une erreur. Ils découvrent alors que la Toise du Chatelet, entre deux opérations, avait été successivement tordue par l'affaissement du mur sur lequel elle était fixée puis redressée à coups de marteau. Ainsi, les académiciens croyant travailler avec la même unité, (la Toise du Chatelet), avaient, de fait, rapporté leurs mesures à deux grandeurs différentes, les deux grandeurs successives d'un même étalon matériel.

Ces péripéties métrologiques auront plusieurs conséquences:

1. Les savants approfondissent leur réflexion sur l'unité de longueur et poursuivent leur recherche sur une unité de longueur dont la définition soit

   - indépendante de sa représentation matérielle et
   - issue de la nature de telle sorte que, si l'étalon matériel est perdu ou détérioré, sa grandeur puisse en être retrouvée.

   Ainsi, ils continuent leurs travaux antérieurs sur la longueur d'un "pendule battant la seconde" (dont la période est une seconde) et intensifient les mesures d'un tel pendule sur tous les points du globe (2) où ils continuent de se rendre.

2. Dorénavant, les mesures scientifiques de longueur seront rapportées, non plus à la Toise du Chatelet, mais à la Toise du Pérou. Parmi les instruments des expéditions de l'Académie du cercle polaire et à l'équateur, se trouvaient en effet deux toises, copies de la toise du Chatelet, et intitulées selon leur destination Toise du Nord et Toise du

(2) T étant fixée (1 s.), la longueur n'est fonction que de la pesanteur, variable selon la latitude.

Pérou. Ces toises avaient été utilisées et rapportées en France avec les soins requis pour les instruments de précision. La Toise du Pérou (3) se trouvait donc être une "Toise du Chatelet" qui aurait conservé sa grandeur. Elle devint alors l'unité scientifique de longueur sous les intitulés: Toise du Pérou dite de l'Académie ou Toise de l'Académie.

3. La toise du Pérou sera aussi l'instrument de l'une des nombreuses et infructueuses tentatives royales, pour changer les systèmes de mesure du royaume et les uniformiser. Par décision royale, la Toise du Pérou sera reproduite en de nombreux exemplaires et une copie sera adressée dans ce but à chaque Régionalité, mais cet objectif ne sera pas atteint.

Les mesures usuelles

L'Académie des Sciences ne fut donc pas prise de court lorsque, au tout début de la Révolution Française, l'Assemblée Nationale et le roi lui ordonnèrent d'étudier une réforme des unités de mesure du royaume. Cette demande qui, nous l'avons vu, rencontrait parfaitement les besoins scientifiques avait pour objectif politique de satisfaire le voeu général et répété dans les cahiers de doléance *"qu'il n'y eut qu'une mesure pour tout le royaume et que les grains de toutes espèces se mesurassent dans la même mesure"*, vœu souvent repris sous la forme "un Roy, une loi, une mesure". C'est qu'en effet, les déboires des Académiciens avec la toise du Chatelet étaient peu de chose en regard des difficultés causées par la complexité des pratiques métrologiques courantes.

La *diversité géographique* des mesures est la plus connue et chacun sait qu'entre deux villages voisins les toises ou les boisseaux pouvaient être de grandeurs différentes. La *destination des mesures* est une autre caractéristique fondamentale des anciens systèmes. Ainsi les mesures à blé étaient-elles différentes des mesures à seigle et l'aune à drap différente de l'aune à soie. Les *subdivisions des unités* étaient, elles aussi, très diverses: la toise était subdivisée en 6 pieds de 12 pouces chacun tandis que la canne comptait 4 pans. Ces mesures n'avaient *aucune définition théorique*, chacune avait pour grandeur celle de l'étalon matériel correspondant.

L'art du mesurage

Un autre facteur de complexité était l'existence de pratiques métrologiques différentes selon les types d'activité. Ainsi, par exemple, les grands marchands s'étaient donné des mesures internationales, l'aune du Brabant ou l'aune de Provins, par exemple, pour leurs transactions de gros sur les

(3) Elle fait maintenant partie des collections de l'Observatoire de Paris comme son homologue, la toise du Nord.

tissus, les maçons ou les charpentiers avaient aussi leurs propres instruments et méthodes connus des seuls spécialistes. Mais pour la majorité de la population, la pratique courante était davantage des comptées de quantités approximatives selon le conditionnement habituel: le beurre à la motte, le drap à la pièce, la farine au sac ou la charretée de foin.

Les mesures les plus utilisées étaient surtout celles de longueur et plus encore celles de capacité, d'un usage délicat. En effet, pour les matières sèches, les grains par exemple, la quantité exacte du produit dépend alors dans des proportions notables de la façon dont il est tassé, notamment par la hauteur à laquelle il est versé, mais aussi de l'importance du comble, c'est-à-dire ce qui dépasse de la mesure. Plus que le volume de la mesure utilisée ce sont donc ses proportions qui importent puisqu'à une mesure plus large et moins haute peut correspondre un comble plus important. Pour tous les actes officiels, le paiement des impôts notamment, ces sortes de différences étaient prises en compte dans les *coutumes*, écrites ou orales qui réglementaient ces actes et codifiaient localement les messages officiels. Mais lors des transactions privées, le coup d'oeil, le jugement, l'estime, tenaient lieu le plus souvent d'instruments et l'accord était conclu après marchandage où intervenaient la qualité du produit, le prix, l'importance du lot, le besoin qu'on avait de vendre ou d'acheter autant que son *exacte quantité*.

Le système métrique décimal

Le nouveau système métrique décimal, quant-à-lui, est caractéristique des idées philosophiques de son temps: la science est son fondement, sa conception scientifique et rigoureuse s'opposera à l'arbitraire, il sera un outil de progrès, il est à la fois national et universel, il est organisé en un édifice cohérent et complet qui forme un véritable système. C'est la Révolution qui permit cette rupture avec la situation anarchique et complexe de la métrologie ancienne mais tous les gouvernements qui se succédèrent appuyèrent la réforme. Aussi, n'est-ce pas faute d'une volonté politique que le mètre ne put s'imposer avant 1840. Son emploi nécessitera une autre révolution, celle des habitudes et même des mentalités tant sont profondes les différences entre les anciennes pratiques et celles exigées par le nouveau système.

1. A la diversité géographique et à la variété des unités différentes suivant qu'elles sont destinées à un produit ou à un autre s'oppose un système construit sur la base de 2 unités fondamentales (le mètre et le kilogramme) à partir desquelles sont déduites toutes les autres. La mesure ne sera plus révélatrice de l'objet mesuré comme avant: par

exemple, la toise pour la taille d'un homme, l'aune pour une pièce de drap ou la lieue pour la distance entre deux localités; mais il faudra apprendre à abstraire de ces trois situations (ou contextes) une caractéristique géométrique commune, ici la longueur mesurée dans les trois cas par rapport au même système d'unités.

2. Les divisions par 2, 3 ou 4 qui étaient celles des unités d'autrefois et dont la combinaison avait généralisé l'usage des douzièmes étaient très fonctionnelles car très visuelles. Le principe décimal et ses 10ème de 10ème opposait un avantage abstrait, celui des facilités de calcu par le déplacement de la virgule. Mais la situation fut longtemps la suivante *"Tout tailleur inculte sait ce qu'est la moitié d'un quart de coudée, tandis que même un cultivateur cultivé ignore que la moitié d'un quart vaut cent vingt cinq millième"*.

3. La nomenclature méthodique qui réflète la conception hiérarchisée du nouveau système fut un autre obstacle: mètre carré, mètre cube, are, hectare, litre, décilitre, kilogramme et gramme dans un pays de tradition orale, où la prononciation de la langue est loin d'être fixée ("roué" ou "roua" pour Roi n'en sont qu'un faible exemple) apparaissent longtemps comme un salmigondis inutilisable.

