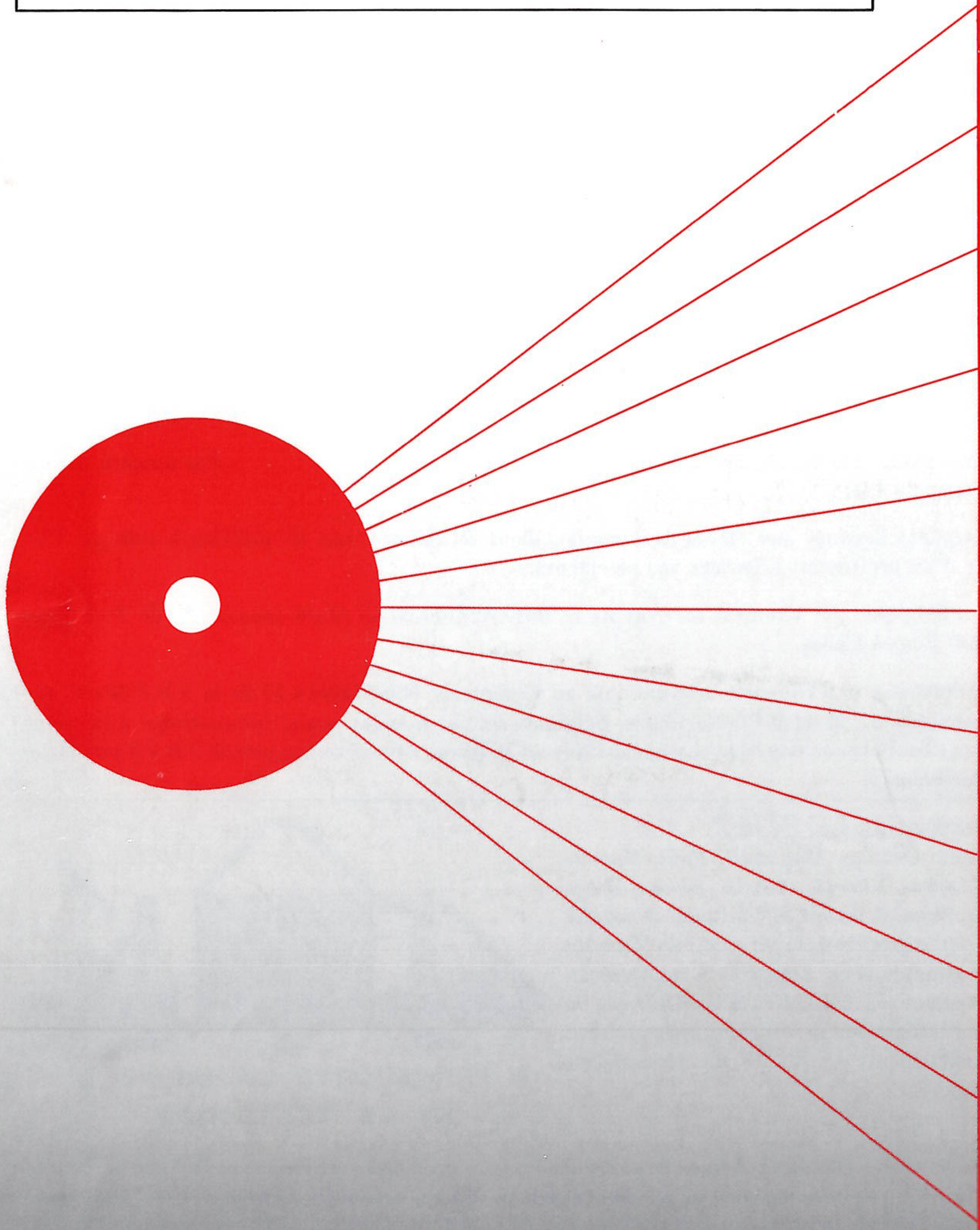
MATH_JEUNES



Périodique trimestriel - 12ème année
Septembre - Novembre 1990 - n° 49
Bureau de dépôt: Mouscron 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7061 CASTEAU.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:		Etranger :	
• Groupés (5 exemplaires au moins) :	80 FB	• Par paquet de 5 abonnements:	800 FB
• Isolés:	120 FB	• Isolés:	240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

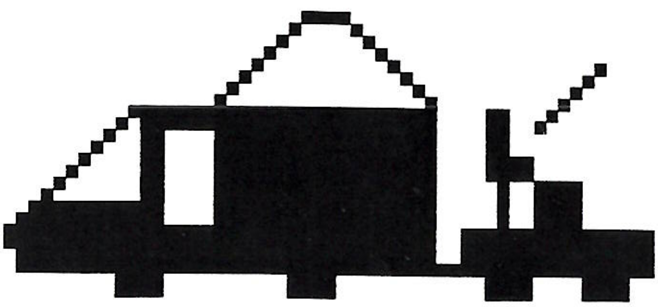
- Années complètes: 86-87, 87-88, 88-89, 89-90 — Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 23, 24, 25, 26, 27, 32, (Etranger: 20 FB) — Par numéro: 10 FB

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Connaissez-vous LE SITE?

Ils s'appellent *Orhane*, *Mohamed*, *Fuat*, *Hanane*, *Nicholas*, *Markus*, *Violette*, *Yilmaz*, *Bulent*, *Benjamin*, *Ercan*, *Arnaud*, ils ont de 8 à 12 ans et régulièrement ils participent sous la direction de Mme Renée Vanderstraeten à un Atelier de Graphisme Informatique organisé par **LE SITE** (L'étude des Sociétés pour l'Intégration des Techniques comparées dans l'Enseignement, ASBL, 2A rue Mommaerts, 1080 Bruxelles).

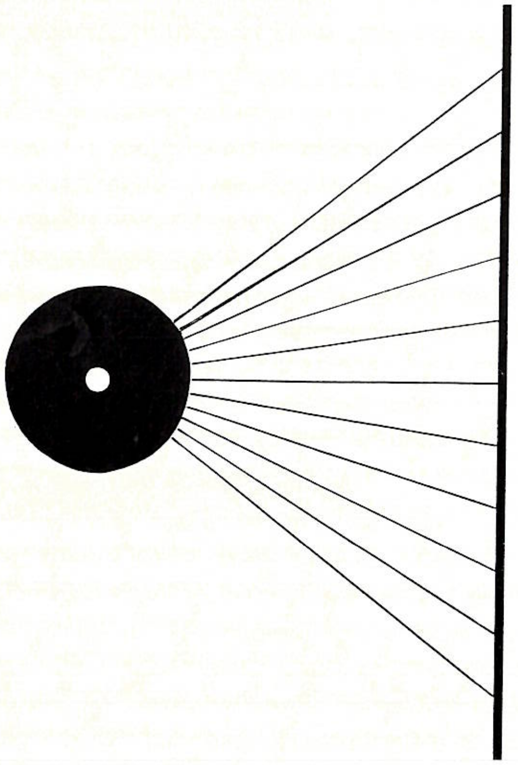


Dans chaque numéro de *Math-Jeunes* de cette année, nous publierons un dessin réalisé par un membre du groupe. Le dessin de ce numéro est dû à *Bulent* et fait suite à une rencontre du groupe avec l'astronomie. Si toi aussi tu as rédigé un programme graphique, envoie-nous ta réalisation, nous publierons les meilleurs dessins reçus.

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 49 Douzième année 1990

Math-Jeunes



En couverture: Cette année, les couvertures de *Math-Jeunes* seront consacrées à l'ensemble des points situés à égale distance d'un cercle et d'une droite. Savez-vous ce qu'est la distance d'un point à un cercle ? Sur la couverture de ce numéro, nous avons tracé un cercle, une droite extérieure au cercle ainsi que quelques segments de droites passant par le centre du cercle. Croyez-vous que sur chacun de ces segments il soit possible de trouver un point à égale distance de la droite et du cercle ? Si oui, comment pourriez-vous les construire ? Dessinez une courbe passant par tous ces points. Quelle est la nature de cette courbe ? Réfléchissez à ces questions ...en attendant les prochains numéros.

Un mathématicien belge contemporain: Jacques TITS

F. Buekenhout, *Université Libre de Bruxelles*

Belge? Oui. Jusqu'à ce qu'il fut forcé à son corps défendant, de prendre la nationalité française afin de pouvoir occuper une chaire au fameux Collège de France à Paris. Mais n'anticipons pas. Vous seriez sans doute bien en peine de citer cinq grands mathématiciens vivants et c'est normal. Les informations de ce genre apparaissent avec une rare parcimonie dans les médias. Mais vous m'attendez au tournant en demandant ce qu'est un grand mathématicien. Le critère décisif est en quelque sorte l'opinion publique au sein de la tribu des mathématiciens et celle-ci est fortement influencée par ceux qui ont déjà un statut prestigieux. Si x âgé de 45 ans et réputé dans la région R, déclare que le jeune y âgé de 28 ans est plus fort que lui, tous les "chefs" de la région R feront désormais attention aux résultats de y. Mais comment x juge-t-il les qualités du jeune y? Sur sa capacité de faire progresser des problèmes, de maîtriser rapidement des travaux antérieurs réputés difficiles, de les appliquer, de les exposer, de les remanier de manière fructueuse. Le critère est au fond celui qui permet de dire en classe: "Untel est le plus fort en maths". Quels sont les grands belges actuels? Outre Jacques TITS, il convient de citer par âge décroissant, Pierre DELIGNE, Pierre VAN MOERBEKE et Jean BOURGAIN. Est-il si important d'être belge? Sûrement pas. La tribu des mathématiciens, dispersée dans le monde, compte des dizaines de milliers de membres ignorant largement les frontières dans la mesure du possible. Il n'empêche que nous avons le droit de jeter un coup d'oeil attendri sur ceux qui nous sont les plus proches.

Revenons donc à Jacques TITS dont on célèbre cette année, le 60ème anniversaire. De quoi s'est-il occupé pour justifier sa réputation? Ses travaux se situent dans le double courant de la théorie des groupes et de la géométrie. On peut parler aujourd'hui d'une géométrie de TITS qui dépasse l'ancienne géométrie projective. Celle-ci avait unifié diverses géométries classiques comme les géométries euclidiennes et affines (qui sont étudiées partiellement dans notre enseignement secondaire en se limitant aux petites dimensions et au corps de base $\mathbb{R}$) et les célèbres géométries non-euclidiennes qui vous sont sans doute moins familières. Les géométries de TITS les plus remarquables sont liées à des groupes qui permettent de les reconstruire et les groupes les plus remarquables sont souvent liés de même à des géométries.