4. Dans la logique des nouveaux principes, les techniques de mesurage devaient conjointement être changées en faveur notamment des pesées plus exactes que le mesurage au volume avec les aléas du remplissage. De plus, cette recherche de l'exactitude des quantités s'opposait à des pratiques commerciales les plus établies qui consistaient à acheter et à vendre au même prix, le bénéfice étant trouvé sur la différence de quantité. Les céréales, par exemple, pouvaient ainsi être achetées mesure comble et vendues mesure rase ... au même prix. Ce principe permettait aussi de prêter sans intérêt, on empruntait ras et on rendait comble. Ailleurs, la "bonne mesure" était utilisée les années de grosse production, la "petite mesure" les années de pénurie. Le nouveau système unifié introduira une mesure unique, référence obligatoire pour tous, grossiste/détaillant, producteur/acheteur, créancier/débiteur. La précision, la rigueur scientifique qui lui sont associées nécessiteront la révision de l'ensemble des règles, des usages, voire des interdits.

Ainsi il apparaît que, si les mesures administratives furent indispensables au succès de l'entreprise, néanmoins, les progrès de l'instruction publique, dans la seconde moitié du 19ème siècle furent déterminants pour l'usage courant du système métrique décimal.

Conclusion

On connaît le succès international de ce système révolutionnaire français, inauguré en 1875 par le traité diplomatique "La Convention du mètre" et par la création du "Bureau international des Poids et Mesures", poursuivi avec l'établissement de systèmes plus généraux tels que les systèmes CGS ([4]) ou MKS ([5]) aboutissant enfin en 1960 au "Système international d'unités" ou SI. Ce sont là des victoires de la conception scientifique initiale, issue de la pensée quantitative et abstraite. L'indépendance des mesures par rapport à leur objet, l'organisation des unités dans un édifice complet et garanti, les facilités de calculs, autant d'obstacles initiaux devenus les raisons même de la pérennité.

La dernière définition du mètre remonte à 1983: *le mètre est le trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.* Elle est tout aussi éloignée de nos préoccupations quotidiennes que la longueur du méridien l'était de celles des gens de 1789, mais cela ne nous étonne plus: si la barrière entre la science et la vie quotidienne est ainsi rompue, c'est que, grâce à la métrologie scientifique, les progrès pratiques sont aujourd'hui intimement liés aux recherches théoriques. Pionniers de cette mutation, ayant dominé leur époque, en créant délibérément un outil qui dépassait les besoins de leur temps, ces savants du 18ème siècle ont travaillé pour nous et pour les générations futures; sans que nous en ayons conscience, leur oeuvre est présente dans tout ce qui nous entoure.

([4]) Centimètre, Gramme, Seconde.
([5]) Mètre, Kilogramme, Seconde.

Math-Jeunes n ° 47, 72–76, 1990

Le théorème de Pythagore

Y. Noël

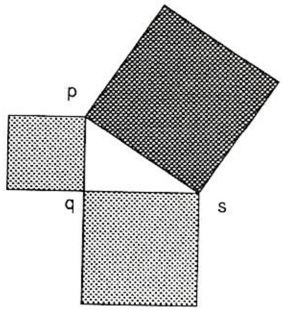
ISEPE Mons–Tournai

1. Le théorème.

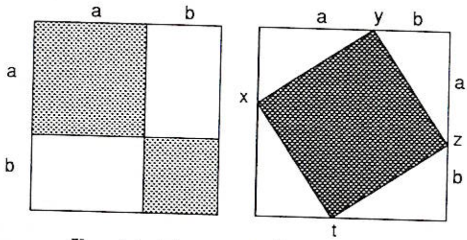
Peut-être le connais-tu?

L'aire du carré sombre vaut la somme des aires des carrés clairs.

Dans tout triangle pqs rectangle en q: $$\lvert ps\rvert^2 = \lvert pq\rvert^2 + \lvert qs\rvert^2$$



Peut-être as-tu démontré ce théorème en utilisant deux découpages d'un même carré. Voici des dessins destinés soit à te rafraîchir la mémoire, soit à t'aider à comprendre pourquoi cette propriété est vraie.



Le quadrilatère $xyzt$ est un carré. De plus, les zones blanches dans les deux grands carrés couvrent les mêmes surfaces ...le "reste" est donc "le même".

Il est intéressant de savoir que l'on peut aussi "retourner" ce théorème. Ceci signifie que si on sait que

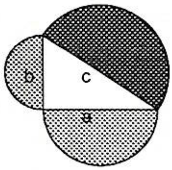
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

on peut en déduire que le triangle est rectangle avec le côté de longueur c comme hypoténuse.

Ainsi, par exemple, si tu dessines un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 5cm, il est *automatiquement* rectangle.

2. Quelques variantes.

2.1. Demi-cercles.



L'aire du "petit" demi-cercle vaut $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$.

L'aire du demi-cercle "moyen" vaut $\frac{\pi b^2}{8}$.

L'aire du "grand" demi-cercle vaut $\frac{\pi c^2}{8}$.

Sachant que le triangle donné est rectangle, le théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que $c^2 = a^2 + b^2$. Et par multiplication de l'égalité par $\frac{\pi}{8}$, nous obtenons

$$\frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{8}.$$

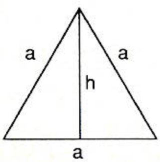
Nous venons de démontrer que

> *Dans tout triangle rectangle, l'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse vaut la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l'angle droit.*

2.2. Triangles équilatéraux.

Dessine un triangle rectangle. En utilisant chaque fois un côté du triangle rectangle, construis trois triangles équilatéraux. Evalue ensuite les aires de ces trois triangles équilatéraux.

Voici une petite aide :



Dans un triangle équilatéral de 3cm de côté, on a $3^2 = h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$, donc $h^2 = \frac{27}{4}$, donc $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dans un triangle équilatéral de a cm de côté, on a $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, donc $h^2 = \frac{3a^2}{4}$, donc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Si ces calculs utilisant des radicaux te paraissent trop compliqués, passe directement au point 2.3 en considérant le théorème ci-dessous comme acquis. Sinon, termine la démonstration de ce que

Dans tout triangle rectangle, l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse vaut la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur les deux côtés de l'angle droit.

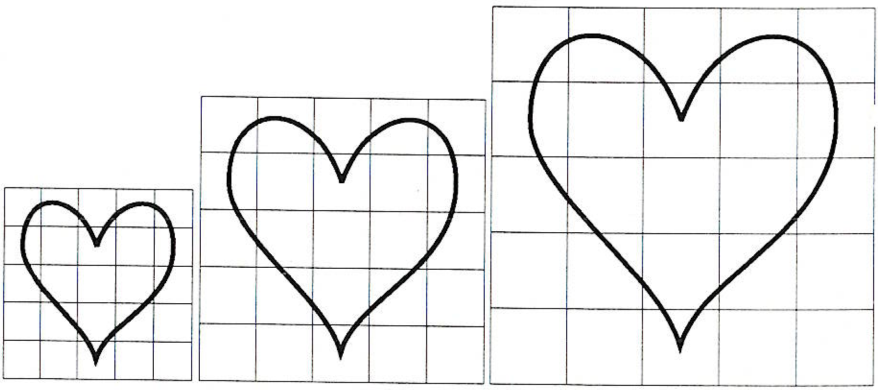
2.3. Hexagones réguliers.

Dessine un triangle rectangle et des hexagones réguliers sur les trois côtés. Enonce et démontre la version du théorème de Pythagore associée à ces données.