Songez au cas de l'espace euclidien E^3 et de son groupe de déplacements G. Connaissant E^3 et sa structure, constituée de points, droites, plans, parallélisme, orthogonalité, sphères, etc, G apparaît comme le groupe des permutations des points qui conservent strictement les distances dans E^3 et l'orientation. Réciproquement, si le groupe de permutations G est connu, on peut reconstituer les droites, sphères, plans, orthogonalité, etc. Voyez-vous comment? Dans ce contexte, l'oeuvre par excellence de TITS est sa vaste théorie des immeubles dont il n'est pas possible de donner un aperçu sérieux dans cet article.

Jacques TITS est né à Uccle, le 12 août 1930. Son père est professeur de mathématiques et sa mère donne des leçons de piano. Son frère aîné a 7 ans de plus que lui et ses deux soeurs ont respectivement 4 et 1 ans 1/2 de plus. Très tôt, il apprend avec une facilité exceptionnelle. Tout ce que sa jeune soeur apprend lui est transmis par osmose. Dès lors il peut lire et écrire avant d'avoir 5 ans et il entre directement en 2ème année primaire à l'Ecole Decroly. De même, lorsque sa soeur entre en 1ère année du secondaire à l'Athénée d'Uccle, en septembre 1940, la mère insiste pour que Jacques fasse l'examen d'entrée. Il saute ainsi la 6e primaire et se retrouve en humanités à 10 ans.

A la table familiale, le frère aîné pose des questions de mathématiques au père. Jacques retient des bribes de conversation et reconstitue les faits. C'est ainsi qu'il maîtrise les équations du 2e degré à 9 ans, alors qu'il est en 5e primaire. En 1942, le frère aîné entre à l'Ecole Polytechnique. Jacques entend parler de "calcul différentiel et intégral". Il veut savoir comme toujours. Une référence qui fait autorité à l'époque est un traité en deux volumes de Ch. de la Vallée Poussin, le plus réputé des mathématiciens belges au début du siècle.

Craignant que Jacques, élève de 3e, ne se détourne de ses cours, le père lui interdit de lire ces livres. Le père tombe malade. Jacques en profite pour chiper les volumes convoités et bientôt il se rend au chevet du père en disant: "je sais".

Au mois d'avril 1943, le père meurt. Jacques comprend la pression économique pesant sur sa mère et sur la famille. Quelques mois plus tard, élève de 4e, il donne des explications à des copains de son frère, sur le cours de calcul différentiel et intégral de la 2e année en sciences appliquées.

A cette époque, l'U.L.B. est fermée et les étudiants se réunissent en petits groupes pour étudier. Plus tard, Jacques aide un camarade rhétoricien à préparer l'examen d'entrée en sciences appliquées. On est en septembre 1944 et Jacques, entré en 5e latin-math demande des nouvelles de son camarade à Monsieur Nootens, son professeur de mathématiques. Celui-ci le presse de présenter à son tour l'examen d'entrée durant la 2e session qui se fait en décembre 1944. C'est ainsi que Jacques se prépare à sauter les deux années terminales des humanités. Monsieur Nootens l'interroge en vue de le préparer. Un jour, voyant que son élève ignore tout de la trigonométrie sphérique, il lui prête un manuel d'environ 60 pages. Le lendemain, Tits lui rend le livre. Médusé, le professeur demande s'il ne veut pas l'étudier. Tits répond qu'il en a terminé l'étude. Il se borne à lire l'essentiel c'est-à-dire ce qui lui permet de reconstituer le reste. Il est reçu premier à l'examen d'entrée. Le 5 janvier 1945, l'U.L.B. rouvre ses portes. Tits entre en 1ère candidature en mathématiques, il a 14 ans.

Au bout de trois semaines, une première séance d'exercices a lieu en géométrie, pour le cours de Libois. C'est là que Tits rencontre Jean-Claude Piret qui deviendra son ami inséparable et son beau-frère. Libois fait circuler un paquet de fiches contenant chacune un énoncé et qui donne en principe du travail pour plusieurs séances de deux heures. Les étudiants retiennent l'un ou l'autre énoncé au choix et s'y attaquent. Le paquet parvient à l'équipe Tits-Piret. Tits s'en empare, examine les fiches une à une et murmure de temps à autre: "Oui, bien sûr". Piret qui a été fort bien préparé proteste et voudrait plus d'explications mais Tits poursuit. Il retient un seul problème, demeuré célèbre parmi les élèves de Libois. En voici l'énoncé.

> *Des bougies de longueurs $l_1, \ldots, l_n$ et de masses $m_1, \ldots, m_n$ sont dressées sur un plan horizontal et elles brûlent en même temps. Quel est le lieu du centre de gravité de ces bougies?*

Pouvez-vous résoudre ce problème?

Durant les examens, Tits ne travaille guère. Il a depuis longtemps maîtrisé toutes les matières et davantage. Il jouit d'une grande liberté alors que ses amis bûchent. Il aide sa soeur aînée entrée en 1ère Chimie, à assimiler le monumental cours de chimie.

A l'examen, Libois lui demande de passer ex-abrupto des quadriques étudiées dans le cours, aux cubiques dont il ne sait rien. Libois lui met la note maximale "20" après un moment d'hésitation mais Tits sort du local en disant: "Je suis busé".

Le cours de calcul différentiel et intégral des deux premières années est donné par Th. Lepage. Tits est attiré par cette branche. Une référence importante est le traité de Goursat en 3 volumes qui pousse bien au delà de ce que les cours couvrent à l'époque, en 3 ans. Tits maîtrise cette œuvre en 2ème candidature, alors qu'il n'a pas 16 ans. Mais il est quelque peu déçu par Lepage qui s'étonne en 1ère candidature, après 6 semaines de cours, que ce gamin vienne lui développer le projet de faire la candidature et la licence en deux ans au lieu de quatre.

En 2e candidature, Libois fait des leçons sur les groupes affins et projectifs de la droite. Il soumet des problèmes dont il n'a pas la solution, en graduant les difficultés. Tits les résout peu à peu. Voici le premier problème. Il peut paraître bien anodin. Pouvez-vous le résoudre?

> *Existe-t-il un groupe de permutations G d'un ensemble E de six éléments qui soit exactement 2-transitif c'est-à-dire que pour tout a, b, a', b' dans E avec $a \neq b, a' \neq b'$, il existe un et un seul $g \in G$ tel que $g(a) = a'$ et $g(b) = b'$?*

Pourquoi six éléments? Si K est un corps, les affinités de la droite sur K, à savoir les transformations $K \to K : x \to ax+b$ avec a, b dans K, $a \neq 0$, constituent un groupe strictement 2-transitif. Il existe des corps de 2,3,4,5 éléments mais pas de 6 éléments. Ceci motive le problème.

Libois reprend et amplifie ce thème en 1ère licence. Tits s'enfièvre et se lance dans un travail de recherche effréné durant un mois et demi. Ses proches craignent pour sa santé et Libois comprend la situation. Il découvre avec stupéfaction les résultats accumulés par son étudiant. Celui-ci a classé tous les groupes finis exactement n-transitifs avec $n \geqslant 2$ et il a développé une théorie qui est loin de se restreindre aux groupes finis. En outre, il est passé aux groupes d'affinités et de projectivités des espaces de dimension supérieure à un. LIBOIS apaise le volcan en déclarant que la première partie du travail sera l'objet du mémoire de licence et que le reste constituera le doctorat. Tout ceci conduit TITS au titre de licencié à 18 ans et à celui de docteur un an plus tard alors que la plupart des brillants licenciés (vers l'âge de 22 ans) mettent 4 à 6 ans pour achever un doctorat.

La 2ème licence ne lui a guère permis de faire de la recherche. Découvrant qu'il ne sait pas rédiger en raison du saut des années terminales en humanités, LIBOIS le forme sur le plan de la rédaction et de l'expression. La rédaction du mémoire de licence est recommencée cinq fois.

LIBOIS l'emmène à Paris pour un premier congrès international. Au premier abord, TITS ne découvre rien de particulier à Paris qu'on n'ait à Bruxelles. Il changera d'avis plus tard. Mais une déception l'attend après la présentation de ses résultats. Le grand algébriste Emil ARTIN (1898-1962) lui apprend que la classification des groupes exactement 2-transitifs et 3-transitifs finis a déjà été publiée par ZASSENHAUS en 1935. Mais la théorie érigée par TITS va beaucoup plus loin et son talent est aussitôt reconnu sur la scène internationale. Grâce à l'appui d'ARTIN il sera invité à faire un séjour d'un an comme chercheur au fameux institute of Advanced Study de Princeton où fleurit notamment EINSTEIN et où on cherchera vainement à le retenir malgré les perspectives éblouissantes qui lui sont ouvertes.

En attendant, LIBOIS conseille à TITS d'entreprendre l'étude des groupes de Lie et il lui recommande d'aller étudier à Zürich sous la direction de H. HOPF qui apparaît alors comme un des maîtres de la topologie.

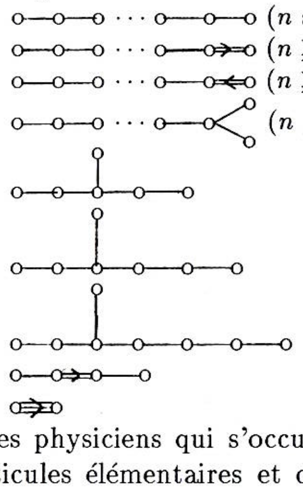
Le conseil de LIBOIS est sage. Plus tard, en 1973, DIEUDONNÉ écrit: "Les groupes de LIE sont devenus le centre des mathématiques; on ne peut rien faire de sérieux sans eux". Cette opinion sans doute un peu excessive témoigne néanmoins de la valeur du choix effectué. Il est exclu de donner ici, une définition technique des groupes de LIE. Jadis, on parlait plutôt de groupes continus. Les prototypes se situent en géométrie et en algèbre élémentaires. Ce sont des groupes tels que

1. le groupe des isométries de la droite, du plan, de l'espace, de la sphère, du cylindre circulaire illimité;
2. le groupe des similitudes de la droite, du plan, de l'espace, d'une vis conique;
3. le groupe des déplacements de la droite, du plan, de l'espace, etc.
4. les groupes $\mathbb{R}, +$; $\mathbb{R}_0, \times$; $GL(2, \mathbb{R})$; $GL(3, \mathbb{R})$.

En revanche les groupes $\mathbb{Q}, +$; $\mathbb{Z}, +$ et les groupes d'isométries des pavages ne sont pas continus. Un groupe continu apparaît lui-même comme un espace possédant une dimension déterminée. Dans les exemples ci-dessus, les dimensions varient de 1 à 9. La dimension 9 est atteinte par $GL(3, \mathbb{R})$ dont les éléments sont des matrices 3×3 et les 9 coefficients de chaque matrice sont les coordonnées de celle-ci dans l'espace du groupe.

Les groupes de LIE dits simples — en fait, une structure associée appelée algèbre de LIE — ont été classés en 1888-1890 par le mathématicien allemand W. KILLING (1847-1923) et son travail a été simplifié, corrigé et profondément prolongé par le Français Elie CARTAN (1869-1951). Dans un article du *Mathematical Intelligencer* (novembre 1989) l'Américain COLEMAN présente le travail de KILLING comme *"The greatest mathematical paper of all time"*. La théorie de KILLING ramène la classification à celle d'objets de plus en plus simples et au stade ultime, on est ramené à la classification de certains diagrammes appelés diagrammes de DYNKIN (1948) qui apparaissent chacun comme un véritable "chromosome" du groupe de LIE associé. En clair, le diagramme renferme un potentiel d'informations énorme qui permet de reconstruire le groupe, à condition de connaître les mécanismes de reconstruction. La liste des diagrammes de DYNKIN se présente comme suit:

A_n (n sommets, $n \geqslant 1$)
B_n ($n \geqslant 2$)
C_n ($n \geqslant 3$)
D_n ($n \geqslant 4$)
E_6
E_7
E_8
F_4
G_2



Les physiciens qui s'occupent de la théorie des particules élémentaires et de cosmologie sont des grands consommateurs de groupes de LIE. Dans les revues de haute vulgarisation vous découvrirez régulièrement des allusions aux groupes $SU(2)$, $SU(5)$, E_8 (entre autres) qui sont autant de groupes de LIE. A titre indicatif, le groupe de type E_8 est de dimension 248 et cet objet fabuleux "tient" dans le modeste diagramme du même type.

Dans le droit fil des travaux antérieurs de TITS mais avec une large ouverture sur des horizons nouveaux, HOPF le dirige vers le problème dit de HELMHOLTZ-LIE qui s'était étudié de 1868 à 1892 et qui consistait à donner une caractérisation commune des géométries euclidiennes et non euclidiennes en termes de leurs groupes de déplacements. Le même souci était à la base des travaux de KILLING.

En 1930, le grand mathématicien soviétique KOLMOGOROV (1903–1987) — père de la théorie moderne des probabilités — avait proposé une nouvelle approche du problème de HELMHOLTZ–LIE dans le cadre d'un espace topologique. TITS généralise le résultat de KOLMOGOROV et apporte des démonstrations complètes. Le groupe qui résulte des conditions posées au départ est un groupe de LIE et la classification de ceux-ci permet de dresser une liste exhaustive des espaces vérifiant ces conditions. TITS va développer ce thème dans diverses directions notamment celle d'univers homogènes pour la relativité générale.

Revenons à la liste des diagrammes de DYNKIN. Dès 1885, le Norvégien SOPHUS LIE (1842 – 1899) pouvait associer les groupes de type A_n, B_n, C_n, D_n à des objets géométriques comme les espaces projectifs, les quadriques projectives et des polarités. A titre d'exemple, le type A_2 est associé au groupe linéaire $GL(3,\mathbb{R})$ des matrices 3×3, à déterminant non nul et au groupe $PGL(3,\mathbb{R})$ des projectivités du plan projectif. Dans la liste, on observe qu'il y a 5 groupes isolés dits exceptionnels. Ces groupes furent construits par KILLING mais ils demeurèrent longtemps mystérieux malgré de nombreux travaux.

Il manquait notamment une interprétation géométrique. Cette question est le point de départ de la théorie des immeubles dont la naissance s'étend de 1953 environ à 1974 et qui sort presque tout entière du travail de TITS. Ce travail enrichit encore le potentiel des diagrammes de DYNKIN. Chacun de ceux-ci correspond à une famille de groupes, un groupe par corps (commutatif le plus souvent) et aussi à une géométrie ou immeuble, une par corps ou par groupe comme on l'entend. Les principales propriétés géométriques se lisent sur le diagramme ou sur une sorte de polyèdre associé qu'on appelle la géométrie de Coxeter du diagramme. De nombreux développements de la théorie ont eu lieu depuis 1974 et certains sont en cours, toujours sous la conduite de TITS. Au printemps de 1954, TITS dépose une monumentale thèse d'agrégation (268 pages imprimées) basée sur ses résultats concernant le problème de HELMHOLTZ-LIE et les premiers développements qui le conduiront vers les immeubles en 1961. La thèse circule au sein du jury et se perd... C'est TITS lui-même qui, au cours d'une entrevue auprès du Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale pour un motif tout différent, repère son précieux manuscrit. Au printemps de 1955, la publication de la thèse est décidée par l'Académie et le titre d'Agrégé est décroché la même année.

A l'U.L.B. la présence de ce jeune prodige de 25 ans ne fait pas que des heureux. Des mathématiciens plus âgés attendent leur tour pour devenir professeur. LIBOIS se bat comme un lion pour signaler les erreurs politiques dont TITS et la communauté scientifique sont les victimes. Finalement, TITS devient professeur en 1957 mais dans un contexte indigne de sa valeur. Lui, si attaché à Bruxelles et qui avait repoussé des offres américaines alléchantes, accepte en 1964 de devenir professeur à l'Université de Bonn, dans des conditions enfin excellentes, aux côtés de F. HIRZEBRUCH qui est un autre grand de notre époque, aujourd'hui directeur du Max Planck - Institut für Mathematik.

En 1975, il accède à la Chaire de Théorie des Groupes créée à son intention au Collège de France, un autre haut lieu de la science mondiale et il devient bientôt membre de la prestigieuse Académie des Sciences de Paris (1979).

Au cours d'un séjour de recherche à Rome en 1955, il loge comme tant de chercheurs belges à l'Academia Belgica. Il y fait la connaissance d'une jeune historienne, Marie-Jeanne DIEUAIDE, issue comme lui de l'U.L.B. Ils se marient en 1956 et constituent depuis lors un couple inséparable connu dans tous les milieux mathématiques internationaux. TITS est un orateur recherché, non seulement pour sa profonde compréhension des mathématiques mais aussi pour la rare capacité chez un tel savant, de se mettre toujours à la portée de son auditoire sans sacrifier la qualité de l'exposé. Il présente en effet, l'essentiel de façon claire, simple et ...souvent humoristique. Imaginez une assemblée de mathématiciens éclatant de rire durant ses exposés. Ce n'est pas rare. Sa gentillesse, sa modestie, son ouverture aux questions de collègues qu'il comprend à demi-mot et auxquelles il apporte souvent des observations décisives, ajoutent à son rayonnement exceptionnel.

Durant les années 1954-1958, les travaux de CLAUDE CHEVALLEY (1909–1984) permettent de remplacer la théorie des groupes de LIE par celle des groupes algébriques ce qui revient essentiellement à remplacer $\mathbb{R}$ (en fait $\mathbb{C}$) par un corps commutatif algébriquement fermé. Les immeubles ont leur origine et leurs principales applications dans la théorie des groupes algébriques. En collaboration avec A. BOREL et F. BRUHAT, TITS développe puissamment la théorie pour des corps quelconques (non algébriquement fermés) et plus spécifiquement pour les corps dits locaux. Ses contributions abordent de nombreux autres aspects de la théorie.

Une des performances mathématiques les plus spectaculaires de ce siècle est la classification complète des groupes simples finis, achevée en 1981 alors que dix ans auparavant personne n'aurait osé prédire qu'elle serait terminée avant 2020. Des centaines de chercheurs ont contribué à une démonstration dont la longueur était estimée à 10 000 pages (aujourd'hui déjà ramenées à 3000 pages, semble-t-il). TITS a contribué de plusieurs façons à cette oeuvre gigantesque. En construisant des groupes nouveaux grâce à ses idées géométriques (1956-1959). Ensuite, ses immeubles ont permis à ASCHBACHER qui fut le principal moteur du projet, de franchir somme toute assez facilement, l'un ou l'autre obstacle qui paraissait quasi insurmontable par la théorie des groupes seule. La classification conduit à 18 familles infinies et à 26 groupes isolés dits sporadiques dont le plus grand qu'on appelle le "Monstre" de FISCHER-GRIESS possède plus de 10^{54} éléments. Construit "à la main" par GRIESS, son étude fut fortement simplifiée par TITS.

De nouvelles aventures attendent certainement notre héros au pays des groupes et des géométries.

En nous mettant à 4, dépasserons-nous 7 ?

M. Pauly, M. Lardinois,
S. Lehman, Ph. Masson,
U.L.B. et U.Mons

Lors des Olympiades Mathématiques Internationales de 1989, la Mongolie a proposé le problème suivant:

Sept points sont donnés dans le plan. On veut les joindre par un nombre minimal de segments de sorte que parmi trois points quelconques deux au moins soient joints. Déterminer le nombre de segments que possède une telle figure, et en exhiber une.

Le problème résolu, nous nous sommes posés la question de savoir ce qu'il advenait si on considérait un ensemble de n points avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Voici le "fruit de nos recherches":

Appelons k le nombre minimum de segments partant d'un point et o un des points d'où partent exactement k segments. Notons alors S l'ensemble des k points reliés à o et T l'ensemble (comprenant $n-(k+1)$ éléments) des points qui sont différents de o et qui ne sont pas reliés à o.

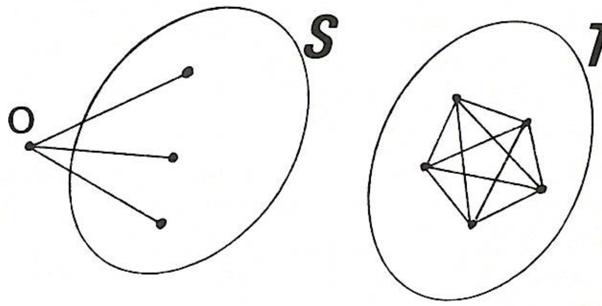


Figure 1

Comme o n'est relié à aucun point de T, tous ses points doivent être reliés deux à deux (sinon le triplet formé par o et deux points non liés de T ne vérifierait pas la condition de l'énoncé).