3. Encore une extension.

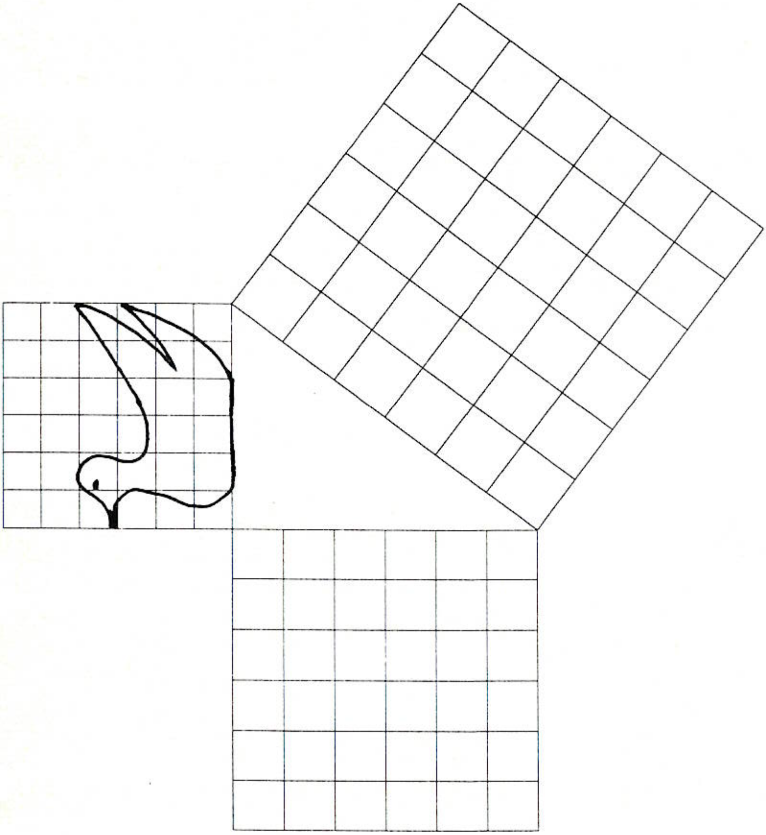
Si un rectangle R_2 a des dimensions triples d'un rectangle R_1, alors l'aire de R_2 vaut 9 fois celle de R_1.

Ceci peut être généralisé à une figure et un rapport quelconques:



Les figures sont semblables. Elles s'obtiennent à partir de la plus petite en multipliant les longueurs respectivement par 1.5 et par 2. Les aires ont donc été multipliées par 2.25 et par 4.

4. Théorème de Pythagore et figures semblables.



Dessine des canards semblables dans les grilles qui te sont données.

L'aire du "gros canard" vaut la somme des aires du "petit canard" et du "canard moyen"!

En effet:

Désignons par $\mathcal{C}$ l'aire du petit canard, par a et b les longueurs des "petit" et "grand" côtés de l'angle droit.

Alors l'aire du canard moyen vaut $\mathcal{C}\frac{b^2}{a^2}$ et celle du grand canard $\mathcal{C}\frac{c^2}{a^2}$.

Donc

$$\mathcal{C} + \mathcal{C}\frac{b^2}{a^2} = \mathcal{C}\frac{a^2+b^2}{a^2} = \mathcal{C}\frac{c^2}{a^2}.$$

5. A toi de jouer!

Si tu souhaites exercer ton imagination, voici deux suggestions. Choisis celle qui te plaît le mieux et envoie ton travail à la rédaction du journal.

- Crois-tu qu'il existe beaucoup de triangles rectangles dont les trois côtés ont des mesures entières? Nous t'avons donné un exemple : $(3, 4, 5)$.
- Sur papier blanc (format d'une page double de *Math-Jeunes*) et en dessinant à la mèche ou à l'encre noire, réalise une belle illustration du théorème de Pythagore. Tu peux évidemment utiliser autre chose que nos canards boiteux. Pour faciliter la présentation, nous nous sommes limités à des dessins contenus dans les carrés construits sur les côtés mais tu peux prendre plus de liberté. Tu peux accompagner ton dessin d'une légende.

Le meilleur travail reçu sera publié dans la revue.

Dans cette grille, nous lisons

4	1
7	3

- horizontalement les nombres 41 et 73
- verticalement les nombres 47 et 13
- en diagonales, en partant de la gauche, les nombre 43 et 71.

Ces six nombres sont premiers (Exemple: l'ensemble des diviseurs de 47 est $\{1, 47\}$).

1. Quelles sont toutes les grilles 2x2 avec les mêmes chiffres et donnant aussi six nombres premiers?
2. Peux-tu prouver qu'il n'est pas possible de trouver une grille 2x2 écrite avec quatre chiffres différents dont un au moins n'est ni 1, ni 3, ni 4, ni 7 et qui donne encore six nombres premiers.

Envoie tes réponses à la rédaction.

Math-Jeunes n ° 47, 77–78, 1990

Autopsie d'un jeu: vos réactions

C. Villers

Athénée Royal de Mons

A la suite de l'invitation aux lecteurs, en fin de notre article paru dans le numéro 45 de *Math-Jeunes*, nous avons reçu plusieurs réactions orales et aussi écrites dont voici, en quelques mots, le contenu.

Francesco PALMITESSA, élève de 5ème à l'Athénée de Mons, écrit les naturels successifs en base 3 et constate qu'il doit employer les chiffres 0, 1 et 2. Il remplace ce dernier par -1 et crée de ce fait des cartes à considérer additivement et des cartes à considérer soustractivement (distinguables, par exemple, par leur couleur). Il obtient le tableau de numération n ° 1.

...	81	27	9	3	1	
					1	1
				1	-1	2
				1		3
				1	1	4
			1	-1	-1	5
						⋮
et aussi:			-1	-1	-1	-13
						⋮

Tableau 2

...	24	12	6	3	1	-1	
					1		1
				1		1	2
				1			3
				1	1		4
			1			1	5
			1				6
			1		1		7
			1	1		1	8
							⋮

Tableau 3

Ce système lui permet donc de retrouver des entiers et plus seulement des naturels. Pour terminer ses suggestions, Francesco PALMITESSA traduit les naturels dans un système de numération hybride en proposant de n'utiliser qu'une seule carte soustractive selon le tableau n ° 2. Francesco ajoute un programme (en basic) pour ordinateur, permettant de déterminer sur quelles cartes doit alors figurer un naturel.

Pierre DASSY, Professeur à l'Athénée Royal de Hannut, nous a fait parvenir un texte qui est la synthèse des réflexions qu'il a menées avec ses élèves, sur le sujet. Après avoir réalisé un jeu de 7 cartes de 64 nombres chacune, en numération binaire (ce qui permet de deviner un nombre naturel compris entre 0 et 127), il passe à la numération de base 3.

18	9	6	3	2	1	
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	0	0	3
0	0	0	1	0	1	4
						⋮
1	0	1	0	1	0	26

Il réalise un jeu de 8 cartes couvrant ainsi les naturels jusqu'à 26 ($3^3 - 1$), en dédoublant les nombres correspondants aux ordres. Ainsi le chiffre 1 dans l'ordre 9 fait placer le nombre considéré dans une carte commençant par 9 mais un chiffre 2 dans le même ordre est remplacé par un chiffre 1 dans l'ordre double et fait donc placer le nombre considéré dans une carte commençant par 18.

Il termine par des considérations générales sur les quantités de cartes et les quantités de nombres qu'elles doivent porter chacune ce qui semble pouvoir d'ailleurs faire l'objet d'un article indépendant.

André PARENT, Professeur au Lycée de Mouscron nous a fait parvenir un très long texte qui pourrait, à lui seul aussi, constituer un article. Il applique le même principe que celui utilisé par Pierre DASSY pour l'emploi de la numération de base 3 et il construit des cartes. Par ailleurs, il fait évoluer la situation en construisant aussi des cartes pour lesquelles c'est le chiffre binaire 0 qui joue le rôle précédemment attribué au chiffre 1.

Dans le système binaire, on a par exemple:

	32	16	8	4	2	1
13 →	0	0	1	1	0	1

Par rapport au chiffre 1, le masque de 13 est . . 1 1 . 1 donc 13 figurera sur les cartes 8,4 et 1. Par rapport au chiffre 0, le masque de 13 est 0 0 . 0 . et 13 figurera sur les cartes 32, 16 et 2.

En additionnant ces trois nombres, on obtient 50 qui est le complément de 13 par rapport à 63. André PARENT illustre ainsi une méthode de calcul automatique qui est la "méthode du complément" et qui est utilisée, en particulier, pour réaliser des soustractions. André PARENT applique également ce principe à la numération de base 3.

Pierre DUFOUR, Professeur à l'Université de Mons, signale que le principe appliqué à la confection des cartes trouve une utilisation dans la construction d'un code détecteur et correcteur d'une erreur qui aurait pu se produire lors de la transmission d'un message. Ce sujet fera l'objet d'un prochain article.

Math-Jeunes n ° 47, 79–85, 1990

Les conjectures de Weil

A. Valette

Un des plus vieux problèmes des mathématiques est celui de la résolution des équations diophantiennes: une équation diophantienne est une équation du type

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

où P est un polynôme à coefficients entiers en les m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et on cherche les solutions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ **qui sont des nombres entiers.**

Exemple:
L'équation de Fermat $x^n + y^n - z^n = 0$, où n est un entier fixé $\geqslant 3$.

Plus généralement, on peut considérer des systèmes (supposés non redondants) de k équations diophantiennes en m variables:

$$X \equiv \begin{cases} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ P_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{cases} \qquad (k \leqslant m)$$

Exemple:
Les solutions du système diophantien

$$\begin{cases} x - 2y^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 2z^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

sont $(-1, 0, \pm 1), (1, \pm 1, \pm 1), (7, \pm 2, \pm 5)$ (Fermat).

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre des équations ou systèmes diophantiens. Cependant, on dispose de deux stratégies.

1. Commencer par regarder si le système a des solutions réelles.

En effet, s'il n'y a pas de solution réelle, il n'y a évidemment pas de solution entière. Un exemple banal où ceci s'applique: $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Pour étudier les solutions réelles du système, on voit intervenir la géométrie algébrique, puisqu'on s'intéresse à l'ensemble $X(\mathbb{R})$ des solutions du système d'équations

$$X \equiv \begin{cases} P_1 = 0 \\ \vdots \\ P_k = 0 \end{cases}$$

Cet ensemble de solutions est appelé la **variété algébrique** définie par le système X.

La dimension de X est par définition $m - k$. Si la dimension est 1, on dit que X est une courbe; si la dimension est 2, on parle de surface. Cette définition de la dimension d'une variété algébrique se justifie par le fait qu'en général $m - 1$ équations dans $\mathbb{R}^m$ définissent une courbe

Exemples:
a) Une équation dans $\mathbb{R}^2$
$x - y^2 = 0$ définit une parabole;
$(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ définit une lemniscate.
b) Deux équations dans $\mathbb{R}^3$
$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ définissent une droite.

De la même manière, $m - 2$ équations dans $\mathbb{R}^m$ définissent en général une surface.

Exemple: Une équation dans $\mathbb{R}^3$
$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ définit une sphère.

Cependant, l'ensemble $X(\mathbb{R})$ des solutions réelles du système X peut ne pas être de la dimension attendue ci-dessus; ainsi, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + y^2 = 0$ ne définissent pas une courbe dans $\mathbb{R}^2$, mais respectivement l'ensemble vide et un point. Pour pallier cet inconvénient, l'habitude s'est prise depuis la fin du 19ème siècle de regarder d'abord l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des solutions du système X sur le corps des nombres complexes. En effet, on sait grâce à HILBERT qu'un système compatible d'équations polynomiales (c'est-à-dire un système dont on ne peut pas déduire $1 = 0$ par des manipulations algébriques) admet au moins une solution complexe; la raison intuitive en est le "théorème fondamental de l'algèbre", qui dit que tout polynôme non constant à une variable a au moins un zéro complexe. L'idée est donc de déterminer l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des solutions complexes, puis de regarder si certaines solutions sont réelles (on a en effet $X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^m$).

2. On peut aussi remplacer le système diophantien par un système de congruences modulo un nombre premier p: (1)

$$X \equiv \begin{cases} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod p \\ \vdots \\ P_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

On cherche donc les entiers $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tels que p divise simultanément $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, P_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. L'idée de considérer des congruences se justifie par le fait que, s'il existe un nombre p tel que le système de congruences n'a pas de solution modulo p, le système diophantien de départ n'a pas de solution.

Exemple: L'équation diophantienne

$$y^2 = x^3 - x - 1$$

n'a pas de solution, car la congruence

$$y^2 \equiv x^3 - x - 1 \pmod 3$$

n'a pas de solution en entiers modulo 3; en effet, on a toujours

$$y^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 3$$

$$x^3 - x - 1 \equiv -1 \pmod 3$$

L'ensemble des entiers modulo p forme un corps commutatif ayant p éléments, noté $\mathbb{F}_p$. (2)

(1) Rappelons que la congruence $a \equiv b \pmod p$ signifie que la différence $a - b$ est divisible par p.

(2) Rappelons qu'un corps commutatif — qu'en Belgique on appelle un champ — est un endroit où on peut pratiquer les quatre opérations, et où l'ordre des facteurs dans la multiplication est sans importance. Exemples: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exemple:
$\mathbb{F}_5$ comporte les cinq éléments $0, 1, 2, 3, 4$, l'addition et la multiplication y sont données par les tables suivantes:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Quoiqu'on travaille maintenant sur des corps finis, et qu'on compte le nombre de points d'ensembles finis, on introduit comme dans le cas du corps des réels le vocabulaire de la géométrie algébrique (La dimension de X est définie comme $m - k$, et on parle de courbe en dimension 1, de surface en dimension 2. Même privée du support géométrique que constituent les dessins, cette terminologie est très porteuse d'intuition.)

Depuis les années 1920, on a eu l'idée de considérer le corps $\mathbb{F}_p$ comme un analogue fini du corps $\mathbb{R}$ des réels: comme au point 1), au lieu de chercher directement les solutions du système X sur $\mathbb{F}_p$, on cherche les solutions sur "les nombres complexes sur $\mathbb{F}_p$" puis, parmi celles-ci, on regarde celles qui sont "réelles". Et ça marche: on peut définir les nombres complexes sur $\mathbb{F}_p$: ils forment un corps commutatif à p^2 éléments, noté $\mathbb{F}_{p^2}$, qui est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}_p$ tout comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Si p est congru à 3 modulo 4 (comme 3,7,11,19,23,...), $\mathbb{F}_{p^2}$ se construit vraiment à partir de $\mathbb{F}_p$ comme $\mathbb{C}$ se construit à partir de $\mathbb{R}$: $\mathbb{F}_{p^2}$ est alors l'ensemble des $a+bi$ avec $a, b \in \mathbb{F}_p$ et le produit est défini en posant $i^2 = -1$.

Voici un autre exemple, où p n'est pas congru à 3 modulo 4:

Exemple:
$\mathbb{F}_4$ comporte les éléments 0, 1, a, b, l'addition et la multiplication y sont données par les tables suivantes.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

.	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Par ailleurs, les choses se compliquent singulièrement: GALOIS a en effet montré dans les années 1830 qu'on peut aussi définir sur $\mathbb{F}_p$ des nombres "hyper-complexes", "hyper-hyper-complexes", etc. Plus précisément: pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un (et un seul) corps commutatif à p^n éléments, noté $\mathbb{F}_{p^n}$, qui est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_p$. Donc, contrairement au cas de $\mathbb{R}$, où on a une seule extension à considérer (à savoir $\mathbb{C}$), ici on doit considérer simultanément tous les $\mathbb{F}_{p^n}$.