Et comme T comprend $n-(k+1)$, éléments nous sommes amenés à tracer $\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2}$ segments. Il faut leur ajouter les k segments reliant o aux points de S. Par l'hypothèse de minimalité sur k, si $k \geqslant 1$ chaque point de S doit encore être relié à au moins $(k-1)$ points différents de o, ce qui nous fournit au moins $\frac{k(k-1)}{2}$ segments supplémentaires. Si $F(n)$ désigne le nombre cherché, on obtient

$$\begin{aligned} F(n) &\geqslant \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2} + k + \frac{k(k-1)}{2} \\ &= k^2 - (n-2)k + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \left(k - \frac{n-2}{2}\right)^2 + \frac{n(n-2)}{4} \\ &= \frac{1}{4}[(2k+2-n)^2 + n(n-2)] \end{aligned}$$

donc

$$F(n) \geqslant \frac{n(n-2)}{4}$$

Il convient à présent de distinguer 2 cas selon la parité de n:

$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair}}$, considérons l'inégalité

$$F(n) \geqslant \frac{1}{4}n(n-2)$$

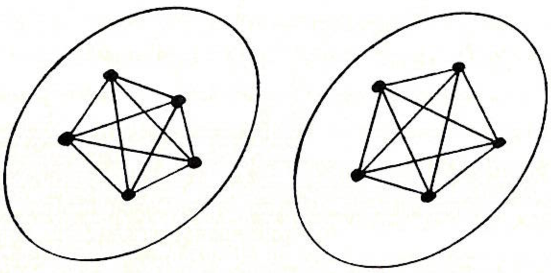


Figure 2

On peut atteindre l'égalité en divisant en deux sous-ensembles disjoints de cardinaux $\frac{n}{2}$ et en reliant tous les points à l'intérieur des deux sous-ensembles, comme indiqué sur la figure ci-dessus. Il est clair que tout triplet de points en contient au moins deux appartenant au même sous-ensemble et qui sont donc reliés. Le nombre de segments de la figure vaut

$$2\frac{1}{2}\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \frac{n}{2}.\frac{n-2}{2} = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Ce nombre est donc le minimum cherché :

$$F(n) = \frac{n(n-2)}{4}$$

$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair}}$, alors $(2k+2-n)^2 \geqslant 1$ donc

$$F(n) \geqslant \frac{1}{4}[1 + n(n-2)] = \frac{1}{4}(n-1)^2$$

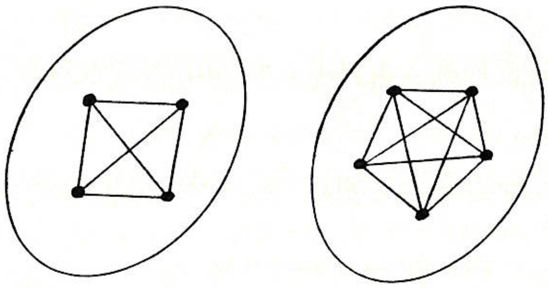


Figure 3

De manière analogue, l'égalité peut être atteinte en divisant P en deux sous-ensembles disjoints de cardinaux respectifs $\frac{n-1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ et en reliant tous les points en leurs intérieurs comme indiqué sur la figure ci-dessus. Ici aussi la condition de l'énoncé est satisfaite et le nombre de segments de la figure vaut

$$\frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right) + \frac{1}{2}\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right) = \frac{n-1}{2}.\frac{n-1}{2}$$

On a donc cette fois

$$F(n) = \frac{(n-1)^2}{4}$$

Conclusion

En comparant les deux formules trouvées on peut écrire

$$F(n) = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor.\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$$

où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plancher de (le plus grand entier inférieur ou égal à) x et le plafond de (le plus petit entier supérieur ou égal à) x.

Voici les premières valeurs de $F(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(n)	0	0	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30

Trois petits tours et puis s'en vont

M. Cnudde, *Institut du Sacré Coeur, Profondeville*

Il est bien connu que les indiens, tout comme les lapins d'ailleurs, vivent sur des territoires carrés et cela depuis l'invention des réserves naturelles et celle non moins ancienne des clapiers ... La surveillance de domaines d'une forme aussi particulière pose évidemment des problèmes vitaux aux chefs de tribus concernés. En effet, l'espace vital étant disponible en quantité limitée et les tribus nombreuses et prolifiques, il est impératif pour les chefs d'organiser un tour de garde efficace des frontières. Les ethnologues et les mathématiciens ont pris tout récemment ces comportements spécifiques pour objet d'études. Les premiers ont réalisé une enquête sur le terrain. Celle-ci a révélé une préférence très marquée pour la méthode de surveillance suivante:

Considérons un territoire carré dont nous appellerons r, s, t, u, les quatre sommets consécutifs. Le garde part d'un point i du territoire, il avance en ligne droite vers le sommet r. Arrivé à mi-distance de i et r, en j, il prend la direction de s. A nouveau, ayant accompli en k la moitié de la distance $|\ js\ |$, il bifurque de k vers t. Enfin depuis le milieu l de $[kt]$, il se dirige vers u et termine sa ronde au point de départ i.

Les mathématiciens quant à eux se sont penchés admirativement sur l'intuition géométrique spontanée des indiens. Ils ont soumis le problème à des spécialistes en herbe lors de la finale des Olympiades Mathématiques afin d'éclaircir un aspect mystérieux de ce comportement. En effet, comment l'indien fait-il pour savoir exactement d'où il doit partir pour être sûr de repasser par le point de départ? Suivons ici le raisonnement tenu par la plupart des finalistes lors de l'épreuve MINI.

Où le comportement nous donne les hypothèses ...

Commençons par nous mettre d'accord. Le brave indien tourne dans le carré dans l'intention bien claire de tenir les coins à l'oeil. Nous ne doutons pas un instant qu'il est consciencieux et que chaque angle est surveillé avec la même efficacité. De plus, nous le supposons sensible à la symétrie de son territoire. Aussi, à chaque arrêt,

(H1) sa position relative par rapport aux côtés et au sommet de l'angle visé sera la même.

Evidemment, rien de tout cela n'est dit dans la description de la méthode de surveillance. Mais, il faut avouer que cette hypothèse supplémentaire (H1) paraît raisonnable. La description de la méthode de surveillance nous livre en fait les seules hypothèses suivantes:

(H2) Le garde se dirige en ligne droite vers chaque sommet d'un carré avant de bifurquer vers le suivant.

(H3) Enfin, il bifurque à mi-parcours.

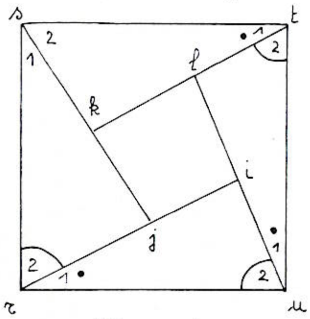


Figure 1

Dessinons approximativement un chemin $ijkl$ dans le carré $rstu$ qui satisfait les exigences de l'indien (Fig.1).

Voici comment les hypothèses nous permettent d'ajuster le dessin.

$$\begin{array}{ll} \widehat{u_2} = \widehat{t_2} & \textbf{(H1)} \\ \widehat{r_1} = \widehat{t_1} & \textbf{(H1)} \\ \hline \widehat{u_2} + \widehat{r_1} = \widehat{t_2} + \widehat{t_1} = 90^\circ & (rstu,\ \text{carré}\ ) \end{array}$$

Or, dans le triangle riu, on a : $\widehat{riu} + \widehat{u_2} + \widehat{r_1} = 180^\circ$. Donc, $\widehat{riu} = 90^\circ$.

Et comme $\widehat{liu} = 180^\circ$ (H2), on a : $\widehat{jil} = 90^\circ$

Par le même raisonnement,
$\widehat{ult} = \widehat{ilk} = 90^\circ$
$\widehat{tks} = \widehat{kji} = 90^\circ$
$\widehat{sjt} = \widehat{kji} = 90^\circ$
Autrement dit, les triangles ult, tks, sjr et riu sont rectangles et le quadrilatère $ijkl$ est un rectangle. Or, les triangles riu et ult sont isométriques.
Donc, $|ir| = |lu|$ et $\frac{1}{2}.|ir| = \frac{1}{2}.|lu|$. D'où, grâce à (H3),

$$|ij| = |li|$$

Par conséquent, le rectangle $ijkl$ est carré (Fig. 2).

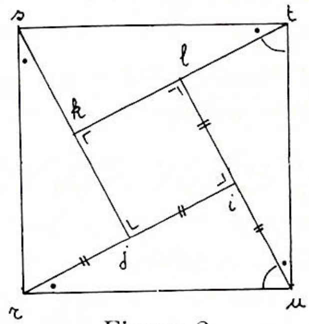


Figure 2

Mais par où commencer?

Pour l'indien, le problème principal n'est pas de connaître la forme du tour de garde mais bien de savoir par où il doit commencer sa marche.

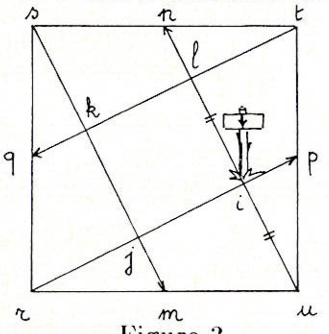


Figure 3

Prolongeons $[ri]$ jusqu'en p sur $[tu]$.
Dans le triangle ult, ip est parallèle à lt et i est milieu de $[lu]$. En raison du théorème de Thalès, p est milieu de $[tu]$.
Par un même raisonnement, on obtient les milieux des autres côtés en prolongeant les côtés du carré $ijkl$.
En ce qui concerne l'indien, s'il situe au préalable les milieux des côtés du territoire, nous comprenons maintenant qu'il n'aura aucune peine à construire son itinéraire de surveillance (Fig. 3).

Et si le territoire était un triangle?

Si le territoire est triangulaire, l'indien devra surveiller trois coins. Il effectuera un tour de garde triangulaire. Nous savons aussi que, se dirigeant en ligne droite vers chaque sommet, il s'arrête à mi-distance. Chaque sommet du périple est donc un milieu. Imaginons le problème résolu (Fig. 4).
Dessinons un triangle abc. Il indique le parcours de l'indien. Prolongeons, en tournant dans le même sens, chaque côté d'une longueur égale à celle de ce côté. En joignant les extrémités libres de ces nouveaux segments, nous obtenons le territoire xyz.

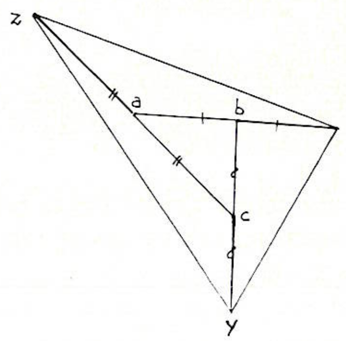


Figure 4

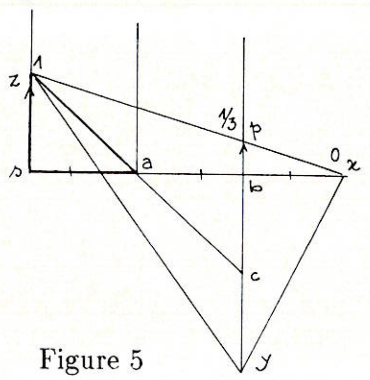


Figure 5

Essayons de trouver une propriété pour les sommets du triangle abc de manière à pouvoir construire le parcours, étant donné le territoire.
Construisons $S_a(abc) = asz$ (Fig. 5). Sur cette figure $[xs]$ est partagé en trois parties égales et yb est parallèle à sz. Projetons $[xs]$ sur $[xz]$ parallèlement à sz. L'image de b est p au tiers de la longueur de $[xz]$.
Autrement dit, les sommets b et c sont sur le segment joignant le sommet y au tiers du côté opposé. A l'aide d'un même raisonnement, nous tirons des conclusions analogues pour les sommets c, a et les sommets a, b.

Et si le territoire était un quadrilatère quelconque ou un polygone?

Maintenant, nous te laissons le plaisir de découvrir la solution puisque tu maîtrises la situation dans le cas du triangle quelconque.

Et si l'indien détenait un savoir supérieur ?

Le raisonnement que nous venons de suivre présente quelques inconvénients. Tout d'abord, il nécessite une hypothèse supplémentaire (H1). Ensuite, la généralisation des résultats en passant par le triangle quelconque peut être jugée périlleuse! Il suffit d'essayer pour s'en rendre compte. Aussi, nous te proposons de changer d'outils.

L'indien a peut-être utilisé la géométrie analytique.

En se référant à la figure 6 et en notant par x et y les coordonnées du point i, il aura aisément déduit les coordonnées des sommets du tour de garde.

$i\ (x; y)$

$j\ (\frac{x}{2}; \frac{y}{2})$

$k\ (\frac{x}{4}; \frac{y+2}{4})$

$l\ (\frac{x+4}{8}; \frac{y+6}{8})$

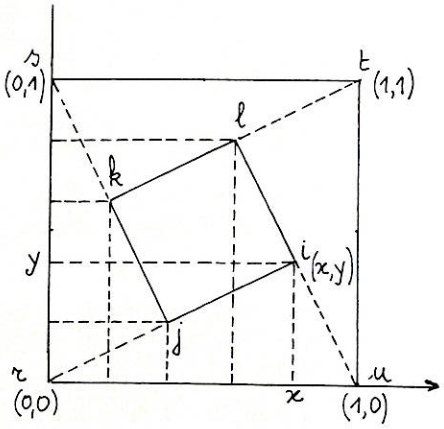


Figure 6

i étant le milieu de $[lu]$:

$$i \quad (\frac{x+12}{16}; \frac{y+6}{16}) \quad = \quad (x; y)$$

$$x = \frac{x+12}{16} \iff x = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{y+6}{16} \iff y = \frac{2}{5}$$

Ainsi donc, les coordonnées de i et j sont pour i: $(\frac{4}{5}; \frac{2}{5})$ et pour j: $(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$.

L'indien a peut-être composé des homothéties.

Centrons toute notre attention sur les seules hypothèses (H2) et (H3) contenues dans la description de la méthode de surveillance. En chaque point-carrefour, l'indien rejoint un autre point que nous pouvons considérer comme l'homothétique du premier. L'homothétie a pour centre le sommet vers lequel il se dirige et pour rapport $\frac{1}{2}$. Comme cette opération se répète quatre fois consécutivement à chaque tour, nous pouvons parler de la composée de quatre homothéties de même rapport dont les centres sont les sommets consécutifs du carré. Cette méthode fera l'objet d'un article dans le prochain numéro de la revue.

Le problème de Clyde Pangborn et Hugh Herndon

Aviateurs américains, les premiers à avoir traversé l'Océan Pacifique sans escale, entre Samishiro (Japon) et Seattle (USA), les 4 et 5 octobre 1931

M. Gillet, *Collège St Michel, Bruxelles*

Les villes de Pékin et de Denver (Colorado - USA) sont situées sur le 40ème parallèle nord, l'une à 115 ° de longitude est, l'autre à 105 ° de longitude ouest. Quelle est la longueur du plus court chemin possible entre ces deux villes si on voyage en avion? (Prendre pour rayon terrestre la valeur 6400 km). Comment déterminer cette trajectoire minimale sur le globe terrestre ou plutôt comment la repérer sur une carte? Nous t'invitons à réfléchir à ces questions et à te référer ensuite à la solution que nous décrivons dans cet article.

On rappellera ici que sur une sphère, le plus court chemin entre deux points est toujours un arc de grand cercle. Il faut donc calculer la longueur de l'arc de grand cercle défini, sur le globe terrestre, par les villes de Pékin et de Denver. Pour cela, nous calculerons d'abord la longueur du segment de droite [Pekin, Denver], passant par l'intérieur de la Terre (alinéas a et b de la solution ci-dessous), puis l'angle au centre et la longueur de l'arc de grand cercle sous-tendu par ce segment (alinéas c et d).

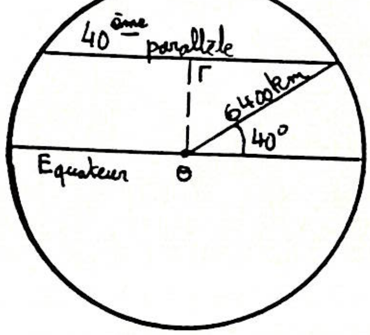


Figure 1
Section plane du globe terrestre, l'équateur étant vu de face.

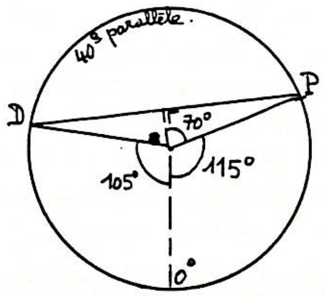


Figure 2
Le 40ème parallèle, vu par un observateur qui se trouverait au-dessus de l'axe Pôle Nord-Pôle Sud.

Solution:

- a) Rayon de cercle défini par le 40ème parallèle nord: $6400km.\cos 40\,°$ (voir Figure 1).
- Longueur du segment de droite dont Pékin et Denver sont les extrémités :

  $2 \times 6400\text{km}.\cos 40\,°.\sin 70\,° \cong 9214,0328\text{km}$

  (voir Figure 2).
- Valeur de l'angle au centre qui, sur un grand cercle, sous-tend une corde de 9214,0328km : $\sin\frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{4607{,}0164}{6400}$, d'où on tire $\hat{\alpha} = 92,083586\,°$ (voir Figure 3).
- En utilisant la formule du calcul de la longueur d'un arc de cercle, on obtient la réponse finale: $2\pi.6400\text{km}.\frac{92{,}083586}{360} = 10285,835\text{km}$.

On remarquera que si l'avion suit le 40ème parallèle entre Pékin et Denver, la longueur du trajet devient 11979,518 km.

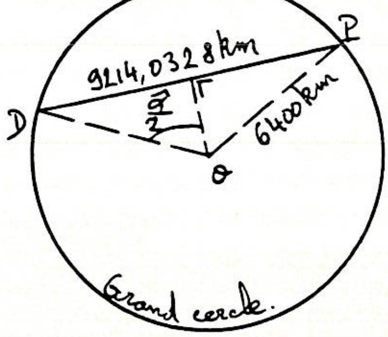


Figure 3
Le grand cercle passant par Pékin et Denver, vu perpendiculairement au plan qui le contient (o: centre de la terre).

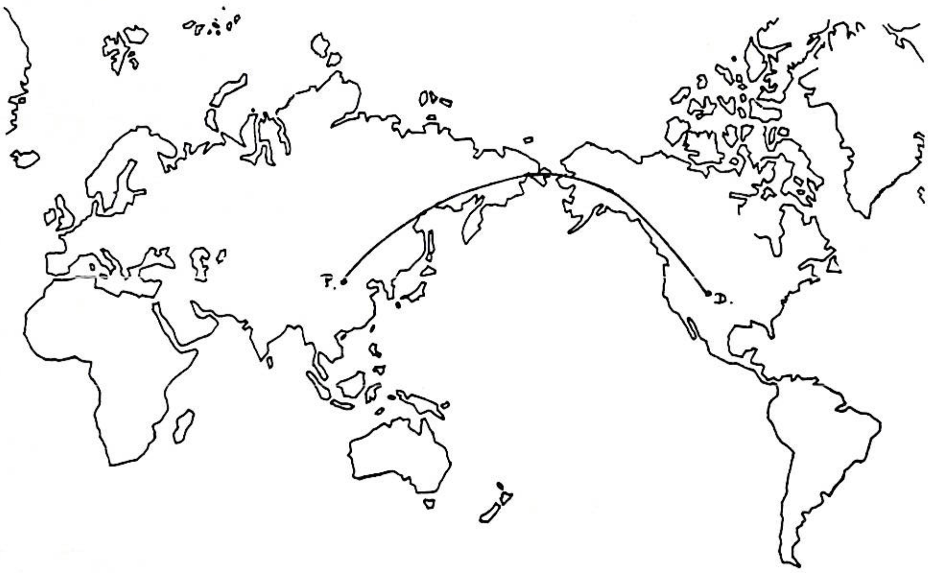


Figure 4

Mais il reste à déterminer sur une carte la trajectoire minimale entre les deux villes. Quel itinéraire les aviateurs doivent-ils suivre entre Pékin et Denver pour parcourir une distance minimale entre ces deux villes?

En recherchant sur une mappemonde les symétriques de Pékin et Denver par rapport au centre de la Terre, ce grand cercle se précise, surtout si on recherche intuitivement ses intersections avec l'équateur. Ce grand cercle passe par les points 65° Ouest 40° Sud, 75° Est 40° Sud, 85° Ouest 0° et 95° Est 0°. En l'imaginant sur un globe terrestre, on a l'impression qu'il passe par le détroit de Béring.

Les lois de la navigation orthodromique permettent de calculer sur une carte déterminée les coordonnées des points se trouvant sur la trajectoire la plus courte entre deux points quelconques donnés du globe terrestre. Pour obtenir cette carte, il faut imaginer une projection centrale, dont le centre est le centre de la Terre, de tous les points du globe terrestre sur le plan qui lui est tangent au pôle nord (PN) pour l'hémisphère boréal ou au pôle sud (PS) pour l'hémisphère austral ([1]).