Revenant au système de congruences X, l'idée est de considérer l'ensemble $X(\mathbb{F}_{p^n})$ des solutions de X sur $\mathbb{F}_{p^n}$, et de travailler avec tous les $X(\mathbb{F}_{p^n})$ en même temps. Notons N_n le cardinal de $X(\mathbb{F}_{p^n})$, c'est-à-dire le nombre de solutions du système X sur $\mathbb{F}_{p^n}$. L'objet intéressant devient alors la suite $(N_n)_{n\geqslant 1}$ qui contient l'information diophantienne "modulo p" fournie par X. Comme souvent quand on a à étudier une suite de nombres, on l'empaquette dans une "fonction génératrice":

$$T \mapsto g(T) = N_1 T + \frac{N_2}{2} T^2 + \frac{N_3}{3} T^3 + \cdots$$

où T est une indéterminée. On introduit alors la "fonction Zêta (majuscule)":

$$Z_X(T) = e^{g(T)}$$

Voici sans doute le seul exemple simple de calcul d'une fonction Zêta: celui de l'espace affine de dimension m. Considérons le système X à $m+1$ variables formé de l'équation $x_{m+1} = 0$. L'ensemble des solutions de X sur un corps commutatif K est l'ensemble des $m+1$-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0)$ où x_1, x_2, ..., x_m sont des éléments quelconques de K. C'est ce qu'on appelle l'espace affine $\mathbb{A}^m(K)$ à m dimensions. Si $K = \mathbb{F}_{p^n}$, on a évidemment $N_n = p^{mn}$ et donc

$$g(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{mn}}{n} T^n = -\log(1 - p^m T)$$

(la dernière égalité résultant d'un développement de Mac-Laurin). Donc

$$Z_{\mathbb{A}^m}(T) = \frac{1}{1 - p^m T}$$

Les fonctions Zêta des courbes ont été introduites en 1924 par ARTIN, et étudiées en 1933–34 par HASSE puis en 1940–41 par WEIL . En 1949, WEIL propose ses conjectures, qui sont des généralisations aux variétés de dimension quelconque des résultats de Hasse–Weil sur les courbes. Voici ces conjectures:

Pour X une "bonne" variété algébrique de dimension r:

(a) La fonction $Z_X(T)$ est une fonction rationnelle de T, c'est-à-dire un quotient de deux polynômes.

(b) De plus

$$Z_X(T) = \frac{Q_1(T)Q_3(T)\dots Q_{2r-1}(T)}{Q_0(T)Q_2(T)\dots Q_{2r}(T)}$$

où Q_i est un polynôme de degré b_i qui, sur $\mathbb{C}$, admet une factorisation

$$Q_i(T) = (1-\alpha_{i1}T)(1-\alpha_{i2}T)\dots(1-\alpha_{ib_i}T)$$

avec $|\alpha_{ij}| = p^{\frac{i}{2}}$

(c) Le degré b_i du polynôme Q_i peut se définir explicitement à partir de la topologie de l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X.

Expliquons sur le cas des courbes l'importance de ces conjectures pour le calcul des N_n. Pour une courbe X, WEIL montre que

$$Z_X(T) = \frac{Q_1(T)}{(1-T)(1-pT)}$$

où Q_1 est un polynôme de degré pair 2g qui se factorise sur $\mathbb{C}$ en:

$$Q_1(T) = (1-\alpha_1 T)(1-\alpha_2 T)\dots(1-\alpha_{2g}T)$$

avec $|\alpha_j| = \sqrt{p}$

Ici g est le genre de la courbe, c'est-à-dire le nombre de trous de l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X ($X(\mathbb{C})$ est une courbe sur $\mathbb{C}$, donc une surface sur $\mathbb{R}$, et cette surface a des trous). Au passage, soulignons le génie visionnaire de WEIL, qui a réalisé qu'il pouvait y avoir un lien entre la topologie de $X(\mathbb{C})$ (qui relève du transcendant et du continu) et le nombre de points de $X(\mathbb{F}_{p^n})$ (qui appartient au diophantien et au discret). Dans la formule de WEIL, prenons le logarithme des deux membres:

$$\begin{aligned} g(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} T^n \\ &= -\log(1-T) - \log(1-pT) + \log(1-\alpha_1 T) + \\ &\quad \log(1-\alpha_2 T) + \dots + \log(1-\alpha_{2g}T) \end{aligned}$$

Développons le second membre par la formule de MacLaurin, et identifions les coefficients de même puissance de T. Il vient:

$$N_n = 1 + p^n - (\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_{2g}^n)$$

Donc, si on connaît les α_i (qui sont en nombre fini $2g$), on connaît les N_n (qui sont en nombre infini). D'où l'intérêt de savoir où chercher les α_i , donc de savoir qu'ils sont de module $\sqrt{p}$.

Pour les variétés, la conjecture (a) a été démontrée en 1960 par DWORK. De 1966 à 1972, GROTHENDIECK a développé, dans le volume 4 de son "Séminaire de Géométrie algébrique" (1583 pages, 2810 grammes) la machinerie permettant de prouver simultanément les conjectures (a) et (c). Restait à démontrer la conjecture (b), ce qui fut fait par DELIGNE en 1973, en 34 pages "seulement".

La preuve de la conjecture (b) a eu d'importants corollaires en théorie des nombres, qui eux-mêmes ont eu des retombées dans plusieurs domaines des mathématiques. Citons entre autres la construction (en 1986) par LUBOTZKY, PHILLIPS et SARNAK, des meilleures familles infinies de graphes expanseurs connues actuellement. Un graphe expanseur est ce qu'on pourrait appeler un bon modèle de circuit de transmission: c'est un graphe où il existe un chemin d'arêtes entre deux sommets quelconques (donc n'importe quelle paire de sommets peut communiquer), où un sommet a un grand nombre de voisins (ce qui accélère les transmissions), mais où le nombre total d'arêtes est relativement petit par rapport au nombre de sommets (pour minimiser le coût des lignes). Certains de ces graphes (dont l'existence repose finalement sur des résultats de DELIGNE) ont déjà été utilisés pour l'implémentation d'algorithme de tri sur de gros ordinateurs parallèles, et on peut imaginer qu'ils puissent être utilisés dans le cablage d'un ordinateur ou la conception de réseaux téléphoniques. Voici donc des mathématiques extrêmement pures et abstraites qui trouvent des applications très concrètes. C'est un exemple de plus de ce que le Prix Nobel de physique Eugene WIGNER appelait "la déraisonnable efficacité des mathématiques".

Nombreux sont ceux qui se demandent ce que l'on peut encore découvrir en mathématique. L'article précédent donnait un aperçu d'un domaine de recherche contemporain. Nous tenons à remercier son auteur qui, malgré la difficulté, a fait un très gros effort pour être aussi simple que possible. Même si tu n'as pas tout compris, nous espérons que cet article t'aura ouvert des fenêtres non seulement sur des sujets que tu ignorais, mais surtout sur le processus de formation d'une théorie mathématique.

La Rédaction

Les Polyominos

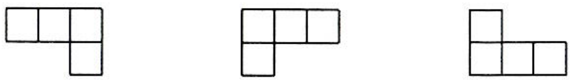
A. Parent

Lycée de Mouscron

On te propose un problème simple. Il s'agit de réaliser des pièces qui serviront à reconstituer un puzzle. Pour cela il faut que tu respectes quelques consignes :

- chaque pièce comportera un nombre entier de cases carrées
- toutes les pièces seront de formes différentes
- chaque pièce comportera au minimum deux cases et au maximum cinq
- on ne tiendra pas compte de l'orientation des pièces.