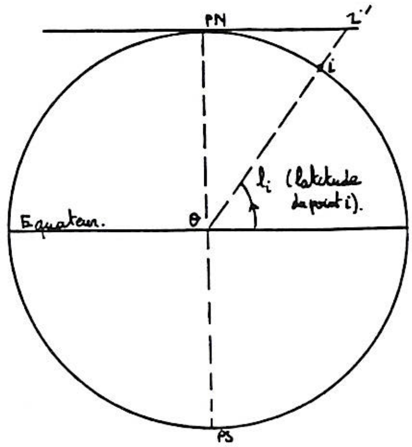


Figure 5

Schéma de la projection si on regarde la terre face à l'équateur.

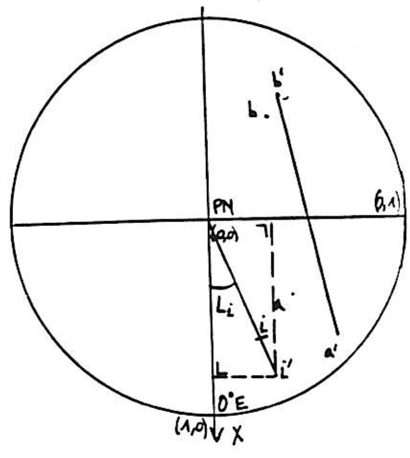


Figure 6

Schéma de la projection si on se place "au-dessus" de l'axe $PN - PS$. (Le cercle représente l'équateur vu "de haut"; cependant, l'équateur ne se trouve pas dans le plan de projection).

([1]) On utilise plus généralement la projection stéréographique, à savoir la projection à partir du pôle nord sur le plan tangent au pôle sud.

Cette projection a l'immense mérite de transformer chaque grand cercle (hormis l'équateur) en une droite, puisque o, centre de cette projection, est évidemment aussi centre de chaque grand cercle. En munissant d'un repère cartésien le plan sur lequel on projette, on pourra facilement calculer l'équation de la droite $a'b'$, obtenue par projection du grand cercle passant par deux points donnés a et b. (voir figure 6).

Mais quelles sont les coordonnées de l'image i' d'un point i, de longitude L_i et de latitude l_i, par cette projection centrale sur ce plan tangent au globe terrestre en PN ? Remarquons tout d'abord que la distance du point PN au point i' égale $R \operatorname{cotg} l_i$ (figure 5).

Les coordonnées de i' dans le plan tangent en PN sont dès lors $(R \operatorname{cotg} l_i \cos L_i, R \operatorname{cotg} l_i \sin L_i)$ (voir figure 6).

Si de plus, on prend pour unité de longueur le rayon terrestre, les coordonnées de i' deviennent $(\operatorname{cotg} l_i \cos L_i, \operatorname{cotg} l_i \sin L_i)$. Aussi, si les coordonnées des points a et b sur le globe terrestre sont respectivement (L_1, l_1) et (L_2, l_2), les coordonnées des points a' et b' seront $(\operatorname{cotg} l_1 \cos L_1, \operatorname{cotg} l_1 \sin L_1)$ et $(\operatorname{cotg} l_2 \cos L_2, \operatorname{cotg} l_2 \sin L_2)$

L'équation de la droite $a'b'$ est alors

$$y - \operatorname{cotg} l_1 \sin L_1 = \frac{\operatorname{cotg} l_1 \sin L_1 - \operatorname{cotg} l_2 \sin L_2}{\operatorname{cotg} l_1 \cos L_1 - \operatorname{cotg} l_2 \cos L_2}(x - \operatorname{cotg} l_1 \cos L_1)$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur du coefficient angulaire par $\operatorname{tg} l_1 . \operatorname{tg} l_2$, l'équation de la droite $a'b'$ devient:

$$y - \operatorname{cotg} l_1 \sin L_1 = \frac{\sin L_1 \operatorname{tg} l_2 - \sin L_2 \operatorname{tg} l_1}{\cos L_1 \operatorname{tg} l_2 - \cos L_2 \operatorname{tg} l_1}(x - \operatorname{cotg} l_1 \cos L_1)$$

Considérons à présent un point i quelconque sur l'arc de grand cercle $\overset{\frown}{ab}$. Dans ces conditions, $i' \in a'b'$ et les coordonnées $(\operatorname{cotg} l_i \cos L_i, \operatorname{cotg} l_i \sin L_i)$ du point i' vérifient l'équation de $a'b'$ donc, on a:

$$\operatorname{cotg} l_i \sin L_i - \operatorname{cotg} l_1 \sin L_1 = \frac{\sin L_1 \operatorname{tg} l_2 - \sin L_2 \operatorname{tg} l_1}{\cos L_1 \operatorname{tg} l_2 - \cos L_2 \operatorname{tg} l_1}(\operatorname{cotg} l_i \cos L_i - \operatorname{cotg} l_1 \cos L_1)$$

En transformant cette expression, on obtient:

$$\operatorname{cotg} l_i \operatorname{tg} l_2 \sin(L_i - L_1) + \operatorname{cotg} l_i \operatorname{tg} l_1 \sin(L_2 - L_i) = \sin(L_2 - L_1)$$

et finalement : $$\boxed{\frac{\operatorname{tg} l_2 \sin(L_i - L_1) + \operatorname{tg} l_1 \sin(L_2 - L_i)}{\sin(L_2 - L_1)} = \operatorname{tg} l_i}$$

En utilisant la fonction arctg, on obtient la latitude l_i en fonction de la longitude L_i. Dès lors, pour les différentes longitudes comprises entre deux points donnés sur la sphère terrestre, on peut calculer les latitudes correspondantes, et donc définir le grand cercle, ou plutôt l'arc de grand cercle, passant par les points donnés et correspondant à la plus courte distance possible sur la sphère entre ces points.

On remarquera que ce développement ne fait appel qu'à des notions mathématiques simples, à savoir: trigonométrie des triangles rectangles, équation de droite, formules d'addition d'arcs, calcul littéral. Il te reste à programmer cette jolie formule sur calculatrice ou sur ordinateur et à calculer le plus court chemin qui te mènera à tes prochaines vacances!

Références bibliographiques:

Hewlett-Packard HP 25, Programmes d'applications page 64.
Grand Atlas Bordas page 1.

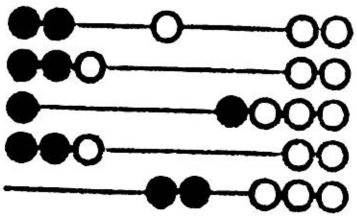
Math-Jeunes n ° 49, 14–17, 1990

C'est en 1976 que la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef) a créé, à l'initiative du professeur F. Buekenhout, une Olympiade Mathématique Belge ayant notamment pour but d'intéresser les élèves à la mathématique par le biais d'une compétition qui les passionne et fait appel à la créativité et à l'imagination.

L'Olympiade Belge est ouverte aux élèves de toutes les sections et de tous les niveaux du secondaire. Elle se subdivise en deux épreuves parallèles dénommées "Mini" (destinée aux élèves des trois premières années des humanités) et "Maxi" (destinée à ceux des trois dernières années). Elle comporte trois stades: une éliminatoire qui se déroule dans les écoles, une demi-finale qui regroupe environ 15% de l'effectif initial et qui se déroule dans dix centres régionaux et une finale à laquelle participent une cinquantaine d'élèves en "Mini" et en "Maxi". A l'issue de cette finale le jury retient une vingtaine de lauréats pour chacune des deux épreuves.

Afin d'encourager la participation d'élèves appartenant aux classes non terminales, la SBPM établit un classement séparé des élèves de 1ère, 2ème et de ceux de 4ème et 5ème. Les meilleurs de ceux-ci seront retenus en vue des demi-finales et finales, et des prix spéciaux sont prévus pour les meilleurs finalistes de ces classes. Le niveau de difficulté de l'éliminatoire MINI vise à la rendre accessible à des élèves de 1ère et 2ème année. N'hésite donc pas à t'inscrire quelle que soit ton année d'étude.

D'année en année la participation n'a fait que croître. Le nombre de participants qui était de 760 en 1976, de 3331 en 1981, de 11485 en 1986 atteignait le chiffre record de 18724 en 1990 avec 8236 participants et 296 écoles représentées en "Maxi" et 10488 participants et 281 écoles représentées en "Mini". Nous espérons battre ces records de participation en 1991.



P. Van Elsuwé

Les dates importantes pour l'Olympiade 1991 sont les suivantes:

- *Mercredi 23 janvier 1991 : éliminatoire*
- *Mercredi 27 février 1991 : demi-finale*
- *Mercredi 17 avril 1991 : finale*
- *Samedi 4 mai 1991 : proclamation des résultats.*

Note immédiatement ces dates dans ton agenda. Voici maintenant quelques conseils qui te permettront, je l'espère, de mieux réussir tes olympiades.

Avant l'éliminatoire:

- Demande à ton professeur de mathématique des questionnaires des olympiades précédentes.

  Tu peux également te procurer deux manuels qui reprennent les questions et les réponses des olympiades précédentes :

  ♠ **Olympiades Mathématiques Belges 1 (1976–1981)**

  ♠ **Olympiades Mathématiques Belges 2 (1982–1987)**

  Demande à ton professeur comment les obtenir.

- Lis attentivement les instructions ci-dessous. Ce sont celles que tu trouveras sur la première page de ton questionnaire.

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions.

4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par A, B, C, D et E. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cadre situé à droite du numéro de la question. Exemple: si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée par la lettre D, vous écrivez D à la question numéro 17, sur la feuille réponse. Chaque question possède une seule réponse correcte. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0, 999]$. C'est ce nombre que vous écrivez sur la feuille réponse.
6. *Règles de cotation: vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse.* Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous sentez que vous avez au moins une chance sur deux de bien tomber.
7. Ecrivez au crayon (si vous changez d'avis, gommez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. **Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisés**, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Quand le professeur donnera le signal, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire.
9. Couvrez les questions à l'aide de la feuille réponse retournée et inscrivez les informations demandées.
10. Quand votre professeur donnera le signal, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de *90 minutes*.

- Revois quelques notions importantes. Confectionne-toi quelques fiches de synthèse (attention: tu ne pourras les emporter avec toi le jour des olympiades, mémorise-les donc). A titre d'exemple voici quelques sujets possibles: produits remarquables, caractères de divisibilité, formules dans les triangles, formules de périmètre, d'aire et de volume, formules de trigonométrie, etc.