Les formes ci-dessous en déterminent une seule.



Essaie d'utiliser une stratégie afin de ne pas prendre deux fois la même pièce et de t'assurer que tu as toutes les formes possibles.

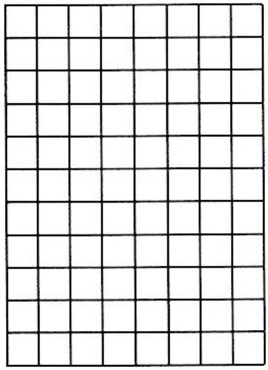
Tu as terminé? Bravo. Tu dois avoir exactement vingt pièces totalisant quatre-vingt-huit carrés. Remarque que tu peux les classer en familles:

- celle du domino que tu connais certainement,
- celle des triominos constitués de 3 cases,
- celle des tétraminos constitués de 4 cases, si tu es curieux, et tu l'es certainement si tu lis ces lignes, recherche au dictionnaire des mots dont le préfixe est "tétra" tu (re)découvriras un objet géométrique particulier;

Mais continuons avec les pentaminos constitués de 5 cases et qui représentent la majorité des pièces recherchées.

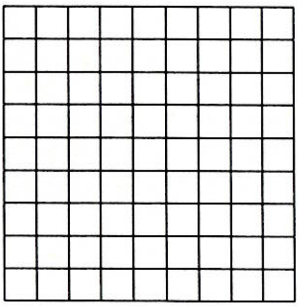
Tu disposes maintenant du matériel nécessaire pour reconstituer un premier puzzle proposé par Jean-Yves DELMEIRE, élève de 1ère accueil A au Lycée de Mouscron qui te demande de recouvrir un rectangle de 8 sur 11, soit exactement 88 cases.

Au fait, couvrir un rectangle de 4 sur 22 nécessite également toutes nos pièces, est-ce possible? Envoie-nous le résultat de tes recherches.



Aurore VAN MEENEN de 1ère accueil C propose le problème suivant:

Considérons un grand carré de 81 cases.



Sans utiliser le domino, mais un maximum des 19 pièces restantes recouvrir cette grille 9x9.

Si tu as trouvé une solution tu remarqueras qu'un des 12 pentaminos est à exclure. Est-il possible de réaliser 12 puzzles en laissant de côté, successivement, chacun des 12 pentaminos?

Jérémy VANHOUTTE de 1ère accueil A remarque que les cinq tétraminos (tu connais maintenant le nombre de membres de chacun de nos familles) et les pentaminos nécessitent 80 cases. Dépose-les dans la grille 9x9, il te restera une case libre. Pour augmenter la difficulté, fixe cette case au centre.

Ces différents problèmes nous fournissent plusieurs résultats.

Je te propose de retrouver la solution obtenue par Robert BRYSSINCK de 1ère accueil C à ce dernier jeu.

5	5	7	7	9	8	6	2	5
7	1	7	5	9	4	6	6	3
2	4	3	8	9	8	8	4	4
8	8	3	1	1	7	7	7	7
3	1	2	6	0	4	6	9	2
3	9	9	6	5	5	6	1	1
6	4	8	8	9	9	9	9	1
8	4	2	1	9	2	3	4	7
2	5	5	6	3	7	7	5	3

Chacune des cases de la grille 9x9 comporte un chiffre. Les 17 pièces de notre puzzle ont la particularité de posséder la même valeur, obtenue en additionnant les nombres des cases que chacune d'entre elles recouvre.

Cette seule information doit te permettre de découvrir cette valeur ainsi que la case non recouverte du puzzle.

Essaie de découvrir la solution de Robert avant de lire la suite.

Chaque pièce du puzzle est composée de cases sur lesquelles les chiffres marqués sont tous différents.

Ceci doit te permettre de trouver sans équivoque la solution.

N'hésite pas à nous envoyer tes solutions et d'éventuelles idées d'autres jeux.

Le coin de la tortue.

Olivier PIRLOT, de Bièvre nous envoie un programme qui dessine le napperon du numéro 45 de *Math-Jeunes* et qui est basé sur le dessin de triangles équilatéraux, (mais certains triangles sont dessinés deux fois).

```
POUR HEX :A
REPETE 18 [DR 10 REPETE 3 [DR 180
REPETE 3 [DR 120 AV :A]]]
FIN
```

```
POUR NAPPERON
HEX 30 HEX 60 HEX 90
FIN
```

Quant à Xavier CHEFNEUX, de SPA, il nous fait parvenir des programmes qui réalisent les dessins proposés par Philippe TAMIGNIAUX (voir n° 46). Faute de place, nous ne pouvons les reproduire, mais signalons à Xavier que le dessin n° 2 (la rosace) est constitué exclusivement de carrés! (Cela n'est pas facile à voir.) Le programme qu'il nous propose ne réalise pas exactement la même figure.
Xavier nous envoie aussi le programme ci-dessous et nous dit "ce programme donne des résultats apparemment fort différents pour les deux jeux de variables suivants: `:N = 6, :A = 40, :B = 60; :N = 18, :A = 60, :B = 20`" Pouvez-vous analyser cette situation, trouver en quoi les résultats sont différents et en quoi ils sont semblables et essayer d'autres valeurs des paramètres? Continuez à nous envoyer vos productions.

```
POUR DESSIN :N :A :B REPETE :N [AV :A TE RE :A GA :B] FIN
POUR TE REPETE 10 [GA 60 AV 20] FIN
```

P. Van Elsuwe

ELIMINATOIRE 1990.

Mais où couraient-ils donc ces milliers d'élèves avides de réaliser ce mercredi 24 janvier une belle performance? Vous l'aurez compris: ce sont les Olympiades de Mathématique qui stimulaient à ce point l'ardeur de ces "champions en herbe".

Ils étaient cette fois 10.488 (2583 en première, 3344 en deuxième, 4561 en troisième) répartis dans 281 écoles pour l'épreuve Mini et 8236 (2791 en quatrième, 2870 en cinquième, 2575 en sixième) répartis dans 296 écoles pour l'épreuve Maxi. Pour rappel, il y avait l'an dernier 9140 participants en Mini et 7632 en Maxi.

Je devine ton impatience à te situer après cette première épreuve. Voici donc en annexe, l'histogramme national de ces éliminatoires. Je te propose même quelques solutions aux problèmes posés. Dernier détail: convaincu que tu auras longuement parlé de la question concernant la montre avec ton professeur et tes compagnons, je me bornerai à te dire que les deux solutions (144 et 288) ont été considérées comme bonnes.

Question 9 Mini

Appelons p le prix initial d'une marchandise. Après la première remise, il faudra payer $p - 0,2p = 0,8p$. Après la deuxième remise, il faudra payer $0,8p - 0,1 \times 0,8p = 0,72p$ c'est-à-dire 72% du prix initial. La remise totale est donc de 28%.

N.B. A l'olympiade, tu pouvais travailler plus simplement en remplaçant p par une valeur particulière facile, par exemple 100. Dans ce cas, après la première remise la somme à payer est de 80 francs. Après la deuxième remise la somme à payer est de 72 francs. On voit immédiatement que la remise totale est de 28%.

Question 25 Mini

Les seuls restes possibles pour une division par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si le quotient est égal au reste, on obtient les nombres suivants:

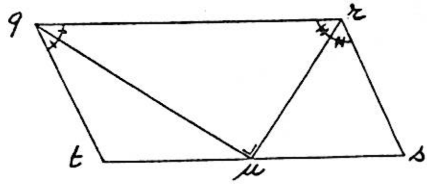
$n_0 =$	$0 \times 7 + 0 =$	0	$n_4 =$	$4 \times 7 + 4 =$	32
$n_1 =$	$1 \times 7 + 1 =$	8	$n_5 =$	$5 \times 7 + 5 =$	40
$n_2 =$	$2 \times 7 + 2 =$	16	$n_6 =$	$6 \times 7 + 6 =$	48
$n_3 =$	$3 \times 7 + 3 =$	24			

La somme de ces nombres est $0 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 = 168$.

Question 30 Mini

$qrst$ étant un parallélogramme, les angles $\widehat{tqr}$ et $\widehat{qrs}$ sont supplémentaires.

Comme de plus qu et ru sont bissectrices des angles $\widehat{tqr}$ et $\widehat{qrs}$, les angles $\widehat{uqr}$ et $\widehat{qru}$ sont complémentaires. Par conséquent, l'angle $\widehat{qur}$ est droit et l'aire du triangle qru vaut: $\frac{8\text{cm}\times 5\text{cm}}{2} = 20\text{cm}^2$.



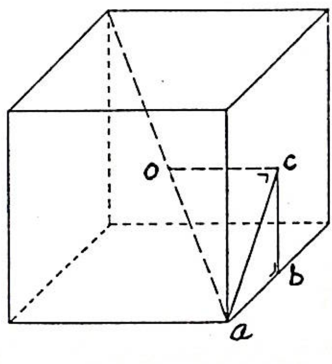
De plus, l'aire du parallélogramme $qrst$ vaut deux fois l'aire du triangle qru (ils ont même base et même hauteur).

On a donc:

aire $qrst = 2 \times 20\text{cm}^2 = 40\text{cm}^2$.

Question 18 Maxi

Appelons
- o le centre du cube
- r le rayon de la sphère inscrite au cube (sphère tangente aux 6 faces du cube)
- R le rayon de la sphère circonscrite au cube (sphère passant par les 8 sommets du cube)



Nous avons : $r = \overline{oc} = \overline{bc} = \overline{ab}$ et $R = \overline{oa}$.

Dans le triangle abc rectangle en b on a:

$$\overline{ac} = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}.r$$

Dans le triangle oca rectangle en c on a :

$$R = \overline{oa} = \sqrt{\overline{oc}^2 + \overline{ac}^2} = \sqrt{r^2 + 2r^2} = \sqrt{3}.r$$

Dès lors $r = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{3}$.

Question 21 Maxi

Appelons x, y, z les trois nombres. Les données s'expriment alors sous la forme:

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{12} & (1) \\ xyz=\frac{5}{12} & (2) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{27}{10} & (3) \end{cases}$$

La relation (3) peut s'écrire : $xy+yz+zx=-\frac{27}{10}xyz$. En tenant compte de (2), nous obtenons:

$$xy+yz+zx=-\frac{27}{10}.\frac{5}{12}=-\frac{9}{8} \qquad (4)$$

Comme $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$, nous avons: $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$. Dès lors par (1) et (4) nous obtenons:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{12}\right)^2-2\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{325}{144}$$

DEMI-FINALE 1990

Heureux rescapés de la première épreuve, 1195 élèves de Mini et 1154 élèves de Maxi se sont retrouvés le 7 mars pour la demi-finale. Pour calmer ton impatience à connaître les résultats (ils paraîtront dans le prochain numéro) je te propose de t'amuser en résolvant les questions de cette demi-finale et en contrôlant tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous.

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mini	185	A	C	E	2	D	A	54	D	C
Maxi	E	E	C	B	B	D	A	E	B	D
Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Mini	B	D	E	8	D	E	D	40	D	A
Maxi	C	D	E	A	C	C	C	C	B	C
Questions	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Mini	E	E	A	C	C	A	E	B	B	B
Maxi	E	D	B	D	B	A	C	B	D	E

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE ELIMINATOIRE MINI 1990

SCORE	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N1	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	1	0
N2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NT	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5	1	0
SCORE	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
N1	3	0	0	3	1	5	2	2	6	6	1	4	2	9	4	10	10
N2	0	0	1	2	1	4	1	2	8	4	2	6	7	12	5	12	10
N3	0	1	0	0	0	2	1	2	3	1	1	2	6	10	2	11	10
NT	3	1	1	5	2	11	4	6	17	11	4	12	15	31	11	33	30
SCORE	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
N1	9	18	6	16	17	12	27	19	26	35	35	34	28	40	39	40	55
N2	7	21	12	22	24	16	21	29	33	31	32	36	45	50	49	55	57
N3	10	14	9	23	15	21	24	29	30	21	35	52	33	39	47	54	55
NT	26	53	27	61	56	49	72	77	89	87	102	122	106	129	135	149	167
SCORE	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
N1	60	63	62	73	87	82	89	92	84	96	114	72	86	85	94	75	82
N2	47	48	73	80	98	82	85	98	82	124	92	82	83	98	103	116	82
N3	80	72	98	78	103	102	99	108	120	107	115	90	135	130	130	132	110
NT	187	183	233	231	288	266	273	298	286	327	321	244	304	313	327	323	274
SCORE	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
N1	75	74	60	58	53	39	44	44	38	29	18	21	14	13	17	12	11
N2	76	82	82	105	81	100	71	69	64	56	45	54	50	47	34	34	24
N3	130	107	151	128	112	128	114	102	110	93	81	77	75	67	57	51	69
NT	281	263	293	291	246	267	229	215	212	178	144	152	139	127	108	97	104
SCORE	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
N1	9	6	8	2	6	3	2	1	2	2	0	1	1	1	0	0	1
N2	28	17	18	18	20	4	7	7	6	7	9	6	3	1	1	4	3
N3	51	48	46	35	37	38	30	27	28	20	25	20	13	12	8	11	6
NT	88	71	72	55	63	45	39	35	36	29	34	27	17	14	9	15	10
SCORE	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
N1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
N2	3	0	2	0	1	0	1	0	3	0	0	1	1	1	0	0	0
N3	6	11	8	9	5	2	4	0	3	3	5	2	0	1	1	0	2
NT	9	11	11	9	6	2	5	0	6	4	5	3	1	2	1	0	2
SCORE	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
N1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N3	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NT	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SCORE	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150		TOTAL
N1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		2583
N2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		3344
N3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		4561
NT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		10488

Ni : nombre d'élèves en ième année ayant le score indiqué

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE ELIMINATOIRE MAXI 1990

SCORE	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
N5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
N6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1

SCORE	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
N4	0	0	2	2	2	1	2	3	2	2	2	2	11	7	7	6	10
N5	0	1	1	0	2	4	1	2	0	2	3	3	6	4	3	6	6
N6	1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0	1	2	3	1
NT	1	1	3	2	4	6	4	6	3	6	7	5	17	12	12	15	17

SCORE	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
N4	2	8	9	8	13	17	17	26	22	35	34	47	54	45	65	65	68
N5	4	4	8	8	13	5	6	19	13	15	29	22	27	32	47	37	62
N6	4	4	3	10	6	12	8	4	6	13	9	17	17	20	21	26	35
NT	10	16	20	26	32	34	31	49	41	63	72	86	98	97	133	128	165

SCORE	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
N4	76	83	91	102	109	96	86	122	101	112	85	76	113	78	85	75	53
N5	62	61	77	72	82	67	66	78	73	78	77	70	81	71	78	104	81
N6	34	31	47	26	45	38	52	60	52	52	62	51	61	57	62	62	60
NT	172	175	215	200	236	201	204	260	226	242	224	197	255	206	225	241	194

SCORE	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
N4	77	61	53	51	43	35	46	35	22	25	29	34	19	18	11	10	9
N5	77	73	75	69	81	58	59	55	48	63	57	40	42	37	48	33	29
N6	69	63	63	64	44	75	69	67	69	64	52	50	51	44	37	48	46
NT	223	197	191	184	168	168	174	157	139	152	138	124	112	99	96	91	84