- Prépare ton matériel: papier quadrillé, papier millimétré, bic, crayon, gomme, latte, compas, rapporteur.

Pendant l'éliminatoire:

- Travaille calmement mais rapidement.

- Lis très attentivement les questions. Chaque mot a son importance.

- Les questions sont plus ou moins classées par ordre de difficulté croissante. Essaie donc de les résoudre dans l'ordre. Toutefois, si une question ne t'inspire pas passe sans tarder à la suite. Tu y reviendras éventuellement plus tard.

- Rappelle-toi que pour les questions sans réponse préformulée, la réponse est toujours un nombre entier compris entre 0 et 999. Par conséquent des réponses du genre -3, $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$, π, a, $\cos 30\,^{\circ}$ sont manifestement fausses.

Exemples de questions

Afin de te familiariser avec le genre de problèmes proposés, tu trouveras dans les pages suivantes quelques questions posées à l'éliminatoire et à la demi-finale de l'an dernier, ainsi que leurs solutions.

Les deux premières questions te montreront comment gagner du temps dans la résolution de certains problèmes. N'oublie pas que le facteur temps joue un rôle non négligeable à l'olympiade (30 questions en 90 minutes). Il s'agit donc pour toi de découvrir "l'astuce" permettant une solution rapide.

Pour te stimuler encore davantage à participer, je te signale les très beaux prix qui ont été attribués aux lauréats en 1990 : deux voyages aux Etats-Unis, un ordinateur, des calculatrices scientifiques de haut niveau, des livres et du matériel divers.

Je te souhaite dès maintenant bon amusement et bon succès le 23 janvier, date de l'éliminatoire dans ton école.

1. MINI ELIM. 90 Q.7
La somme $13 \times 56 + 77 \times 44 + 56 \times 77 + 44 \times 13$ vaut

ⓐ 1210 ⓑ 6900 ⓒ 9000 ⓓ 10000 ⓔ 12100

Au lieu de calculer les quatre produits et de les additionner ensuite, il sera plus rapide de procéder de la façon suivante:

$$\begin{aligned} 13 \times 56 + 77 \times 44 + 56 \times 77 + 44 \times 13 &= \\ = \ & 56(13 + 77) + 44(77 + 13) \\ = \ & 56 \times 90 + 44 \times 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 90(56+44) \\ &= 90 \times 100 \\ &= 9000 \end{aligned}$$

2. Mini D-F. 90 Q.11
Ecrit sous forme décimale, $2^{12} \times 5^8$ est un nombre de combien de chiffres ?

ⓐ9 ⓑ10 ⓒ11 ⓓ12 ⓔ13

Plutôt que de calculer 2^{12} et 5^8 et d'ensuite faire leur produit, il sera préférable d'observer que

$$\begin{aligned} 2^{12} \times 5^8 &= 2^4 \times 2^8 \times 5^8 = 2^4 \times (2 \times 5)^8 \\ &= 16 \times 10^8 = 1600000000 \end{aligned}$$

Par conséquent, le nombre $2^{12} \times 5^8$ contient 10 chiffres.

3. Mini Elim. 90 Q.12
La somme des nombres naturels de 1 à 999 vaut

ⓐ45000 ⓑ45000 ⓒ494010 ⓓ499500 ⓔ500500

Désigner par S la somme demandée. Nous avons

$$S = 1 + 2 + \ldots + 998 + 999$$

Mais aussi

$$S = 999 + 998 + \ldots + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons

$$2S = (1 + 999) + \ldots + (999 + 1)$$

Toutes les sommes entre parenthèses valent 1000 et il y en a 999. Par conséquent $2S = 1000 \times 999 = 999000$ et dès lors $S = 499500$.

4. Mini D-F. 90 Q.8
(Sans réponse préformulée) Le premier assemblage est formé de 6 allumettes. Chaque assemblage suivant s'obtient en ajoutant des allumettes pour former un carré supplémentaire (voir figure). Combien d'allumettes constituent le 17ème assemblage?

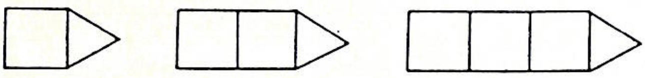


Figure 1

Le premier assemblage est formé de 6 allumettes. Pour passer d'un assemblage au suivant, il faut chaque fois ajouter 3 allumettes. Par conséquent le nombre d'allumettes du 17ème assemblage est de $6 + 16 \times 3 = 54$

5. Maxi D-F. 90 Q.6
Les points a et b sont distants de 5 unités. Combien de droites d'un plan donné contenant a et b sont à distance 2 unités de a et 3 unités de b?

ⓐ0 ⓑ1 ⓒ2 ⓓ3 ⓔplus de 3

L'ensemble des droites du plan situées à une distance de 2 unités du point a sont les droites tangentes au cercle C_1 de centre a et de rayon 2 unités. L'ensemble des droites du plan situées à une distance de 3 unités du point b sont les droites tangentes au cercle C_2 de centre b et de rayon 3 unités. Par conséquent, les droites répondant à la question sont les tangentes communes aux cercles C_1 et C_2. Comme ces cercles sont tangents extérieurement il y en a donc 3: D_1, D_2, D_3.

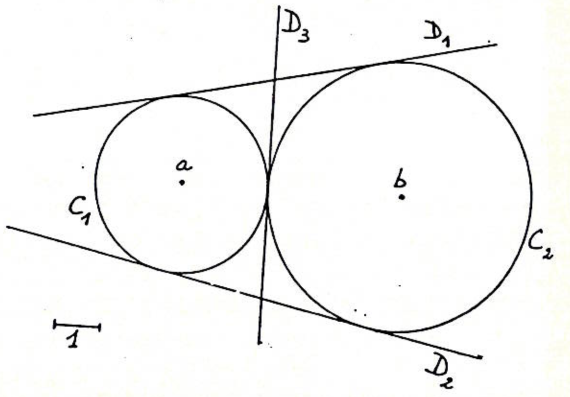
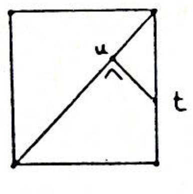


Figure 2

6. Mini Elim. 90 Q.17
Si l'aire du carré (fig. 3) vaut 128cm^2, t est le milieu du côté et tu est perpendiculaire à la diagonale, alors $|tu|$ vaut en cm,

ⓐ4 ⓑ$2\sqrt{2}$ ⓒ8 ⓓ$4\sqrt{2}$ ⓔImpossible à calculer



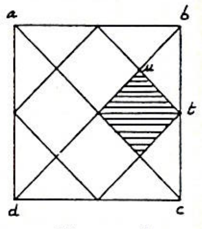


Figure 3 Figure 4

A l'olympiade, t'aider de quelques constructions peut parfois être une approche intéressante de résolution. Il est évident sur la figure 4 (et tu dois pouvoir le prouver) que l'aire du carré hachuré vaut $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré $abcd$. Par conséquent $|ut|^2 = 16\text{cm}^2$ et $|ut| = 4\text{cm}$.

7. Maxi Elim. 90 Q.28
Un bâtiment rectangulaire de 15m de long sur 6m de large est couvert par une toiture à quatre pans dont les angles de pente sont tous de 60° (la figure 5 donne une vue de haut). Que vaut, en m^2, l'aire de cette toiture?

ⓐ172 ⓑ175 ⓒ178 ⓓ180 ⓔ182

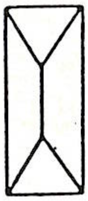


Figure 5

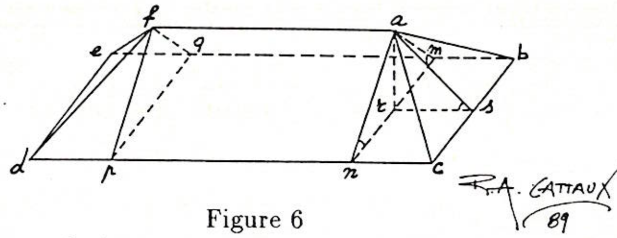


Figure 6

Nous avons: $|cd| = 15$m et $|bc| = |mn| = 6$m. Les plans $acdf$ et $bcde$ forment un angle de 60°. Dès lors l'angle $\widehat{anm}$ a une amplitude de 60°. Symétriquement, l'angle $\widehat{amn}$ a une amplitude de 60°.

Les plans abc et $bcde$ forment un angle de 60°. Dès lors l'angle $\widehat{ars}$ a une amplitude de 60°. Le triangle amn est équilatéral (deux angles ont une aplitude de 60°). Dès lors $|mn| = |an| = |am| = 6$m.

Les triangles rectangles arn et ars sont isométriques. Dès lors $|as| = |an| = 6$m et $|rs| = |nr| = 3$m.

Comme $|nc| = |rs|$, nous avons: $|af| = |cd| - 2|nc| = 9$m.

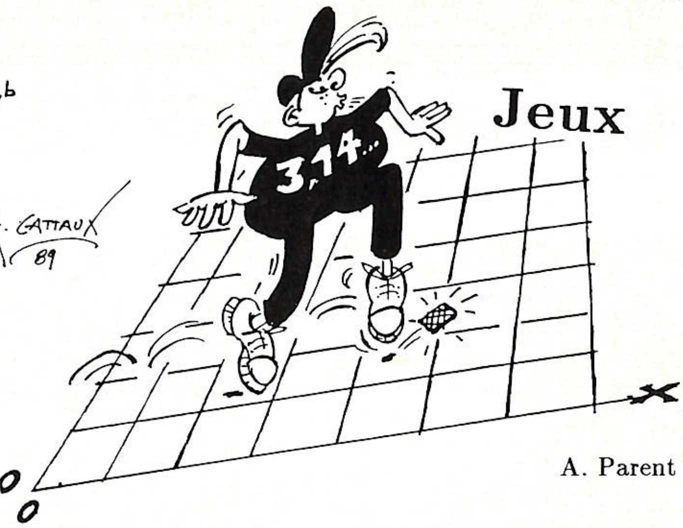
Par conséquent, l'aire du triangle abc vaut $\frac{|bc|.|as|}{2} = 18\text{m}^2$ et l'aire du trapèze $acdf$ vaut $\frac{(|af|+|cd|).|an|}{2} = 72\text{m}^2$.

L'aire de la toiture vaut donc 2.(aire abc + aire $acdf$) = 180m^2.