SCORE	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
N4	14	11	7	10	2	3	4	5	3	3	1	2	4	0	0	0	0
N5	37	23	18	19	19	17	18	7	8	8	11	8	12	7	4	3	2
N6	39	49	50	38	25	30	27	20	22	21	20	16	15	14	13	9	13
NT	90	83	75	67	46	50	49	32	33	32	32	26	31	21	17	12	15

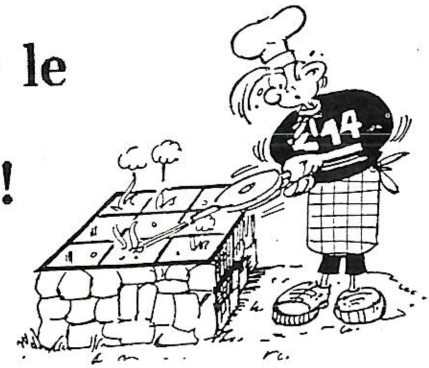
SCORE	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
N4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
N5	2	4	3	0	3	3	2	1	2	1	1	1	0	1	0	0	1
N6	5	8	6	8	3	4	6	3	2	4	0	1	4	2	4	1	3
NT	7	12	9	8	6	7	8	4	4	5	1	2	4	3	6	1	4

SCORE	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
N4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
N5	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
N6	3	1	1	0	1	1	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0
NT	3	1	1	1	2	3	0	0	0	3	0	1	0	0	1	0	1

SCORE	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150		TOTAL
N4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		2791
N5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		2870
N6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1		2575
NT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1		8236

Ni : nombre d'élèves en ième année ayant le score indiqué

Sur le Grill !



A. Parent

A. Voici (tableau n° 1) la solution du problème posé à la page 64 de *Math-Jeunes* n° 46.

1	8	4	→ 32
7	2	5	→ 70
6	9	3	→ 162
↓ 42	↓ 144	↓ 60	

Tableau 2

			→ 504
			→ 10
			→ 72
↓ 180	↓ 42	↓ 48	

Tableau 3

As-tu réfléchi aux suggestions que nous te faisions dans le numéro 46? Le tableau n° 2 te propose un énoncé ayant 2 solutions. Placer les nombres de la première ligne et de la première colonne ne pose pas de problème. Compléter les 4 dernières cases offre 2 possibilités.

9	7	8	→ 504
5	1 ou 2	2 ou 1	→ 10
4	6 ou 3	3 ou 6	→ 72
↓ 180	↓ 42	↓ 48	

	x	z
	y	t

As-tu cherché tous les types de grilles qui ne conduisent pas à une réponse unique? On pourra, comme dans la grille précédente, permuter x et y, en même temps que y et t si $xy = zt$.

Recherchons ces produits égaux possibles.

On élimine 5 et 7 qui apparaissent une seule fois comme facteurs dans les neuf premiers entiers.

Notons aussi que $x.y.z.t = xy.zt = (xy)^2 = p^2$. On a $p^2 < 9.8.6.4 = 1728$ donc $p < 41$. De même $1.2.3.4 < p^2$, donc $5 < p$.

Les produits égaux possibles sont donc compris entre 5 et 41.

Dénombrement de tels produits:

1×6 et 2×3: Produit $= 6$

1×8 et 2×4: Produit $= 8$

2×9 et 3×6: Produit $= 18$
3×8 et 4×6: Produit $= 24$
2×6 et 3×4: Produit $= 12$

Pour trouver ces produits, il y a plusieurs stratégies possibles.

1. Sont à considérer les nombres 1 2 3 4 6 8 9.

   Le produit doit être supérieur à 5.
   Le premier produit à envisager est 1×6 et on recherche si parmi les nombres restants on en trouve deux dont le produit égale 6, ici 2 et 3.
   De la même façon, on trouve 1×8 et 2×4.
   Avec 1×9, c'est impossible.
   2×3 a déjà été obtenu.
   ...et ainsi de suite.

2. On utilise la factorisation primaire des nombres : $1 = 2^0 = 3^0$, $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$. Il faut alors choisir un produit et répartir de façon différente les facteurs premiers qui y apparaissent.

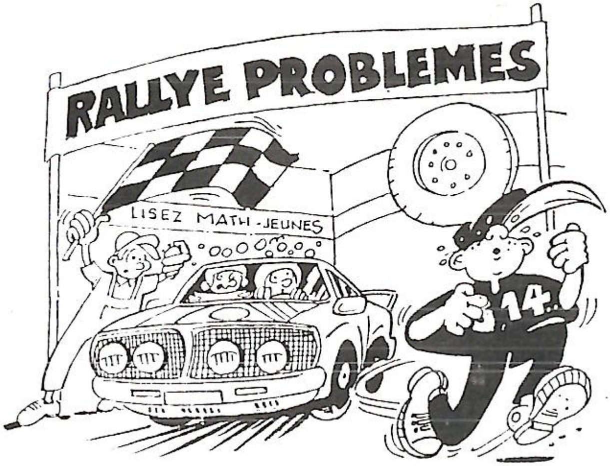
   $(3^2 \times 1) = ?$ impossible
   $(3^2 \times 2) = (2 \times 3) \times 3$
   $(3^2 \times 3) = ?$ impossible
   $(3^2 \times 2^2) = ?$ impossible
   ...et ainsi de suite.

Est-il possible que d'autres situations conduisent à des réponses non uniques? On pourrait par exemple imaginer que deux rangées parallèles aient même produit, ou bien une ligne et une colonne. Essaie!

B. Pour terminer voici un exercice du même type, avec une grille 4×4.Pourrais-tu replacer les seize nombres 1, 2, ..., 16, dans la grille?

				$\rightarrow$ 1944
				$\rightarrow$ 525
				$\rightarrow$ 5824
				$\rightarrow$ 3520
$\downarrow$ 2688	$\downarrow$ 1170	$\downarrow$ 990	$\downarrow$ 6720	

Math-Jeunes n° 47, 96–96, 1990



C. Festraets

Voici les quatre derniers problèmes de ce rallye 1989-1990. Rappelons que, pour participer, il n'est pas nécessaire de répondre à tous les problèmes; le classement final tiendra compte de votre âge. Présentez soigneusement vos solutions, chaque problème étant rédigé sur une (ou plusieurs) feuilles séparées et chaque feuille comportant vos nom, prénom, âge, adresse, classe et école. Envoyez vos solutions au plus tard pour le 15 avril 1990 à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

1. Une corde $[ST]$ de longueur constante glisse autour d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est le milieu de $[ST]$ et P le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur AB. Prouver que l'angle $\widehat{SPM}$ est constant quelle que soit la position de $[ST]$. (Une corde $[ST]$ est un segment dont les deux extrémités S et T appartiennent au demi-cercle considéré).

2. Quel est le reste de la division du polynôme $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ par $x^3 - x$?

3. On considère un tableau carré comprenant 20 lignes et 20 colonnes formées de points soit rouges, soit verts. Deux points adjacents (et situés sur la même ligne ou sur la même colonne) ayant la même couleur sont reliés par un segment de cette même couleur. Deux points adjacents de couleurs différentes sont reliés par un segment noir. Il y a en tout 219 points rouges dont 39 sont sur les bords, mais aucun dans les coins et il y a 237 segments noirs. Quel est le nombre de segments verts?

4. Pour tout polyèdre, il existe (au moins) deux faces délimitées par le même nombre d'arêtes. (Attention! Les polyèdres dont il est question sont tout à fait quelconques; ne vous contentez pas de penser au cube, au parallélipipède ou à la pyramide).