Grille à décoder: solution

1 E	2 D	3 U	4 C	5 A	6 T	7 I	8 O	9 N
9 N	3 U	10 S		11 P	3 U	12 R		7 I
10 S	6 T	1 E	12 R	7 I	13 L	1 E	10 S	
1 E		1 E	3 U		13 L		5 A	14 G
7 I	9 N		11 P	7 I	1 E	10 S		13 L
14 G	8 O	3 U	6 T	1 E		5 A	9 N	5 A
9 N	1 E		3 U	9 N	10 S		5 A	9 N
1 E	13 L	7 I	12 R	5 A	7 I	6 T		1 E
15 M		13 L	1 E		15 M		8 O	12 R
1 E	6 T	1 E		10 S	8 O	3 U	10 S	
9 N	8 O		6 T	5 A	9 N	6 T	1 E	10 S
6 T	7 I	12 R	5 A	14 G	1 E		12 R	3 U
	13 L	5 A	7 I	1 E		11 P	5 A	12 R
13 L	1 E	10 S	1 E		11 P	7 I	10 S	1 E

Jeux



A. Parent

Les auto-références

Le jeu-problème suivant est extrait des demi-finales du 1er Championnat de France des Jeux Mathématiques et Logiques. Intitulé "autoréférence", il consiste à compléter le cadre ci-dessous afin de rendre vraies les propositions.

Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 4

Nombres croisés (C.Parent)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement:
1. Puissance de 5 diminuée de 4
2. Nombre miroir
3. Multiple de 9
4. 2 retranché de la 3^e puissance d'un premier
5. Puissance de 3

Verticalement:
1. Palindrome
2. Puissance de 3
3. 16^e puissance
4. Juxtaposition de 3 chiffres et du produit de la somme des deux premiers par le troisième
5. Produit de trois nombres premiers consécutifs

La grille des moyennes

Dans la grille ci-dessous, chaque case vide est marquée du nombre moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes. Recherche ces nombres.

	11	5	
13			7
8			5
	12	3	

Grille à décoder (P.Malisse)

Chaque nombre est toujours associé à la même lettre. Pour faciliter tes recherches, trois lettres sont déjà décodées.

1 E	2 D	3 U	4	5	6	7	8	9
9	3	10	■	11	3	12	■	7
10	6	1	12	7	13	1	10	■
1	■	1	3	■	13	■	5	14
7	9	■	11	7	1	10	■	13
14	8	3	6	1	■	5	9	5
9	1	■	3	9	10	■	5	9
1	13	7	12	5	7	6	■	1
15	■	13	1	■	15	■	8	12
1	6	1	■	10	8	3	10	■
9	8	■	6	5	9	6	1	10
6	7	12	5	14	1	■	12	3
■	13	5	7	1	■	11	5	12
13	1	10	1	■	11	7	10	1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
			2	1					

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T

U	V	W	X	Y	Z				
3									

Mots croisés (P.Malisse)

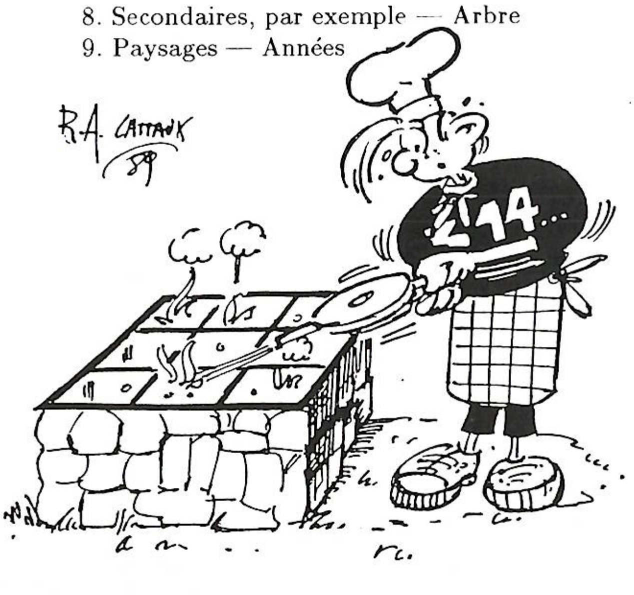
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2							■		
3		■					■		
4					■				
5			■						
6				■					■
7	■							■	
8							■		
9				■					

Horizontalement:

1. Les connaître est utile en mathématique
2. Vous en faites partie — Symbole chimique
3. Versant à l'ombre — Note
4. Le cours de math. peut vous le faire faire — Un moteur doit l'être
5. Préposition — Les meilleurs
6. Argile — Habitants
7. Nombreux en temps de pluie
8. 3 × 20 — A la mode
9. Détérioré — Crédules

Verticalement

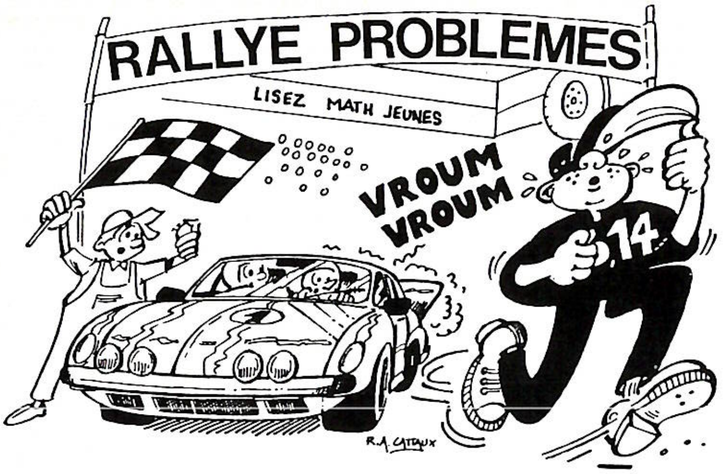
1. Accompagnent les hypothèses — Appris
2. Marque la surprise — Fabriques
3. Touchée — Y être c'est rêver
4. Zone sombre — Possède
5. Roue — Etendue d'eau
6. S'appliquera (s')
7. Déduits
8. Secondaires, par exemple — Arbre
9. Paysages — Années



Les nombres mystérieux

La bande dessinée ci-dessous est inspirée d'un problème paru dans *Jeux et Stratégie*. Peux-tu donner la réponse à la question posée par Mathieu ?

Math-Jeunes n ° 49, 20–20, 1990



C. Festraets

Le rallye-problèmes 1990-1991 comportera trois étapes publiées dans les numéros 49, 50, et 51 de Math-Jeunes. Dans chaque numéro, vous trouverez des problèmes plus spécialement destinés aux élèves des trois classes inférieures, ils sont numérotés m1, m2, ... m9; tandis que les problèmes destinés aux élèves des classes supérieures sont numérotés M1, M2, ... M9. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer sa solution de n'importe quel problème.

Les solutions des différents problèmes seront rédigées sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes interviendront dans le classement final. Veillez à ce que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées et à ce que figures et démonstrations soient sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 10 janvier à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles. Il ne sera pas tenu compte des envois tardifs.

m1. Est-il possible de remplir exactement un cube $6 \times 6 \times 6$ avec des briques $1 \times 2 \times 4$ (que l'on ne peut casser!).

m2. a et b étant deux nombres réels tels que $a + b > 0$, démontrer que

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Dans quel cas, a-t-on l'égalité ?

m3. Soit abc un triangle équilatéral et p un point intérieur. On abaisse de p les perpendiculaires ps, pt et pu sur les côtés du triangle, $s \in [bc]$, $t \in [ca]$ et $u \in [a, b]$. Démontrer que la somme $|ps| + |pt| + |pu|$ est constante quelle que soit la position du point p.

M1. On considère un échiquier $m \times n$. Pour quelles valeurs de m et de n est-il possible de le recouvrir entièrement (sans déborder) avec des dominos 4×1?

M2. Trouver (avec démonstration) le chiffre immédiatement à gauche et le chiffre immédiatement à droite de la virgule dans le développement décimal du nombre

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1990}$$

M3. a, b, c sont les mesures des longueurs des côtés d'un triangle. On pose $R = a^2 + b^2 + c^2$ et $S = (a + b + c)^2$. Démontrer que

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$$

Mots croisés: solution

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	T	H	E	O	R	E	M	E	S
2	H	O	M	M	E	S		T	I
3	E		U	B	A	C		U	T
4	S	U	E	R		R	O	D	E
5	E	S		E	L	I	T	E	S
6	S	I	L		A	M	E	S	
7		N	U	A	G	E	S		A
8	S	E	N	I	O	R		I	N
9	U	S	E		N	A	I	F	S

Solutions des jeux

Les nombres mystérieux

Liste des nombres : 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

Si Paul ne peut les trouver c'est que des produits sont égaux.

Recherche de produits égaux:

$$\begin{array}{r|l} 2 \times 6 = 12 & 3 \times 4 = 12 \\ 4 \times 4 = 16 & 2 \times 8 = 16 \\ 2 \times 9 = 18 & 3 \times 6 = 18 \\ 3 \times 8 = 24 & 4 \times 6 = 24 \\ 6 \times 6 = 36 & 4 \times 9 = 36 \end{array}$$

Comme Serge prétend les connaître, on peut éliminer les sommes égales :

$$\begin{array}{r|rl} 2 \times 6 = 12 & 2+6=8 & * \\ 3 \times 4 = 12 & 3+4=7 & \\ 4 \times 4 = 16 & 4+4=8 & * \\ 2 \times 8 = 16 & 2+8=10 & * \\ 2 \times 9 = 18 & 2+9=11 & * \\ 3 \times 6 = 18 & 3+6=9 & \\ 3 \times 8 = 24 & 3+8=11 & * \\ 4 \times 6 = 24 & 4+6=10 & * \\ 6 \times 6 = 36 & 6+6=12 & \\ 4 \times 9 = 36 & 4+9=13 & \end{array}$$

Restent ces quatre possibilités:

$$\begin{array}{r|r} 3 \times 4 = 12 & 3+4=7 \\ 3 \times 6 = 18 & 3+6=9 \\ 6 \times 6 = 36 & 6+6=12 \\ 4 \times 9 = 36 & +9=13 \end{array}$$

Paul n'est toujours pas capable de les trouver, il reste par conséquent à envisager les deux cas où les produits sont égaux:

$$\begin{array}{r|r} 6 \times 6 = 36 & 6+6=12 \\ 4 \times 9 = 36 & 4+9=13 \end{array}$$

La dernière information de Serge précisant que les nombres sont différents permet de trouver la solution : 4 et 9.

Auto-références

Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4

Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4

La grille des moyennes

	11	5	
13	10	7	7
8	9	6	5
	12	3	

Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	1	5	6	2	1
2	2	9	5	9	2
3	8	0	5	8	6
4	2	4	3	8	7
5	1	9	6	8	3